

SAYISAL DEVRELER

Doç.Dr. Feza BUZLUCA
İstanbul Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

<http://akademi.itu.edu.tr/buzluca>
<http://www.buzluca.info>

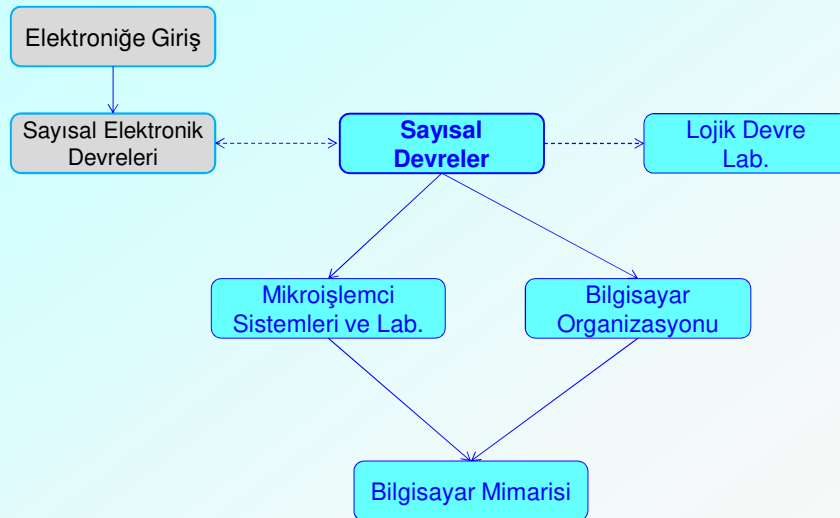


Sayısal Devreler Ders Notlarının Creative Commons lisansı Feza BUZLUCA'ya aittir.
Lisans: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.tr>



İTÜ Bilgisayar Mühendisliği Bölümündeki donanım derslerinin bağlantıları

Sayısal devreler bölümdeki diğer donanım dersinin temelini oluşturmaktadır.

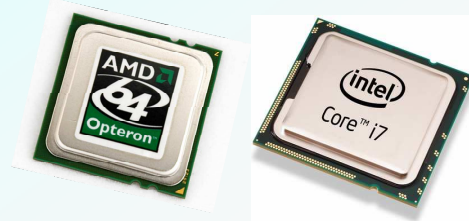


Sayısal devrelerin kullanım yerleri:

Günümüzde çevremizde gördüğümüz nerdeyse tüm elektronik cihazlar sayısal devreler içerirler.

Örnekler:

- Merkezi işlem birimi (CPU): Eş zamanlı ardışıl devredir.
Bu tür sayısal devreleri dersin ikinci bölümünde inceleyeceğiz.
- Bilgisayar bellekleri: Belleklerin yapı taşlarını oluşturan "flip-flop" ve tutucu (latch) adlı sayısal devre elemanlarını bu ders kapsamında göreceğiz.
- Ev elektroniği: TV, çamaşır makinesi kontrol birimi, ses ve görüntü cihazları
- Otomobiller: ABS, motor ateşleme denetimi
- Cep telefonları

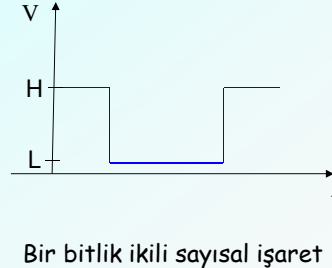
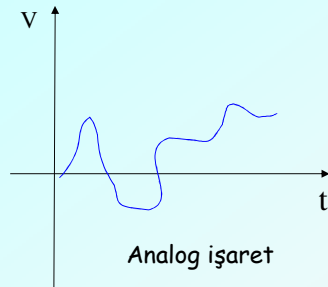


Analog - Sayısal (Dijital) İşaretler:

Gerçek dünyada karşılaştığımız bir çok fiziksel büyüklüğün (akım, gerilim, sıcaklık, ışık şiddeti vb.) değeri sürekli bir aralık içinde değişmektedir.

Sınırlar arasındaki her türlü olası değeri alabilen bu tür işaretlere **analog** işaretler denir.

İkili (binary) **sayısal** işaretler ise belli bir anda sadece olası iki değerden birini alabilirler: 0 - 1, yüksek - alçak, doğru - yanlış, açık - kapalı.



Bir analog işareti temsil edebilmek için bir bittenden daha fazla ikili sayısal işarete gerek duyulur.

Sayısal Sistemlerin Avantajları:

Eskiden analog sistemlerin kullanıldığı bir çok alanda günümüzde daha avantajlı olduğundan sayısal sistemler kullanılmaktadır.

Örnekler: Fotoğrafçılık, video, ses kayıtları, otomobil motorları, telefon sistemleri vb.

Sayısal Sistemlerin Avantajları:

• Bir sayısal sisteme aynı giriş kümesi defalarca uygulandığında hep aynı çıkış kümesi elde edilir.

Burada aynı giriş kümesinin uygulanması demek her defasında aynı değer dizisinin aynı sırada uygulanması demektir. Analog sistemler ise çevre koşullarından daha çok etkilenirler ve çıkışları değişkenlik gösterebilir.

• Sayısal tasarım (lojik tasarım) dayandığı matematiksel temeller açısından daha kolaydır. Ayrıca sayısal sistemleri test etmek ve hatalardan arındırmak da analog sistemlere göre daha kolaydır.

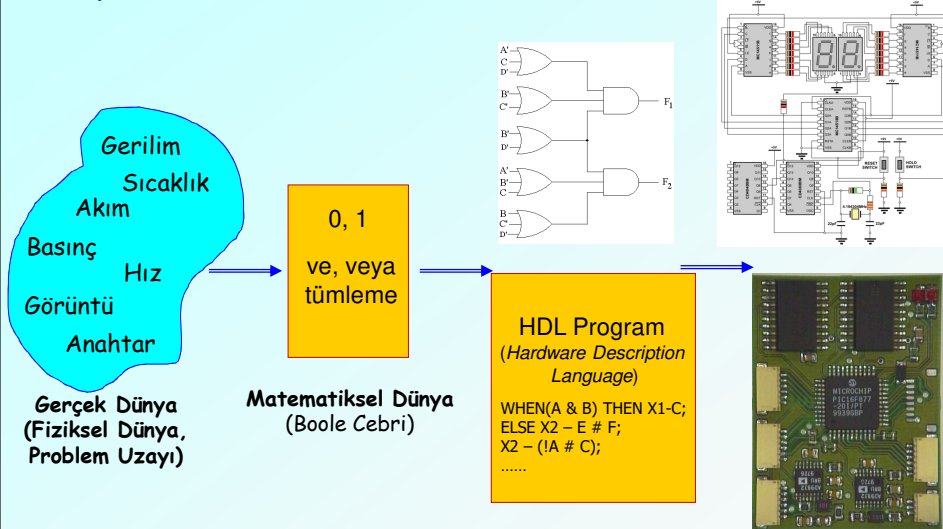
• Esneklik ve programlanabilirlik. Günümüzde sayısal sistemleri programlanabilir bilgisayarlar şeklinde gerçeklemek mümkündür. Bu sayede aynı tasarım yeni gereksinimlere göre yeniden programlanarak tekrar kullanılabilir.

• Sayısal verileri bilgisayar ortamında saklamak ve işlemek mümkündür.

• Sayısal sistemler daha hızlı çalışmaktadır.

• Sayısal sistemler küçülmekte ve ucuzlamaktadır.

• Sayısal sistemler gelişmeye devam ediyor.

Sayısal Devre Gerçekleme Aşamaları:

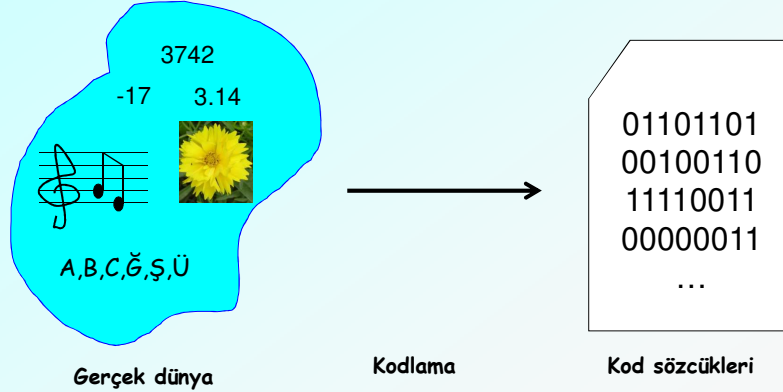
Modelleme,soyutlama Tasarım

Gerçekleme

İkili Sayısal Kodlama:

Sayısal sistemler ikili sayısal işaretler üzerinde işlemler yaptıklarından sadece iki farklı değeri işleyebilirler.

Bu nedenle sayısal devreler yardımıyla üzerinde işlem yapılacak olan fiziksel büyüklüklere (gerilim, sıcaklık vs.) ve her türlü veriye (harf, sayı, renk, ses) ikili sayılar karşı düşürülür.



Sayısal Kodlama (devamı):

n basamaklı (n bitlik "*Binary digit*") bir ikili sayı kullanarak 2^n tane farklı "şey" ifade edebiliriz.

Örneğin 8 basamaklı (8 bitlik) bir ikili sayı kullanarak 2^8 tane (256) farklı "şey" ifade edebiliriz.

Bunlar 256 farklı renk, 256 sembol, 0 ile 255 arası tamsayılar, 1 ile 256 arası tamsayılar, -128 ile +127 arası tamsayılar olabilir.

Bir ikili değer (Örneğin 10001101) ne anlama geldiğine o değeri kullanacak olan sistem (donanım ya da yazılım sistemi olabilir) ya da kişi belirler.

Bu değer bir sayı da olabilir, bir renk de.

Özellikle sayıların kodlanması büyük önem taşır.

Bu nedenle derste sayıların kodlanmasına ilişkin temel bilgiler verilecektir.

BCD (Binary Coded Decimal) İkili kodlanmış onlu sayılar:

0-9 arasındaki rakamlara 4 bitlik bir ikili kod karşı düşürülür.

Doğal BCD:

Sayı:	Kod:	Sayı:	Kod:	Örnek:
0:	0000	5:	0101	Sayı: 805
1:	0001	6:	0110	Kod:1000 0000 0101
2:	0010	7:	0111	
3:	0011	8:	1000	
4:	0100	9:	1001	

Artıklı kodlamadır. Çünkü 4 bit ile 16 farklı kodlama yapılabilmekte ancak bunlardan sadece 10 tanesi kullanılmaktadır.

BCD sayılar üzerinde işlem yapmak zor olduğundan günümüz bilgisayarlarında sayıları göstermek için bu kodlama kullanılmamaktadır.

Ağırlıklı Kodlama:

Bitlerin konumlarına birer ağırlık verilir.

Doğal ikili kodlama: Sayıların ağırlıklı kodlama ile 2 tabanında gösterilmesidir.

Örneğin: $11010 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 26$

Soldaki ilk basamağa yüksek anlamlı bit (*Most Significant Bit - MSB*)

Sondaki basamağa düşük anlamlı bit (*Least Significant Bit - LSB*) denir.

Bilgisayarlarda sayıları göstermek için doğal ikili kodlama kullanılır.

Hamming uzaklığı: n uzunluğundaki iki kod sözcüğünün arasındaki Hamming uzaklığı, o sözcüklerdeki aynı sırada olup değerleri farklı olan bileşenlerin sayısıdır.

Örneğin: 011 ile 101 arasındaki uzaklık 2 dir.

Richard Wesley Hamming (1915-1998) Matematikçi, ABD

Bitişik kodlar: Bir birini izleyen sayılara karşı gelen kodlar arasındaki uzaklık 1 ise o kodlama bitişiktir.

Ayrıca son sayı ile ilk sayı arasındaki uzaklık da 1 olursa kod **gevrimlidir**.

Örnek: Çevrimli bir BCD kodu (doğal BCD'den farklı)

Sayı:	Kod:	Sayı:	Kod:
0:	0000	5:	1110
1:	0001	6:	1010
2:	0011	7:	1000
3:	0010	8:	1100
4:	0110	9:	0100

Gray Kodu: 2^n elemanlı bir küme için 2 tabanında **artıksız** ve **çevrimli** bir kodlama yapılırsa **gray kodu** elde edilir.

Örnek: 2 bitlik bir Gray kodu:

Sayı:	Kod:
0:	00
1:	01
2:	11
3:	10

Gray Kodunun patenti 1953'te Bell Laboratuvarında çalışan fizikçi *Frank Gray* tarafından alınmıştır.

Sayıların Bilgisayarda Gösterilimi

Bu derste tamsayıların gösterilimine ilişkin bilgiler verilecektir.

Kayan noktalı (*floating point*) sayıların gösterilimi Bilgisayar Mimarisi dersinde ele alınmaktadır (Bkz. <http://www.buzluca.info/dersler.html>).

Sayılar kodlanmadan önce **işaretsiz** ya da **işaretlili** sayılarla çalışılacağı belirlenmelidir. Çünkü işaretsiz ve işaretlili sayıların kodlanmasında farklı yöntemler kullanılmaktadır.

İşaretsiz (*Unsigned*) Tamsayıların Kodlanması:

Bilgisayarlarda işaretsiz tamsayıların ifade edilmesinde "doğal ağırlıklı ikili kodlama" kullanılır.

Örnek: $215_{10} = (1101\ 0111)_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

$215/2 = 107$ kalan **1** (düşük anlamlı bit "*Least Significant Bit – LSB*") son basamak

$107/2 = 53$ kalan **1**

$53/2 = 26$ kalan **1**

$26/2 = 13$ kalan **0**

$13/2 = 6$ kalan **1**

$6/2 = 3$ kalan **0**

$3/2 = 1$ kalan **1**

$1/2 = 0$ kalan **1** (yüksek anlamlı bit "*Most Significant Bit – MSB*") ilk basamak

8 bit ile ifade edilebilecek en büyük işaretsiz tamsayı:

$1111\ 1111_2 = 255_{10}$

8 bit ile ifade edilebilecek en küçük işaretsiz tamsayı:

$0000\ 0000_2 = 0_{10}$

İşaretili (Signed) Tamsayıların Kodlanması:

Pozitif ve negatif sayıları ayırt etmek için ikili sayının ilk basamaktaki en yüksek anlamlı bitine bakılır.

"0" ile başlayan sayıların pozitif,

"1" ile başlayan sayıların negatif olduğu kabul edilir.

Pozitif sayıların kodlanmasında (işaretsiz sayılarda olduğu gibi) "doğal ağırlıklı ikili kodlama" kullanılır. Dikkat edilmesi gereken nokta sayının 0 ile başlamasıdır.

Buna göre 8 bit ile temsil edilebilecek pozitif işretili sayılar:

0000 0000 ile 0111 1111 arasında (yani 0 ile +127 arasında) değişecektir.

Negatif sayıların kodlanmasında **2'ye tümlleme** (2's complement) yöntemi kullanılmaktadır.

Bu yöntemde pozitif bir sayının 2'ye tümleyeni hesaplandığında o sayının negatif gösterilimi elde edilmiş olur.

Bir sayının 2'ye tümleyenini elde etmek için

- Önce sayı 1'e tümlenir, yani 0'lar 1, 1'ler 0 yapılır,

- 1'e tümlenmiş sayıya 1 eklenir.

2'ye tümleyen (A) = $\bar{A} + 1$ \bar{A} , 1'e tümleyeni göstermektedir.

2'ye tümlleme yöntemi aritmetik işlemlerde kolaylık sağladığı için tercih edilmektedir.

Negatif Sayılara Örnekler:

8 bitlik +5 ₁₀	: 0000 0101	4 bitlik +7 ₁₀	: 0111
1'e tümlleme	: 1111 1010	1'e tümlleme	: 1000
1 ekleme	: $\begin{array}{r} + \quad \quad 1 \\ \hline \end{array}$	1 ekleme	: $\begin{array}{r} + \quad 1 \\ \hline \end{array}$
Sonuç -5 ₁₀	: 1111 1011	Sonuç -7 ₁₀	: 1001

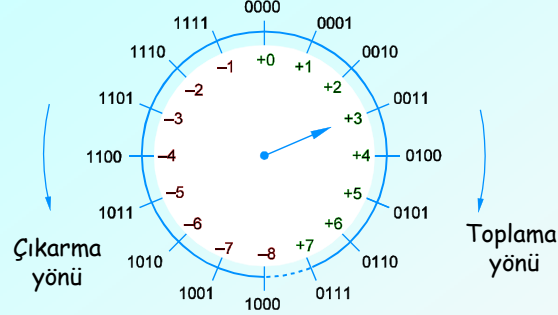
2'ye tümlleme işlemi bir sayının **işaretini değiştirmek** için kullanılır.

Bir negatif sayıya 2'ye tümlleme işlemi uygulandığında o sayının pozitif değeri elde edilmiş olur.

Negatif bir sayının pozitif yapılması:

8 bitlik -5 ₁₀	: 1111 1011
1'e tümlleme	: 0000 0100
1 ekleme	: $\begin{array}{r} + \quad \quad 1 \\ \hline \end{array}$
Sonuç +5 ₁₀	: 0000 0101

İşaretili sayılar bir grafik üzerinde gösterilebilir.
Aşağıda 4 bitlik sayılar gösterilmiştir.



4 bit ile ifade edilebilecek mutlak değeri en büyük negatif tamsayı

$1000 = -8$

Mutlak değeri en küçük negatif tamsayı $1111 = -1$

8 bit mutlak değeri en büyük negatif tamsayı $1000\ 0000 = -128$

Mutlak değeri en küçük negatif tamsayı $1111\ 1111 = -1$

İkili Sayıların Uzatılması (Sign Extension)

Sayısal sistemlerde ikili sayılar için belli uzunlukta yerler (bellek gözleri) ayrılır.

Bazı durumlarda daha az bit ile ifade edilebilen bir sayıyı daha büyük bir yere yazmak ya da daha uzun bir sayı ile işleme sokmak gerekebilir.

Bu durumda kısa olan sayı uzatılır.

Örneğin 4 bitten 8 bite veya 8 bitten 16 bite uzatma.

Uzatma işleminde sayının işaretsiz ya da işaretli olmasına göre farklı yollar izlenir.

İşaretsiz Sayılar: Sayının başına (yüksek anlamlı kısmına) gerektiği kadar sıfır '0' eklenir.

Örnek: 4 bitlik 3_{10} : 0011 8 bitlik 3_{10} : 0000 0011

Örnek: 4 bitlik 9_{10} : 1001 8 bitlik 9_{10} : 0000 1001

İşaretili Sayılar: Sayının başına (yüksek anlamlı kısmına) sayının işareti gerektiği kadar eklenir. Buna **işaret uzatma** (sign extension) denir.

Örnek: 4 bitlik $+3_{10} = 0011$ 8 bitlik $+3_{10} = 0000\ 0011$

Örnek: 4 bitlik $-7_{10} = 1001$ 8 bitlik $-7_{10} = 1111\ 1001$

Örnek: 4 bitlik $-1_{10} = 1111$ 8 bitlik $-1_{10} = 1111\ 1111$

16 Tabanının Kullanılması

Sayısal devrelerin yapıları 2'li sayıların kullanılmasını zorunlu hale getirmiştir.

Ancak 2'li sayıların yazılması ve okunması uzunlukları nedeniyle zor olmaktadır.

Bu nedenle kağıt üstündeki gösterilimlerde kolaylık sağladığı için 16 tabanında (hexadecimal) sayılar kullanılmaktadır.

2'li - 16'lı Dönüşüm:

- 2'li sayı 4 bitlik gruplar halinde yazılır,
- Her dördü için 16'lık karşılığı yazılır.

Örnek:

$$01011101_2 = 0101 \ 1101 \ (\text{İkili} - \text{Binary}) \\ = 5 \ D \ (\text{Onaltılı} - \text{Hexadecimal})$$

10 tabanına dönüşüm :

$$5D_{16} = (5 \times 16) + 13 = 93$$

$$\text{Sonuç: } 01011101_2 = 5D_{16} = 93_{10}$$

16 tabanındaki sayıları göstermek için genellikle \$ ve h simgeleri kullanılır.

Örnek: \$5D veya 5Dh.

Decimal Binary Hexadecimal

0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Sayısal Sistemlerde Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Bilgisayarlarda tamsayı aritmetik işlemleri Aritmetik/Lojik Birim (ALB) tarafından yapılır (Arithmetic Logic Unit - ALU).

Tamsayı toplama ve çıkarma işlemleri işaretersiz ve işaretli sayılar üzerinde aynı şekilde yapılır.

Ancak çıkan sonucun yorumlanması işaretersiz ve işaretli sayılarda farklı olmaktadır.

Farklı uzunluklarda sayılar ile işlem yaparken kısa sayının uzatılması gerekir.

Uzatma işlemi işaretersiz ve işaretli sayılarda farklı olur. (Bkz. 1.15)

Toplama:**İşaretsiz Tamsayılar:**

n bitlik iki işaretersiz sayının toplanması sonucu n+1 bitlik bir sayı oluşabilir. (n+1). bit **elde** (carry) adını alır.

Örnekler: 8 bitlik işaretersiz sayıların toplanması

$$\begin{array}{r} 01110101 : 117 \\ + 01100011 : 99 \\ \hline 11011000 : 216 \end{array}$$

Sadece sağlama için

Elde oluşmadı.
(Elde=0)

$$\begin{array}{r} 11111111 : 255 \\ + 00000001 : 1 \\ \hline 100000000 : 256 \end{array}$$

Sadece sağlama için

Elde oluştu. (Elde=1)

a	b	Elde Sonuç
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Toplama:**İşaretili Tamsayılar:**

İşlem işaretsiz sayılarda olduğu gibi yapılır. Ancak sonucun yorumlanması farklıdır. n bitlik işaretili iki sayının toplanması sonucu (n+1). bit oluşursa bu bit göz ardı edilir.

Örnek: 8 bitlik işaretili sayıların toplanması

$$\begin{array}{r} 11111111: -1 \\ + 00000001: +1 \\ \hline 10000000: 0 \end{array}$$

Göz ardı edilir. İşaret (+)

$$\begin{array}{r} 11111111: -1 \\ + 11111111: -1 \\ \hline 11111110: -2 \end{array}$$

Göz ardı edilir. İşaret (-)

Dikkat:

Eğer n bitlik sayılarla çalışılıyorsa işaret her zaman en yüksek anlamlı bit (sağdan sola doğru sayıldığında) n. bittir (n+1. değil).

Taşma (Overflow):

İşaretili sayılarda toplama sonucu oluşan değer n bit ile gösterilemeyebilir.

Örneğin 8 bit ile gösterilebilecek sayılar -128, +127 arasındadır. Oluşan sonuç bu aralığın dışına çıkıyorsa **taşma** oluşur.

Toplama sonucunda taşma olduğu toplanan sayıların ve sonucun işaretinden anlaşılır.

Toplamada iki durumda taşma oluşabilir:

poz + poz → neg ve neg + neg → poz

Örnek:

$$\begin{array}{r} 01111111: +127 \\ + 00000010: +2 \\ \hline 10000001: \text{Gösterilemiyor} \end{array}$$

İki **pozitif** sayı toplandı.

Sonuç **negatif** çıktı.

Taşma vardır.

Not: n+1. bit oluşmadı.

Bu bit göz ardı edilir.

$$\begin{array}{r} 10000000: -128 \\ + 11111111: -1 \\ \hline 10111111: \text{Gösterilemiyor} \end{array}$$

İki **negatif** sayı toplandı.

Sonuç **pozitif** çıktı.

Taşma vardır.

Not: n+1. bit oluştu.

Bu bit göz ardı edilir.

Çıkarma:

Bilgisayarlar, çıkarma işlemi için 2'ye tümele yönteminden yararlanırlar.

Çıkarma işlemi şu şekilde yapılır:

Çıkartılacak olan sayının işareti değiştirilip (2'ye tümlenip) birinci sayı ile toplanır.

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-B) \\ &= A + \overline{B} + 1 \end{aligned}$$

Böylece tek bir toplama devresi ile hem toplama hem çıkarma yapmak mümkün olur.

Toplama işleminde olduğu gibi, çıkarma işlemleri de işaretli ve işaretli sayılar üzerinde aynı şekilde yapılır.

Ancak çıkan sonucun yorumlanması işaretli ve işaretli sayılarda farklı olmaktadır.

Çıkarma (devamı):İşaretsiz Tamsayılar:

n bitlik iki işaretsiz sayı arasında 2'ye tümlen yöntemine göre çıkarma yapıldığında n+1. bit oluşursa sonuç geçerlidir, borç (borrow) yoktur.

Eğer n+1. bit oluşmazsa (sıfırsa) birinci sayı ikinciden küçüktür, **borç** vardır.

Örnekler: 8 bitlik işaretsiz sayılar ile çıkarma

$$\begin{array}{rcl} 00000101: 5 & & 00000101: 5 \\ - 00000001: 1 & \xrightarrow{2'ye\ tümleme} & + 11111111: -1 \\ \hline & & 100000100: 4 \end{array}$$

Elde oluştu: **Borç Yok**

$$\begin{array}{rcl} 00000001: 1 & & 00000001: 1 \\ - 00000101: 5 & \xrightarrow{2'ye\ tümleme} & + 11111011: -5 \\ \hline & & 011111100: \text{Borç (ilk sayı küçüktür)} \end{array}$$

Elde oluşmadı: **Borç Var**

Çıkarma (devamı):**İşaretli Tamsayılar:**

İşaretli tamsayılar arasındaki çıkarma da, işaretsizlerde olduğu gibi 2'ye tümleyen yöntemine göre yapılır.

Elde biti göz ardı edilir.

Toplamada olduğu gibi işaretli sayıların çıkarılmasında da taşma olabilir.

Çıkarmada iki durumda taşma oluşabilir:

poz - neg → neg ve neg - poz → poz

Örnek: 8 bitlik işaretli sayılar ile çıkarma

$$\begin{array}{r}
 00000101: 5 \\
 - 00001100: 12 \\
 \hline
 \end{array}
 \xrightarrow{2'ye\ tümleme}
 \begin{array}{r}
 00000101: 5 \\
 + 11110100: -12 \\
 \hline
 11111001: 2'ye\ tüm.: 00000111: -7 \\
 \text{İşaret } 1, \text{ sonuç } \textbf{negatif}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11111101: -3 \\
 - 01111111: 127 \\
 \hline
 \end{array}
 \xrightarrow{2'ye\ tümleme}
 \begin{array}{r}
 11111101: -3 \\
 + 10000001: -127 \\
 \hline
 10111110: Gösterilemiyor \\
 \text{İşaret biti } 0, \text{ Sonuç } \textbf{pozitif}.
 \end{array}$$

Neg - poz = poz. Taşma vardır.

Tamsayıların karşılaştırılması:

Tamsayıların karşılaştırılması için çıkarma işlemi kullanılır

$Z = A - B$, çıkarma işleminden sonra ilgili bayraklar (durum bitleri) kontrol edilir.

İşaretsiz Tamsayılar:

Borç	Z	Karşılaştırma
X (önemli değil)	=0	A=B
YOK (elde = 1)	≠0	A>B
VAR (elde = 0)	≠0	A<B

İşaretli Tamsayılar :

Taşma	Z	Karşılaştırma
X (önemli değil)	=0	A=B
YOK	Pozitif, ≠0	A>B
YOK	Negatif	A<B
VAR	Pozitif	A<B
VAR	Negatif	A>B

Eld (Carry), Borç (Borrow), Taşma (Overflow) Kavramlarının Özeti

Eld: İşaretsiz sayıların toplanmasında oluşabilir. Sonucun n bite sığmadığını, (n+1). bitin gerekli olduğunu gösterir.

Borç: İşaretsiz sayıların çıkartılmasında oluşabilir. Birinci sayının ikinciden küçük olduğunu, sonucun negatif çıktığını gösterir.

2'ye tümleyen yöntemine göre yapılan çıkarmada n+1. bit oluşursa borç yoktur.

Taşma: Sadece işaretili sayılar üzerinde yapılan toplama ve çıkarma işlemlerinde oluşur. Sonucun, ayrılan bit sayısı ile ifade edilemediğini gösterir.

Taşma olduğu, işleme giren sayıların ve sonucun işareti incelenerek anlaşılır.

Aşağıdaki durumlar oluştuğunda taşma var demektir:

poz + poz → neg

poz – neg → neg

neg + neg → poz

neg – poz → poz