

# Toán rời rạc và thuật toán

Đại học Khoa học Tự nhiên

Khoa Toán - Cơ - Tin học

Khoa học dữ liệu K4

Tháng 8 năm 2022

---

## Bài tập số 1

Nguyễn Mạnh Linh, Nguyễn Thị Đông, Triệu Hồng Thúy

### 1 Bài 1

- **Bài toán** được cấu tạo bởi hai thành phần cơ bản:
  - Thông tin vào (input): Cung cấp cho ta các dữ liệu đã có.
  - Thông tin ra (output): Những yếu tố cần xác định.
- **Thuật toán** là một dãy hữu hạn các thao tác đơn giản được sắp xếp theo một trình tự xác định dùng để giải một bài toán.
- **Giải bài toán bằng thuật toán** là quá trình từ thông tin đầu vào (input), dùng một dãy hữu hạn các thao tác đơn giản được sắp xếp theo một trình tự xác định để tìm được thông tin đầu ra (output) theo yêu cầu của bài toán đề ra.

### 2 Bài 2

#### 2.1 Chia để trị

##### 2.1.1 Ý tưởng

Phương pháp chia để trị dựa trên 2 thao tác chính:

- Chia (*divide*): phân rã bài toán ban đầu thành các bài toán con có kích thước nhỏ hơn, có cùng cách giải.
- Trị (*conquer*): giải từng bài toán con (theo cách tương tự bài toán đầu - đệ qui) rồi tổng hợp các lời giải để nhận kết quả của bài toán ban đầu.

Việc “Phân rã”: thực hiện trên miền dữ liệu (chia miền dữ liệu thành các miền nhỏ hơn tương đương 1 bài toán con)

### 2.1.2 Mô hình và lược đồ

Xét bài toán  $P$  trên miền dữ liệu  $R$ .

Gọi  $D\_C(R)$  là thuật giải  $P$  trên miền dữ liệu  $R$ .

Nếu  $R$  có thể phân rã thành  $n$  miền con:  $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$

Với  $R_0$  là miền đủ nhỏ để  $D\_C(R)$  có lời giải, ta có lược đồ giải thuật chia để trị như sau:

```

Divide_Conquer( $R$ ):
    if ( $R = R_0$ ):
        solve Divide_Conquer( $R_0$ )
    else
        divide  $R$  to  $R_1, R_2, \dots, R_n$ 
        for ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):
            Divide_Conquer( $R_i$ )
        Combine and get result
end

```

### 2.1.3 Phân tích và đánh giá

Để phân tích và đánh giá độ phức tạp của thuật toán, ta thực hiện 2 công đoạn

- Xây dựng công thức truy hồi đánh giá độ phức tạp thuật toán
- Giải công thức truy hồi xác định độ phức tạp thuật toán.
  - Phép thế liên tiếp
  - Sử dụng định lý chính

### 2.1.4 Ví dụ

Ta xét bài toán *tìm kiếm nhị phân trên một mảng được sắp xếp*.

- Cho dãy  $n$  phần tử được sắp theo thứ tự (*tăng dần*) và một giá trị  $x$  bất kỳ. Kiểm tra xem phần tử  $x$  có trong dãy không?
- Phân tích ý tưởng: so sánh giá trị  $x$  với phần tử giữa của dãy tìm kiếm. Dựa vào giá trị này sẽ quyết định giới hạn tìm kiếm ở bước kế tiếp là nửa trước hay nửa sau dãy.
- Lược đồ của thuật toán như sau:

```

BinarySearch( $a, x, L, R$ ):
    // Search element  $x$  in array  $a$  from position  $L$  to  $R$ 
    if ( $L = R$ ):
        return ( $x = a_L$  ?  $L$  :  $-1$ )
    else
         $M = (L + R)/2$ 
        if ( $x = a_M$ )
            return ( $M$ )

```

```

        else
            if (x < a_M)
                BinarySearch(a, x, L, R)
            else
                BinarySearch(a, x, M + 1, R)
            endif
        endif
    endif
end

```

*Tính đúng của thuật toán*

Ta chứng minh bằng quy nạp như sau

- Cơ sở quy nạp:  $n = R - L + 1 = 1$  (dãy có 1 phần tử)
  - Câu lệnh `return (x = a_L ? L : -1)` trả về giá trị  $L$  hoặc  $-1$
- Giả thiết quy nạp: Thuật toán đúng với mọi dãy có độ dài  $n = R - L + 1$ . Hay hàm `BinarySearch(a, x, L, R)` trả về đúng kết quả tìm kiếm  $x$  với mọi dãy có độ dài  $1 \leq n' \leq n = R - L + 1$
- Tổng quát: Chứng minh thuật toán đúng với  $n + 1 = R - L + 2$ 
  - Đặt  $M = (L + R + 1)/2$ , ta có  $L \leq M \leq R$
  - Nếu  $x = a_M$  thì kết quả trả về là  $M$ : đúng
  - Nếu  $x < a_M$  thì kết quả là của bài toán tìm  $x$  trong tập  $a_L, \dots, a_M$ . Theo giả thiết quy nạp thì `BinarySearch(a, x, L, R)` đúng vì  $1 \leq M - L + 1 = (R - L + 1)/2 + 1 \leq R - L + 1$
  - Tương tự với  $x > a_M$

*Độ phức tạp của thuật toán*

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{when } n = 1 \\ T(n/2) + 1 & \text{when } n > 1 \end{cases}$$

Do đó  $T(n) = O(\log n)$

Source code: [https://github.com/batman0911/dma\\_homework/blob/master/hw\\_01/src/main.ipynb](https://github.com/batman0911/dma_homework/blob/master/hw_01/src/main.ipynb)

## 2.2 Quay lui

### 2.2.1 Ý tưởng

Ý tưởng của phương pháp Quay lui (Back tracking): Theo nguyên tắc vét cạn (xét qua tất cả các trường hợp có thể xảy ra để tìm kết quả), nhưng chỉ xét những trường hợp “khả quan”.

Tại mỗi bước, nếu có một lựa chọn được chấp thuận thì ghi nhận lại lựa chọn này và tiến hành các bước thử tiếp theo. Còn ngược lại không có lựa chọn nào thích hợp thì quay lại bước trước.

Phương pháp quay lui được sử dụng để giải bài toán liệt kê các cấu hình:

- Mỗi cấu hình được xây dựng bằng cách xác định từng phần tử
- Mỗi phần tử được chọn bằng cách thử các khả năng **có thể**
- Độ dài cấu hình tùy thuộc bài toán
  - Xác định trước: sinh dãy độ dài  $n$
  - Không xác định trước: đường đi

### 2.2.2 Mô hình

Không gian nghiệm của bài toán (tập khả năng)  $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$  gồm các cấu hình liệt kê có dạng  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  cần được xây dựng:

- Cho  $x_1$  nhận lần lượt các giá trị có thể. Với mỗi giá trị thử gán cho  $x_1$  thì:
- Cho  $x_2$  nhận lần lượt các giá trị có thể. Với mỗi giá trị thử gán cho  $x_2$  thì xét khả năng chọn  $x_3, \dots, x_n, \Rightarrow$  cấu hình tìm được  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- **Tổng quát:** Tại mỗi bước  $i$ : Xây dựng thành phần  $x_i$ 
  - Xác định  $x_i$  theo khả năng  $v$ .
  - Nếu gặp điều kiện dừng ( $i = n$  hoặc  $x_i$  thỏa mãn điều kiện dừng) thì ta có được một lời giải, ngược lại thì tiến hành bước  $i+1$  để xác định  $x_{i+1}$
  - Nếu không có một khả năng nào chấp nhận được cho  $x_i$  thì lại lùi lại bước trước để xác định lại thành phần  $x_{i-1}$  – sự quay lui

### 2.2.3 Lược đồ

Lược đồ phương pháp quay lui như sau:

```

Try(i)  $\equiv$  //Sinh thành phần thứ  $i$  của cấu hình
    for ( $v$  thuộc tập khả năng thành phần nghiệm  $x_i$ )
        if ( $x_i$  chấp nhận được giá trị  $v$ )
             $x_i = v$ ;
            <Ghi nhận trạng thái chấp nhận  $v$ >;
            if (gặp điều kiện dừng) //  $i=n$  hoặc  $x_i$  thỏa mãn điều kiện dừng
                <xử-lí-nghiệm>;
            else //lời gọi sinh thành phần tiếp theo của cấu hình
                Try ( $i + 1$ )
            <Khôi phục trạng thái chưa chấp nhận  $v$ >;
        endif;
    endfor;
End.
```

Lời gọi ban đầu: Try(1)

### 2.2.4 Phân tích và đánh giá

Ta thực hiện 2 công đoạn phân tích và đánh giá thuật toán như sau:

- Công thức truy hồi

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n \leq 1 \\ dT(n-1) + 1 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

d: max (hoặc giá trị trung bình) lực lượng của tập khả năng của các thành phần nghiệm  $x_i$

- Giải công thức truy hồi:  $T(n) = O(d^n)$ 
  - Là trường hợp xấu nhất (vét cạn)
  - Trong triển khai thuật toán thời gian thực tế có thể giảm xuống  
for (v thuộc tập khả năng thành phần nghiệm  $x_i$ )  
if (  $x_i$  chấp nhận được giá trị v)

**Tính đúng của thuật toán:** Sự hiển nhiên trong tính đúng của thuật toán quay lui:

- Mỗi phần tử trong cấu hình nghiệm được chọn trong tập khả năng  
for (v thuộc tập khả năng thành phần nghiệm  $x_i$ )  
if (  $x_i$  chấp nhận được giá trị v)  
 $x_i = v$ ;
- Tính dừng của lời gọi đệ quy và cho ra kết quả đúng  
if (gặp điều kiện dừng) //i=n hoặc xi thỏa mãn dk dừng  
<xử-lí-nghiệm>;  
else //lời gọi sinh thành phần tiếp theo của cấu hình  
Try (i + 1)
- Đệ quy tiến Try(1)/ $x_1 \rightarrow$  Try(2)/ $x_2 \rightarrow \dots \rightarrow$  Try(m)/ $x_m$ 
  - Dủ thành phần nghiệm m=n (n - hữu hạn)
  - Đến thành phần thỏa mãn điều kiện tức là  $x_m$  thỏa mãn điều kiện nghiệm

### 2.2.5 Ví dụ

Ta xét bài toán *Liệt kê dãy k\_ary có độ dài n*

- Phân tích
  - Input: n, k
  - Output: Các dãy  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  trong đó  $x_i = 0, 1, \dots, k-1$
  - Dùng giải thuật Try(i) để sinh giá trị  $x_i$
  - Nếu i=n thì in giá trị nghiệm X, ngược lại sinh tiếp  $x_{i+1}$  bằng Try(i+1)

- Lược đồ giải thuật:

```

Try(i)  $\equiv$ 
  for (v=0..k-1) //v nhận giá trị từ 0 đến k-1
     $x_i = v$  ;
    if (i=n) printResult (X) ;
    else Try(i+1) ;
  endfor;
End.

```

Lời gọi ban đầu **Try(1)**

### 3 Bài 3

Trong bài này chúng ta sẽ xem xét bài toán đóng hàng toàn cục 2 chuỗi DNA sử dụng phương pháp quy hoạch động

This homework answers the problem set sequentially.

1. *Download the US Presidential Elections data set `uspresidentialelections.dta` from the course ILIAS site. Load the data set in R.*

Copy your R Code to answer the question here.

2. *Describe the dataset. What variables does it contain? How many observations are there? What time span does it cover?*

Please type your answer here.

Put the right R command here.

3. *Compute measures of central tendency and variability of the variables **vote** and **growth** using R. Use the numerical measures of central tendency and variability discussed in class. Describe them in your own words and make a nice table. Plot the distribution of both variables using a boxplot and histogram. Make sure to make your plots as nice-looking as possible. Especially, include a title and label the axes.*

Your answer goes here

3 R commands here

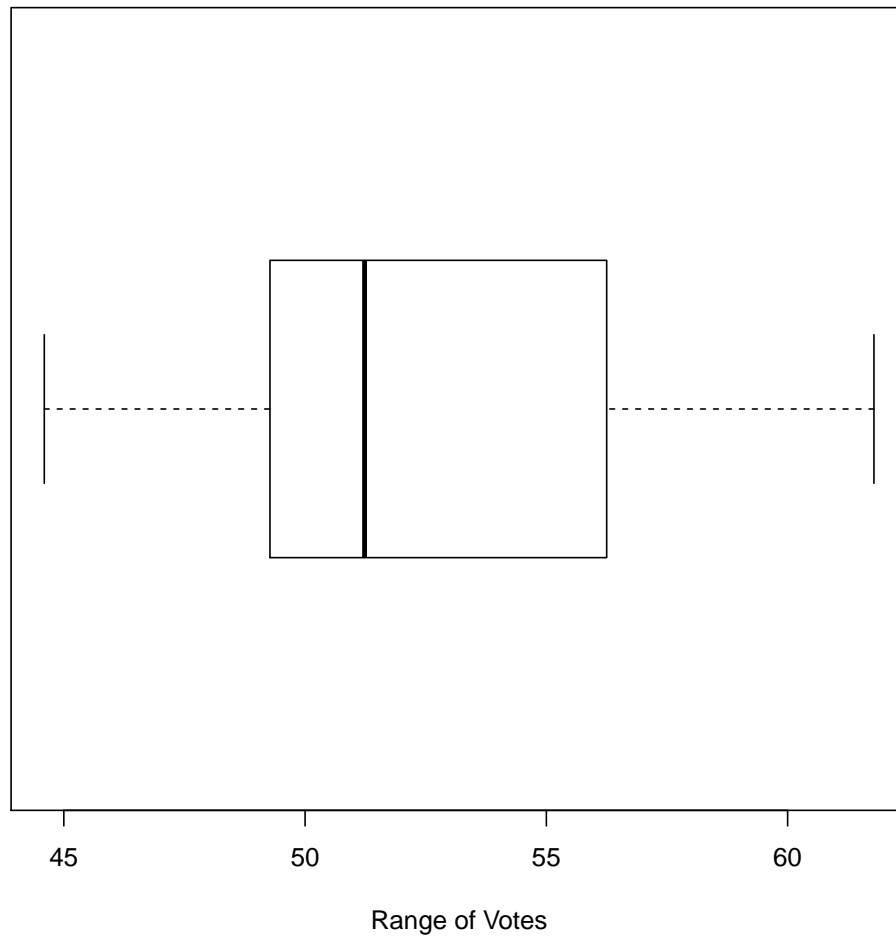
Potentially, your answer continues here.

4 R commands here

And more of your answer here.

And more space for your R commands.

```
# This is the code to produce the first boxplot.
pdf(file = "box1.pdf")
boxplot(us_data$vote, horizontal = T,
        main = "A Boxplot of the Variable Vote",
        names = "Vote",
        xlab = "Range of Votes")
dev.off()
```

**A Boxplot of the Variable Vote**

Hình 1: Boxplot of Incumbent Vote share

<b>Variable</b>	<i>Mean</i>	<i>Median</i>	<i>Mode</i>	<i>Var</i>	<i>SD</i>	<i>Range</i>	<i>IQR</i>
Vote	x	x	x	x	x	x	x
Growth	x	x	x	x	x	x	x

Bảng 1: Measures of central tendency and variability.



4. *Make a bar plot of the party affiliation of incumbent presidential candidates.*

Include the code for the bar plot and the plot here.

5. *During the presidential campaign in 1992, Bill Clinton's campaign coined the phrase "It's the economy, stupid!" Let's investigate the relationship between the economy and electoral success. Generate a nice-looking scatterplot of economic growth and vote share. Label the data points with the year of the election. Describe the pattern that you see in your own words.*

Include the code for the scatterplot as well as the plot here.

Then, describe the pattern you see. In the scatterplot we can see that...

## R-Code

Finally, copy and paste the entire script here.