

LUẬN VĂN THẠC SĨ

PHƯƠNG PHÁP TÌM KIẾM LÂN CẬN RỘNG THÍCH ỨNG CHO MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN ĐỊNH TUYẾN PHƯƠNG TIỆN

Đại học Quốc gia Hà Nội
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên
Khoa Toán-Cơ-Tin học

Giảng viên hướng dẫn: TS. Hoàng Nam Dũng

Học viên: Nguyễn Mạnh Linh

Mục lục

Danh sách hình vẽ	VI
Danh sách bảng.....	VII
Mở đầu	1
1 Định nghĩa và một số kí hiệu	4
1.1 Định nghĩa bài toán	4
1.1.1 CVRP	4
1.1.2 VRPTW	6
1.1.3 VRPPD	7
1.2 Mô hình toán học	8
1.2.1 Các mô hình cơ bản cho VRP	8
1.2.2 Mô hình cho biến thể VRPTW	12
2 Một số phương pháp cho VRP	16
2.1 Thuật toán chính xác	16
2.1.1 Phương pháp nhánh-cận	16
2.1.2 Quy hoạch động	16
2.1.3 Mô hình dựa trên dòng xe	17
2.1.4 Mô hình dựa trên dòng hàng	17
2.1.5 Mô hình phân hoạch tập hợp	19
2.2 Heuristics cổ điển	19
2.2.1 Thuật toán tiết kiệm	19
2.2.2 Phân cụm trước, định tuyến sau	20
2.2.3 Heuristics cải tiến	20
2.3 Metaheuristics	20
2.3.1 Tìm kiếm địa phương	21
2.3.2 Tìm kiếm quần thể	22
2.3.3 Cơ chế học	22
3 Phương pháp tìm kiếm địa phương	23
3.1 Tìm kiếm lân cận rộng	24
3.1.1 Thuật toán hủy	25
3.1.2 Thuật toán sửa	29
3.1.3 Tiêu chí chấp nhận nghiệm	31
3.2 Tìm kiếm lân cận rộng thích ứng	32
3.2.1 Lựa chọn phương pháp xóa và thêm lại	32
3.2.2 Điều chỉnh tham số tự động	32
3.2.3 Thêm nhiều khi chỉnh tham số tự động	33

3.2.4	Số lượng yêu cầu bỏ đi và thêm lại	34
3.3	Ứng dụng ALNS vào VRPTW	34
3.3.1	Các lớp chính	35
3.3.2	Triển khai thuật toán	38
4	Thực nghiệm và kết quả	40
4.1	Chất lượng nghiệm	41
4.1.1	Số lượng yêu cầu liệu nhỏ	41
4.1.2	Số lượng yêu cầu lớn và rất lớn	46
4.2	Hiệu năng thuật toán	55
4.2.1	Giá trị hàm mục tiêu	55
4.2.2	Số xe	58
4.2.3	Hiệu quả của thuật toán hủy khác nhau	61
4.3	Tần suất sử dụng thuật toán hủy, chèn	62
4.4	Kỹ thuật tăng nhiệt	64
	Kết luận	66
	Tài liệu tham khảo	67

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng luận văn này là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của TS. Hoàng Nam Dũng. Tất cả các số liệu, kết quả thực nghiệm được nêu trong luận văn này là trung thực và không sao chép từ bất kỳ nguồn nào khác. Các nghiên cứu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

Lời cảm ơn

Tôi xin dành lời cảm ơn sâu sắc tới những người đã đóng góp vào sự hoàn thiện của luận văn này.

Trước hết, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới TS. Hoàng Nam Dũng, người đã dành thời gian và kiến thức quý báu để hướng dẫn và hỗ trợ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và viết luận văn. Những góp ý, nhận xét và động viên của thầy đã giúp tôi vượt qua những khó khăn và thách thức trong quá trình nghiên cứu, giúp tôi phát triển không chỉ về kiến thức chuyên môn mà còn về kỹ năng và sự tự tin.

Tôi cũng muốn bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy cô trong khoa Toán-Cơ-Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội đã đào tạo và truyền đạt kiến thức cho tôi trong suốt quãng thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và những người thương yêu tôi đã luôn ở bên cạnh, động viên và hỗ trợ tôi trong suốt quãng thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thiện luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn!

Tóm tắt

Trong luận văn này, tác giả nghiên cứu mô hình toán học cho lớp các bài toán định tuyến xe (*Vehicle Routing Problem* - VRP). Các thuật toán liên quan được giới thiệu và phân loại xuyên suốt lịch sử hơn 60 năm phát triển của VRP. Thuật toán *Tìm kiếm lân cận rộng thích ứng* (*Adaptive Large Neighborhood Search*) được sử dụng để giải bài toán *Định tuyến xe với ràng buộc khung thời gian* (*Vehicle Routing Problem with Time Window* - VRPTW). Hai thuật toán hủy mới được tác giả phát triển giúp giảm nhanh số xe sử dụng và tăng hiệu năng khi xóa yêu cầu. Thêm vào đó, tác giả đề xuất một hiệu chỉnh cho ALNS được gọi là B-ALNS (*Boosted - Adaptive Large Neighborhood Search*). Các thuật toán được đánh giá trên các tập dữ liệu với số lượng yêu cầu từ nhỏ (100 yêu cầu) tới rất lớn (1000 yêu cầu). B-ALNS được chỉ ra có hiệu năng vượt trội so với ALNS (lên tới hơn 30%) và tiết kiệm tới 75% tài nguyên tính toán cho một số cấu hình trong khoảng thời gian nhất định. Ngoài ra, tác giả đưa ra gợi ý áp dụng ALNS, B-ALNS cho các tình huống thực tế với mục đích khác nhau.

Danh sách hình vẽ

1	VRP với 10 xe phục vụ 100 khách hàng (cấu hình Solomon C101).	2
1.1	Các bài toán, biến thể của VRP.....	4
2.1	Minh họa dòng hàng với $Q = 25$	18
3.1	Lược đồ LNS.	24
3.2	Lược đồ chính của ALNS.	35
3.3	Lớp thuộc tính của khách hàng.	36
3.4	Lớp trạng thái của khách hàng.	37
3.5	Lớp trạng thái của hệ.	37
4.1	Lớp các cấu hình.	40
4.2	Minh họa lời giải cho các lớp cấu hình.	40
4.3	Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình C1_10_1.	55
4.4	Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình R1_10_1.	56
4.5	Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình RC1_10_1.	56
4.6	Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình C1_4_1.	56
4.7	Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình R1_4_1.	57
4.8	Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình RC1_4_1.	57
4.9	Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình C1_10_1.....	59
4.10	Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình R1_10_1	59
4.11	Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình RC1_10_1.	59
4.12	Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình C1_4_1.....	60
4.13	Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình R1_4_1.....	60
4.14	Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình RC1_4_1.	60
4.15	Số xe theo thời gian với các thuật toán hủy khác nhau.	61
4.16	Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian với các thuật toán hủy khác nhau.	62
4.17	Trọng số của các thuật toán hủy.	62
4.18	Trọng số của các thuật toán chen.	63
4.19	Hàm mục tiêu theo thời gian với một số cách chạy khác nhau cho cấu hình R1_10_1 (<i>rh biểu thị cho các thuật toán áp dụng kỹ thuật tăng nhiệt</i>).....	65

Danh sách bảng

3.1	Tiêu chí chấp nhận nghiệm.	31
3.2	Tham số cập nhật trọng số.	33
4.1	Kết quả đo với tập Solomon C.	42
4.2	Kết quả đo với tập Solomon R1.	43
4.3	Kết quả đo với tập Solomon R2.	44
4.4	Kết quả đo với tập Solomon RC1.	45
4.5	Kết quả đo với tập Solomon RC2.	45
4.6	Kết quả đo với tập HG_C_1_2 200 yêu cầu.	47
4.7	Kết quả đo với tập HG_R_1_2 200 yêu cầu.	48
4.8	Kết quả đo với tập HG_RC_1_2 200 yêu cầu.	48
4.9	Kết quả đo với tập HG_C_1_4 400 yêu cầu.	49
4.10	Kết quả đo với tập HG_R_1_4 400 yêu cầu.	49
4.11	Kết quả đo với tập HG_RC_1_4 400 yêu cầu.	50
4.12	Kết quả đo với tập HG_C_1_6 600 yêu cầu.	50
4.13	Kết quả đo với tập HG_R_1_6 600 yêu cầu.	51
4.14	Kết quả đo với tập HG_RC_1_6 600 yêu cầu.	51
4.15	Kết quả đo với tập HG_C_1_8 800 yêu cầu.	52
4.16	Kết quả đo với tập HG_R_1_8 800 yêu cầu.	52
4.17	Kết quả đo với tập HG_RC_1_8 800 yêu cầu.	53
4.18	Kết quả đo với tập HG_C_1_10 1000 yêu cầu.	53
4.19	Kết quả đo với tập HG_R_1_10 1000 yêu cầu.	54
4.20	Kết quả đo với tập HG_RC_1_10 1000 yêu cầu.	54

Mở đầu

Từ xưa tới nay, giao vận luôn là một trong những ngành đóng vai trò quan trọng trong nền kinh tế. Giao vận và quản lý chuỗi cung ứng đóng vai trò là một cầu nối giữa các đơn vị sản xuất và người tiêu dùng. Nó cũng là một trong những ngành có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển của một quốc gia.

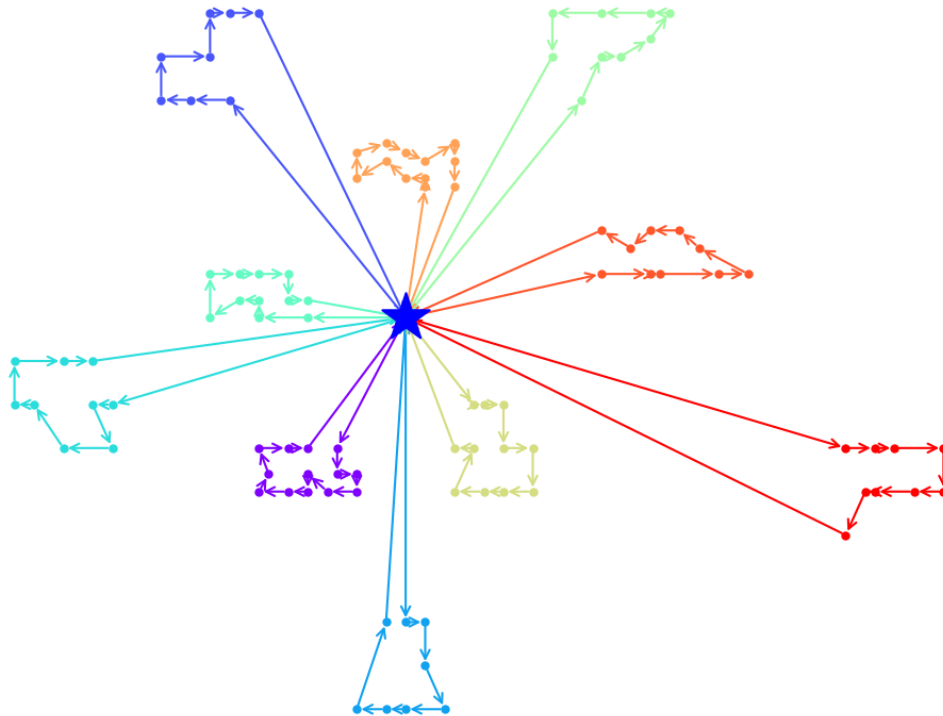
Từ những thập niên 90 của thế kỷ trước, thời kỳ bùng nổ của Internet đã thúc đẩy một hình thức bán hàng hoàn toàn mới, đó là bán hàng trực tuyến. Hàng loạt các sàn thương mại điện tử lớn ra đời, có thể kể đến như Amazon (Mỹ - 1994), Alibaba (Trung Quốc - 1999), Rakuten (Nhật Bản - 1997). Ngày nay các sàn thương mại điện tử này trở thành những công ty hàng đầu thế giới không chỉ ở lĩnh vực bán hàng mà là cả công nghệ. Việc phát triển vũ bão của các sàn thương mại điện tử dẫn đến số lượng hàng hóa được tiêu thụ trên toàn cầu tăng lên một cách đáng kinh ngạc so với bán hàng truyền thống. Logistic và quản lý chuỗi cung ứng là một trong những xương sống của thương mại điện tử cùng với *nền tảng công nghệ, nền tảng thanh toán* hay *chăm sóc khách hàng*... Để quản lý, giao vận số lượng đơn hàng lớn như vậy tới tay khách hàng, cách thức làm việc trong ngành logistic cũng phải thay đổi rất nhiều, áp dụng những công nghệ hiện đại hơn cách làm truyền thống.

Một trong những bài toán quan trọng nhất của logistic là bài toán vận tải hay định tuyến xe (hay người giao hàng). Với lượng xe có tải trọng hữu hạn, chúng ta cần định tuyến các xe này để giao hàng cho khách hàng ở các địa điểm khác nhau từ kho. Mục tiêu là tối ưu tổng quãng đường di chuyển của tất cả các xe để giảm chi phí vận hành. Lớp bài toán như vậy được gọi là *Vehicle Routing Problem - VRP*. Phiên bản đơn giản của VRP là TSP (*Travelling Salesman Problem*) hay bài toán người đưa hàng. Trong TSP, chúng ta có một người đưa hàng cần đi qua tất cả các địa điểm để giao hàng và quay trở về điểm xuất phát. TSP hay VRP là nhóm bài toán NP-hard, hiện tại người ta vẫn chưa tìm được lời giải chính xác trong thời gian đa thức. Tuy nhiên, với sự phát triển của các thuật toán hiện đại, chúng ta có thể tìm được nghiệm "gần" tối ưu cho nhiều bài toán NP-hard (có kích thước lớn) với chất lượng tương đối cao trong thời gian hợp lý.

VRP lần đầu tiên được giới thiệu bởi Dantzig, George B, Ramser và John H [11] năm 1959, rất sớm trước thời kỳ bùng nổ Internet những năm 90! Tuy nhiên, cho tới nay, VRP vẫn thu hút được sự quan tâm lớn từ cộng đồng những nhà toán học hay khoa học máy tính bởi tính ứng dụng cao của nó. Với nhu cầu giao vận cùng lượng khách hàng cần phục vụ ngày càng tăng của các doanh nghiệp, việc tối ưu hóa chi

phí vận hành là một vấn đề cấp thiết. Nhiều doanh nghiệp đã ứng dụng việc định tuyến tự động thay vì để tài xế tự tìm đường thủ công khi giao hàng như trước đây, thế nên việc tìm ra các tuyến đường "gần" tối ưu cần diễn ra nhanh chóng để tránh người giao hàng, hay lái xe phải chờ lâu để có được lộ trình cần thiết trước khi thực hiện giao hàng.

Trong luận văn này, tác giả nghiên cứu mô hình toán học của VRP cùng các biến thể của nó và các thuật toán giải quyết bài toán này. Tác giả sử dụng thuật toán ALNS (*Adaptive Large Neighborhood Search* - S. Ropke và D. Pisinger [36]) làm thuật toán cơ sở cho các thực nghiệm. ALNS được phát triển dựa trên LNS - *Large Neighbourhood Search* - Shaw [39] [40]. Hiệu năng và chất lượng nghiệm của ALNS được đánh giá trên các tập dữ liệu thực tế với số lượng yêu cầu (khách hàng) từ nhỏ tới rất lớn. Tác giả đề xuất một thuật toán hủy mới cho ALNS gọi là *Xóa tuyến tệ* (*Bad Route Removal*) giúp giảm số xe sử dụng một cách nhanh chóng. Thêm vào đó, tác giả cũng đề xuất một hiệu chỉnh cho việc tự động điều chỉnh trọng số lựa chọn thuật toán trong ALNS giúp tăng hiệu năng và tiết kiệm tài nguyên so với ALNS gốc một cách đáng kể, thuật toán được đặt tên là B-ALNS (*Boosted - Adaptive Large Neighborhood Search*). Trong thực nghiệm với tập dữ liệu rất lớn với 1000 yêu cầu, B-ALNS tiết kiệm đến 75% tài nguyên so với ALNS gốc, khi sử dụng cùng một lượng tài nguyên, B-ALNS đạt được kết quả tốt hơn ALNS gốc đến 30% trong thời gian chạy ban đầu của thuật toán.



Hình 1: VRP với 10 xe phục vụ 100 khách hàng (cấu hình Solomon C101).

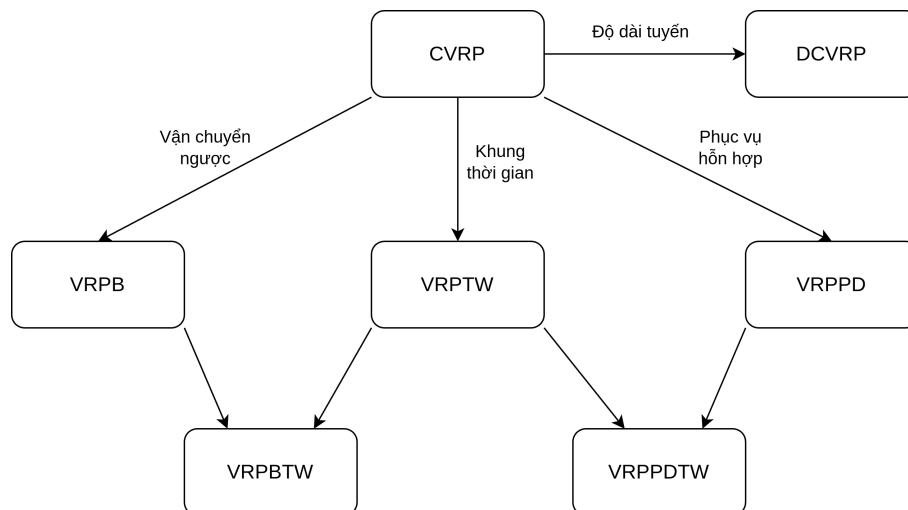
Các vấn đề được đề cập trong luận văn này được trình bày trong 4 chương. Phần mở đầu giới thiệu vấn đề nghiên cứu. Chương 1 phân loại các biến thể của VRP và đưa ra các định nghĩa cũng như mô hình toán học của chúng. Chương 2 giới thiệu khái quát một số phương pháp giải quyết VRP đã được nghiên cứu trước đó. Chương 3 trình bày phương pháp tìm kiếm lân cận rộng và thuật toán tìm kiếm lân cận rộng thích ứng. Ngoài ra, chương 3 cũng đưa ra cấu trúc chương trình và các lớp chính được sử dụng để triển khai thuật toán tìm kiếm lân cận rộng thích ứng giải VRP với ràng buộc khung thời gian. Chương 4 trình bày kết quả thực nghiệm và đánh giá hiệu năng của thuật toán. Phần kết luận tóm tắt lại các kết quả đạt được và đề xuất hướng phát triển trong tương lai.

Chương 1

Định nghĩa và một số kí hiệu

Trong chương này, chúng ta sẽ đưa ra định nghĩa chính tắc cho lớp các bài toán định tuyến xe. Các định nghĩa này được xây dựng theo ngôn ngữ của lý thuyết đồ thị được đưa ra bởi P. Toth và D. Vigo [43].

Các bài toán được mô tả thuộc lớp VRP (*vehicle routing problem*) bao gồm *định tuyến xe với ràng buộc tải trọng* - CVRP (*capacitated VRP*), *định tuyến xe với ràng buộc khung thời gian* - VRPTW (*VRP with time windows*), *định tuyến xe với lấy và giao hàng* - VRPPD (*VRP with pickup and delivery*).



Hình 1.1: Các bài toán, biến thể của VRP.

1.1 Định nghĩa bài toán

1.1.1 CVRP

Trước hết ta xem xét mô hình cho bài toán *nguyên bản*: bài toán định tuyến xe với ràng buộc tải trọng. Bài toán nguyên bản là CVRP mà không phải là VRP (không ràng buộc). Ta thấy rằng nếu không có bất kì ràng buộc nào thì một xe có thể phục vụ tất cả các yêu cầu và bài toán VRP sẽ trở thành TSP (*travelling salesman problem*). Ít nhất ràng buộc về tải trọng là thực tế và giữ cho mỗi xe chỉ phục vụ

được một số yêu cầu nhất định (trong trường hợp số yêu cầu không quá nhỏ cũng như tải trọng của xe là quá lớn).

Gọi $G = (V, A)$ là một đồ thị đầy đủ với $V = \{0, \dots, n\}$ là tập nút và A là tập các cung. Các nút $i = 1, \dots, n$ đại diện cho các yêu cầu hay khách hàng cần phục vụ, nút 0 là kho hàng. Đôi khi, kho hàng cũng được biểu diễn bằng nút $n + 1$.

Một số không âm được gọi là chi phí c_{ij} đại diện cho mỗi cung $(i, j) \in A$. Nói cách khác, c_{ij} là chi phí cần bỏ ra để di chuyển từ nút i tới nút j . Trong bài toán này và hầu hết các bài toán định tuyến, ta không định nghĩa cạnh (i, i) nên có thể gán $c_{ii} = \infty$ với $i \in V$.

Nếu đồ thị là có hướng thì ma trận chi phí c là bất đối xứng, khi đó ta có bài toán CVRP bất đối xứng ACVRP (*asymmetric CVRP*). Ngược lại, nếu $c_{ij} = c_{ji}$ với mọi $(i, j) \in A$ ta có bài toán CVRP đối xứng SCVRP (*symmetric CVRP*) và các cung của A được thay thế bằng tập các cạnh vô hướng E . Với một cạnh $e \in E$, ta gọi $\alpha(e)$ và $\beta(e)$ là nút bắt đầu và kết thúc của cạnh.

Đồ thị G phải là đồ thị liên thông và nhìn chung ta giả thiết đồ thị G là đầy đủ. Với một nút i , gọi $\Delta^+(i)$ là tập ra của i (*forward star*), được định nghĩa là tập các nút j mà cung $(i, j) \in A$, nói cách khác, đây là tập các nút có thể tiếp cận trực tiếp từ nút i . Tương tự như vậy, $\Delta^-(i)$ là tập vào của i (*backward star*), được định nghĩa là tập các nút j mà cung $(j, i) \in A$ hay là tập các nút tiếp cận trực tiếp tới nút i . Với một tập nút con $S \subseteq V$, gọi $\delta(S)$ là tập các cạnh $e \in E$ chỉ có một hoặc cả hai đầu mút thuộc S . Để thuận tiện, khi xét một nút $i \in V$, ta viết $\delta(i)$ thay cho $\delta(\{i\})$.

Trong hầu hết các bài toán thực tế, ma trận chi phí thỏa mãn bất đẳng thức tam giác

$$c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}, \quad \forall i, j, k \in V. \quad (1.1)$$

Nói cách khác, việc đi trực tiếp từ nút i tới nút j luôn tốn ít chi phí hơn là đi gián tiếp. Với nhiều thuật toán, bất đẳng thức tam giác là điều kiện cần, điều này có thể được đảm bảo bằng cách thêm một đại lượng dương lớn (hợp lý) vào chi phí của mỗi cung. Ta chú ý thêm rằng, nếu chi phí của mỗi cung thuộc đồ thị bằng với chi phí của đường đi ngắn nhất giữa hai đầu mút của cung thì ma trận chi phí thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Trong nhiều trường hợp, tập các nút nằm trên một mặt phẳng, vị trí của chúng được cho bởi tọa độ và chi phí c_{ij} của mỗi cung $(i, j) \in A$ là khoảng cách Euclide giữa hai điểm ứng với nút i và j . Khi đó, ma trận chi phí là đối xứng và thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Bài toán này được gọi là *Euclidian SCVRP*.

Mỗi khách hàng i có một nhu cầu (về tải trọng) là d_i và nhu cầu của kho $d_0 = 0$. Với một tập nút $S \subseteq V$, ta kí hiệu $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$ là tổng nhu cầu của tập.

Một tập hợp K đại diện cho các xe, mỗi xe có tải trọng C , các xe sẵn sàng ở kho tại thời điểm bắt đầu. Ta giả thiết $d_i \leq C$ với mỗi $i = 1, \dots, n$. Điều kiện này này là cần thiết để mỗi khách hàng đều được phục vụ. Mỗi xe phục vụ nhiều nhất một tuyến và ta giả thiết K không nhỏ hơn K_{min} với K_{min} là số xe ít nhất cần để phục vụ toàn bộ khách hàng.

Với một tập $S \subseteq V \setminus \{0\}$, ta gọi $r(S)$ là số xe ít nhất để phục vụ toàn bộ khách hàng thuộc tập S . Chú ý rằng $r(V \setminus \{0\}) = K_{min}$.

CVRP yêu cầu tìm một tập chính xác K các chu trình đơn (mỗi chu trình ứng với một tuyến đường) với tổng chi phí của tất cả các cung thuộc các chu trình này là nhỏ nhất. Lời giải phải thỏa mãn các ràng buộc sau

- (i) mỗi chu trình đều đi qua nút ứng với kho hàng;
- (ii) mỗi nút ứng với một khách hàng được đi qua bởi đúng một chu trình;
- (iii) tổng nhu cầu của các khách hàng trong mỗi chu trình không được vượt quá tải trọng của xe.

1.1.2 VRPTW

Bài toán định tuyến xe với ràng buộc thời gian - VRPTW (*VRP with time windows*) là một mở rộng của CVRP. Trong đó, ngoài ràng buộc về tải trọng cho mỗi xe, mỗi khách hàng i bị ràng buộc bởi một khoảng thời gian $[a_i, b_i]$ được gọi là khung thời gian hay cửa sổ thời gian (*time window*). Thời gian phục vụ khách hàng i là s_i . Thời gian di chuyển từ nút i tới nút j là t_{ij} với mỗi cung $(i, j) \in A$ hay t_e với $e \in E$. Ngoài ra nếu xe đến nút i sớm thì phải chờ đến thời gian a_i mới được phục vụ. Nếu xe đến nút i muộn hơn b_i thì khách hàng sẽ không được phục vụ.

Thường thì ma trận chi phí và ma trận thời gian di chuyển là như nhau, hơn nữa các xe được giả thiết đều xuất phát từ kho tại thời điểm 0. Ràng buộc thời gian dẫn tới việc mỗi tuyến đường là có hướng (có thứ tự đi đến các nút) ngay cả khi ma trận chi phí là đối xứng. Chính vì thế, VRPTW thường được mô tả như một bài toán bất đối xứng.

VRPTW yêu cầu tìm một tập chính xác K chu trình đơn với tổng chi phí là nhỏ nhất, thỏa mãn các ràng buộc sau đây

- (i) mỗi chu trình đều đi qua nút ứng với kho hàng;
- (ii) mỗi nút ứng với một khách hàng được đi qua bởi đúng một chu trình;
- (iii) tổng nhu cầu của các khách hàng trong mỗi chu trình không được vượt quá tải trọng của xe;
- (iv) với mỗi khách hàng i , thời gian bắt đầu phục vụ phải nằm trong khung thời gian $[a_i, b_i]$ và xe hoàn thành việc phục vụ sau khoảng thời gian s_i .

VRPTW là bài toán NP-khó, nó là trường hợp tổng quát của CVRP. Nếu ta đặt $a_i = 0$ và $b_i = \infty$ với $i \in V \setminus \{0\}$ thì VRPTW trở thành CVRP. Ngoài ra ta cũng thu được biến thể TSP với ràng buộc thời gian (TSPTW) nếu $C \geq d(V)$ và $K = 1$.

1.1.3 VRPPD

Một biến thể khác nữa của CVRP là bài toán định tuyến xe với lấy và giao hàng (*VRP with pickup and delivery - VRPPD*). Trong đó, mỗi khách hàng i có thêm hai đại lượng đặc trưng nữa là d_i và p_i lần lượt là nhu cầu lấy và giao (của khách hàng) tại vị trí của khách hàng i . Đôi khi, ta chỉ dùng một đại lượng $d_i = d_i - p_i$ cho mỗi khách hàng i để chỉ lượng nhu cầu chênh lệch giữa việc lấy và giao hàng (có thể là số âm). Với mỗi khách hàng i , gọi O_i là nút đại diện cho điểm giao hàng và D_i là nút đại diện cho điểm lấy hàng.

Với mỗi khách hàng, ta giả thiết điểm giao được phục vụ trước điểm lấy. Do đó, tải hiện tại của một xe trước khi tới điểm đã cho là tải ban đầu trừ đi tổng nhu cầu đã giao cộng với tổng nhu cầu đã lấy.

VRPPD yêu cầu tìm chính xác một tập K các chu trình đơn với tổng chi phí là nhỏ nhất, thỏa mãn các ràng buộc sau đây

- (i) mỗi chu trình đều đi qua nút ứng với kho hàng;
- (ii) mỗi nút ứng với một khách hàng được đi qua bởi đúng một chu trình;
- (iii) tải hiện tại của xe trong suốt quá trình phục vụ không âm và không được vượt quá tải trọng của xe;
- (iv) với mỗi khách hàng i , khách hàng O_i khác với kho phải được phục vụ trong cùng một tuyến và trước khách hàng i ;
- (v) với mỗi khách hàng i , khách hàng D_i khác với kho phải được phục vụ trong cùng một tuyến và sau khách hàng i .

VRPPD là trường hợp tổng quát của CVRP. Nếu ta đặt $O_i = D_i = 0$ và $p_i = 0$ cho mọi $i \in V$ thì VRPPD suy biến về CVRP. Hơn nữa nếu đặt $K = 1$ thì ta thu được TSP với lấy và giao hàng (*TSP with pickup and delivery* - *TSPPD*).

1.2 Mô hình toán học

Phần tiếp theo, ta trình bày một số mô hình toán học cơ bản cho VRP theo P. Toth và D. Vigo [43]. Mô hình cụ thể cho VRPTW được trình bày ở phần 1.2.2.

1.2.1 Các mô hình cơ bản cho VRP

Trong phần này, chúng ta cùng xem xét các mô hình toán học cơ bản cho VRP và xem xét cách các mô hình này được mở rộng để kết hợp hay bổ sung ràng buộc hoặc hàm mục tiêu.

Có ba cách tiếp cận để mô hình hóa VRP. Loại mô hình đầu tiên là "mô hình dựa trên dòng xe" (*vehicle flow formulations*) sử dụng các biến nguyên ứng với mỗi cung hay cạnh của đồ thị. Các biến này để đếm số lần mà xe đi qua cung hay cạnh đó. Loại mô hình này thường được sử dụng cho những phiên bản cơ bản của VRP. Mô hình đặc biệt phù hợp cho những trường hợp mà tổng chi phí, hay hàm mục tiêu có thể biểu diễn bằng tổng chi phí của mỗi cung hay cạnh và hầu hết các ràng buộc liên quan đến sự thay đổi giữa các yêu cầu trong cùng một tuyến. Khi đó, mô hình có thể được xây dựng một cách hiệu quả qua việc định nghĩa hợp lý tập cung và chi phí của cung. Tuy nhiên, "mô hình dựa trên dòng xe" không được sử dụng cho các bài toán mà tổng chi phí phụ thuộc vào chuỗi (có thứ tự) các nút hoặc phụ thuộc vào loại phương tiện.

Loại mô hình thứ hai là "mô hình dựa trên dòng hàng" (*commodity flow formulation*). Trong loại mô hình này, các biến nguyên ứng với mỗi cung hoặc cạnh biểu diễn "dòng" của lượng hàng dọc theo các tuyến đường. "Mô hình dựa trên dòng hàng" thường được sử dụng làm cơ sở cho các phương pháp giải chính xác VRP.

Loại mô hình cuối cùng có số biến nhị phân tăng theo cấp số nhân với kích thước của đầu vào, mỗi biến biểu thị cho một chu trình khả thi khác nhau. Trong loại mô hình này, VRP được mô hình hóa như một bài toán phân hoạch tập hợp (*Set-Partitioning Problem* - *SPP*). SSP xác định một tập các chu trình có chi phí nhỏ nhất phục vụ mỗi yêu cầu một lần và thỏa mãn các ràng buộc. Ưu điểm chính của loại mô hình này là cho phép tổng quát hóa chi phí của các tuyến đường ví dụ như khi chi phí của tuyến phụ thuộc vào toàn bộ chuỗi các cung hay cạnh và phụ thuộc vào loại xe. Hơn nữa, các ràng buộc không cần tính đến tính khả thi của một tuyến đường

đơn lẻ. Kết quả là ràng buộc có thể được thay thế bằng các bất đẳng thức gọn gàng hơn. Đánh đổi lại, loại mô hình này cần một số lượng biến biểu diễn rất lớn.

Mô hình dựa trên dòng xe

Trước tiên, chúng ta mô tả mô hình quy hoạch tuyến tính với biến nguyên (*integer linear programming*) cho ACVRP, sau đó là SCVRP. Mô hình "mô hình dựa trên dòng xe hai chỉ số" (*two-index vehicle flow formulation*) sử dụng $O(n^2)$ biến nhị phân x để chỉ thị nếu một xe đi qua cung (i, j) hay không. Nói cách khác, x_{ij} nhận giá trị bằng 1 nếu cung $(i, j) \in A$ nằm trong nghiệm tối ưu và 0 nếu trong trường hợp còn lại.

$$(VRP1) \quad \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} \quad (1.2)$$

s.t.

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (1.3)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (1.4)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i0} = K, \quad (1.5)$$

$$\sum_{j \in V} x_{0j} = K, \quad (1.6)$$

$$\sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} x_{ij} \geq r(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset, \quad (1.7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V. \quad (1.8)$$

Ràng buộc (1.3) và (1.4) đảm bảo chỉ có đúng một cung vào và một cung ra cho mỗi nút ứng với mỗi yêu cầu. Ràng buộc (1.5) và (1.6) đảm bảo có đúng K xe xuất phát từ kho và trở về kho. Ràng buộc (1.7) đảm bảo số xe được sử dụng không nhỏ hơn số xe tối thiểu cần để phục vụ tất cả các yêu cầu. Trong thực tế, nhiều khi ràng buộc này được phát biểu lại là tổng số xe sử dụng không vượt quá một giới hạn trên K_{max} nhất định.

Đối với hệ đối xứng, *VRP1* được viết lại như sau

$$(VRP2) \quad \min \sum_{i \in V \setminus \{n\}} \sum_{j > i} c_{ij} x_{ij} \quad (1.9)$$

s.t.

$$\sum_{h<i} x_{hi} + \sum_{j<i} x_{ij} = 2, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (1.10)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{0j} = 2K, \quad (1.11)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{h<i, h \notin S} x_{hi} + \sum_{i \in S} \sum_{j<i, j \notin S} x_{ij} \geq 2r(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset, \quad (1.12)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V \setminus \{0\}, i < j, \quad (1.13)$$

$$x_{0j} \in \{0, 1, 2\}, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}. \quad (1.14)$$

Ràng buộc (1.10) và (1.11) đảm bảo chỉ có đúng một cung vào và một cung ra cho mỗi nút ứng với mỗi yêu cầu, $2K$ để đảm bảo số xe xuất phát và kết thúc tại kho. Ràng buộc (1.12) đảm bảo số xe được sử dụng không nhỏ hơn số xe tối thiểu cần để phục vụ tất cả các yêu cầu.

Phiên bản mô hình 2 chỉ số cho trường hợp hệ đối xứng có thể được biểu diễn chỉ với một chỉ số e biểu thị cho cạnh vô hướng $e \in E$. Nếu ta không cho phép tuyến chỉ chứa đúng một yêu cầu thì các biến sử dụng đều là nhị phân. Ngoài ra, nếu $e \notin \delta(0)$ thì $x_e \in \{0, 1\}$ và nếu $e \in \delta(0)$ thì $x_e \in \{0, 1, 2\}$. Công thức *VRP2* được viết lại như sau

$$(VRP3) \quad \min \sum_{e \in E} c_e x_e \quad (1.15)$$

s.t.

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (1.16)$$

$$\sum_{e \in \delta(0)} x_e = 2K, \quad (1.17)$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2r(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset, \quad (1.18)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \notin \delta(0), \quad (1.19)$$

$$x_e \in \{0, 1, 2\}, \quad \forall e \in \delta(0). \quad (1.20)$$

Mô hình dòng xe hai chỉ số được sử dụng khá rộng rãi trong các biến thể cơ bản của SCVRP và ACVRP chẳng hạn như VRPB. Tuy nhiên, mô hình này là không đủ mạnh cho các biến thể phức tạp hơn ví dụ như khi tổng chi phí phụ thuộc vào một chuỗi (có thứ tự) các nút hoặc phụ thuộc vào loại phương tiện. Ngoài ra, ta cũng không biết một cách tường minh xe nào được dùng cho tuyến đường.

Một mô hình mở rộng để khắc phục các điểm yếu của mô hình dòng xe hai chỉ số là mô hình dòng xe ba chỉ số (*three-index vehicle flow formulation*). Mô hình này sử dụng $O(n^2K)$ biến nhị phân x . Biến x_{ijk} đếm số lần cung $(i, j) \in A$ được đi qua bởi xe k với $k = 1, \dots, K$ trong nghiệm tối ưu. Ngoài ra ta sử dụng thêm $O(nK)$ biến nhị phân y , với y_{ik} ($i \in V; k = 1, \dots, K$) nhận giá trị 1 nếu yêu cầu i được phục vụ bởi xe k và 0 trong trường hợp còn lại. Mô hình ba chỉ số cho ACVRP được mô tả như sau

$$(VRP4) \quad \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} \sum_{k=1}^K x_{ijk} \quad (1.21)$$

s.t.

$$\sum_{k=1}^K y_{ik} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (1.22)$$

$$\sum_{k=1}^K y_{0k} = K, \quad (1.23)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} = \sum_{j \in V} x_{jik} = y_{ik}, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, k = 1, \dots, K, \quad (1.24)$$

$$\sum_{i \in V} d_i y_{ik} \leq C, \quad \forall k = 1, \dots, K, \quad (1.25)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ijk} \geq y_{hk}, \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, h \in S, k = 1, \dots, K, \quad (1.26)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V, k = 1, \dots, K, \quad (1.27)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V, k = 1, \dots, K. \quad (1.28)$$

Ràng buộc (1.22) đảm bảo mỗi yêu cầu được phục vụ đúng một lần. Ràng buộc (1.23) đảm bảo có K xe xuất phát từ kho. Ràng buộc (1.24) đảm bảo có cùng số xe đến và rời khỏi vị trí của mỗi yêu cầu. Ràng buộc (1.25) là ràng buộc về tải trọng của xe. Ràng buộc (1.26) đảm bảo tính kết nối trong tuyến đường được phục vụ bởi xe k .

Đối với bài toán đối xứng, ta có phiên bản hai chỉ số cho mô hình trên với biến nhị phân x_{ek} , $e \in E$ và $k = 1, \dots, K$

$$(VRP5) \quad \min \sum_{e \in E} c_{ij} \sum_{k=1}^K x_{ek} \quad (1.29)$$

s.t.

$$\sum_{k=1}^K y_{ik} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (1.30)$$

$$\sum_{k=1}^K y_{0k} = K, \quad (1.31)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_{ek} = 2y_{ik}, \quad \forall i \in V, k = 1, \dots, K, \quad (1.32)$$

$$\sum_{i \in V} d_i y_{ik} \leq C, \quad \forall k = 1, \dots, K, \quad (1.33)$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_{ijk} \geq 2y_{hk}, \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, h \in S, k = 1, \dots, K, \quad (1.34)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V, k = 1, \dots, K, \quad (1.35)$$

$$x_{ek} \in \{0, 1\}, \quad \forall e \notin \delta(0), k = 1, \dots, K, \quad (1.36)$$

$$x_{ek} \in \{0, 1, 2\}, \quad \forall e \in \delta(0), k = 1, \dots, K. \quad (1.37)$$

Mô hình dựa trên dòng xe ba chỉ số được sử dụng cho các biến thể VRP với nhiều ràng buộc ví dụ như VRPTW. Công thức này được trình bày trong phần 1.2.2. Mô hình dựa trên dòng hàng và công thức phân hoạch tập hợp được trình bày trong chương 2.

1.2.2 Mô hình cho biến thể VRPTW

Trong phần này, ta trình bày biểu diễn toán học cho bài toán VRPTW. Trong khuôn khổ luận văn này, tác giả tập trung thực nghiệm giải quyết VRPTW, từ đó ta cũng có thể giản ước về CVRP cũng như tổng quát với VRPPD (*VRP with pickup and delivery*) hoặc PDPTW (*pickup and delivery with time window*). Như đã trình bày ở phần trước, VRPTW là một mở rộng của CVRP với ràng buộc khung thời gian. Trong đó, mỗi khách hàng i được ràng buộc bởi một khung thời gian $[a_i, b_i]$. Xe không được đến i tại thời điểm $t_i > b_i$, ngoài ra, nếu đến sớm hơn thời điểm a_i hay $t_i < a_i$ thì xe cần phải chờ tới thời điểm a_i để phục vụ khách hàng. Thời gian phục vụ của khách hàng i là s_i .

VRPTW là bài toán NP-khó, việc tìm lời giải hay nghiệm tối ưu (chính xác) gần như là bất khả thi với các bài toán có kích thước đầu vào lớn. Để dễ hình dung, xét bài toán VRP, với số lượng khách hàng $n = 100$ và chỉ một xe, số lượng lời giải là $n! \approx 10^{158}$. Nếu ta có số CPU ước tính bằng toàn bộ số nguyên tử trong vũ trụ $n_{CPU} \approx 10^{80}$, thời gian nhỏ nhất là thời gian Planck $t_p \approx 5.39 \times 10^{-44}$. Để kiểm tra toàn bộ lời giải có phải nghiệm tối ưu ta cần thời gian $T \approx 10^{158} \times 5.39 \times 10^{-44} / 10^{80} \approx$

5.39×10^{34} . Để so sánh, tuổi của vũ trụ được ước tính khoảng 4.33×10^{17} . Nghĩa là ta sẽ mất thời gian lớn gấp cỡ *một trăm triệu tỉ* lần tuổi của cả vũ trụ! ¹

Như đã trình bày ở phần 1.1, VRPTW được định nghĩa trên đồ thị $G = (V, A)$, kho hàng được biểu diễn bởi nút 0 và $n + 1$. Một tuyến thỏa mãn là một đường đi trên đồ thị G bắt đầu từ 0 và kết thúc ở $n + 1$. Nếu kho hàng được biểu diễn chỉ bởi nút 0 thì tuyến thỏa mãn là một đơn chu trình trên đồ thị G chứa nút 0. Khung thời gian của nút 0 và $n + 1$ là $[a_0, b_0] = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [E, L]$, trong đó E và L lần lượt là thời gian sớm nhất rời kho và thời gian muộn nhất trở về kho. Ngoài ra, thời gian phục vụ và nhu cầu của kho đều được đặt bằng 0, hay $s_0 = s_{n+1} = 0$ và $d_0 = d_{n+1} = 0$. Lời giải chấp nhận được chỉ tồn tại nếu $a_0 = E \leq \min_{i \in V \setminus \{0\}} \{b_i - t_{0i}\}$ và $b_{n+1} = L \geq \min_{i \in V \setminus \{0\}} \{a_i + s_i + t_{0i}\}$. Chú ý rằng, cung $(i, j) \in A$ có thể được bỏ đi nếu không thỏa mãn ràng buộc thời gian $a_i + s_i + t_{ij} > b_j$ hoặc vi phạm ràng buộc về tải trọng $d_i + d_j > C$. Cuối cùng, nếu mục tiêu chính là giảm thiểu số lượng xe thì cung $(0, n + 1)$ với $c_{0,n+1} = t_{0,n+1} = 0$ phải được thêm vào A .

Tiếp theo, chúng ta trình bày một mô hình toán cho VRPTW với hai biến: biến x_{ijk} (*flow variable*) với $(i, j) \in A, k \in K$ nhận giá trị 1 nếu xe k đi trực tiếp từ nút i tới nút j và 0 nếu ngược lại. Biến w_{ik} với $i \in V, k \in K$ là thời gian bắt đầu phục vụ khách hàng i bởi xe k . VRPTW được mô hình một cách chính tắc như sau theo P. Toth và D. Vigo [43]

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk} \quad (1.38)$$

s.t.

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (1.39)$$

$$\sum_{j \in \Delta^+(0)} x_{0jk} = 1, \quad \forall k \in K, \quad (1.40)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(j)} x_{ijk} - \sum_{i \in \Delta^+(j)} x_{jik} = 0, \quad \forall k \in K, j \in N, \quad (1.41)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(n+1)} x_{i,n+1,k} = 1, \quad \forall k \in K, \quad (1.42)$$

$$x_{ijk}(w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk}) \leq 0, \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (1.43)$$

$$a_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq w_{ik} \leq b_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk}, \quad \forall k \in K, i \in N, \quad (1.44)$$

$$E \leq w_{ik} \leq L, \quad \forall k \in K, i \in \{0, n + 1\}, \quad (1.45)$$

¹ Slides của Thibaut Vidal (SOICT, Nha Trang 2017)

$$\sum_{i \in N} d_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq C, \quad \forall k \in K, \quad (1.46)$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (1.47)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, (i, j) \in A. \quad (1.48)$$

Hàm mục tiêu trong phương trình (1.38) biểu diễn tổng chi phí của tất cả các tuyến đường. Tập $N = V \setminus \{0\}$ biểu diễn cho tập khách hàng.

- Ràng buộc (1.39) đảm bảo rằng mỗi khách hàng chỉ được phục vụ bởi một xe.
- Ràng buộc (1.40) đảm bảo rằng mỗi xe phải xuất phát từ kho hàng.
- Ràng buộc (1.41) đảm bảo rằng trên một tuyến, nếu khách hàng i được phục vụ thì trước và sau đó đều có một khách hàng khác được phục vụ hoặc trước và sau đó là kho hàng. Nói cách khác, khách hàng i phải ở giữa tuyến.
- Ràng buộc (1.42) đảm bảo rằng mỗi xe phải trở về kho hàng.
- Ràng buộc (1.43) đảm bảo về khung thời gian khi xe đi từ khách hàng i tới khách hàng j . Nếu xe k đi từ khách hàng i tới khách hàng j thì thời gian bắt đầu phục vụ khách hàng i cộng với thời gian phục vụ khách hàng i cộng với thời gian di chuyển từ khách hàng i tới khách hàng j phải nhỏ hơn hoặc bằng thời gian bắt đầu phục vụ khách hàng j . Dấu bằng xảy ra khi xe đến j sau thời điểm a_j (khách hàng j được phục vụ luôn), nếu đến sớm hơn thì xe phải chờ để phục vụ khách hàng.
- Ràng buộc (1.44) đảm bảo rằng thời gian bắt đầu phục vụ khách hàng i bởi xe k nằm trong khung thời gian $[a_i, b_i]$.
- Ràng buộc (1.45) đảm bảo rằng thời gian bắt đầu phục vụ khách hàng i bất kì phải nằm trong khoảng thời gian từ sớm nhất xuất phát từ kho và muộn nhất về kho.
- Ràng buộc (1.46) đảm bảo rằng tổng tải của mỗi xe không được vượt quá tải trọng tối đa C .
- Ràng buộc (1.47) và (1.48) đảm bảo điều kiện nhị phân của *flow variable* x_{ijk} .

Ta có thể nhận thấy rằng, ràng buộc (1.44) ép $w_{ik} = 0$ nếu như khách hàng i không được phục vụ bởi xe k . Điều kiện nhị phân trong ràng buộc (1.48) cho phép ràng buộc (1.43) được thay thế bởi

$$w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk} \leq (1 - x_{ijk})M_{ij}, \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (1.49)$$

với M_{ij} là các hằng số rất lớn. Hơn nữa M_{ij} có thể thay bằng $\max\{b_i + s_i + t_{ij} - a_j, 0\}$ với $(i, j) \in A$ và như vậy ta chỉ cần kiểm tra ràng buộc (1.43) và (1.49) cho các cung $(i, j) \in A$ thỏa mãn $M_{ij} > 0$. Mặt khác, khi $\max\{b_i + s_i + t_{ij} - a_j, 0\} = 0$ các điều kiện này được thỏa mãn với mọi w_{ik} , w_{jk} và x_{ijk} .

Chúng ta không cần đưa ra mô hình cho CVRP nữa, bởi ta có thể bỏ qua các ràng buộc về thời gian ở điều kiện từ (1.43) đến (1.45). Khi đó VRPTW sẽ trở thành CVRP như đã trình bày ở những phần trước đó. Tác giả cũng không đưa ra mô hình cho VRPPD hay PDPTW để tránh sự phức tạp. VRPTW vừa đủ để ta có một mô hình đẹp và thực tế.

Chương 2

Một số phương pháp cho VRP

Trong chương này, chúng ta sẽ xem xét một số khái niệm cần thiết và phương pháp để giải (lớp) bài toán định tuyến xe. Trong suốt chặng đường hơn 60 năm của bài toán VRP, có rất nhiều phương pháp được nghiên cứu và thực nghiệm từ các thuật toán giải chính xác đến các thuật toán xấp xỉ. Ba lớp thuật toán được trình bày bao gồm *thuật toán chính xác*, *heuristics cổ điển* và *metaheuristics*. Lớp các thuật toán được trình bày một cách khái quát theo G. Laporte [25]. Cuối cùng tác giả đưa ra lựa chọn và đi sâu vào thuật toán tìm kiếm lân cận rộng thích ứng - ALNS (*Adaptive Large Neighborhood Search*) để giải quyết bài toán VRPTW trong luận văn này.

2.1 Thuật toán chính xác

2.1.1 Phương pháp nhánh-cận

Một trong những thuật toán chính xác được nghiên cứu sớm nhất là *nhánh-cận*, lần đầu xuất hiện trong bài báo "*An Algorithm for the Vehicle Dispatching Problem*" của N. Christofides và S. Eilon [6] năm 1969. Với m là tham số đầu vào, đầu tiên đồ thị được mở rộng với việc thêm vào $m - 1$ kho ảo và đặt chi phí của chúng bằng một số vô cùng lớn. Sau đó giải bài toán m-TSP trên đồ thị này bằng thuật toán TSP được trình bày bởi J. D. Little và các cộng sự [28].

Hiệu năng của các thuật toán nhánh-cận đầu tiên được cải thiện đáng kể hai phương pháp cận dưới là k-degree centre trees (k-DCT) và q-routes (N. Christofides và các cộng sự [7]).

2.1.2 Quy hoạch động

N. Christofides và S. Eilon [6] đưa ra lời giải cho bài toán VRP bằng phương pháp quy hoạch động. Gọi $c(S)$ là chi phí tối ưu của một tuyến ứng với tập nút $S \subseteq V \setminus \{0\}$. Mục tiêu là cực tiểu hóa $\sum_{r=1}^m c(S_r)$ trên tất cả các quy hoạch khả dĩ $\{S_1, \dots, S_m\}$

của $V \setminus \{0\}$. Gọi $f_k(U)$ là chi phí nhỏ nhất có thể đạt được khi sử dụng k xe cho một tập con U của $V \setminus \{0\}$. Ta có

$$f_k(U) = \begin{cases} c(U) & \text{nếu } k = 1, \\ \min_{U^* \subseteq U \subseteq V \setminus \{0\}} \{f_{k-1}(U \setminus U^*) + c(U^*)\} & \text{nếu } k > 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Chi phí tối ưu là $f_m(V \setminus \{0\})$ và các tuyến là các phân hoạch của $V \setminus \{0\}$ theo phương trình (2.1).

2.1.3 Mô hình dựa trên dòng xe

Mô hình hai chỉ số cho bài toán VRP được nghiên cứu đầu tiên bởi G. Laporte và Y. Nobert [26] và G. Laporte, Y. Nobert và M. Desrochers [27] và mở rộng mô hình TSP cổ điển của , G. Dantzig, R. Fulkerson và S. Johnson [10]. Các biểu thức toán học của mô hình dựa trên dòng xe đã được đề cập trong chương 1. Mô hình có thể được mở rộng bằng cách đưa vào thêm các bất đẳng thức. Các ràng buộc về tải trọng, thời gian... được thêm vào để giải quyết nhiều biến thể của VRP. Một cách tổng quan, ta có thể xem nghiên cứu của D. Naddef và G. Rinaldi [31]. Các tác giả đã phát triển thuật toán nhánh-cận để giải sáu cấu hình ($22 \leq n \leq 45$)¹ không sử dụng nhánh và chín cấu hình ($51 \leq n \leq 135$) sử dụng một vài nhánh. Một số thuật toán nhánh-cận dựa trên mô hình này có thể xem thêm trong nghiên cứu của Lysgaard, Letchford và Eglese [29].

Mô hình dựa trên dòng xe với mô hình ba chỉ số cũng đã được đề cập trong chương 1 nhưng ít phổ biến hơn so với mô hình hai chỉ số. Ta có thể xem thêm trong nghiên cứu của Golden, Magnanti và Nguyen [22] hay nghiên cứu của Fisher và Jaikumar [17].

2.1.4 Mô hình dựa trên dòng hàng

Trong mô hình dựa trên dòng hàng, biến y_{ij} (hoặc y_{ijk}) định nghĩa tải (lượng hàng) của xe mang theo trên cung (i, j) . Ví dụ được trình bày bởi B. Gavish và S. C. Graves [18], tuy nhiên các tác giả không đưa ra kết quả tính toán. Các ví dụ gần đây hơn được nghiên cứu bởi R. Baldacci, E. Hadjiconstantinou và A. Mingozzi [3] dựa trên mô hình TSP của G. Finke [16]. Mô hình cho một đồ thị mở rộng $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$, với $\bar{V} = V \cup \{(i, n+1) : i \in V\}$. Một tuyến được định nghĩa là một đường đi có hướng từ 0 đến $n+1$. Biến nhị phân x_{ij} bằng 1 khi và chỉ khi cạnh (i, j) được chọn vào

¹ n là kích thước cấu hình

tuyến. Biến y_{ij} định nghĩa tải của xe trên cung (i, j) và $y_{ji} = Q - y_{ij}$ biểu diễn không gian còn trống của xe trên cung (j, i) mỗi khi $x_{ij} = 1$. Mô hình dựa trên dòng hàng được mô hình hóa như sau

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (2.2)$$

s.t.

$$\sum_{j \in \bar{V}} (y_{ji} - y_{ij}) = 2q_i, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (2.3)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} y_{0j} = \sum_{i \in V \setminus \{0\}} q_i, \quad (2.4)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} y_{j0} = mQ - \sum_{i \in V \setminus \{0\}} q_i, \quad (2.5)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} y_{n+1,j} = mQ, \quad (2.6)$$

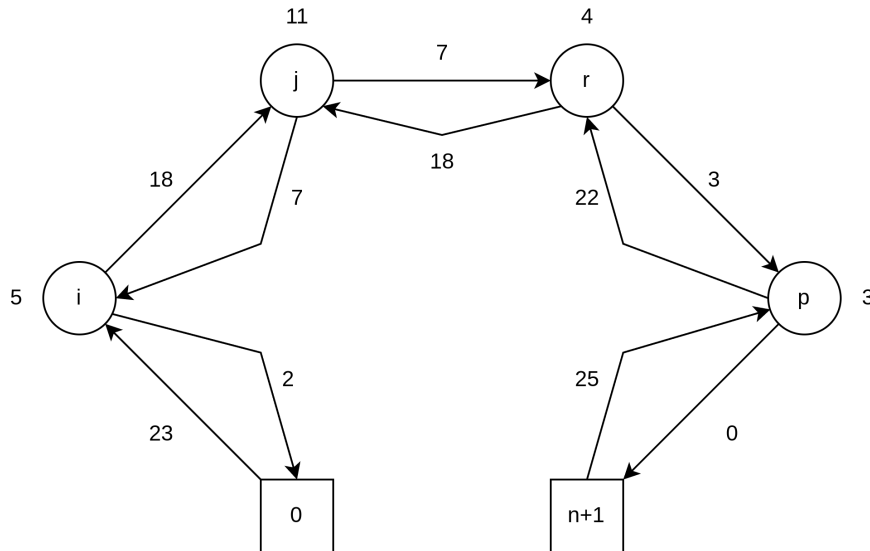
$$y_{ij} + y_{ji} = Qx_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \bar{E}, \quad (2.7)$$

$$\sum_{i < k} x_{ik} + \sum_{j > k} x_{kj} = 2, \quad \forall k \in V \setminus \{0\}, \quad (2.8)$$

$$y_{ij} \geq 0, y_{ji} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \bar{E}, \quad (2.9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in \bar{E}. \quad (2.10)$$

Bài toán này được giải bằng *branch-and-cut* với các bất đẳng thức VRP được biểu diễn theo các biến x_{ij} .



Hình 2.1: Minh họa dòng hàng với $Q = 25$.

2.1.5 Mô hình phân hoạch tập hợp

Mô hình phân hoạch tập hợp đơn giản của VRP lần đầu được nghiên cứu bởi M. L. Balinski và R. E. Quandt [4]. Gọi r là một tuyến, a_{ir} là biến nhị phân có giá trị bằng 1 khi và chỉ khi nút $i \in V \setminus \{0\}$ thuộc tuyến r , gọi c_r^* là chi phí tối ưu của tuyến r và gọi y_r là biến nhị phân bằng 1 khi và chỉ khi tuyến r được dùng trong nghiệm tối ưu. Bài toán được mô hình hóa như sau

$$\min \sum_r c_r^* y_r \quad (2.11)$$

s.t.

$$\sum_r a_{ir} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (2.12)$$

$$\sum_r y_r = m, \quad (2.13)$$

$$y_r \in \{0, 1\}, \quad \forall r. \quad (2.14)$$

Nói một cách chặt chẽ thì ràng buộc (2.13) không phải một phần của công thức phân hoạch tập hợp chuẩn, tuy nhiên nó được sử dụng bởi hầu hết các nhà nghiên cứu trong trường hợp VRP.

2.2 Heuristics cổ điển

Nhìn chung thì các thuật toán giải chính xác khó đảm bảo hiệu năng trong thực tế khi mà các tập dữ liệu ngày càng lớn và các doanh nghiệp cần phục vụ khách hàng một cách nhanh chóng và tiết kiệm. Chúng ta cần tìm ra một (số) lời giải chấp nhận được đủ tốt trong một khoảng thời gian "hợp lý". Từ những năm 1964 cho đến 1990, rất nhiều heuristics được nghiên cứu. Một số ít là đưa ra thuật toán hoàn toàn mới còn hầu hết là cải tiến thuật toán đã có.

2.2.1 Thuật toán tiết kiệm

Thuật toán tiết kiệm được đưa ra bởi G. Clarke và J. W. Wright [8], mô tả và cài đặt khá đơn giản nhưng vẫn đưa ra được nghiệm tốt. Chính vì thế, thuật toán này được sử dụng rất rộng rãi. Thuật toán bắt đầu với nghiệm ban đầu với n tuyến $(0, i, 0)$ với $i \in V \setminus \{0\}$. Tại mỗi bước lặp, thuật toán nối tuyến kết thúc với i với một tuyến khác bắt đầu với j cực đại hóa đại lượng *tiết kiệm* $s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$

và lời giải mới thỏa mãn các ràng buộc. Quá trình kết thúc khi không thể nối các tuyến vào nữa.

Một số cải tiến được đề xuất, ví dụ như nhân c_{ij} với một trọng số dương λ (B. L. Golden, T. L. Magnanti và [22]), tối ưu tuyến đường hợp nhất toàn cục thông qua việc sử dụng thuật toán phù hợp (K. Altinkemer và B. Gavish [1] và P. Wark và J. Holt [44]), tăng tốc tính toán (H. Paessens [32])...

2.2.2 Phân cụm trước, định tuyến sau

Heuristic phân cụm trước, định tuyến sau của M. L. Fisher và R. Jaikumar [17] trước hết đặt m tâm và phân cụm sao cho tổng khoảng cách từ các nút đến tâm của nó là nhỏ nhất và thỏa mãn về ràng buộc tải trọng. Sau đó, trên mỗi cụm, tuyến đường được thiết lập bằng cách giải bài toán TSP. Một vài chiến thuật để khởi tạo cũng như lựa chọn tâm cụm được trình bày trong B. M. Baker và J. Sheasby [2].

2.2.3 Heuristics cải tiến

Có hai loại phương pháp cải thiện nghiệm được sử dụng rộng rãi để giảm chi phí của nghiệm hiện tại. Phương pháp di chuyển nội tuyến cải thiện chi phí của từng tuyến bằng cách áp dụng một thuật toán TSP cho tuyến đó. Phương pháp di chuyển ngoại tuyến thực hiện các thay đổi trên một vài tuyến nhất định. Đôi khi hai phương pháp này được kết hợp lại với nhau để cải thiện nghiệm một cách tổng thể.

Có khá nhiều thuật toán sử dụng di chuyển nội tuyến, hầu hết là trường hợp đặc biệt của chiến thuật *b-cyclic* và *k-transfer* được đề xuất bởi P. M. Thompson và H. N. Psaraftis [42].

2.3 Metaheuristics

Metaheuristics có thể được phân loại thành tìm kiếm địa phương, tìm kiếm quần thể và cơ chế học. Hầu hết các thuật toán metaheuristics cho VRP đều dựa trên tìm kiếm lân cận và thuộc lớp các phương pháp cải tiến. Có nhiều thuật toán tốt ngay cả khi nghiệm khởi tạo có chất lượng thấp. Một xu hướng chung là thay vì sử dụng chỉ một thuật toán, người ta thường kết hợp nhiều thuật toán lại với nhau. Các thuật toán như vậy được gọi là thuật toán lai.

Tiếp theo, ta trình bày ý tưởng chính của một số lớp thuật toán metaheuristics.

2.3.1 Tìm kiếm địa phương

Về cơ bản, tìm kiếm lân cận cố gắng "khám phá" không gian nghiệm bằng cách "di chuyển" quanh nghiệm hiện tại tới một nghiệm khác trong vùng lân cận của nó. Một số phương pháp có thể kể đến như *tabu search* (F. Glover [21]), *simulated annealing* (S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt Jr và M. P. Vecchi [24]), *deterministic annealing* (G. Dueck và T. Scheuer [15]; G. Dueck [14]), *variable neighbourhood search* (N. Mladenović và P. Hansen [30]), *large neighbourhood search* (Shaw [40]) và *adaptive large neighbourhood search* (S. Ropke và D. Pisinger [36]). Các thành phần chính của tìm kiếm địa phương là các quy tắc để xác định vùng lân cận của một nghiệm và cơ chế để khám phá vùng lân cận đó.

Trong *tabu search*, không gian nghiệm được khám phá bằng cách di chuyển từ nghiệm hiện tại đến nghiệm tốt nhất trong một tập con của lân cận của nghiệm đó. Để tránh việc lặp lại các nghiệm, các nghiệm được gán một thuộc tính gắn với nghiệm hiện tại để không được chọn trong một số lần lặp tiếp theo. Một nghiệm trở thành nghiệm tốt nhất trong số các nghiệm đã biết có thuộc tính gắn với thuộc tính hiện tại. Nguyên lý này được trình bày đầu tiên bởi J.-F. Cordeau, M. Gendreau, and G. Laporte [9] và hiện nay được biết đến như là phương pháp tìm kiếm dựa trên thuộc tính (U. Derigs và R. Kaise [13]).

Trong *simulated annealing*, một nghiệm x được chọn ngẫu nhiên trong lân cận $N(x_t)$ của nghiệm hiện tại x_t tại bước lặp t . Nếu hàm mục tiêu f đạt giá trị cực tiểu, ta gán $x_{t+1} := x$ với $f(x_{t+1}) \leq f(x_t)$. Ngược lại, gán $x_{t+1} := x$ với một xác suất p_t và gán $x_{t+1} := x_t$ với xác suất $1 - p_t$. Trong đó, p_t là một hàm giảm theo t và $f(x) - f(x_t)$.

Trong *deterministic annealing*, nghiệm x cũng được chọn ngẫu nhiên trong lân cận $N(x_t)$. Trong thuật toán *threshold-accepting* (G. Dueck và T. Scheuer [15]), $x_{t+1} := x$ khi $f(x) < f(x_t) + \theta_1$, với θ_1 là một tham số dương; ngược lại gán $x_{t+1} := x_t$. Trong *record-to-record travel* (G. Dueck [14]), với nghiệm tốt nhất hiện tại x^* , gán $x_{t+1} := x$ nếu $f(x) \leq \theta_2 f(x^*)$, với θ_2 là một tham số dương; ngược lại gán $x_{t+1} := x_t$; ngược lại gán $x_{t+1} = x_t$.

Trong *variable neighbourhood search* (N. Mladenović và P. Hansen [30]), tác giả xem xét một danh sách được sắp xếp của các lân cận. Thuật toán bắt đầu với một lân cận và chuyển qua lân cận tiếp theo cho đến khi đạt tới nghiệm tối ưu địa phương. Việc tìm kiếm được khởi tạo lại khi một nghiệm tốt hơn được tìm thấy hoặc tất cả các lân cận đã được xét qua. *Very large-scale neighbourhood search - LNS* bỏ đi và tạo lại một (vài) phần của nghiệm hiện tại để tìm kiếm nghiệm tốt hơn. Nguyên lý này giống như cơ chế hủy và tạo lại được trình bày bởi Shaw [40].

Adaptive large neighbourhood search - ALNS (S. Ropke và D. Pisinger [36]) được biết đến như là một phiên bản cải tiến của *large neighbourhood search*, trong đó các thuật toán hủy hay tạo lại được lựa chọn một cách linh hoạt và thích ứng với trạng thái hiện tại của hệ. LNS và ALNS là cảm hứng chính cho luận văn này. Trong các phần tiếp theo, tác giả sẽ trình bày chi tiết về ALNS.

2.3.2 Tìm kiếm quần thể

Tìm kiếm quần thể hoạt động với một quần thể các nghiệm. Thuật toán di truyền (J. Holland [23]) là ví dụ điển hình cho mô hình này. Tại mỗi bước lặp, một vài nghiệm cha được trích xuất từ quần thể hiện tại và kết hợp để tạo ra các nghiệm con. Nghiệm con sau đó được thay cho những phần tệ nhất trong quần thể nếu điều này cải thiện nghiệm tốt nhất hiện tại. Về cơ bản, thuật toán áp dụng đa dạng hóa các cơ chế, gọi là đột biến cho thế hệ nghiệm con trước khi xem xét việc đưa chúng vào quần thể.

2.3.3 Cơ chế học

Cơ chế học vay mượn ý tưởng từ trí tuệ nhân tạo với mạng thần kinh (neural networks). Thuật toán học hỏi kinh nghiệm và điều chỉnh các trọng số qua các bước lặp. Ứng dụng với VRP được trình bày bởi H. Ghaziri [20]; M. Schumann and R. Retzko [38]. Thuật toán tối ưu đàn kiến cũng là một dạng khác của cơ chế học. Nó bắt chước hành vi của đàn kiến trong việc tìm thức ăn và để lại vết trên đường đi. Theo thời gian, vết được để lại nhiều hơn trên đường đi ngắn nhất và qua đó, kiến đi theo con đường này. Ứng dụng đầy đủ được trình bày bởi M. Reimann, K. Doerner và R. F. Hartl, [35].

Chương 3

Phương pháp tìm kiếm địa phương

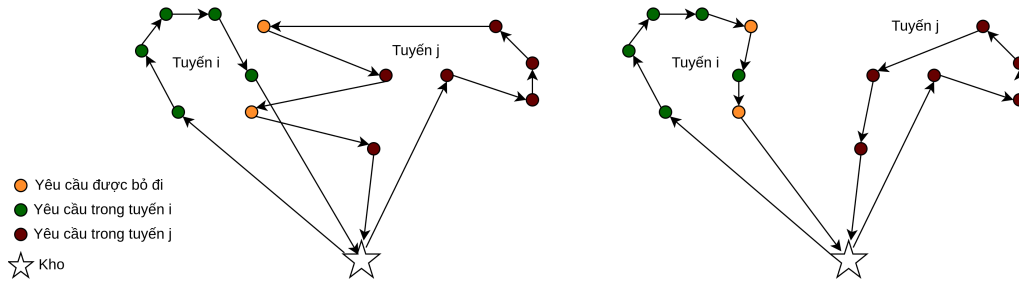
Như đã trình bày trong chương 2, hầu hết các thuật toán hiện đại đều dựa trên tìm kiếm địa phương và thuộc lớp cải tiến. Thuật toán không cố gắng để đưa ra ngay một nghiệm tối ưu ngay từ đầu (hay chỉ với một bước chạy). Thay vào đó, ta xuất phát từ một nghiệm chấp nhận được (thường được khởi tạo nhanh như thuật toán tham lam chẳng hạn), sau đó qua mỗi bước lặp, nghiệm được cải thiện dần cho đến khi điều kiện dừng được thỏa mãn. Tại mỗi bước lặp, thuật toán cố gắng khám phá không gian nghiệm bằng cách xét các lân cận của nghiệm hiện tại để tìm một nghiệm tối ưu địa phương.

Chiến thuật này cần ta định nghĩa rõ ràng khái niệm "lân cận", "tối ưu địa phương", "tiêu chí chấp nhận nghiệm" và "điều kiện dừng". Lân cận được hiểu là tập hợp các nghiệm chấp nhận được (theo nghĩa thỏa mãn các ràng buộc) với một thay đổi không quá lớn từ nghiệm hiện tại. Ví dụ, một vài yêu cầu từ tuyến này được trao đổi với tuyến khác hoặc được chuyển hẳn sang một tuyến khác hay là tạo một tuyến mới. Nghiệm tối ưu địa phương là nghiệm tốt nhất ta có thể tìm được trong lân cận như vậy. Tuy nhiên, nếu ta tiếp tục tìm kiếm từ nghiệm tối ưu địa phương thì đôi khi thuật toán bị "mắc" tại nghiệm đó. Cụ thể hơn, thuật toán trải qua nhiều bước lặp mà chỉ xét một số nghiệm nhất định trong lân cận của một tối ưu địa phương hoặc độ cải thiện là rất chậm. Chính vì vậy, có nhiều tiêu chí chấp nhận hay tiêu chí lựa chọn nghiệm để thuật toán thoát khỏi vùng này được phát triển thay vì chỉ chấp nhận nghiệm có chi phí nhỏ nhất trong lân cận. Một vài tiêu chí có thể kể đến như *tìm kiếm tabu* (*tabu search*) hay *mô phỏng luyện kim* (*simulated annealing*) đã được nhắc đến ở chương trước. Nhìn chung, thay vì tiếp tục tìm kiếm từ một tối ưu địa phương, chúng ta đưa vào hàm mục tiêu một hệ số phạt (nhỏ) nào đó để có thể tìm kiếm từ một nghiệm tệ hơn nghiệm tối ưu địa phương một chút. Điều kiện dừng thường được áp dụng là số bước lặp tối đa hoặc thời gian tối đa mà thuật toán được phép chạy. Thời gian này thường được gọi là *timeout*.

Trong chương này, chúng ta sẽ xem xét phương pháp *tìm kiếm lân cận rộng* (*large neighbourhood search - LNS*) và mở rộng của nó là *tìm kiếm lân cận rộng thích ứng* (*adaptive large neighbourhood search - ALNS*). LNS và ALNS đều là những phương pháp điển hình của tìm kiếm địa phương và được áp dụng nhiều trong thực tế không

chỉ cho bài toán định tuyến xe mà còn cho nhiều bài toán tối ưu tổ hợp khác. Ứng dụng ALNS để giải bài toán định tuyến phương tiện với ràng buộc khung thời gian (*vehicle routing problem with time windows - VRPTW*) sẽ được trình bày chi tiết ở cuối chương.

3.1 Tìm kiếm lân cận rộng



Hình 3.1: Lược đồ LNS.

Phương pháp tìm kiếm lân cận rộng (Large neighbourhood search - LNS) được trình bày bởi Shaw [40] thuộc lớp các thuật toán tìm kiếm địa phương. LNS dựa trên việc liên tục bỏ đi yêu cầu và tối ưu lại nghiệm. Nghĩa là một số yêu cầu được bỏ đi khỏi tuyến (theo một tiêu chí nào đó) và được thêm lại vào các tuyến (khác) với mục đích làm giảm hàm mục tiêu hay khám phá ra nghiệm mới thỏa mãn các ràng buộc.

Thuật toán 1 LNS Heuristic

Require: $s \in \{\text{nghiệm chấp nhận được}\}, q \in \mathbb{N}$

- 1: nghiệm $s_{best} = s$;
 - 2: **repeat**
 - 3: $s' = s$;
 - 4: bỏ q yêu cầu từ s' ;
 - 5: thêm lại các yêu cầu đã bỏ đi vào s' ;
 - 6: **if** $f(s') < f(s)$ **then**
 - 7: $s_{best} = s'$;
 - 8: **if** $accept(s', s)$ **then**
 - 9: $s = s'$;
 - 10: **until** đạt điều kiện dừng
 - 11: **return** s_{best} ;
-

Thuật toán giả định rằng nghiệm ban đầu s đã được khởi tạo (thường bằng một heuristic đơn giản). Tham số q xác định phạm vi tìm kiếm.

Dòng 4 và 5 của thuật toán là phần thú vị của heuristic. Ở dòng 4, một số yêu cầu được loại bỏ khỏi nghiệm hiện tại s' , các yêu cầu lại được thêm vào ở dòng 5. Hiệu năng cũng như sự mạnh mẽ của heuristic phụ thuộc vào sự lựa chọn chiến thuật bỏ và thêm lại các yêu cầu. Trong các bài trước đó về LNS cho VRPTW và PDPTW (Shaw [39]; R.Bent và P. Van Hentenryck [5]) các phương pháp *gần tối ưu* được sử dụng để thêm lại các yêu cầu. Mặc dù các cách thêm lại yêu cầu heuristic thường có chất lượng không tốt, nhưng chất lượng tổng thể của LNS heuristic lại rất tốt, bởi vì các bước "tê" được tạo ra bởi heuristic thêm lại yêu cầu dẫn đến sự đa dạng hóa quá trình tìm kiếm. Nói cách khác LNS cho phép tìm kiếm đa dạng nghiệm trong vùng lân cận để tránh bị mắc với một nghiệm tối ưu địa phương.

Trong phần còn lại, LNS cập nhật nghiệm tốt nhất (hiện tại) và tìm kiếm nghiệm mới (tốt hơn). Tiêu chí chấp nhận đơn giản nhất là chỉ chấp nhận các nghiệm tốt hơn (có chi phí nhỏ hơn) nghiệm hiện tại. Tiêu chí này đã được sử dụng trong triển khai LNS của Shaw [39]. Dòng 10 kiểm tra điều kiện dừng đã đạt được hay chưa.

Tham số $q \in \{0, \dots, n\}$ xác định kích cỡ tập lân cận. Ta cần $q > 0$ vì khi không có yêu cầu nào được bỏ đi thì thuật toán không hoạt động. Mặt khác, nếu $q = n$, thì bài toán được giải luôn qua mỗi bước lặp. Nói chung, q càng lớn thì càng dễ di chuyển quanh không gian nghiệm, tuy nhiên, khi q lớn dần lên thì bước thêm lại yêu cầu sẽ chậm hơn. Trong thực nghiệm, ta không sử dụng một con số q cố định, chiến thuật chọn số q được trình bày trong phần 3.2.4.

Ngoài ra, thay vì xem xét quá trình LNS như là một chuỗi hành động xóa và thêm lại, chúng ta có thể coi quá trình này là chuỗi hành động sửa lỗi. Cách nhìn này giúp chúng ta áp dụng LNS không chỉ cho bài toán VRP mà còn có thể áp dụng cho các bài toán tối ưu tổ hợp khác nữa. Chính vì tính chất linh hoạt này, tác giả đã lựa chọn LNS làm nền tảng cho phương pháp tìm kiếm địa phương trong luận văn này.

3.1.1 Thuật toán hủy

Phương pháp xóa yêu cầu tệ nhất

Phương pháp xóa yêu cầu tệ nhất và xóa ngẫu nhiên được đề xuất bởi S. Ropke và D. Pisinger [36]. Cho một yêu cầu i được phục vụ bởi vài xe trong tập nghiệm s , chi phí của yêu cầu $cost$ được định nghĩa là hàm $cost(i, s) = f(s) - f_{-i}(s)$ với $f_{-i}(s)$ là

chi phí của nghiệm mà không có yêu cầu i (yêu cầu được xóa mà không chuyển đến hàng chờ). Chiến thuật ở đây là ta xóa đi những yêu cầu có chi phí cao và cố gắng thêm lại vào các tuyến với chi phí ít hơn.

Tuy nhiên, chúng ta không xóa đi chính xác các yêu cầu có chi phí cao nhất mà thay vào đó chúng ta chọn ngẫu nhiên một yêu cầu có chi phí cao. Điều này được thực hiện để tránh việc xóa các yêu cầu có chi phí cao nhất liên tục và thuật toán bị mắc trong một nghiệm tối ưu địa phương.

Thuật toán 2 Xóa yêu cầu tệ nhất

Require: $s \in \{\text{nghiệm chấp nhận được}\}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}_+$

- 1: **while** $q > 0$ **do**
 - 2: Mảng L tất cả các yêu cầu i , sắp xếp theo thứ tự giảm dần của $\text{cost}(i, s)$;
 - 3: chọn một số ngẫu nhiên y trong khoảng $[0, 1)$;
 - 4: yêu cầu $r = L[y^p | L|]$;
 - 5: xóa r khỏi s ;
 - 6: $q = q - 1$;
-

Phương pháp xóa ngẫu nhiên

Thuật toán xóa ngẫu nhiên đơn giản chọn ngẫu nhiên q yêu cầu và loại bỏ chúng khỏi nghiệm hiện tại. Kỹ thuật này có thể coi là một trường hợp đặc biệt của phương pháp xóa Shaw với $p = 1$ (S. Ropke, D. Pisinger [36]).

Phương pháp xóa yêu cầu ngẫu nhiên với tuyến

Một hạn chế của thuật toán xóa ngẫu nhiên đó là sau khi chọn ngẫu nhiên yêu cầu cần xóa, ta cần tìm tuyến đường chứa yêu cầu đó để tiến hành phép xóa yêu cầu. Việc tìm tuyến đường khá tốn chi phí khi ta cần duyệt qua toàn bộ các tuyến và duyệt qua từng yêu cầu trong tuyến đó (cỡ $O(n)$). Thay vì chọn ngẫu nhiên yêu cầu trong tập tất cả các yêu cầu, ta chọn ngẫu nhiên một tuyến và sau đó chọn ngẫu nhiên một yêu cầu trong tuyến đó. Tuyến được chọn cũng như vị trí xóa đã được lưu lại vào bộ nhớ khiến cho việc xóa yêu cầu nhanh hơn rất nhiều. Xác suất chọn không như nhau cho mọi yêu cầu (giống như phương pháp xóa ngẫu nhiên) do ta không tính đến kích thước của tuyến khi chọn ngẫu nhiên. Do đó, cải thiện này không chỉ về mặt kỹ thuật mà còn thay đổi cách thức các yêu cầu được chọn để xóa. Thực nghiệm cho thấy phương pháp xóa này cùng với phương pháp xóa yêu cầu ngẫu nhiên nhiều lần "đóng góp" vào việc tìm ra nghiệm chấp nhận được cũng như nghiệm tốt nhất (đã biết) trong suốt vòng đời của thuật toán.

Phương pháp xóa Shaw

Phương pháp xóa này được phát triển bởi Shaw [40]. Cách trình bày trong phần này đã được chỉnh sửa lại để phù hợp với VRPTW. Ý tưởng chung là xóa bỏ các yêu cầu có "liên quan", vì chúng ta hy vọng sẽ dễ dàng thêm lại các yêu cầu tương tự với nhau để tạo ra các nghiệm mới có thể tốt hơn. Nếu chúng ta chọn xóa bỏ các yêu cầu rất khác nhau, thì sau đó, việc thêm các yêu cầu mới sẽ không nhận lại được điều gì do các yêu cầu này có thể chỉ được thêm vào tại vị trí ban đầu của chúng hoặc ở các vị trí tệ. Mức độ liên quan giữa 2 yêu cầu i và j được định nghĩa dựa trên chỉ số độ liên quan $R(i, j)$. Chỉ số này càng thấp thì 2 yêu cầu càng "giống" nhau.

Thuật toán 3 Xóa yêu cầu - Shaw

Require: $s \in \{\text{nghiệm chấp nhận được}\}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}_+$

- 1: yêu cầu r được chọn ngẫu nhiên từ s ;
 - 2: tập hợp yêu cầu $\mathbb{D} = \{r\}$;
 - 3: **while** $|\mathbb{D}| < q$ **do**
 - 4: r được chọn ngẫu nhiên từ \mathbb{D} ;
 - 5: Mảng L chứa tất cả các yêu cầu thuộc s và không thuộc \mathbb{D} ;
 - 6: sắp xếp L sao cho $i < j \Rightarrow R(r, L[i]) < R(r, L[j])$;
 - 7: chọn một số ngẫu nhiên y trong khoảng $[0, 1)$;
 - 8: $\mathbb{D} = \mathbb{D} \cup L[y^p | L|]$
 - 9: xóa các yêu cầu trong \mathbb{D} khỏi s ;
-

Chỉ số độ tương đồng được sử dụng bao gồm phụ thuộc vào ba điều kiện là khoảng cách, thời gian, khối lượng. Các điều kiện này được đánh trọng số và ký hiệu lần lượt là φ , χ và ψ . Chỉ số độ tương đồng được tính như sau

$$R(i, j) = \varphi d_{ij} + \chi |t_i - t_j| + \psi |l_i - l_j| \quad (3.1)$$

d_{ij} là khoảng cách từ i tới j , t_i là thời gian khi đến địa điểm i , l_i là tải của xe tại i .

Mức độ liên quan được sử dụng để xóa các yêu cầu được mô tả trong Algorithm 3. Ban đầu, một yêu cầu được chọn ngẫu nhiên. Trong các vòng lặp tiếp theo, thuật toán sẽ thực hiện xóa các yêu cầu "giống" với các yêu cầu đã được xóa. Tham số $p \geq 1$ biểu diễn cho sự ngẫu nhiên trong cách lựa chọn yêu cầu (p càng thấp thì độ ngẫu nhiên càng cao).

Tinh thần của thuật toán Shaw là cố gắng bỏ đi tốp các yêu cầu có độ đo liên quan $R(i, j)$ nhỏ. Tốp các yêu cầu này được kiểm soát bằng tham số p . Tuy nhiên, việc

sắp xếp các yêu cầu (mảng L) theo thứ tự tăng dần của $R(r, L[i])$ là phép toán tồn chi phí. Trong thực tế cài đặt, chúng ta có thể sử dụng cấu trúc dữ liệu *min heap* để lấy ra tốp các yêu cầu có độ đo liên quan nhỏ nhất.

Hủy tuyến tệ nhất

Thuật toán hủy tuyến tệ nhất được tác giả đề xuất trong luận văn này. Tinh thần chung của thuật toán là chúng ta cố gắng bỏ đi toàn bộ yêu cầu trên một hoặc một vài tuyến đường nào đó. Việc bỏ đi cả tuyến cũng tương đương với việc làm giảm số xe cần để phục vụ khách hàng. Mục tiêu của CVRPTW là giảm tổng khoảng cách di chuyển và nghiệm thu được phải thỏa mãn các ràng buộc về tải trọng, số xe cũng như khung thời gian. Tuy nhiên, trong thực tế vận hành của một doanh nghiệp, giảm bớt được số xe phục vụ là điều rất có ý nghĩa bởi chi phí mua (thuê) xe là đắt đỏ so với việc di chuyển xa hơn một vài phần trăm.

Áp dụng tư tưởng *tham lam*, cho rằng các tuyến nên được bỏ đi là các tuyến có chi phí trung bình trên mỗi khách hàng cao. Chúng ta kì vọng có thể thêm lại các khách hàng đó vào các tuyến khác "thoáng" hơn hay là chi phí trung bình trên mỗi khách hàng thấp hơn. Chi phí trung bình trên mỗi yêu cầu được cho bởi công thức

$$\text{avg_cost}(r, s) = \frac{\text{cost}(r, s)}{\text{size}(r) - 1} \quad (3.2)$$

với r là tuyến được chọn, $\text{cost}(r, s)$ là chi phí của tuyến r trong nghiệm s , $\text{size}(r)$ là số phần tử của tuyến r . Lưu ý rằng tuyến bắt đầu và kết thúc tại nút 0.

Ngoài ra để tránh việc bỏ đi tuyến "tệ" một cách cứng nhắc, tác giả đưa vào một nhiễu nhỏ. Khi đó, công thức tính chi phí trung bình trên mỗi yêu cầu được thay đổi thành

$$\text{avg_cost}(r, s) = \frac{\text{cost}(r, s)}{\text{size}(r) - 1} + \lambda \phi d_{\max} 3w \quad (3.3)$$

với d_{\max} là khoảng cách lớn nhất giữa hai yêu cầu, ϕ là một số ngẫu nhiên trong khoảng $(-1, 1)$ và λ là một hằng số điều khiển.

Ngoài ra, chúng ta cũng không muốn bỏ đi các tuyến đang phục vụ nhiều yêu cầu vì khi thêm lại thuật toán sẽ mất rất nhiều thời gian. Chính vì thế, tác giả chỉ bỏ đi những tuyến có số yêu cầu ít hơn số yêu cầu trung bình trên mỗi tuyến của nghiệm hiện tại.

Cuối cùng, ta bỏ đi toàn bộ yêu cầu trên tuyến có số yêu cầu ít hơn số yêu cầu trung bình trên tất cả các tuyến và có chi phí trung bình trên mỗi yêu cầu cao nhất.

3.1.2 Thuật toán sửa

Phương pháp tham lam cơ bản

Heuristic tham lam cơ bản (*basic greedy*) là một kỹ thuật xây dựng đơn giản (S. Ropke, D. Pisinger [36]). Nó thực hiện tối đa n lần lặp, chèn thêm một yêu cầu trong mỗi bước. Với $\Delta f_{i,k}$ biểu diễn cho sự thay đổi hàm mục tiêu bằng cách chèn thêm yêu cầu i vào tuyến đường k tại vị trí mà giá trị tăng thêm của hàm mục tiêu là nhỏ nhất. Nếu không chèn yêu cầu i vào tuyến đường k thì ta đặt $\Delta f_{i,k} = \infty$ và $c_i = \min_{k \in K} \{\Delta f_{i,k}\}$. Nói cách khác, c_i là chi phí khi chèn thêm yêu cầu i vào vị trí tốt nhất của nghiệm hiện tại, gọi là vị trí chi phí nhỏ nhất. Cuối cùng, ta chọn yêu cầu i với $\min_{i \in U} c_i$ và chèn nó vào vị trí chi phí nhỏ nhất. Quá trình này tiếp tục cho đến khi tất cả các yêu cầu được thêm hoặc không còn yêu cầu nào nữa.

Trong mỗi vòng lặp, thuật toán chỉ thay đổi một tuyến đường (tuyến mà yêu cầu mới được thêm vào) và ta không cần phải tính toán lại chi phí chèn thêm trong tất cả các tuyến đường khác. Điểm này giúp tăng hiệu năng cho thuật toán. Đặc biệt nếu hàm mục tiêu là tổng quãng đường đi chuyển thì chúng ta có thể tính toán rất nhanh chi phí tăng thêm này. Giả sử ta cần chèn thêm yêu cầu u và giữa hai yêu cầu i và j trong tuyến đường k . Khi đó, chi phí tăng thêm của việc chèn thêm yêu cầu u vào giữa i và j là $\Delta f_{u,i,j,k} = d_{iu} + d_{uj} - d_{ij}$.

Dễ dàng nhận thấy vấn đề với cách tiếp cận này là nó thường trì hoãn việc đặt các yêu cầu có chi phí cao cho các lần lặp cuối cùng, nơi chúng ta không có nhiều cơ hội cho việc chèn thêm yêu cầu vì nhiều tuyến đường đều đã kín.

Phương pháp tham lam với nhiễu ngẫu nhiên

Để giải quyết một phần hạn chế của phương pháp tham lam cơ bản, ta có thể thêm một chút nhiễu vào hàm mục tiêu (E. Demir, T. Bektaş và G. Laporte [12]). Điều này giúp thuật toán có thể không chọn chèn yêu cầu vào tuyến làm tăng chi phí ít nhất mà có thể là ít thứ hai hoặc thứ ba (chẳng hạn). Nhiễu được cho bởi công thức

$$\eta = \lambda p d_{\max}, \quad (3.4)$$

với η là nhiễu, d_{\max} là khoảng cách lớn nhất giữa hai yêu cầu, p là một số ngẫu nhiên trong khoảng $(-1, 1)$ và λ là một hằng số điều khiển. Sau đó ta gán

$$\Delta f_{u,i,j,k} := \Delta f_{u,i,j,k} + \eta. \quad (3.5)$$

Phương pháp heuristic hối tiếc

Heuristic hối tiếc (*regret heuristic*) đã được sử dụng bởi J.-Y. Potvin và J.-M. Rousseau [34] cho VRPTW. Phương pháp này cố gắng cải thiện nhược điểm của kỹ thuật tham lam bằng cách kiểm tra lại kết quả sau khi chọn chèn thêm yêu cầu. Đặt $x_{ik} \in \{1, \dots, m\}$ là biến biểu diễn tuyến đường cho yêu cầu i có chi phí chèn thêm vào thấp thứ k , điều này có nghĩa là $\Delta f_{i,x_{ik}} \leq \Delta f_{i,x_{ik'}}$ với mọi $k \leq k'$. Sử dụng ký hiệu này, ta có thể biểu diễn c_i từ phần 3.1.2, $c_i = \Delta f_{i,x_{i1}}$. Trong phương pháp này, chúng ta có thể định nghĩa một giá trị *regret* $c_i^* = \Delta f_{i,x_{i2}} - \Delta f_{i,x_{i1}}$. Nói cách khác, giá trị *regret* là khoảng cách giữa chi phí của việc chèn thêm yêu cầu vào tuyến đường tốt nhất so với tuyến đường tốt thứ hai. Trong mỗi vòng lặp, thuật toán chọn ra yêu cầu i thỏa mãn điều kiện $\max_{i \in V \setminus \{0\}} \{c_i^*\}$. Nói một cách không chính thống, chúng ta chọn việc chèn yêu cầu mà chúng ta sẽ "hối tiếc" nhất nếu không thực hiện nó ngay tại vòng lặp hiện tại.

Ta có thể mở rộng phương pháp này để định nghĩa một lớp các phương pháp heuristic hối tiếc gọi là phương pháp regret-k heuristic là một phương pháp mà mỗi lần thêm yêu cầu vào phương án cần phải thỏa mãn điều kiện

$$\max_{i \in V \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{j=1}^k (\Delta f_{i,x_{ij}} - \Delta f_{i,x_{i1}}) \right\}. \quad (3.6)$$

Nếu một vài yêu cầu không thể được chèn thêm vào ít nhất $m - k + 1$ tuyến đường thì yêu cầu đó sẽ được chèn vào tuyến ít yêu cầu nhất. Nếu ta vẫn không thể chèn yêu cầu vào tuyến này thì ta sẽ chèn vào tuyến giúp tăng chi phí ít nhất. Yêu cầu được chèn vào vị trí (trong tuyến) làm tăng ít chi phí nhất. Với $k > 2$ thì thuật toán sẽ tính toán chi phí của việc thêm vào một yêu cầu với k tuyến đường tốt nhất và chèn yêu cầu mà khoảng cách chi phí giữa việc thêm nó vào tuyến đường tốt nhất với các tuyến đường tốt thứ $k - 1$ là lớn nhất.

Với việc xét tốp k vị trí tốt nhất của mỗi yêu cầu, hiệu năng của *regret-k* sẽ không tốt bằng *basic greedy*. Để dễ hình dung, với n vị trí có thể chèn yêu cầu, trong mỗi bước lặp của thuật toán, với *basic greedy* ta cần duyệt $O(n)$ lần qua các vị trí để tìm ra vị trí chèn tốt nhất; với *regret-k* nếu sử dụng heap ta mất $O(k \times n)$ lần duyệt để lấy ra tốp k và $O(k)$ lần duyệt nữa để lấy ra yêu cầu mà khoảng cách Δf trong top-k lớn nhất. Trong thực tế cài đặt, tác giả sử dụng đến $k = 5$ và regret-k chứng tỏ được nó là một phương pháp mạnh và đáng để đánh đổi một chút về mặt hiệu năng khi so sánh với regret-2 heuristic hay thuật toán tham lam cơ bản.

3.1.3 Tiêu chí chấp nhận nghiệm

Các tiêu chí chấp nhận nghiệm được tóm lược qua bảng 3.1

Phương pháp	Mô tả
Bước ngẫu nhiên (Random Walk)	Mọi nghiệm s' đều được chấp nhận
Chấp nhận tham lam (Greedy Acceptance)	Nghiệm s' được chấp nhận nếu chi phí của nó là nhỏ hơn so với nghiệm hiện tại
Mô phỏng luyện kim (Simulated Annealing)	Mọi nghiệm cải thiện s' được chấp nhận. Nếu $c(s') > c(s)$ thì s' được chấp nhận với xác suất $\exp\{\frac{c(s)-c(s')}{T}\}$ với T là nhiệt độ. Nhiệt độ T giảm sau mỗi vòng lặp với một hệ số Φ
Chấp nhận với ngưỡng (Threshold Acceptance)	Nghiệm s' được chấp nhận nếu $c(s') - c(s) < T$ với T là ngưỡng, ngưỡng này được giảm sau mỗi vòng lặp với hệ số Φ
Đại hồng thủy (Great Deluge Algorithm)	Nghiệm s' được chấp nhận nếu $c(s') < L$ với một ngưỡng L , ngưỡng này chỉ giảm nếu nghiệm được chấp nhận và giảm với hệ số Φ

Bảng 3.1: Tiêu chí chấp nhận nghiệm.

Trong thực nghiệm, tác giả cài đặt tất cả các tiêu chí chấp nhận trên, tuy nhiên mô phỏng luyện kim (*Simulated Annealing*) cho hiệu năng và chất lượng nghiệm tốt nhất. Nhiệt độ ban đầu được cấu hình trước là T_{start} . Qua mỗi bước lặp, nhiệt độ được giảm đi $T := T \times \Phi$ với $0 < \Phi < 1$ được gọi là hệ số làm lạnh. Việc lựa chọn T_{start} phụ thuộc vào cấu hình bài toán, do đó, thay vì đặt T_{start} là một tham số cố định, ta sẽ tính toán nó dựa trên cấu hình đầu vào bằng cách sử dụng nghiệm khởi tạo ban đầu. Chi phí của nghiệm khởi tạo là z (bỏ qua chi phí của các yêu cầu trong hàng chờ). Nhiệt độ ban đầu được đặt sao cho nghiệm tệ hơn $w\%$ được chấp nhận với xác suất 0.5. w lúc này là tham số điều khiển cho nhiệt độ ban đầu.

3.2 Tìm kiếm lân cận rộng thích ứng

Tìm kiếm lân cận rộng thích ứng (*adaptive large neighbourhood search - ALNS*) được giới thiệu bởi S. Ropke và D. Pisinger [36] là một mở rộng của LNS. Thay vì chỉ sử dụng một chiến thuật hủy và một chiến thuật thêm lại yêu cầu như LNS, ALNS cho phép lựa chọn nhiều toán tử hủy và thêm lại. Việc này cho phép thuật toán tìm kiếm không gian nghiệm một cách linh hoạt hơn và khó bị mắc ở một nghiệm tối ưu cục bộ. Điểm thú vị của ALNS là các thuật toán hủy và thêm lại không được chọn một cách ngẫu nhiên mà lựa chọn có trọng số phụ thuộc vào trạng thái (nghiệm hiện tại) của bài toán.

3.2.1 Lựa chọn phương pháp xóa và thêm lại

Để lựa chọn phương pháp xóa và thêm lại, ta gán cho mỗi heuristic một trọng số khác nhau và sử dụng nguyên tắc "bánh xe lựa chọn". Nếu có k heuristic với trọng số $w_i, i \in \{1, \dots, k\}$, ta chọn heuristic j với xác suất

$$p_j = \frac{w_j}{\sum_{i=1}^k w_i}. \quad (3.7)$$

Lưu ý rằng, việc lựa chọn thuật toán xóa và thêm lại là độc lập với nhau. Các trọng số này có thể được thiết lập thủ công và không đổi trong suốt vòng đời của việc tìm kiếm hoặc nó có thể được điều chỉnh tự động để "thích ứng" với trạng thái hiện tại của hệ. Một cách điều chỉnh các tham số này tự động được trình bày ngay sau đây.

3.2.2 Điều chỉnh tham số tự động

Trọng số được điều chỉnh mỗi khi có nghiệm mới được chấp nhận. Ý tưởng chung là theo dõi một điểm số đại diện cho độ hiệu quả của thuật toán trong các vòng lặp gần đây. Điểm số càng cao thì thuật toán được chọn càng hiệu quả. Quá trình tìm kiếm được chia thành nhiều bước, mỗi bước là một số vòng lặp. Điểm của mỗi heuristic được đặt là 0 khi bắt đầu và được tăng thêm $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tùy thuộc vào tình huống.

Trong mỗi bước, thao tác xóa và thêm lại được cập nhật một lượng như nhau vì ta không chắc sự "cải thiện" nghiệm đến từ việc xóa hay thêm lại yêu cầu. Mỗi khi kết thúc bước, ta tính toán lại trọng số mới sử dụng các điểm số trên. Gọi ω_{ij} là trọng số của heuristic i trong bước j . Ta đánh các trọng số như nhau tại bước đầu tiên,

Tham số	Mô tả
σ_1	Hành động xóa-chèn cuối cùng dẫn đến một nghiệm mới tốt hơn nghiệm tốt nhất toàn cục.
σ_2	Hành động xóa-chèn cuối cùng dẫn đến một nghiệm mới có chi phí tốt hơn chi phí của nghiệm hiện tại.
σ_3	Hành động xóa-chèn cuối cùng dẫn đến một nghiệm mới có chi phí tệ hơn chi phí của nghiệm hiện tại nhưng thỏa mãn điều kiện chấp nhận nghiệm.

Bảng 3.2: Tham số cập nhật trọng số.

sau đó khi bước j kết thúc, ta tính lại trọng số cho tất cả các heuristic để sử dụng cho bước $j + 1$ như sau

$$\omega_{i,j+1} = \omega_{ij}(1 - r) + r \frac{\pi_i}{\theta_i}. \quad (3.8)$$

Trong đó π_i là điểm số của heuristic i trong bước j và θ_i là số lần ta cố gắng sử dụng heuristic i trong bước j . Tham số r là tham số điều khiển tốc độ điều chỉnh trọng số. Nếu $r = 0$, nghĩa là chúng ta không sử dụng điểm để điều chỉnh trọng số hay nói cách khác là các trọng số được giữ nguyên từ trong suốt quá trình tìm kiếm. Nếu $r = 1$, nghĩa là ta lấy điểm thu được từ bước gần nhất để quyết định trọng số.

Việc điều chỉnh trọng số như trên làm tăng xác suất chọn thuật toán xóa (chèn) đã mang lại hiệu quả ở bước trước đó. Về cơ bản, với việc sử dụng chiến thuật điều chỉnh trọng số như trên, ta kì vọng rằng các thuật toán xóa (chèn) đã hiệu quả ở bước trước thì cũng sẽ hiệu quả ở bước tiếp theo. Trong thực nghiệm, các tham số được lựa chọn lần lượt là $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 4$ và $\sigma_3 = 2$.

3.2.3 Thêm nhiều khi chỉnh tham số tự động

Như đã trình bày, với việc sử dụng chiến thuật lựa chọn tham số tự động như trên, ta kì vọng rằng thuật toán nếu đang hiệu quả thì nó sẽ tiếp tục hiệu quả. Tuy nhiên việc cộng một lượng cố định vào thuật toán đó về lâu dài (khi trải qua nhiều vòng lặp) thì trọng số của nó trở lên lớn dẫn đến xác suất lựa chọn thuật toán này cũng lớn theo. Chúng ta cũng chưa sử dụng yếu tố vòng lặp (hay thời gian chạy). Do đó, tác giả đề xuất ý tưởng đơn giản là nếu rất "lâu" rồi ta mới có một thuật toán hiệu quả thì ta cũng nên điều chỉnh trọng số của nó theo "thời gian chờ đó". Giả sử sau m vòng lặp, chúng ta mới lại có một nghiệm được chấp nhận từ lần cuối cùng

nghiệm được chấp nhận, trọng số của thuật toán sẽ được điều chỉnh một lượng tỉ lệ với $1 - e^{-\gamma m}$. Hàm exp được sử dụng để chuẩn hóa lượng này trong khoảng $(0, 1)$ khi m lớn hoặc nhỏ. Cuối cùng ta có biểu thức cho trọng số của thuật toán như sau

$$\omega_{i,j+1} = \omega_{ij}(1 - r) + r \frac{\pi_i}{\theta_i} + \alpha\beta(1 - e^{-\gamma m}) \quad (3.9)$$

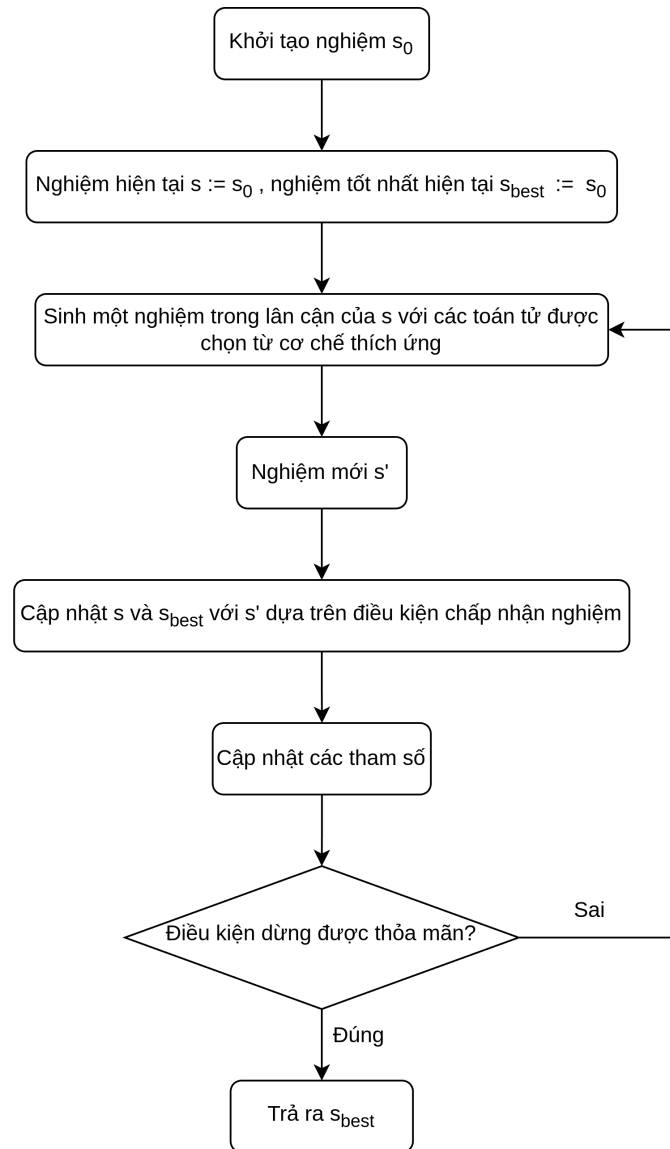
với α (có thể âm hoặc dương) và γ (dương) là các tham số điều khiển, β là một số ngẫu nhiên trong khoảng $(0, 1)$. Trong phần thực nghiệm 4.2, tác giả sẽ chỉ ra sự vượt trội về hiệu năng khi thêm nhiều vào việc điều chỉnh trọng số như trên. Chính vì vậy, thuật toán được đặt tên là B-ALNS (*Boosted - Adaptive Large Neighborhood Search*).

3.2.4 Số lượng yêu cầu bỏ đi và thêm lại

Số lượng yêu cầu bỏ đi và thêm lại trong mỗi vòng lặp là một tham số quan trọng. Nếu số lượng yêu cầu bỏ đi và thêm lại quá ít, thuật toán sẽ không thể khám phá được không gian nghiệm một cách đủ lớn. Nếu số lượng yêu cầu bỏ đi và thêm lại quá nhiều, thuật toán sẽ tốn nhiều thời gian tính toán và không thể tìm được nghiệm tốt trong thời gian hợp lý. Việc lựa chọn một con số phù hợp với kích thước của cấu hình (đầu vào) và tài nguyên của máy tính không đơn giản. Trong thực nghiệm, tác giả đã thử nghiệm với nhiều con số khác nhau và nhận thấy rằng, việc sử dụng một lượng yêu cầu bỏ đi và thêm lại ngẫu nhiên trong một khoảng nhất định (phụ thuộc vào kích thước cấu hình) thu được chất lượng nghiệm cũng như hiệu năng tổng thể tốt hơn so với việc chỉ sử dụng một con số cố định. Số yêu cầu được bỏ đi thường không vượt quá 10% kích thước cấu hình theo D. Pisinger và S. Ropke [33]. Đối với các cấu hình kích thước lớn, số lượng yêu cầu bỏ đi nằm trong khoảng từ 30 đến 60.

3.3 Ứng dụng ALNS vào VRPTW

Tiếp theo, chúng ta sẽ xây dựng chương trình để giải VRPTW với ALNS. Mã giả của thuật toán LNS đã được trình bày ở các phần trước. Ngoài ra, để tránh sự dài dòng không cần thiết, tác giả chỉ đưa ra những thành phần chính cùng với một số lưu ý quan trọng khi cài đặt. Chương trình được xây dựng theo tiêu chuẩn lập trình hướng đối tượng. Các lớp chính cùng với các phương thức được giải thích chi tiết trong phần (3.3.1) và cách thức triển khai chương trình trong thực nghiệm được trình bày trong phần (3.3.2).



Hình 3.2: Lược đồ chính của ALNS.

3.3.1 Các lớp chính

Trước hết, chúng ta xây dựng các lớp chính. Các lớp được xây dựng với kiểu dữ liệu của ngôn ngữ `C++`, ta hoàn toàn có thể triển khai tương tự với các ngôn ngữ lập trình khác. Các kiểu số nguyên được sử dụng là `uint16_t` với giá trị lớn nhất là 65535 (đủ lớn để lưu số lượng khách hàng thực tế cũng như nhu cầu hay tải trọng của khách hàng...) để tiết kiệm bộ nhớ. Các kiểu số thực được sử dụng là `float` thay vì `double`. Đôi khi, trong một số bộ thư viện (như `Google OR-Tools` chẳng hạn), thay vì sử dụng số thực để lưu khoảng cách hay thời gian di chuyển giữa các yêu cầu hoặc giá trị hàm mục tiêu, số nguyên được sử dụng để tiết kiệm bộ nhớ cũng như tính toán nhanh hơn. Nếu cần nhiều hơn độ chính xác, ta có thể nhân tất cả với một hệ số (1000 chẳng hạn để đạt độ chính xác 3 chữ số sau dấu chấm động)

và chia lại khi nhận kết quả cuối cùng. Các lớp được liệt kê dưới đây cùng với giải thích cụ thể của từng thuộc tính và phương thức.

Customer
uint16_t id vector<uint16_t> coord uint16_t demand vector<uint16_t> time_window uint16_t service_time

Hình 3.3: Lớp thuộc tính của khách hàng.

Customer : lớp lưu các thuộc tính của một yêu cầu. Đối với VRPTW, mỗi yêu cầu là một khách hàng (đơn).

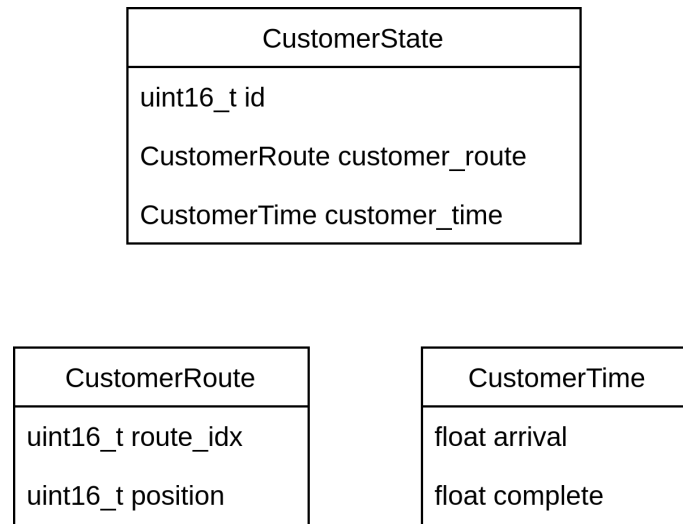
- **id** : id của khách hàng.
- **coord** : mảng lưu tọa độ của khách hàng (vĩ độ, kinh độ). Đôi khi chúng ta không cần quan tâm tới tọa độ của khách hàng mà quan tâm tới khoảng cách hoặc thời gian di chuyển giữa các khách hàng, nên thuộc tính này có thể không cần thiết đối với một số cấu hình trong thực tế.
- **demand** : nhu cầu (về tải) của khách hàng.
- **time_window** : mảng lưu khung thời gian để phục vụ khách hàng. Mảng gồm 2 phần tử lần lượt là thời điểm sớm nhất và muộn nhất để phục vụ khách hàng.
- **service_time** : thời gian phục vụ khách hàng.

CustomerRoute : lớp lưu trạng thái về tuyến đường.

- **route_idx** : id của tuyến chứa khách hàng.
- **position** : vị trí của khách hàng trong tuyến.

CustomerTime : lớp lưu trạng thái về thời gian của yêu cầu.

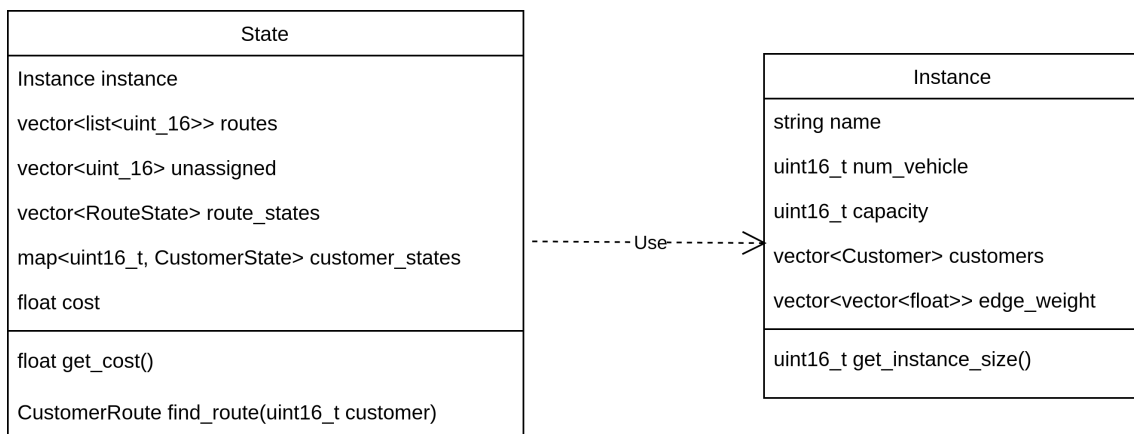
- **arrival** : thời gian xe đến vị trí của khách hàng.
- **complete** : thời gian xe hoàn thành phục vụ khách hàng.



Hình 3.4: Lớp trạng thái của khách hàng.

CustomerState : lớp lưu trạng thái của khách hàng.

- **id** : id của khách hàng.
- **customer_route** : trạng thái về tuyến đường của khách hàng.
- **customer_time** : trạng thái về thời gian của khách hàng.



Hình 3.5: Lớp trạng thái của hệ.

Instance : lớp lưu cấu hình của bài toán.

- **name** : tên cấu hình (ví dụ **C101** trong tập Solomon (1987)).
- **num_vehicle** : số xe tối đa được sử dụng.
- **capacity** : tải trọng của mỗi xe.

- `customers` : mảng các yêu cầu.
- `edge_weight` : ma trận trọng số cạnh. Ma trận này có thể là ma trận khoảng cách hay thời gian di chuyển giữa các yêu cầu.
- `get_instance_size()` : phương thức trả về kích thước của cấu hình (số khách hàng cộng với kho).

State : lớp lưu trạng thái của bài toán.

- `instance` : tham chiếu tới cấu hình bài toán.
- `routes` : các tuyến đường. Các tuyến đường được tổ chức như một `vector` với mỗi thành phần là một `linked_list`. Cấu trúc dữ liệu `linked_list` được lựa chọn phù hợp với ALNS khi ta có thể bỏ đi hoặc chèn thêm các yêu cầu vào giữa tuyến một cách nhanh chóng. Trong nhiều thuật toán khác, các yêu cầu được trao đổi giữa các tuyến thì `vector` là phù hợp hơn do ta có thể truy cập đến phần tử (yêu cầu) theo index rất nhanh mà không phải duyệt lần lượt từ đầu mảng giống như `linked_list`. Việc sử dụng `linked_list` cho ALNS là cực kì phù hợp, thao bỏ đi hay chèn thêm phần tử vào giữa tuyến nhanh hơn khoảng 250 lần khi so sánh với việc sử dụng cấu trúc dữ liệu `vector` !
- `unassigned` : danh sách các khách hàng chưa được phục vụ bởi bất kì xe nào.
- `route_states` : trạng thái của các tuyến, mỗi phần tử lưu lại tải và chi phí của tuyến.
- `customer_states` : trạng thái của các khách hàng.
- `cost` : tổng chi phí của hệ (hay nghiệm) hiện tại.
- `get_cost()` : phương thức trả về cost hiện tại.
- `find_route(customer)` : phương thức trả về trạng thái của một khách hàng với đầu vào là id của khách hàng.

3.3.2 Triển khai thuật toán

Chương trình được chia làm ba giai đoạn *Tiền xử lý*, *Chương trình chính*, *Đo đạc*.

- *Tiền xử lý*: trong giai đoạn này, các cấu hình trong các tập dữ liệu, được đọc vào và tính toán ma trận khoảng cách giữa các yêu cầu và lưu trữ vào

các tệp. Các tệp có định dạng json và có schema như đối tượng `Instance` đã trình bày được trình bày trong mục 3.3.1. Các tệp này sẽ được đọc vào trong giai đoạn *Chương trình chính* để giảm thiểu thời gian tính toán. Để đơn giản, phần tiền xử lý sử dụng ngôn ngữ lập trình `python`.

- *Chương trình chính*: Đây là chương trình triển khai ALNS, được viết bằng ngôn ngữ `C++`. Các độ đo của chương trình được ghi ra các tệp logs để sử dụng cho giai đoạn *do đạc*.
- *Do đạc*: Trong giai đoạn này, các tệp logs được đọc vào và các độ đo được tính toán và phân tích.

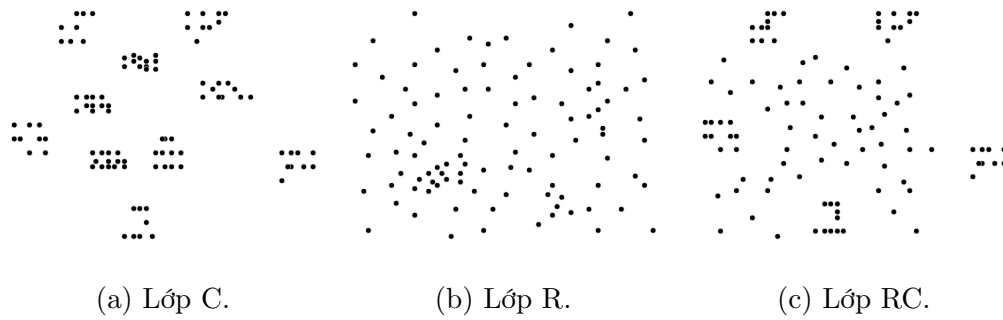
Một trong những điểm mạnh của ALNS là triển khai được song song. Chúng ta có thể chạy nhiều luồng cùng một lúc để tăng tốc độ tính toán. Điều này đặc biệt hữu ích khi cấu hình cần giải có nhiều yêu cầu. Khi tìm kiếm nghiệm trong lân cận của nghiệm hiện tại, ta khởi tạo nhiều luồng cùng tìm kiếm. Điều này không những tăng tốc chương trình mà còn giúp cho thuật toán khó bị mắc trong nghiệm tối ưu cục bộ hơn khi triển khai đơn luồng do sự đa dạng của việc tìm kiếm (bằng nhiều luồng). Ngoài ra có những cách triển khai đa luồng khác. Ví dụ, trong thuật toán "hủy" và "sửa", ta hoàn toàn có thể bỏ đi các yêu cầu hoặc thêm lại các yêu cầu một cách song song từ các tuyến đường khác nhau.

Trong thực tế, tác giả chọn cách triển khai đầu tiên vì đơn giản và dễ hiểu. Chúng ta chỉ cần khởi tạo các luồng một lần mà không cần phải cấp lại tài nguyên. Với cách làm thứ hai, ta liên tục phải tạo các luồng mới và cấp lại tài nguyên cho chúng, điều này có thể làm giảm hiệu năng của chương trình vì thực tế thì việc khởi tạo luồng là đắt đỏ. Tác giả cũng thử nghiệm cách làm thứ hai với thư viện `OpenMP` (là một thư viện hỗ trợ lập trình bất đồng bộ và song song nổi tiếng dành cho `C++`) tuy nhiên hiệu năng không đạt tốt như cách triển khai đa luồng đầu tiên.

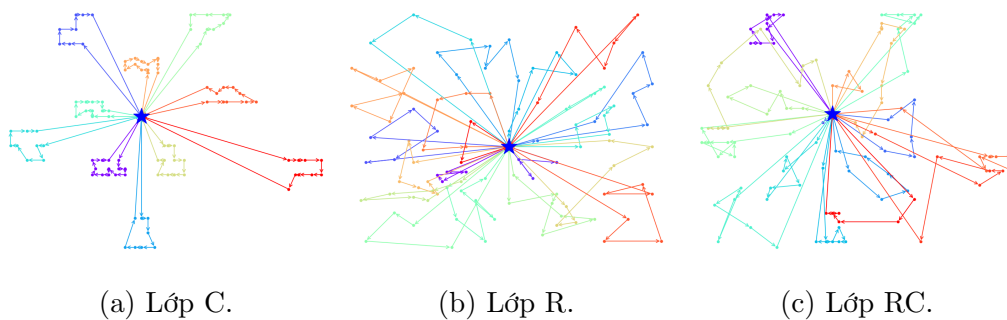
Chương 4

Thực nghiệm và kết quả

Trong phần này, chúng ta sẽ xem xét kết quả thực nghiệm thu được khi áp dụng ALNS cho VRPTW với hai tập dữ liệu của Solomon [41] năm 1987 và H. Gehring và J. Homberger [19] năm 1999. Ở cả hai tập, các bộ dữ liệu được chia thành 3 loại C, R và RC. Với dữ liệu lớp C, các yêu cầu được phân thành các cụm rõ rệt, lớp R là hoàn toàn ngẫu nhiên và lớp RC là sự kết hợp của hai lớp trên. Tác giả chỉ xem xét các tập từ 100 yêu cầu trở lên (bỏ qua tập Solomon 25, 50 yêu cầu vì nhìn chung số lượng yêu cầu như vậy là quá nhỏ để nhận thấy sự khác biệt khi so sánh ALNS với các thuật toán khác).



Hình 4.1: Lớp các cấu hình.



Hình 4.2: Minh họa lời giải cho các lớp cấu hình.

Thí nghiệm được chạy trên CPU Intel Xeon E5-2680 v4 @ 2.40GHz với Ubuntu 22.04.1 LTS. Mã nguồn được viết bằng ngôn ngữ C++ và được biên dịch bằng GCC 11.4.0 với các tùy chọn tối ưu hóa -O3. Chương trình được chạy với 8 luồng.

4.1 Chất lượng nghiệm

Trong phần này, tác giả đưa ra các số liệu thực nghiệm về giá trị hàm mục tiêu khi áp dụng ALNS giải VRPTW. Do thuật toán sử dụng rất nhiều tham số ngẫu nhiên nên chúng ta không tiến hành chạy một lần mà chạy nhiều lần để thu được kết quả tốt nhất cũng như kết quả trung bình và đánh giá độ ổn định của thuật toán. Độ ổn định được đánh giá bằng độ lệch chuẩn của các kết quả đo giá trị hàm mục tiêu. Thực tế số lần chạy không quá lớn do thời gian chạy mỗi cấu hình là khá lâu nhưng tác giả vẫn cố gắng đưa vào độ đo độ lệch chuẩn để phần nào đánh giá được độ ổn định của thuật toán. Về mặt thống kê, điều này chưa hẳn là đúng đắn tuy nhiên ta vẫn thấy được một phần sự ổn định của ALNS qua các kết quả đo được. Số xe được sử dụng cũng được tác giả chỉ ra. Ta biết rằng số xe sử dụng ảnh hưởng rất nhiều đến hàm mục tiêu. Về cơ bản, khi có quá nhiều xe được sử dụng thì chất lượng nghiệm là tệ. Lâu dài, khi hàm mục tiêu "gần" hơn với giá trị tối ưu thì số xe cũng ổn định ở một mức nào đó và nhìn chung là giảm so với nghiệm ban đầu (được khởi tạo). Các kết quả sau đó được so sánh với nghiệm tốt nhất đã biết được lấy từ trang CVRPLIB (<http://vrp.galgos.inf.puc-rio.br/index.php/en/>). Sintef (<https://www.sintef.no/>) cũng là một nguồn được sử dụng khá rộng rãi trong các bài báo khoa học nhưng nghiệm được báo cáo có chất lượng không tốt bằng CVRPLIB.

4.1.1 Số lượng yêu cầu liệu nhỏ

Trước tiên, chúng ta bắt đầu với tập dữ liệu Solomon (1987) được đưa ra bởi Solomon [41]. Solomon (1987) là một tập dữ liệu nổi tiếng được sử dụng để đánh giá chất lượng trong hầu hết các nghiên cứu về VRP. Các cấu hình và nghiệm được định dạng tiêu chuẩn bao gồm tên cấu hình, số xe tối đa được sử dụng, tải trọng mỗi xe, ID của yêu cầu, tọa độ của các yêu cầu, nhu cầu (về tải) của mỗi yêu cầu, khung thời gian và thời gian phục vụ tại mỗi yêu cầu. Thông tin về kho được cho bởi ID 0. Với các cấu hình theo tiêu chuẩn định dạng Solomon (kể cả các cấu hình khác ngoài Solomon (1987)), tốc độ của xe được hiểu là 1 đơn vị; nói cách khác, thời gian di chuyển giữa các yêu cầu bằng với khoảng cách giữa chúng.

Tập dữ liệu được chia thành 3 lớp C, R và RC. Solomon sinh hai tập loại 1 và loại 2. Quy tắc đặt tên `{class}{type}{num}` với `class` là lớp C, R hoặc RC, `type` là loại 1 hoặc 2, `num` là số thứ tự của cấu hình. Mỗi lớp có từ 8 đến 12 cấu hình. Các cấu hình cũng được chia thành ba nhóm với 25, 50 và 100 yêu cầu. Trong luận văn này, tác giả chỉ đưa ra các kết quả cho các tập 100 yêu cầu do các cấu hình 25

hay 50 yêu cầu là khá nhỏ và ta không thấy rõ sự khác biệt do hầu hết các thuật toán đều cho kết quả rất tốt.

ins	cost	nv	bkcost	bknv	gap	ins	cost	nv	bkcost	bknv	gap
c101	828.94	10	827.30	10	0.20	c201	591.56	3	589.10	3	0.42
c102	828.94	10	827.30	10	0.20	c202	591.56	3	589.10	3	0.42
c103	828.06	10	826.30	10	0.21	c203	591.17	3	588.70	3	0.42
c104	824.78	10	822.90	10	0.23	c204	590.60	3	588.10	3	0.42
c105	828.94	10	827.30	10	0.20	c205	588.88	3	586.40	3	0.42
c106	828.94	10	827.30	10	0.20	c206	588.49	3	586.00	3	0.43
c107	828.94	10	827.30	10	0.20	c207	588.29	3	585.80	3	0.42
c108	828.94	10	827.30	10	0.20	c208	588.32	3	585.80	3	0.43
c109	828.94	10	827.30	10	0.20						
avg					0.20						0.42

Bảng 4.1: Kết quả đo với tập Solomon C.

Trong đó

- *ins*: cấu hình
- *cost*: chi phí thu được với ALNS
- *nv*: số xe được sử dụng
- *bkcost*: chi phí tốt nhất đã biết
- *bknv*: số xe tốt nhất đã biết
- *gap (%)*: khoảng cách so với nghiệm tốt nhất đã biết
- *avg*: trung bình cộng các giá trị theo cột tương ứng

Với các cấu hình loại C, ALNS cho nghiệm cách nghiệm tốt nhất đã biết trung bình 0.20% và 0.42% cho C1 và C2. Trong thực tế, đối với các doanh nghiệp giao vận nhỏ, hoặc một nhóm người giao hàng thì số lượng yêu cầu như vậy là bình thường. Các nhóm giao hàng nhỏ thường nhận các yêu cầu được phân cụm một cách tương đối (theo khu vực địa lý) như vậy.

Thí nghiệm được thiết lập có thời gian timeout một phút, chạy năm lần và lấy kết quả tốt nhất. Tập C1 và C2 tương đối nhỏ và đã phân cụm nên trong thực tế thuật toán chạy rất nhanh để ra được nghiệm tốt và không có sự khác biệt giữa các lần chạy, trên CPU được thí nghiệm, ALNS mất dưới 1 giây để tìm ra nghiệm kém hơn nghiệm tốt nhất đã biết dưới 1%.

instance	alns best	nv	bkcst	bknv	gap (%)
r101	1,642.88	20	1,637.70	20	0.32
r102	1,472.81	18	1,466.60	18	0.42
r103	1,213.62	15	1,208.70	14	0.41
r104	976.61	11	971.50	11	0.53
r105	1,360.78	15	1,355.30	15	0.40
r106	1,239.37	13	1,234.60	13	0.39
r107	1,073.60	12	1,064.60	11	0.85
r108	944.44	10	932.10	10	1.32
r109	1,152.38	13	1,146.90	13	0.48
r110	1,078.59	12	1,068.00	12	0.99
r111	1,053.50	12	1,048.70	12	0.46
r112	955.68	10	948.60	10	0.75
avg					0.61

Bảng 4.2: Kết quả đo với tập Solomon R1.

Tập R1 và R2 có các yêu cầu được tạo hoàn toàn ngẫu nhiên thế nên cũng có nhiều nghiệm chấp nhận được và thuật toán cũng khó bị bẫy ở một nghiệm tối ưu địa phương. Tuy nhiên, thuật toán cũng mất nhiều thời gian để tìm nghiệm tối ưu hơn do có nhiều nghiệm thỏa mãn các ràng buộc. Riêng với tập R2, ALNS đã tìm ra nghiệm với số xe ít hơn nghiệm tốt nhất đã biết mà tổng khoảng cách chỉ chênh lệch nhỏ. Lớp R có thể được sử dụng để mô phỏng các yêu cầu ở những vùng thưa dân cư như nông thôn chẳng hạn. Các yêu cầu thưa thớt hơn ở thành phố và khoảng cách giữa các yêu cầu cũng không gần nhau (các yêu cầu không tập trung thành các cụm rõ rệt). Việc đặt số lượng lớn các bưu cục ở vùng nông thôn là không khả thi về mặt chi phí vận hành cho các doanh nghiệp. Như vậy, sử dụng một thuật toán tối ưu nào đó là tiết kiệm chi phí (quãng đường) rất nhiều so với việc giao hàng một cách ngẫu nhiên hay theo quy tắc "tham lam".

instance	alns best	nv	bkcst	bknv	gap (%)
r201	1,152.96	7	1,143.20	8	0.32
r202	1,035.32	7	1,029.60	8	0.42
r203	880.90	6	870.80	6	0.41
r204	743.91	4	731.30	5	0.53
r205	958.81	5	949.80	5	0.40
r206	883.92	5	875.90	5	0.39
r207	806.31	5	794.00	4	0.85
r208	948.57	4	701.00	4	1.77
r209	717.53	5	854.80	5	0.48
r210	909.32	5	900.50	6	0.99
r211	1,053.50	5	746.70	4	0.46
avg					1.38

Bảng 4.3: Kết quả đo với tập Solomon R2.

Tương tự như lớp R, ALNS vẫn thể hiện rất tốt cho cấu hình lớp RC khi cho khoảng cách trung bình so với nghiệm tốt nhất đã biết là 0.36% và 0.74% cho RC1 và RC2. Với một số cầu hình **rc201**, **rc202** và **rc206**, ALNS cũng tìm được nghiệm với số xe ít hơn so với nghiệm tốt nhất đã biết. Việc tiết kiệm được số xe về tổng thể là rất có ý nghĩa trong thực tế bởi chi phí thuê hay mua xe, trả lương cho tài xế và vận hành... là lớn hơn nhiều so với khi tiết kiệm được một vài phần trăm về quãng đường. Tuy nhiên, với một số cấu hình **rc1**, ALNS sử dụng nhiều xe hơn.

Nhìn chung, với tập dữ liệu dưới 100 yêu cầu, ALNS luôn cho kết quả tốt với số xe cần sử dụng ít. Trong quá trình thực nghiệm, tác giả cũng nhận thấy các kết quả chênh lệch nhau rất ít giữa các lần chạy (dưới 1%). Như vậy, ta có thể đưa ra một nhận xét sớm rằng ALNS đáp ứng tốt cho các cấu hình VRPTW với số lượng yêu cầu nhỏ (dưới 100 yêu cầu). Điều này gợi ý sử dụng ALNS cho các bài toán thực tế của doanh nghiệp nhỏ hoặc ít nhất là cho các bưu cục (ở các khu vực khác nhau) của các doanh nghiệp lớn.

instance	alns best	nv	bkcst	bknv	gap (%)
rc101	1,623.58	16	1,619.80	15	0.23
rc102	1,461.23	14	1,457.40	14	0.26
rc103	1,266.62	11	1,258.00	11	0.69
rc104	1,136.91	10	1,132.30	10	0.41
rc105	1,518.58	16	1,513.70	15	0.32
rc106	1,376.99	13	1,372.70	12	0.31
rc107	1,211.11	12	1,207.80	12	0.27
rc108	1,118.13	11	1,114.20	11	0.35
avg					0.36

Bảng 4.4: Kết quả đo với tập Solomon RC1.

instance	alns best	nv	bkcst	bknv	gap (%)
rc201	1,274.61	8	1,261.80	9	1.02
rc202	1,099.54	6	1,092.30	8	0.66
rc203	931.16	5	923.70	5	0.81
rc204	788.66	4	783.50	4	0.66
rc205	1,157.66	7	1,154.00	7	0.32
rc206	1,060.50	6	1,051.10	7	0.89
rc207	966.08	6	962.90	6	0.33
rc208	785.73	4	776.10	4	1.24
avg					0.74

Bảng 4.5: Kết quả đo với tập Solomon RC2.

4.1.2 Số lượng yêu cầu lớn và rất lớn

Trong phần này, tác giả tiến hành thực nghiệm ALNS với tập dữ liệu lớn hơn với số lượng yêu cầu từ 200 lên tới 1000. Về con số 1000 so với 100 không làm chúng ta cảm thấy sự khác biệt, nhưng lưu ý rằng, độ phức tạp của bài toán là giai thừa, $O(1000!)$ là một con số lớn khủng khiếp! Tập dữ liệu được sử dụng được sinh trong H. Gehring, J. Homberger [19] (sau đây tác giả gọi là tập HG cho ngắn gọn). Các cấu hình được ghi theo tiêu chuẩn Solomon đã được trình bày trong phần 4.1.1. Quy tắc đặt tên được quy ước như sau `{class}{type}_{size}_{num}` với `class` là lớp cấu hình C, R hay RC; `type` là loại 1 hoặc 2 (tương tự như tập Solomon (1987), HG cũng được sinh 2 bộ dữ liệu); `size` là kích thước cấu hình (ví dụ 2 là 200 yêu cầu, 8 là 800 yêu cầu); `num` là số thứ tự của cấu hình.

Với số lượng yêu cầu là 200, ALNS vẫn tỏ ra hiệu quả với thời gian timeout một phút. ALNS cho chênh lệch trung bình 0.23%, 1.60% và 1.73% lần lượt cho các lớp C, R, RC so với nghiệm tốt nhất đã biết. Ngoài ra, ALNS tỏ ra ổn định khi độ lệch chuẩn giữa các lần chạy là rất nhỏ khi so sánh với giá trị hàm mục tiêu. Số xe sử dụng cũng không có sự khác biệt so với nghiệm tốt nhất đã biết.

Đối với tập 400 yêu cầu, ALNS cho kết quả không tốt như với các tập có số lượng yêu cầu nhỏ với thời gian timeout một phút. Độ chênh lệch trung bình lần lượt là 1.99%, 4.35% và 5.78% cho lớp C, R và RC khi so sánh với nghiệm tốt nhất đã biết. Ta có thể thấy rằng, đối với lớp khó như RC, ALNS không còn duy trì được hiệu quả như khi giải bài toán lớp C và R. Tuy nhiên, ALNS vẫn ổn định khi độ lệch chuẩn giữa các lần đo vẫn rất nhỏ so với giá trị hàm mục tiêu.

Dưới đây là các kết quả đo cho các cấu hình 200, 400, 600, 800 và 1000 yêu cầu cho 3 lớp C, R và RC.

Trong đó

- *ins*: tên cấu hình
- *alns best*: giá trị hàm mục tiêu tốt nhất đạt được bởi ALNS
- *alns avg*: giá trị hàm mục tiêu trung bình (với 5 lần đo) đạt được bởi ALNS
- *alns std*: độ lệch chuẩn của giá trị hàm mục tiêu (với 5 lần đo) đạt được bởi ALNS
- *nv*: số xe được sử dụng bởi ALNS
- *bkcst*: giá trị hàm mục tiêu tốt nhất đã biết

- *bknv*: số xe được sử dụng bởi nghiệm tốt nhất đã biết
- *gap (%)*: chênh lệch giữa giá trị hàm mục tiêu tốt nhất đạt được bởi ALNS và giá trị hàm mục tiêu tốt nhất đã biết

Thời gian timeout là một phút.

Nếu cho rằng việc chênh lệch chất lượng nghiệm so với nghiệm tốt nhất đã biết không vượt quá 10% là đủ thì ALNS thể hiện tốt đối với các cấu hình từ 600 yêu cầu trở xuống. Đối với các cấu hình có số lượng yêu cầu rất lớn như 800 và 1000 yêu cầu, ALNS cho nghiệm còn cách nghiệm tốt nhất đã biết khá xa (lớn hơn 10% cho tập 1000 yêu cầu) với timeout một phút. Con số một phút được lựa chọn để phù hợp với yêu cầu thực tế khi mà ta không thể chờ quá lâu để nhận được kết quả. Một chiến thuật khác là ta có thể lên lịch cho các xe vào ngày hôm trước để có các tuyến đường cho ngày hôm sau chẳng hạn (cho chương trình chạy "qua đêm", hay chạy với thời gian chờ lâu có thể là vài tiếng đồng hồ). Tác giả đã thử nghiệm và nhận thấy rằng, với thời gian chạy lâu hơn nữa (timeout mười phút) ALNS cho kết quả tốt hơn nhưng tốc độ giảm nghiệm là chậm (kéo khoảng cách với nghiệm tốt nhất đã biết giảm 1 đến 2 phần trăm), do càng gần với nghiệm tối ưu thì các tuyến đường khá khó để thay đổi nhất là đối với các cấu hình có số lượng yêu cầu quá lớn như vậy.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcost	bknv	gap (%)
C1_2_1	2,704.57	2,704.57	0	20	2,698.6	20	0.22	
C1_2_2	2,700.65	2,700.65	0	20	2,694.3	20	0.24	
C1_2_3	2,682.18	2,711.28	45.2	20	2,675.8	20	0.24	
C1_2_4	2,631.89	2,647.68	17.2	19	2,625.6	19	0.24	
C1_2_5	2,702.05	2,711.04	17.99	20	2,694.9	20	0.27	
C1_2_6	2,701.04	2,701.04	0	20	2,694.9	20	0.23	
C1_2_7	2,701.04	2,701.04	0	20	2,694.9	20	0.23	
C1_2_8	2,690.27	2,690.27	0	20	2,684	20	0.23	
C1_2_9	2,645.47	2,650.42	9.9	19	2,639.6	19	0.22	
C1_2_10	2,630.95	2,651.39	24.08	19	2,624.7	19	0.24	
avg	2,679.01	2,686.94	11.44		2,672.73		0.23	

Bảng 4.6: Kết quả đo với tập HG_C_1_2 200 yêu cầu.

ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
R1_2_1	4,708.02	4,720.47	13.83	23	4,667.2	23	0.87
R1_2_2	4,011.45	4,029.16	12.06	20	3,919.9	20	2.34
R1_2_3	3,416.04	3,444.85	19.13	19	3,373.9	18	1.25
R1_2_4	3,121.85	3,146.43	15.45	19	3,047.6	18	2.44
R1_2_5	4,096.03	4,128.44	17.06	20	4,053.2	20	1.06
R1_2_6	3,588.31	3,626.85	22.15	20	3,559.1	19	0.82
R1_2_7	3,199.57	3,240.56	24.57	18	3,141.9	18	1.84
R1_2_8	2,973.75	3,006.53	18.22	18	2,938.4	18	1.2
R1_2_9	3,784.88	3,816.64	31.13	20	3,734.7	19	1.34
R1_2_10	3,385.86	3,416.78	29.63	19	3,293.1	18	2.82
avg	3,628.58	3,657.67	20.33		3,572.90		1.60

Bảng 4.7: Kết quả đo với tập HG_R_1_2 200 yêu cầu.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
RC1_2_1	3536.71	3565.66	20.7	20	3516.9	20	0.56	
RC1_2_2	3253.94	3273.73	21.67	19	3221.6	19	1	
RC1_2_3	3034.11	3073.05	38.72	19	3001.4	18	1.09	
RC1_2_4	2903.03	2944.38	33.08	19	2845.2	18	2.03	
RC1_2_5	3388.43	3430.72	48.65	19	3325.6	19	1.89	
RC1_2_6	3369.85	3406.8	24	19	3300.7	19	2.1	
RC1_2_7	3240.26	3264.27	16.71	19	3177.8	19	1.97	
RC1_2_8	3142.02	3176.37	22.88	19	3060	19	2.68	
RC1_2_9	3123.98	3136.91	7.07	19	3073.3	19	1.65	
RC1_2_10	3060.09	3080.15	19.51	19	2990.5	19	2.33	
avg	3,205.24	3,235.20	25.30		3,151.30		1.73	

Bảng 4.8: Kết quả đo với tập HG_RC_1_2 200 yêu cầu.

ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
C1_4_1	7,152.06	7,155.8	7.49	40	7,138.8	40	0.19
C1_4_2	7,127.29	7,167.34	78.96	40	7,113.3	40	0.2
C1_4_3	7,160.22	7,279.36	128.8	39	6,929.9	38	3.32
C1_4_4	7,111.32	7,160.06	52.95	37	6,777.7	37	4.92
C1_4_5	7,152.06	7,172.31	31.98	40	7,138.8	40	0.19
C1_4_6	7,153.45	7,157.2	7.49	40	7,140.1	40	0.19
C1_4_7	7,149.43	7,185.08	71.22	40	7,136.2	40	0.19
C1_4_8	7,179.2	7,360.85	98.82	40	7,083	39	1.36
C1_4_9	7,170.61	7,240.77	71.64	38	6,927.8	37	3.5
C1_4_10	7,225.71	7,288.42	36.02	38	6,825.4	37	5.86
avg	7,158.13	7,216.72	58.54		7,021.10		1.99

Bảng 4.9: Kết quả đo với tập HG_C_1_4 400 yêu cầu.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
R1_4_1	10,688.08	10,709.24	17.6	41	10,305.8	41	3.71	
R1_4_2	9,149.2	9,221.35	56.53	39	8,873.2	37	3.11	
R1_4_3	8,132.17	8,226.37	105.28	37	7,781.6	37	4.51	
R1_4_4	7,690.06	7,766.42	65.65	36	7,266.2	36	5.83	
R1_4_5	9,508.73	9,624.12	68.39	39	9,184.6	37	3.53	
R1_4_6	8,621.57	8,753.94	70.05	37	8,340.4	36	3.37	
R1_4_7	7,946.67	7,993.13	43.45	37	7,599.8	36	4.56	
R1_4_8	7,594.01	7,679.99	46.64	37	7,240.5	36	4.88	
R1_4_9	9,104.48	9,182.77	55.57	38	8,673.8	37	4.97	
R1_4_10	8,482.36	8,520.08	34.86	37	8,077.8	36	5.01	
avg	8,691.74	8,767.74	56.40		8,334.37		4.35	

Bảng 4.10: Kết quả đo với tập HG_R_1_4 400 yêu cầu.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
RC1_4_1	8,969.66	9,054.11	67.58	39	8,522.9	37	5.24	
RC1_4_2	8,360.36	8,422.77	63.37	38	7,878.2	36	6.12	
RC1_4_3	7,969.51	8,027.17	35.9	37	7,516.9	37	6.02	
RC1_4_4	7,651.64	7,694.7	53.93	37	7,292.9	36	4.92	
RC1_4_5	8,635.31	8,707.26	58.6	38	8,152.3	37	5.92	
RC1_4_6	8,636.92	8,715.55	67.04	38	8,148	37	6	
RC1_4_7	8,449.56	8,527.71	57.43	37	7,932.5	37	6.52	
RC1_4_8	8,201.97	8,326.8	67.88	38	7,757.2	36	5.73	
RC1_4_9	8,188.35	8,243.74	62.3	37	7,717.7	36	6.1	
RC1_4_10	7,979.06	8,080.82	69.84	37	7,581.2	36	5.25	
avg	8,304.23	8,380.06	60.39		7,849.98		5.78	

Bảng 4.11: Kết quả đo với tập HG_RC_1_4 400 yêu cầu.

ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
C1_6_1	14,095.64	14,095.64	0	60	14,076.6	60	0.14
C1_6_2	14,137.09	14,382.74	134.48	59	13,948.3	58	1.35
C1_6_3	15,123.71	15,277.54	100.57	57	13,756.5	57	9.94
C1_6_4	14,698.3	14,952.4	172.99	56	13,538.6	56	8.57
C1_6_5	14,085.72	14,207.91	183.08	60	14,066.8	60	0.13
C1_6_6	14,118.06	14,405.1	248.54	60	14,070.9	60	0.34
C1_6_7	14,614.07	14,905.21	276.97	61	14,066.8	60	3.89
C1_6_8	15,014.29	15,470.25	373.38	61	13,991.2	58	7.31
C1_6_9	15,213.84	15,362.78	225.23	59	13,664.5	56	11.34
C1_6_10	15,168.81	15,611.42	311.86	58	13,617.5	56	11.39
avg	14,626.95	14,867.10	202.71		13,879.77		5.44

Bảng 4.12: Kết quả đo với tập HG_C_1_6 600 yêu cầu.

ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
R1_6_1	22,534.32	22,810.62	165.87	63	21,274.2	58	5.92
R1_6_2	19,751.55	19,960.87	115.13	57	18,519.8	56	6.65
R1_6_3	18,268.88	18,398.55	87.36	55	16,874.9	54	8.26
R1_6_4	16,863.99	16,997.55	99.47	55	15,720.8	54	7.27
R1_6_5	20,818.89	20,944.12	85.35	58	19,294.9	55	7.9
R1_6_6	19,168.72	19,293.47	88.32	56	17,763.7	54	7.91
R1_6_7	17,959.3	181,00.5	129.91	56	16,496.2	54	8.87
R1_6_8	16,650.4	167,75.82	92.25	55	15,584.3	54	6.84
R1_6_9	19,882.68	20,099.04	183	57	18,474.1	55	7.62
R1_6_10	18,899.08	18,967.51	48.97	56	17,583.7	54	7.48
avg	19,079.78	19,234.81	109.56		17,758.66		7.47

Bảng 4.13: Kết quả đo với tập HG_R_1_6 600 yêu cầu.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
RC1_6_1	18048.91	18228.51	134.64	57	16944.2	56	6.52	
RC1_6_2	17003.23	17059.88	50.84	56	15890.6	55	7	
RC1_6_3	16476.72	16561.34	116.14	57	15181.3	55	8.53	
RC1_6_4	15956.21	16102.1	106.26	56	14753.2	55	8.15	
RC1_6_5	17819.13	17948.16	93.89	57	16536.3	55	7.76	
RC1_6_6	17718.49	17855.99	97.8	57	16473.3	55	7.56	
RC1_6_7	17360.14	17516.52	154.79	56	16055.3	55	8.13	
RC1_6_8	17257.21	17338.39	60.79	56	15891.8	55	8.59	
RC1_6_9	17278.83	17423.02	122.84	56	15803.5	55	9.34	
RC1_6_10	16938.62	17186.96	190.67	56	15651.3	55	8.22	
avg	17,185.75	17,322.09	112.87		15,918.08		7.98	

Bảng 4.14: Kết quả đo với tập HG_RC_1_6 600 yêu cầu.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
C1_8_1	25,550.61	25,834.96	332.72	81	25,156.9	80	1.57	
C1_8_2	26,698.48	26,923.41	247.14	80	24,974.1	78	6.9	
C1_8_3	26,912.55	27,224.07	248.94	75	24,156.1	73	11.41	
C1_8_4	26,295.21	27,023.75	487.76	73	23,797.3	72	10.5	
C1_8_5	26,172.88	27,155.03	747.1	82	25,138.6	80	4.11	
C1_8_6	27,929.18	28,304.47	313.55	85	25,133.3	80	11.12	
C1_8_7	28,011.92	28,502.49	470.66	84	25,127.3	80	11.48	
C1_8_8	28,368.69	28,716.28	208.72	83	24,809.7	76	14.35	
C1_8_9	27,663.78	28,370.25	486.05	78	24,200.4	74	14.31	
C1_8_10	27,710.71	28,278.32	392.63	76	24,026.7	73	15.33	
avg	27,131.40	27,633.31	393.53		24,652.04		10.11	

Bảng 4.15: Kết quả đo với tập HG_C_1_8 800 yêu cầu.

ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
R1_8_1	39,957.46	40,399.61	312.62	85	36,345	80	9.94
R1_8_2	35,708.47	36,107.65	215.79	76	32,277.6	72	10.63
R1_8_3	32,405.25	32,804.12	284	74	29,301.2	72	10.59
R1_8_4	30,538.49	30,847.3	183.56	73	27,734.7	72	10.11
R1_8_5	37,304.47	37,473.07	182.18	76	33,494	72	11.38
R1_8_6	34,447.73	34,694.32	166.39	74	30,872.4	72	11.58
R1_8_7	32,102.03	32,443.81	191.64	73	28,789	72	11.51
R1_8_8	30,172.06	30,459.2	311.32	73	27,609.4	72	9.28
R1_8_9	35,753.09	36,114.12	242.75	76	32,257.3	72	10.84
R1_8_10	34,338.56	34,614.73	211.16	75	30,918.3	72	11.06
avg	34,272.76	34,595.79	230.14		30,959.89		10.69

Bảng 4.16: Kết quả đo với tập HG_R_1_8 800 yêu cầu.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
RC1_8_1	32,845.93	32,945.3	75.88	77	29,952.8	74	9.66	
RC1_8_2	31,055.24	31,295.32	209.05	75	28,290.1	74	9.77	
RC1_8_3	30,059.19	30,435.63	196.98	74	27,447.7	73	9.51	
RC1_8_4	28,711.26	28,997.17	192.21	74	26,557.2	73	8.11	
RC1_8_5	32,178.34	32,350.29	122.35	75	29,219.9	74	10.12	
RC1_8_6	32,314.8	32,447.26	110.15	75	29,148.7	73	10.86	
RC1_8_7	31,509.08	31,795.07	286.75	75	28,734	73	9.66	
RC1_8_8	31,359.46	31,618.27	199.77	74	28,390	73	10.46	
RC1_8_9	31,387.83	31,709.16	234.78	74	28,331.6	73	10.79	
RC1_8_10	31,031.65	31,323.19	285.86	74	28,168.5	73	10.16	
avg	31,245.28	31,491.67	191.38		28,424.05		9.91	

Bảng 4.17: Kết quả đo với tập HG_RC_1_8 800 yêu cầu.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
C1_10_1	44,214.75	45,678.8	1,113.93	104	42,444.8	100	4.17	
C1_10_2	45,238.08	46,051.56	589.11	101	41,337.8	94	9.44	
C1_10_3	45,272.64	46,070.45	529.64	94	40,060	91	13.01	
C1_10_4	45,747.3	46,000.23	159.43	92	39,434.1	90	16.01	
C1_10_5	48,159.25	48,680.45	472.71	109	42,434.8	100	13.49	
C1_10_6	48,562.93	49,888.23	868.44	109	42,437	100	14.44	
C1_10_7	48,053.69	49,347.02	809.02	106	42,420.4	100	13.28	
C1_10_8	49,702.64	50,228.59	575.78	106	41,648	95	19.34	
C1_10_9	47,972.91	48,869.52	537.98	100	40,288.4	90	19.07	
C1_10_10	47,131.75	48,231.19	670.04	97	39,816.8	90	18.37	
avg	47,005.59	47,904.60	632.61		41,232.21		14.06	

Bảng 4.18: Kết quả đo với tập HG_C_1_10 1000 yêu cầu.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
R1_10_1	60,581.8	60,995.25	273.58	103	53,026.1	95	14.25	
R1_10_2	56,255.34	56,723.58	472.21	95	48,261.6	91	16.56	
R1_10_3	52,795.73	53,081.74	225.01	93	44,673.3	91	18.18	
R1_10_4	48,386.45	49,079.46	466.74	92	42,440.7	91	14.01	
R1_10_5	56,925.27	57,977.91	811.43	95	50,406.7	91	12.93	
R1_10_6	54,800.49	55,053.29	259.44	93	46,928.2	91	16.78	
R1_10_7	51,441.07	52,184.01	459.41	93	43,997.4	91	16.92	
R1_10_8	48,616.89	48,852.4	220.02	92	42,279.3	91	14.99	
R1_10_9	56,403.15	57,143.03	413.89	93	49,162.8	91	14.73	
R1_10_10	55,043.99	55,274.53	166.75	94	47,364.6	91	16.21	
avg	54,125.02	54,636.52	376.85		46,854.07		15.56	

Bảng 4.19: Kết quả đo với tập HG_R_1_10 1000 yêu cầu.

	ins	alns best	alns avg	alns std	nv	bkcst	bknv	gap (%)
RC1_10_1	51,798.33	52,030.75	185.35	96	45,790.7	90	13.12	
RC1_10_2	49,501.03	49,828.93	285.98	92	43,678.3	90	13.33	
RC1_10_3	47,870	48,389.62	452.14	91	42,121.9	90	13.65	
RC1_10_4	46,208.46	46,561.7	228.08	91	41,357.4	90	11.73	
RC1_10_5	51,256.07	51,556.27	196.57	94	45,028.1	90	13.83	
RC1_10_6	51,328.39	51,602.46	368.44	92	44,898.2	90	14.32	
RC1_10_7	50,404.57	50,890.2	394.46	92	44,409	90	13.5	
RC1_10_8	49,827.15	50,261.65	263.19	92	43,916.5	90	13.46	
RC1_10_9	49,170.31	49,728.92	447.75	92	43,858	90	12.11	
RC1_10_10	48,966.51	49,653.21	389.99	91	43,533.7	90	12.48	
avg	49,633.08	50,050.37	321.19		43859.18		13.15	

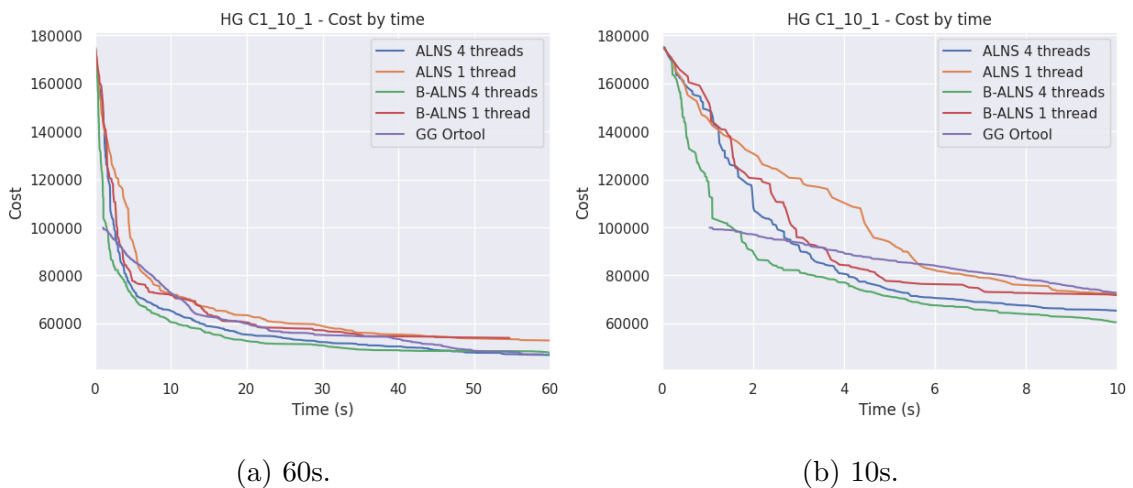
Bảng 4.20: Kết quả đo với tập HG_RC_1_10 1000 yêu cầu.

4.2 Hiệu năng thuật toán

Trong phần này chúng ta sẽ xem xét hiệu năng của ALNS. Để thấy rõ sự khác biệt, các đồ thị được trình bày dưới đây là kết quả cho cấu hình với số lượng yêu cầu rất lớn (1000 yêu cầu) và số lượng yêu cầu trung bình (400 yêu cầu). Ngoài ra, để tránh dài dòng, các đồ thị được thể hiện cho 3 cấu hình C1_x_1, R1_x_1, RC1_x_1 ($x = 10$ cho tập 1000 yêu cầu và $x = 4$ cho tập 400 yêu cầu). Hiệu năng của các thuật toán đối với các cấu hình khác là tương tự. Chúng ta sẽ so sánh hiệu năng của ALNS nguyên bản, B-ALNS và một framework rất nổi tiếng trong cộng đồng là **Google OR-Tools**. Hiệu năng được so sánh cho cả phiên bản đơn luồng và đa luồng của ALNS¹.

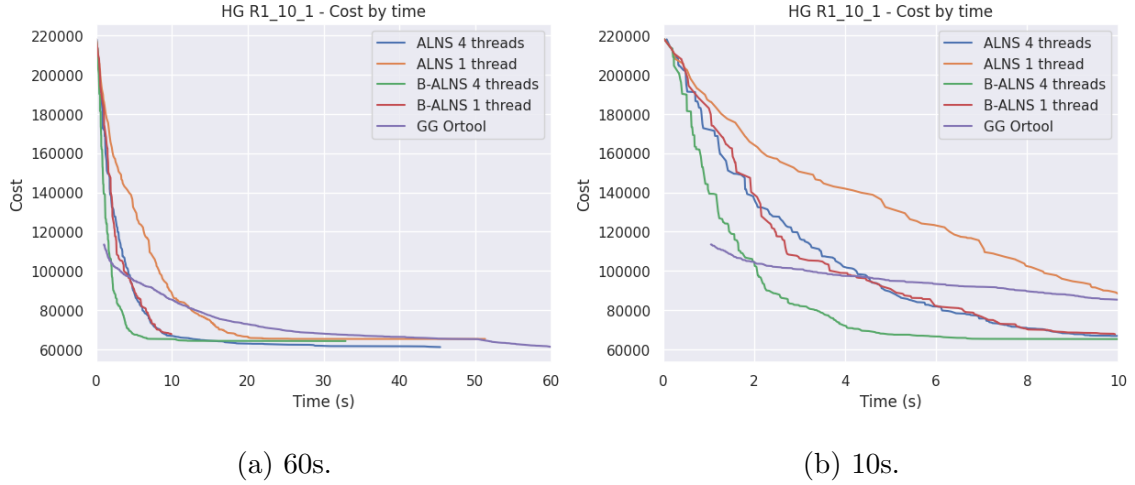
4.2.1 Giá trị hàm mục tiêu

Trước hết, ta xem xét giá trị hàm mục tiêu theo thời gian. Các đồ thị dưới đây cho thấy giá trị hàm mục tiêu theo thời gian khi chạy thuật toán với thời gian chạy 60 giây và được phóng đại để nhìn rõ hơn sự khác biệt trong 10 giây đầu tiên đối với các cấu hình 1000 và lần lượt là 10 giây và 1 giây đối với cấu hình 400 yêu cầu. Đồ thị được chia làm 3 phần tương ứng với 3 lớp cấu hình khác nhau là C, R và RC. Không có thuật toán nào được sử dụng tốt hơn các thuật toán còn lại ở mọi mặt, chúng đều có sự đánh đổi. Chúng ta sẽ cùng phân tích điểm mạnh và điểm yếu của từng chiến thuật trong các giai đoạn và mục đích khác nhau. Từ đó ta có thể đưa ra gợi ý về việc sử dụng thuật toán nào cho mục đích cụ thể.

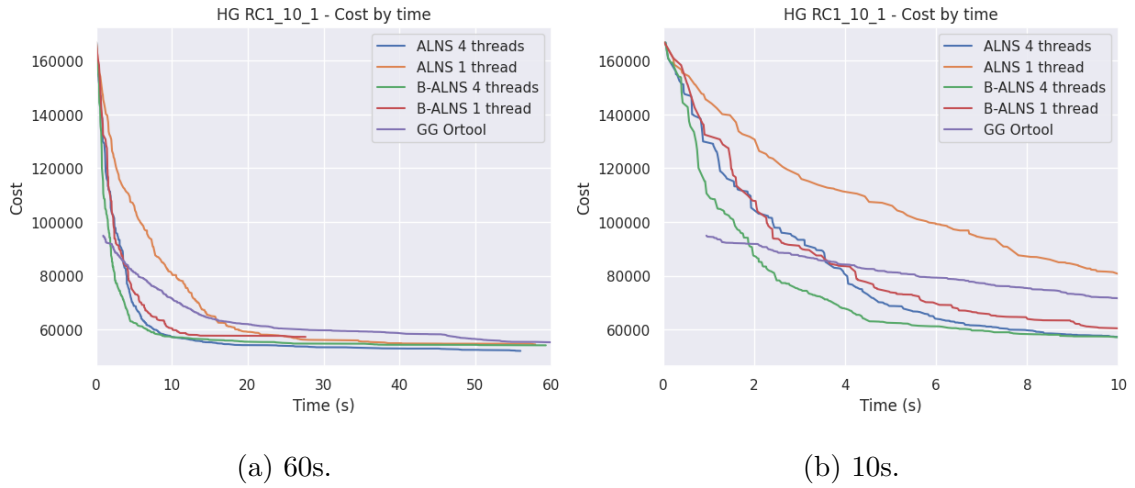


Hình 4.3: Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình C1_10_1.

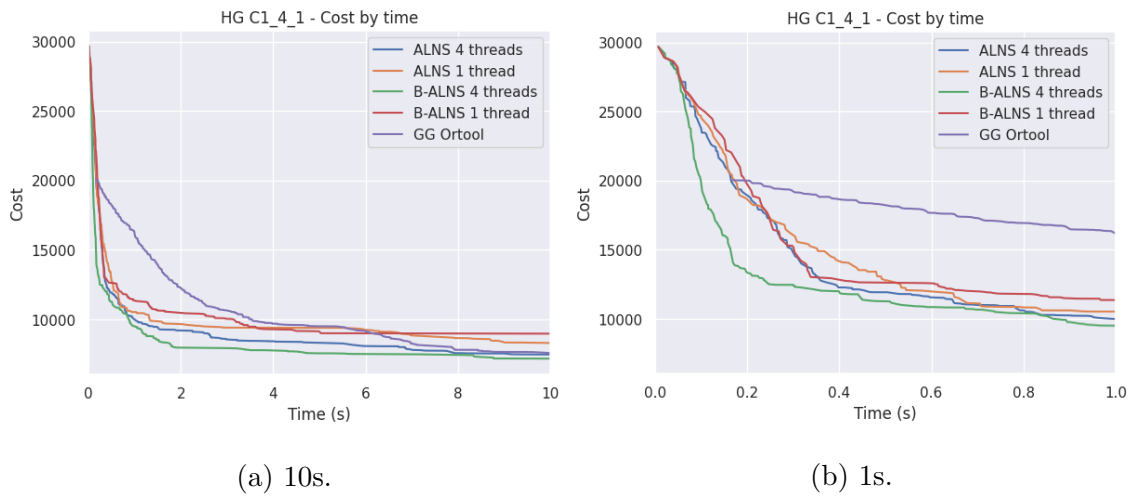
¹ Các giá trị hàm mục tiêu hay số xe được biểu diễn theo thời gian chạy của thuật toán. Một số đường "dừng sớm" trước thời gian timeout nghĩa là từ đó đến hết thời gian timeout thuật toán chưa tìm thêm được nghiệm tốt hơn.



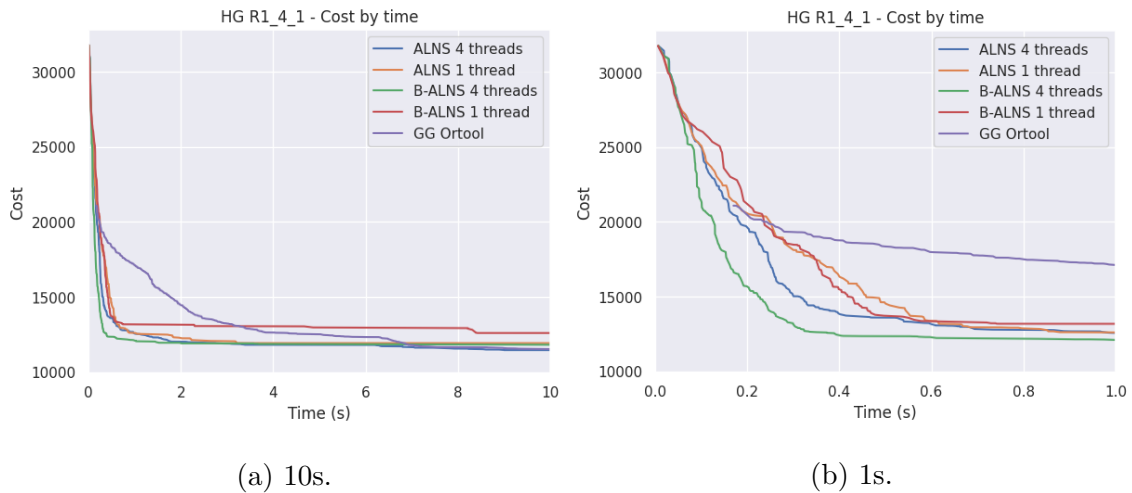
Hình 4.4: Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình R1_10_1.



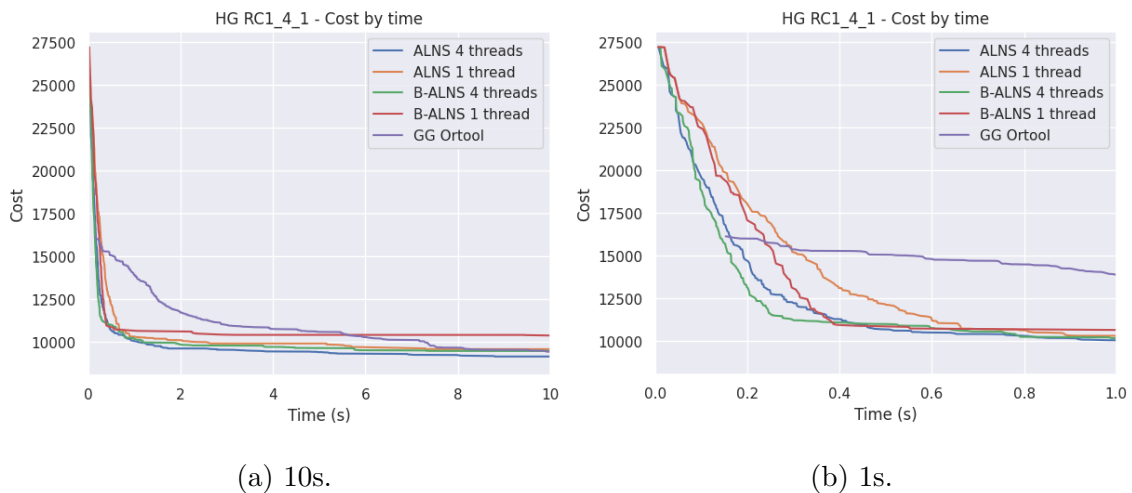
Hình 4.5: Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình RC1_10_1.



Hình 4.6: Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình C1_4_1.



Hình 4.7: Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình R1_4_1.



Hình 4.8: Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian, cấu hình RC1_4_1.

Với thời gian chạy lâu, các thuật toán đều chứng lại bởi khi đó các tuyến đường đã khá chật chội, việc "sửa chữa" là khó khăn hơn giai đoạn đầu rất nhiều. Nói cách khác, thuật toán bị bẫy trong nghiệm tối ưu cục bộ. Khi chạy thuật toán với thời gian lâu hơn (timeout mười phút), tác giả nhận thấy hàm mục tiêu không giảm đáng kể nữa. Chính vì thế, thời gian chạy 60 giây được lựa chọn để vừa phù hợp với thực tế và tránh việc chạy quá lâu.

Ta thấy một xu hướng rõ ràng, trong giai đoạn đầu, B-ALNS tăng tốc hiệu năng của ALNS một cách đáng kể. Với tập dữ liệu 1000 yêu cầu, thời gian chạy dưới 10 giây, B-ALNS đơn luồng cho hiệu năng gần như tương đương với ALNS với 4 luồng. Nghĩa là, B-ALNS tiết kiệm khoảng 75% tài nguyên CPU để đạt kết quả tương đương với ALNS trong thời gian chạy dưới 10 giây. Chưa kể, bộ nhớ cũng được tiết

kiệm một cách đáng kể khi B-ALNS sử dụng 1 luồng thay vì 4 luồng. Khi so sánh với ALNS đơn luồng, B-ALNS đơn luồng cho hiệu năng vượt trội. Với thời gian chạy dưới 2 giây B-ALNS cho chất lượng nghiệm tốt hơn từ khoảng 20% tới 30% so với ALNS. Đối với tập dữ liệu có số lượng yêu cầu trung bình (400 yêu cầu), B-ALNS đơn luồng không có lợi thế so với ALNS đơn luồng, tuy nhiên hiệu năng đa luồng vẫn tốt hơn ALNS. Điều này cho thấy, B-ALNS có thể được sử dụng để giải quyết các bài toán lớn với tài nguyên hạn chế. Với cấu hình 400 yêu cầu, B-ALNS đa luồng cho hiệu năng bỏ xa ALNS với thời gian chạy dưới 0.2 giây và luôn tốt hơn trong thời gian chạy dưới 1 giây.

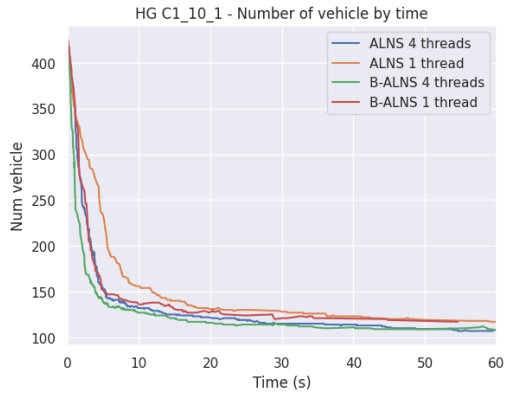
Khi so sánh với **Google OR-Tools**, ta thấy rằng, **Google OR-Tools** cho hiệu năng tốt trong thời gian chạy từ 2 đến 4 giây đầu tiên (tập 1000 yêu cầu). Tuy nhiên với thời gian chạy dưới 1 giây, **Google OR-Tools** không thể cho ra kết quả. Với thời gian chạy lâu hơn, **Google OR-Tools** cho hiệu năng không tốt bằng ALNS hay B-ALNS. Với cấu hình 400 yêu cầu, nhìn chung hiệu năng của B-ALNS cũng như ALNS bỏ xa **Google OR-Tools**.

Như vậy đối với các nghiệp vụ yêu cầu một kết quả tốt trong thời gian ngắn, B-ALNS là lựa chọn tốt nhất. Khi tiến hành đo đạc với thời gian chạy dài (timeout lớn hơn một phút), tác giả nhận thấy rằng, ALNS là tốt nhất trong các thuật toán được đề cập ở đây. Tuy nhiên chất lượng nghiệm tốt hơn B-ALNS thường không quá 1%. Các kết quả được chỉ ra trong phần trước là giá trị hàm mục tiêu khi sử dụng ALNS nguyên bản.

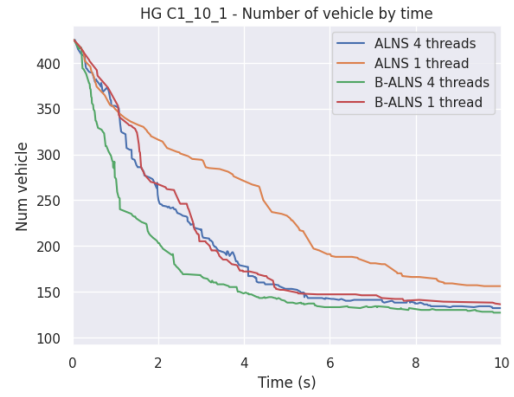
4.2.2 Số xe

Chúng ta cũng nhận thấy một xu hướng tương tự như khi so sánh hiệu năng của các thuật toán khi sử dụng độ đo là giá trị hàm mục tiêu. B-ALNS cho hiệu năng vượt trội trong giai đoạn đầu. B-ALNS đơn luồng cho hiệu năng tương đương với ALNS với 4 luồng. Với cấu hình lớp R (1000 yêu cầu), B-ALNS tiết kiệm được khoảng 30% số xe so với ALNS trong thời gian chạy từ 2 tới 4 giây! Tương tự, với cấu hình 400 yêu cầu, B-ALNS giảm số xe nhanh hơn đáng kể so với ALNS trong thời gian chạy ngắn (dưới 0.2 giây). Việc tiết kiệm hàng trăm xe có ý nghĩa rất lớn trong thực tế. Thường thì chi phí cho một xe (thuê, hoặc mua, nhiên liệu, chi phí cho tài xế, ...) là rất lớn. Việc tiết kiệm số xe sẽ giúp giảm chi phí vận hành của doanh nghiệp một cách đáng kể.

Với thời gian chạy lâu hơn, đương nhiên chúng ta rất khó để giảm được số xe nữa, vì hầu hết các tuyến đường đến lúc này đã chật chội hơn đáng kể so với giai đoạn đầu.

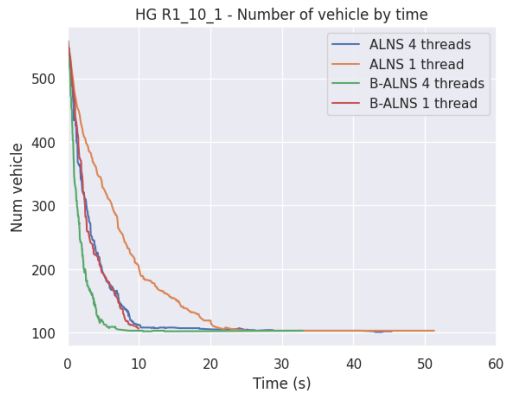


(a) 60s.

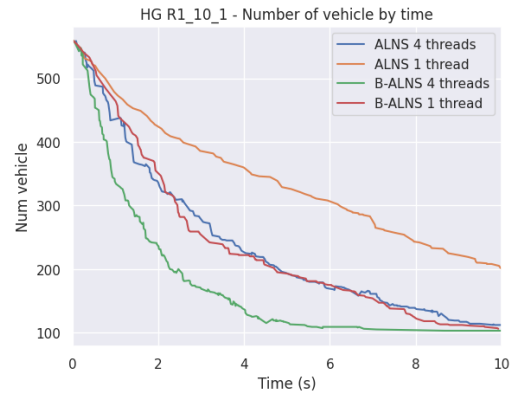


(b) 10s.

Hình 4.9: Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình C1_10_1.

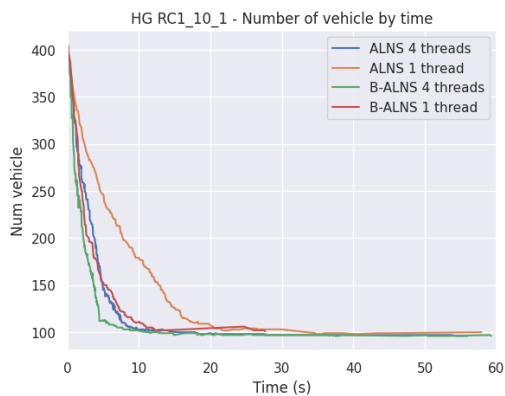


(a) 60s.

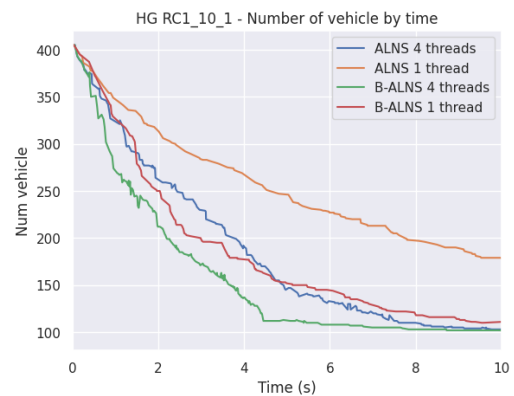


(b) 10s.

Hình 4.10: Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình R1_10_1

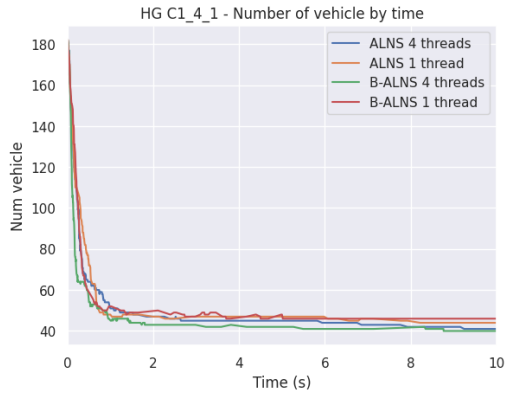


(a) 60s.

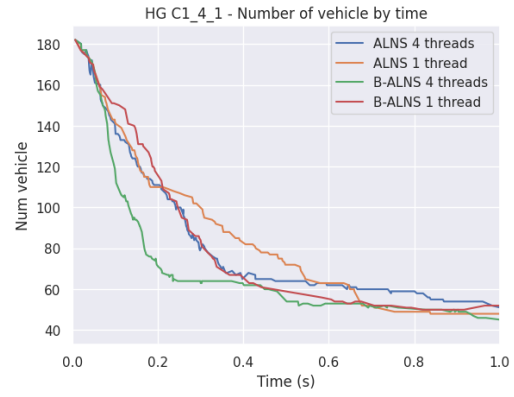


(b) 10s.

Hình 4.11: Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình RC1_10_1.

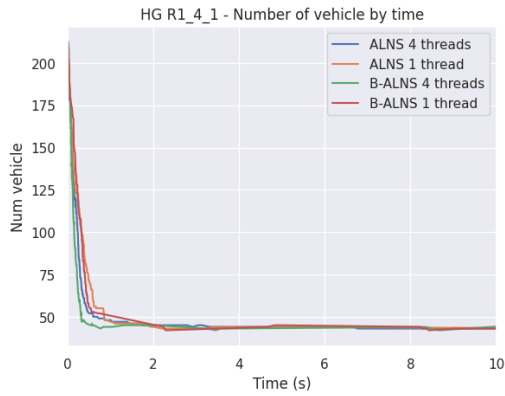


(a) 10s.

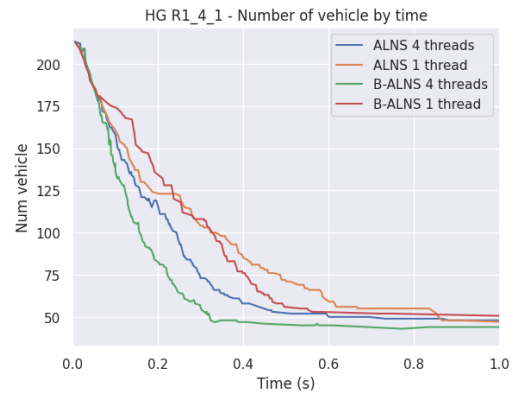


(b) 1s.

Hình 4.12: Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình C1_4_1.

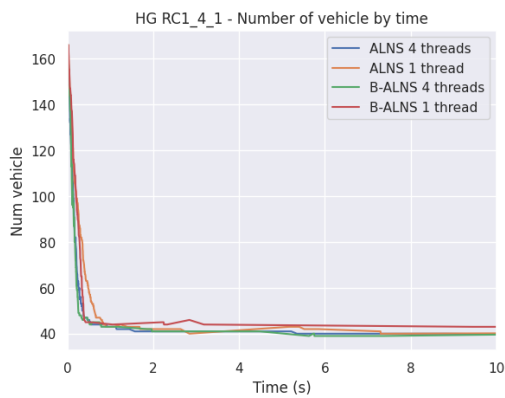


(a) 10s.

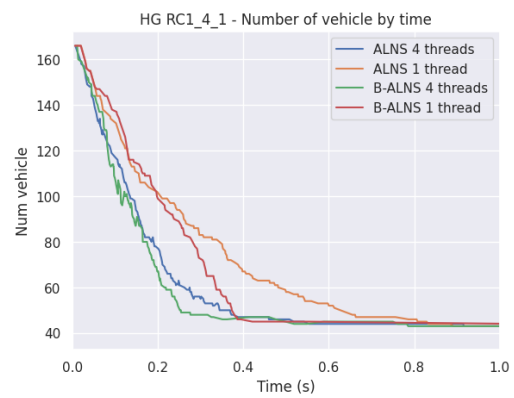


(b) 1s.

Hình 4.13: Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình R1_4_1.



(a) 10s.

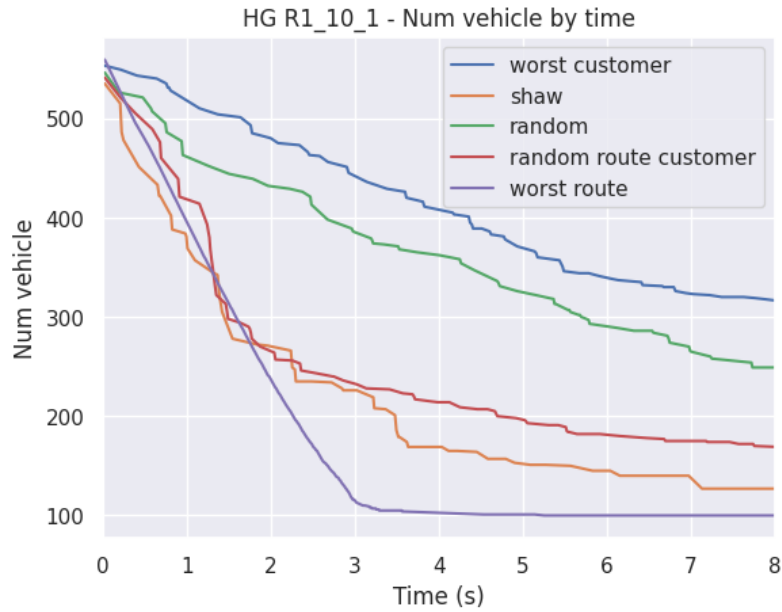


(b) 1s.

Hình 4.14: Số xe sử dụng theo thời gian, cấu hình RC1_4_1.

4.2.3 Hiệu quả của thuật toán hủy khác nhau

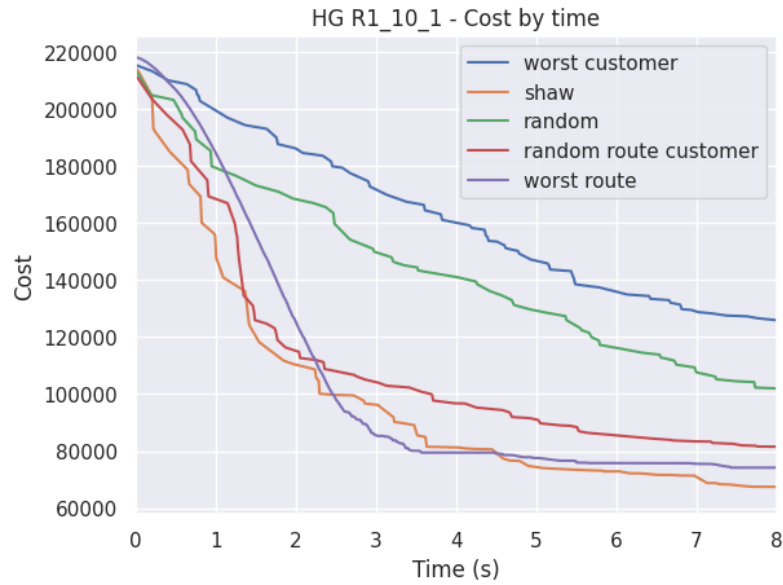
Để làm rõ hơn về hiệu quả của thuật toán *hủy tuyến tẻ*, ta thí nghiệm với việc chỉ sử dụng riêng lẻ các thuật toán hủy và đo số xe sử dụng theo thời gian.



Hình 4.15: Số xe theo thời gian với các thuật toán hủy khác nhau.

Hình (4.15) biểu diễn số xe sử dụng theo thời gian cho cấu hình **R_10_1** trong tập dữ liệu H. Gehring và J. Homberger [19]. Thuật toán *hủy tuyến tẻ* giúp giảm số xe một cách nhanh chóng trong thời gian đầu chạy ALNS. Điều này cũng khá dễ hiểu do thay vì xóa một số yêu cầu nhất định, thuật toán *hủy tuyến tẻ* xóa một tuyến đường hay chính là giảm đi một xe. Ngoài ra thuật toán hủy *Shaw* và thuật toán *hủy ngẫu nhiên với tuyến (random route customer)* cũng cho hiệu quả tốt. Trong quá trình thực nghiệm, chúng tôi nhận thấy rằng, tốc độ thực hiện bước lặp của thuật toán *hủy tuyến tẻ* và thuật toán *hủy ngẫu nhiên với tuyến* nhanh hơn đáng kể so với các thuật toán hủy khác. Bản chất hai thuật toán này lựa chọn yêu cầu cần bỏ đi rất nhanh.

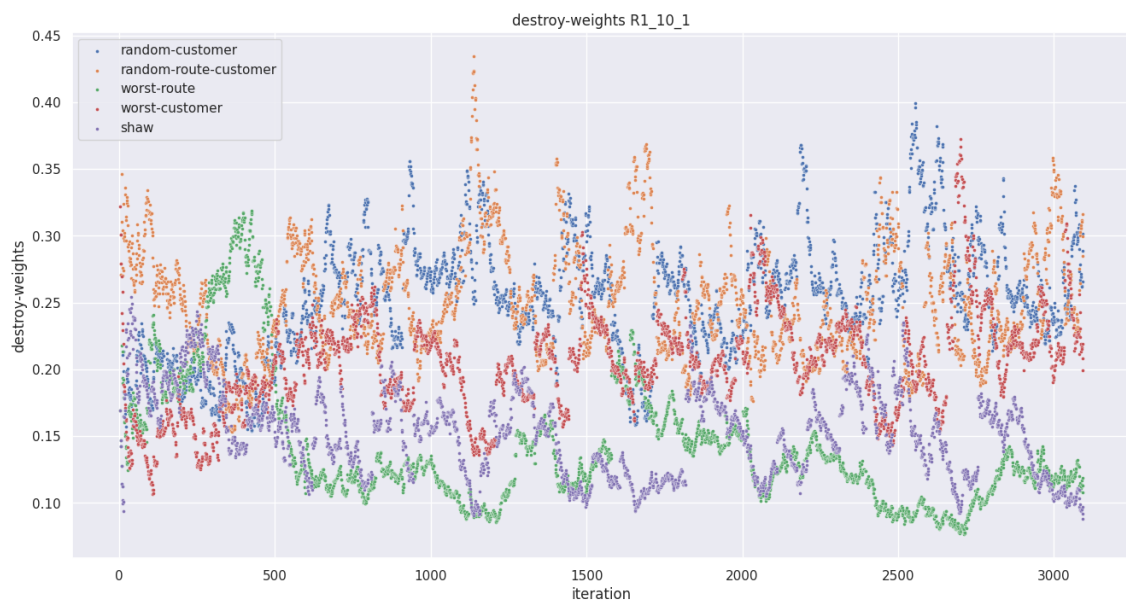
Tương tự như hiệu quả về số xe, các thuật toán hủy cũng thể hiện tương tự khi ta biểu diễn giá trị hàm mục tiêu theo thời gian trong hình (4.16). Thuật toán *hủy tuyến tẻ* tỏ ra rất hiệu quả trong giai đoạn đầu của ALNS. Thuật toán *hủy ngẫu nhiên với tuyến* và thuật toán hủy *Shaw* cũng cho hiệu quả rất tốt không chỉ trong giai đoạn đầu mà còn trong suốt quá trình chạy ALNS (sẽ được chỉ ra trong phần sau).



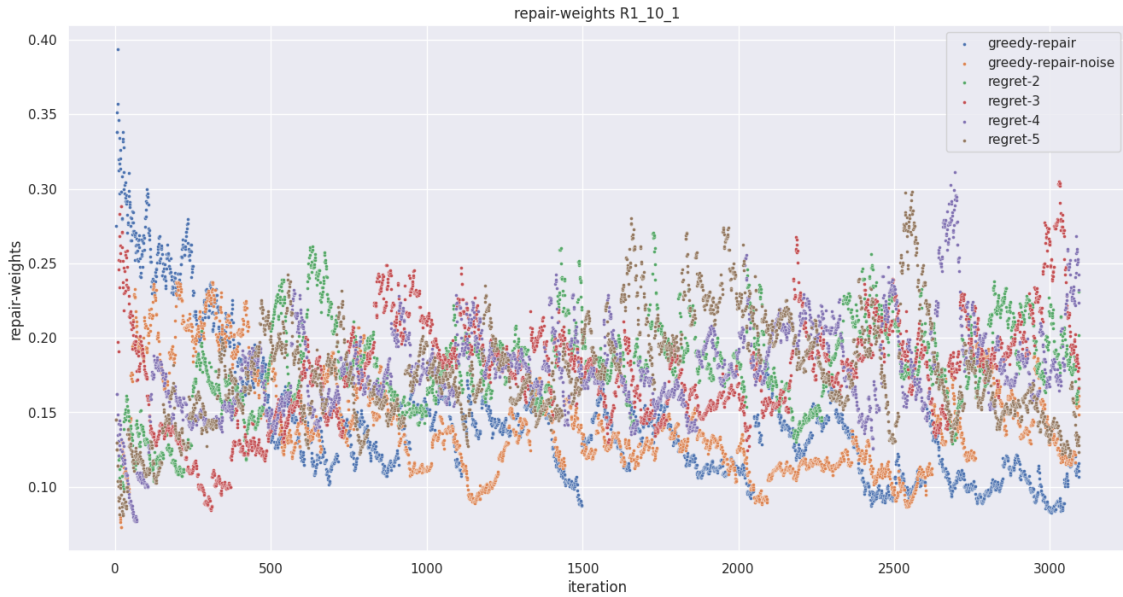
Hình 4.16: Giá trị hàm mục tiêu theo thời gian với các thuật toán hủy khác nhau.

4.3 Tần suất sử dụng thuật toán hủy, chèn

Trong phần này, chúng ta sẽ theo dõi trọng số của các thuật toán hủy, chèn qua các vòng lặp. Từ đó ta biết được rằng liệu thuật toán hủy hay chèn có hiệu quả (trọng số cao) hay không hay các thuật toán hủy, chèn đó hiệu quả (hoặc không) vào giai đoạn nào của ALNS.



Hình 4.17: Trọng số của các thuật toán hủy.



Hình 4.18: Trọng số của các thuật toán chèn.

Thuật toán hủy

Trong giai đoạn đầu của ALNS, thuật toán *hủy tuyến tẻ* được sử dụng nhiều (trọng số cao) nhưng về sau thì tần suất sử dụng lại giảm dần. Không khó hiểu khi ban đầu, các tuyến được sắp xếp chưa thực sự hiệu quả nên ta có thể xóa toàn bộ yêu cầu trong một số tuyến nhất định và chèn vào các tuyến khác. Đến giai đoạn sau của ALNS, khi các tuyến đường đã chứa những yêu cầu quan trọng (nghĩa là rất khó để chèn chúng vào một tuyến đường khác), ta khó có thể xóa cả tuyến đường. Việc thuật toán hủy tuyến được sử dụng nhiều vào giai đoạn đầu của ALNS giúp giảm nhanh số xe được sử dụng. Thực chất, ta cũng chỉ muốn sử dụng hủy tuyến vào giai đoạn đầu của thuật toán. ALNS tự điều chỉnh trọng số của các thuật toán hủy, chèn khiến chúng ta không cần phải thiết lập phức tạp trong khi cài đặt, ví dụ như ta chỉ muốn thuật toán hủy, chèn nhất định được sử dụng trong giai đoạn nào đó trong quá trình chạy ALNS.

Ngược lại với thuật toán *hủy tuyến tẻ*, thuật toán *hủy yêu cầu tẻ* cho thấy hiệu quả vào giai đoạn sau của ALNS. Thuật toán *hủy yêu cầu ngẫu nhiên*, *hủy yêu cầu ngẫu nhiên với tuyến* hay thuật toán hủy *Shaw* cho thấy sự "ổn định" khi luôn giữ trọng số cao trong suốt quá trình chạy ALNS.

Thuật toán sửa

Đối với các thuật toán sửa, ta thấy rõ sự hiệu quả của nhóm các thuật toán *hồi tiếp* khi so sánh với nhóm *tham lam* khi trong suốt quá trình chạy, các thuật toán chèn

hồi tiếc luôn giữ trọng số cao. Trong giai đoạn đầu, nhóm thuật toán sửa tham lam giữ trọng số cao, tuy nhiên sau đó, chúng có xu hướng giảm và tỏ ra không còn hiệu quả như nhóm các thuật toán *hồi tiếc*.

4.4 Kỹ thuật tăng nhiệt

Một trong những vấn đề mà nhiều thuật toán tìm kiếm lân cận gặp phải đó là bị mắc trong một nghiệm tối ưu địa phương. Điều này có nghĩa là, sau một khoảng thời gian tìm kiếm ta thấy rằng thuật toán không thể cải thiện nghiệm thêm nữa hoặc là qua rất nhiều bước lặp nữa mới tìm được một nghiệm tốt hơn. Có nhiều yếu tố ảnh hưởng đến hiện tượng này. Ví dụ, đối với ALNS, số lượng yêu cầu bỏ đi quá lớn hoặc quá nhỏ khiến cho các thuật toán chèn không tìm được vị trí tốt để thêm lại yêu cầu (khi mà các tuyến đã chật chội sau một khoảng thời gian chạy). Ngoài ra, tiêu chí chấp nhận nghiệm cũng ảnh hưởng rất nhiều. Đối với mô phỏng luyện kim, càng về sau chúng ta chỉ chấp nhận những nghiệm tốt hơn nghiệm tốt nhất đã biết hoặc là chấp nhận một nghiệm tệ hơn với giá trị chênh lệch rất nhỏ do tham số "nhiệt độ" của mô phỏng luyện kim đã nhỏ đi đáng kể sau thời gian chạy dài. Để khắc phục hiện tượng này, ta có thể sử dụng kỹ thuật tăng nhiệt (*reheat*) để tăng "nhiệt độ" của mô phỏng luyện kim lên một giá trị nào đó trong những giai đoạn nhất định (A. Salwani, G. Laleh và Z. A. N. Mohd, [37]).

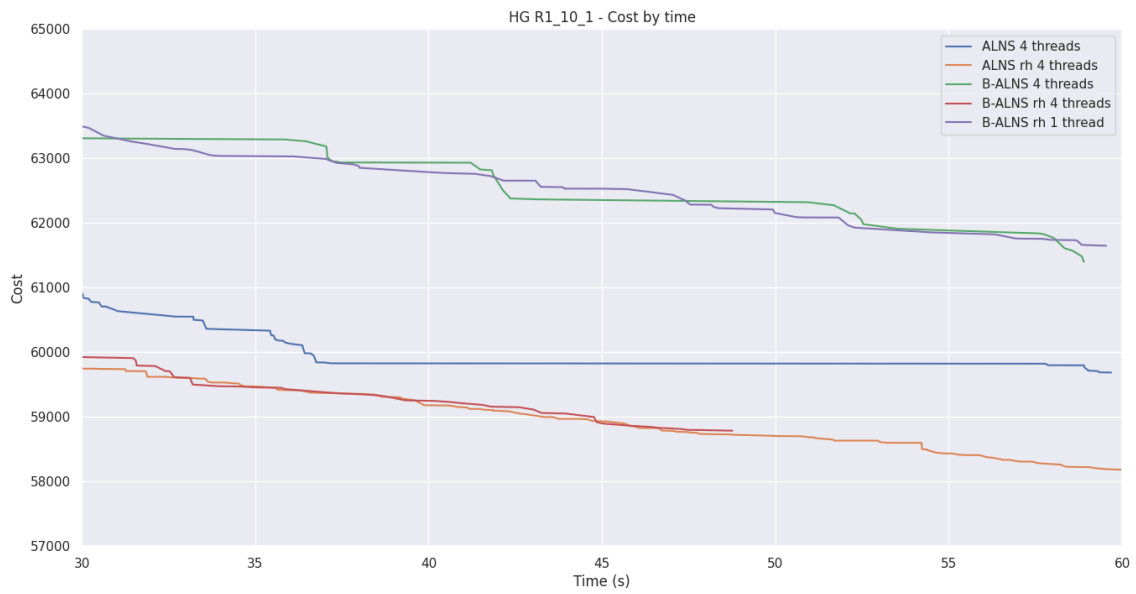
Có một vài cách tăng nhiệt khác nhau ví dụ như tăng nhiệt khi sau một số bước lặp mà thuật toán không cải thiện được nghiệm hoặc tăng nhiệt sau một số bước lặp nhất định (cố định). Trong quá trình thực nghiệm cho luận văn này, chúng tôi nhận thấy cách thứ hai đem lại kết quả tốt hơn. Tăng nhiệt không cần thiết phải sử dụng với các cấu hình quá nhỏ hoặc thời gian chạy ngắn vì nó cũng không tìm ra nghiệm tốt hơn (đáng kể) khi không sử dụng.

Nhiệt độ mới được cho bởi công thức

$$T_{new} = \alpha \times T_{old}, \quad (4.1)$$

trong đó, T_{old} là nhiệt độ tại lần cuối cùng thuật toán tìm được nghiệm mới cải thiện so với nghiệm hiện tại, T_{new} là nhiệt độ mới và α là hệ số tăng nhiệt được cấu hình từ đầu.

Một điểm thú vị là kỹ thuật tăng nhiệt giúp cho B-ALNS "thoát" được nghiệm tối ưu địa phương khi đã trải qua thời gian chạy dài. Không những vậy tăng nhiệt giúp các thuật toán tìm được nghiệm tốt hơn khi so với không dùng tăng nhiệt.



Hình 4.19: Hàm mục tiêu theo thời gian với một số cách chạy khác nhau cho cấu hình `R1_10_1` (*rh* biểu thị cho các thuật toán áp dụng kỹ thuật tăng nhiệt).

Kết luận

Trong luận văn này, tác giả đã nghiên cứu mô hình toán học, các thuật toán giải lớp các bài toán định tuyến xe, đi sâu vào phương pháp tìm kiếm lân cận rộng. Thuật toán *Tìm kiếm lân cận rộng thích ứng - ALNS* được sử dụng để giải bài toán *Định tuyến xe với ràng buộc tải trọng và khung thời gian - VRPTW*. Tác giả đã đề xuất một hiệu chỉnh giúp tăng hiệu năng của ALNS một cách đáng kể được chỉ ra trong kết quả thực nghiệm. Thuật toán được đặt tên là B-ALNS (*Boosted - Adaptive Large Neighborhood Search - Tìm kiếm lân cận rộng thích ứng tăng tốc*). B-ALNS được đánh giá trên các tập dữ liệu thực tế với số lượng yêu cầu (khách hàng) từ trung bình tới rất lớn cho hiệu năng vượt xa ALNS gốc cũng như bộ thư viện phổ biến **Google OR-Tools**. Điều này gợi ý sử dụng B-ALNS cho các bài toán thực tế yêu cầu chất lượng nghiệm tốt trong thời gian ngắn. Ngoài ra B-ALNS cũng tiết kiệm tài nguyên tính toán (CPU, bộ nhớ) đáng kể so với ALNS gốc.

Tác giả cũng đã đưa ra gợi ý áp dụng B-ALNS cho tình huống thực tế khi ta cần một phương án định tuyến tốt trong thời gian ngắn. Về lâu dài, nếu mục đích cao nhất là giảm chi phí mà không cần quan tâm tới thời gian chạy, ta nên sử dụng ALNS gốc kết hợp với kỹ thuật tăng nhiệt để đạt được chất lượng nghiệm tốt hơn. Một gợi ý khác là ta có thể sử dụng B-ALNS ở giai đoạn đầu giúp giảm nhanh hàm mục tiêu, sau đó áp dụng ALNS cho giai đoạn sau để tìm nghiệm tốt hơn. Thời điểm chuyển đổi từ B-ALNS sang ALNS có thể là khi hàm mục tiêu giảm không đủ nhiều theo thời gian hay số vòng lặp nữa (theo một ngưỡng nào đó). ALNS cũng như B-ALNS thể hiện tốt về cả chất lượng nghiệm, số xe sử dụng cũng như hiệu năng và độ ổn định khi giải VRPTW với các cấu hình có số lượng yêu cầu không quá lớn (từ 600 yêu cầu trở xuống). Với các cấu hình mà số lượng yêu cầu là rất lớn (trên 600 yêu cầu), B-ALNS và ALNS cho chất lượng nghiệm chấp nhận được trong khoảng thời gian chạy ngắn (timeout dưới một phút).

Mở rộng nghiên cứu, tác giả sẽ tiếp tục cải tiến hiệu chỉnh B-ALNS để thu được nghiệm chất lượng hơn cũng như hiệu năng cao hơn nữa. Các tham số khác ngoài số vòng lặp có thể được đưa vào nhiều hiệu chỉnh trọng số lựa chọn thuật toán. Thời điểm chuyển đổi B-ALNS và ALNS như đã trình bày ở trên cũng sẽ được nghiên cứu tiếp để đưa ra một chiến thuật thích ứng hợp lý để thuật toán vừa chạy nhanh mà vẫn thu được nghiệm tốt. Thêm vào đó, tác giả tiếp tục nghiên cứu cơ chế thích ứng để "bỏ đi" và "thêm lại" yêu cầu với số lượng hợp lý theo trạng thái của hệ nhằm cải thiện chất lượng nghiệm cũng như tăng hiệu năng.

Tài liệu tham khảo

- [1] K. Altinkemer and B. Gavish, “Parallel savings based heuristics for the delivery problem”, *Operations research*, vol. 39, no. 3, pp. 456–469, 1991.
- [2] B. M. Baker and J. Sheasby, “Extensions to the generalised assignment heuristic for vehicle routing”, *European Journal of Operational Research*, vol. 119, no. 1, pp. 147–157, 1999.
- [3] R. Baldacci, E. Hadjiconstantinou, and A. Mingozzi, “An exact algorithm for the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation”, *Operations research*, vol. 52, no. 5, pp. 723–738, 2004.
- [4] M. L. Balinski and R. E. Quandt, “On an integer program for a delivery problem”, *Operations research*, vol. 12, no. 2, pp. 300–304, 1964.
- [5] R. Bent and P. Van Hentenryck, “A two-stage hybrid algorithm for pickup and delivery vehicle routing problems with time windows”, in *International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, Springer, 2003, pp. 123–137.
- [6] N. Christofides and S. Eilon, “An algorithm for the vehicle-dispatching problem”, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 20, pp. 309–318, 1969.
- [7] N. Christofides, A. Mingozzi, and P. Toth, “Exact algorithms for the vehicle routing problem, based on spanning tree and shortest path relaxations”, *Mathematical programming*, vol. 20, pp. 255–282, 1981.
- [8] G. Clarke and J. W. Wright, “Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points”, *Operations research*, vol. 12, no. 4, pp. 568–581, 1964.
- [9] J.-F. Cordeau, M. Gendreau, and G. Laporte, “A tabu search heuristic for periodic and multi-depot vehicle routing problems”, *Networks: An International Journal*, vol. 30, no. 2, pp. 105–119, 1997.

- [10] G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson, "Solution of a large-scale traveling-salesman problem", *Journal of the operations research society of America*, vol. 2, no. 4, pp. 393–410, 1954.
- [11] G. B. Dantzig and J. H. Ramser, "The truck dispatching problem", *Management science*, vol. 6, no. 1, pp. 80–91, 1959.
- [12] E. Demir, T. Bektaş, and G. Laporte, "An adaptive large neighborhood search heuristic for the pollution-routing problem", *European Journal of Operational Research*, vol. 223, pp. 346–359, Dec. 2012.
- [13] U. Derigs and R. Kaiser, "Applying the attribute based hill climber heuristic to the vehicle routing problem", *European Journal of Operational Research*, vol. 177, no. 2, pp. 719–732, 2007.
- [14] G. Dueck, "New optimization heuristics: The great deluge algorithm and the record-to-record travel", *Journal of Computational physics*, vol. 104, no. 1, pp. 86–92, 1993.
- [15] G. Dueck and T. Scheuer, "Threshold accepting: A general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing", *Journal of computational physics*, vol. 90, no. 1, pp. 161–175, 1990.
- [16] G. Finke, "A two-commodity network flow approach to the traveling salesman problem", *Congresses Numeration*, vol. 41, pp. 167–178, 1984.
- [17] M. L. Fisher and R. Jaikumar, "A generalized assignment heuristic for vehicle routing", *Networks*, vol. 11, no. 2, pp. 109–124, 1981.
- [18] B. Gavish and S. C. Graves, "The travelling salesman problem and related problems", 1978.
- [19] H. Gehring and J. Homberger, "A parallel hybrid evolutionary metaheuristic for the vehicle routing problem with time windows", in *Proceedings of EURO-GEN99*, Citeseer, vol. 2, 1999, pp. 57–64.
- [20] H. Ghaziri, "Solving routing problems by a self-organizing map", *Artificial neural network*, pp. 829–834, 1991.
- [21] F. Glover, "Future paths for integer programming and links to artificial intelligence", *Computers & operations research*, vol. 13, no. 5, pp. 533–549, 1986.

-
- [22] B. L. Golden, T. L. Magnanti, and H. Q. Nguyen, “Implementing vehicle routing algorithms”, *Networks*, vol. 7, no. 2, pp. 113–148, 1977.
 - [23] J. Holland, “Adaptation in neural and artificial system”, *Ann Arbor, Univeristy of Michigan Press*, 1975.
 - [24] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt Jr, and M. P. Vecchi, “Optimization by simulated annealing”, *science*, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680, 1983.
 - [25] G. Laporte, “Fifty years of vehicle routing”, *Transportation science*, vol. 43, no. 4, pp. 408–416, 2009.
 - [26] G. Laporte and Y. Nobert, “A branch and bound algorithm for the capacitated vehicle routing problem”, *Operations-Research-Spektrum*, vol. 5, pp. 77–85, 1983.
 - [27] G. Laporte, Y. Nobert, and M. Desrochers, “Optimal routing under capacity and distance restrictions”, *Operations research*, vol. 33, no. 5, pp. 1050–1073, 1985.
 - [28] J. D. Little, K. G. Murty, D. W. Sweeney, and C. Karel, “An algorithm for the traveling salesman problem”, *Operations research*, vol. 11, no. 6, pp. 972–989, 1963.
 - [29] J. Lysgaard, A. N. Letchford, and R. W. Eglese, “A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem”, *Mathematical programming*, vol. 100, pp. 423–445, 2004.
 - [30] N. Mladenović and P. Hansen, “Variable neighborhood search”, *Computers & operations research*, vol. 24, no. 11, pp. 1097–1100, 1997.
 - [31] D. Naddef and G. Rinaldi, “Branch-and-cut algorithms for the capacitated vrp”, in *The vehicle routing problem*, SIAM, 2002, pp. 53–84.
 - [32] H. Paessens, “The savings algorithm for the vehicle routing problem”, *European Journal of Operational Research*, vol. 34, no. 3, pp. 336–344, 1988.
 - [33] D. Pisinger and S. Ropke, “A general heuristic for vehicle routing problems”, *Computers & operations research*, vol. 34, no. 8, pp. 2403–2435, 2007.

- [34] J.-Y. Potvin and J.-M. Rousseau, “A parallel route building algorithm for the vehicle routing and scheduling problem with time windows”, *European Journal of Operational Research*, vol. 66, no. 3, pp. 331–340, 1993.
- [35] M. Reimann, K. Doerner, and R. F. Hartl, “D-ants: Savings based ants divide and conquer the vehicle routing problem”, *Computers & Operations Research*, vol. 31, no. 4, pp. 563–591, 2004.
- [36] S. Ropke and D. Pisinger, “An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows”, *Transportation science*, vol. 40, no. 4, pp. 455–472, 2006.
- [37] A. Salwani, G. Laleh, and Z. A. N. Mohd, “Re-heat simulated annealing algorithm for rough set attribute reduction”, *International Journal of Physical Sciences*, vol. 6, no. 8, pp. 2083–2089, 2011.
- [38] M. Schumann and R. Retzko, “Self-organizing maps for vehicle routing problems minimizing an explicit cost function”, in *Proceedings of the International Conference on Artificial Neural Networks*, Paris, 1995, pp. 401–406.
- [39] P. Shaw, “A new local search algorithm providing high quality solutions to vehicle routing problems”, *APES Group, Dept of Computer Science, University of Strathclyde, Glasgow, Scotland, UK*, vol. 46, 1997.
- [40] P. Shaw, “Using constraint programming and local search methods to solve vehicle routing problems”, in *International conference on principles and practice of constraint programming*, Springer, 1998, pp. 417–431.
- [41] M. M. Solomon, “Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints”, *Operations research*, vol. 35, no. 2, pp. 254–265, 1987.
- [42] P. M. Thompson and H. N. Psaraftis, “Cyclic transfer algorithm for multi-vehicle routing and scheduling problems”, *Operations research*, vol. 41, no. 5, pp. 935–946, 1993.
- [43] P. Toth and D. Vigo, *The vehicle routing problem*. SIAM, 2002.

- [44] P. Wark and J. Holt, “A repeated matching heuristic for the vehicle routing problem”, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 45, no. 10, pp. 1156–1167, 1994.