

# TIỂU LUẬN

Khai phá dữ liệu và học máy  
Tấn công Elastic-Net vào mạng thần kinh sâu  
qua một số mẫu đối nghịch

Đại học Quốc gia Hà Nội  
Đại học Khoa học Tự nhiên  
Khoa Toán cơ tin

Giảng viên:

Trần Trọng Hiếu

Học viên:

Nguyễn Mạnh Linh, Đào Thị Thu Hồng



---

**Mục lục**

1	Giới thiệu .....	1
2	Các nghiên cứu liên quan .....	4
2.1	Tấn công vào DNNs .....	4
2.2	Phòng thủ trong DNNs .....	5
3	EAD: Tấn công Elastic-Net vào mạng DNNs .....	6
3.1	Sơ bộ về hiệu chỉnh Elastic-Net .....	6
3.2	Xây dựng thuật toán EAD .....	6
3.3	Thuật toán EAD .....	7

## Tóm tắt

---

Các nghiên cứu gần đây đã chỉ ra tính dễ bị tổn thương của các mạng nơ ron sâu (Deep Neural Networks - DNNs) đến các mẫu đối nghịch - một cách trực quan, hình ảnh đối nghịch không thể phân biệt có thể được tạo ra một cách dễ dàng khiến các mô hình được huấn luyện tốt cũng phân loại ảnh sai. Các phương pháp hiện có để tạo ra mẫu đối nghịch thường dựa trên thông số biến dạng  $L_2$  và  $L_\infty$ . Mặc dù trong thực tế độ biến dạng  $L_1$  là quan trọng và quyết định đến tính thưa của nhiễu lại ít được xem xét.

Trong bài này, chúng tôi thiết kế một quy trình tấn công DNNs thông qua mẫu đối nghịch như một bài toán tối ưu hóa sử dụng hiệu chỉnh elastic-net. Tấn công DNNs bằng elastic-net (EAD) với tham số  $L_1$  được thêm vào cùng với tấn công  $L_2$ . Kết quả thực nghiệm trên các tập dữ liệu MNIST, CIFAR10 và ImageNet chỉ ra rằng EAD có thể mang lại một tập mẫu đối nghịch với độ nhiễu  $L_1$  nhỏ và đạt được hiệu suất tấn công tương đương với các phương pháp hiện đại nhất qua các kịch bản tấn công khác nhau. Quan trọng hơn, EAD dẫn đến sự cải tiến trong việc tấn công DNN và gợi ý những hiểu biết mới về hiệu chỉnh  $L_1$  để cải thiện bảo mật trong các mô hình học máy.

---

## 1 Giới thiệu

Mạng nơ ron sâu (DNNs) đã đạt hiệu quả rất tốt với các bài toán trong học máy và trí tuệ nhân tạo như phân loại ảnh, nhận diện giọng nói, dịch máy và trò chơi. Mặc dù DNNs rất hiệu quả nhưng một số nghiên cứu gần đây đã chứng minh DNNs rất dễ "tổn thương" với các mẫu đối nghịch (Szegedy et al. 2013; Goodfellow, Shlens, and Szegedy 2015). Ví dụ, một hình ảnh với nhiều được thiết kế cẩn thận có thể làm cho một DNNs đã được huấn luyện phân loại sai. Tệ hơn nữa, các mẫu đối nghịch được tạo ra hầu như không thể phân biệt được bằng mắt người.



Hình 1.1: Minh họa trực quan về mẫu đối nghịch được sinh bởi EAD. Hình gốc (đà điểu) được lấy từ tập ImageNet. Các mẫu đối nghịch bị phân loại sai với mô hình Inception-v3.

Ví dụ trực quan trên thể hiện 3 mẫu đối nghịch của một hình con đà điểu ("ostrich") được sinh ra bằng thuật toán của chúng tôi. Các mẫu này được mô hình Inception-v3 (Szegedy et al. 2016) phân loại thành "safe", "shoe shop" và "vacuum".

Sự thiếu mạnh mẽ của DNNs thể hiện trước các mẫu đối nghịch đã làm dấy lên những lo ngại nghiêm trọng về vấn đề bảo mật các ứng dụng, bao gồm nhận dạng tín hiệu giao thông và phát hiện phần mềm độc hại. Hơn nữa, vượt ra ngoài không gian kỹ thuật số, các nhà nghiên cứu đã chỉ ra rằng những mẫu đối nghịch này vẫn có hiệu quả trong thế giới vật chất trong việc đánh lừa DNNs (Kurakin, Goodfellow, and Bengio 2016a; Evtimov et al. 2017). Do tính mạnh mẽ và ý nghĩa bảo mật, các phương tiện tạo ra các mẫu đối nghịch được gọi là các cuộc tấn công (*attacks*) vào DNNs. Cụ thể, các cuộc tấn công có chủ đích (*targeted attacks*) nhằm mục đích tạo ra các mẫu đối nghịch được phân loại nhằm thành các lớp mục tiêu cụ thể và các cuộc tấn công không nhắm mục tiêu (*untargeted attacks*) nhằm mục đích để tạo ra các mẫu đối nghịch không được phân loại như lớp học ban đầu. Các cuộc tấn công chuyển giao (*transfer attacks*) nhằm mục đích tạo ra các mẫu đối nghịch có thể chuyển từ mô hình DNN này sang mô hình DNN khác. Ngoài việc đánh giá mức độ mạnh mẽ của DNNs, Các mẫu đối nghịch có thể được sử dụng để huấn luyện một mô hình mạnh có khả năng chống chịu với những xáo trộn của đối nghịch, được gọi

là huấn luyện đối nghịch (*adversarial training*) (Madry et al. 2017). Chúng cũng có được sử dụng để giải thích DNNs (Koh và Liang 2017; Dong et al. 2017).

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng các mẫu đối nghịch để tấn công phân loại ảnh dựa trên mạng nơ ron tích chập. Mẫu đối nghịch được tạo ra để làm sai lệch kết quả dự đoán và phải đảm bảo hình mới tạo ra giống với hình gốc. Trong quá khứ, sự giống nhau giữa mẫu đối nghịch được tạo ra và hình gốc được đo bằng các tham số độ méo (*distortion metrics*) khác nhau. Một metric thường được sử dụng là chuẩn  $L_q$  với  $\|x\|_q = (\sum_{i=1}^p |x_i|^q)^{\frac{1}{q}}$  kí hiệu chuẩn  $L_q$  của vector  $p$  chiều  $x = [x_1, \dots, x_p]$  với  $q \geq 1$ . Đặc biệt, khi tạo ra các mẫu đối nghịch, độ méo  $L_\infty$  được sử dụng để đánh giá sự thay đổi tối đa giá trị pixel (Goodfellow, Shlens, and Szegedy 2015), trong khi độ méo  $L_2$  được sử dụng để cải thiện chất lượng hình ảnh (Carlini and Wagner 2017b). Tuy nhiên, trong thực tế, chuẩn  $L_1$  được sử dụng rộng rãi trong các bài toán phục hồi ảnh (Fu et al. 2006) cũng như phục hồi tính thưa (Candès and Wakin 2008). Các mẫu đối nghịch dựa trên  $L_1$  chưa được xem xét một cách kĩ càng. Trong bài toán mẫu đối nghịch, độ biến dạng  $L_1$  đánh giá tổng các thay đổi trong nhiễu loạn và đóng vai trò là một thành phần (hàm) lỗi đo lường số lượng pixel thay đổi (độ thưa) gây ra bởi nhiễu. Để lấp đầy khoảng trống này, chúng tôi xem xét một thuật toán tấn công dựa trên hiệu chỉnh *elastic-net*, được gọi là tấn công elastic-net vào DNNs (elastic-net attacks to DNNs - EAD). Hiệu chỉnh elastic-net là tổ hợp tuyến tính của các hàm penalty  $L_1$  và  $L_2$  và nó cũng là công cụ tiêu chuẩn cho bài toán lựa chọn tính chất đặc trưng cho dữ liệu nhiều chiều (Zou and Hastie 2005). Trong bài toán tấn công DNNs, EAD mở ra hướng nghiên cứu mới từ cách tấn công hiện đại dựa trên  $L_2$  (Carlini and Wagner 2017b) và cũng đề xuất tấn công hiệu quả hơn theo định hướng  $L_1$  so với các phương pháp tấn công hiện có.

Để khám phá hiệu quả của tấn công dựa trên  $L_1$ , chúng tôi tiến hành các thử nghiệm trên tập dữ liệu MNIST, CIFAR10, và ImageNet trong các tình huống tấn công khác nhau. So sánh với các phương pháp tấn công hiện có dựa trên  $L_2$  và  $L_\infty$  (Kurakin, Goodfellow, and Bengio 2016b; Carlini and Wagner 2017b), EAD có thể đạt được tỉ lệ tấn công thành công tương tự khi phá vỡ DNNs được phòng thủ hoặc không phòng thủ (Papernot et al. 2016b). Quan trọng hơn, chúng tôi chỉ ra rằng, tấn công  $L_1$  đạt được hiệu suất vượt trội so với các cuộc tấn công  $L_2$  và  $L_\infty$  trong các cuộc tấn công chuyển giao với các mẫu đối thủ được huấn luyện bổ sung. Với tập dữ liệu khó nhất (MNIST), các kết quả từ EAD cải thiện tấn công chuyển giao vào DNN không được phòng thủ hay được phòng thủ đạt tỉ lệ thành công gần 99%. Thêm vào đó việc huấn luyện kèm theo với mẫu đối nghịch dựa trên  $L_1$  và  $L_2$  có thể tăng cường khả năng phục hồi của DNNs đối với các nhiễu loạn. Những kết quả này gợi

ý rằng EAD mang lại tập mẫu đối nghịch khác biệt nhưng hiệu quả hơn. Hơn thế nữa, đánh giá các cuộc tấn công dựa trên độ méo  $L_1$  cung cấp thêm hiểu biết mới về học máy đối kháng và sự bảo mật của DNNs, gợi ý rằng  $L_1$  có thể bổ sung cho  $L_2$  và  $L_\infty$  thúc đẩy các framework về học máy đối kháng hoàn thiện hơn.

## 2 Các nghiên cứu liên quan

Trong phần này, chúng tôi tổng hợp các nghiên cứu liên quan về tấn công và phòng thủ DNNs.

### 2.1 Tấn công vào DNNs

FGM và I-FGM: Kí hiệu  $\mathbf{x}_0$  và  $\mathbf{x}$  lần lượt là mẫu gốc và mẫu đối nghịch,  $t$  là lớp mục tiêu cần tấn công. Các phương pháp đạo hàm nhanh (*fast gradient methods - FGM*) sử dụng gradient  $\nabla J$  của hàm mất mát trong tập huấn luyện  $J$  với  $\mathbf{x}_0$  để tạo ra các mẫu đối nghịch (Goodfellow, Shlens, and Szegedy 2015). Với tấn công  $L_\infty$ ,  $\mathbf{x}$  được tính bằng công thức:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \epsilon \times \text{sign}(\nabla J(\mathbf{x}_0, t)) \quad (2.1)$$

Trong đó  $\epsilon$  là độ biến dạng  $L_\infty$  giữa  $\mathbf{x}$  và  $\mathbf{x}_0$  và  $\text{sign}(\nabla J)$  là dấu của gradient. Với tấn công  $L_1$  và  $L_2$ ,  $\mathbf{x}$  được tính bằng công thức:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \epsilon \frac{\nabla J(\mathbf{x}_0, t)}{\|\nabla J(\mathbf{x}_0, t)\|_q} \quad (2.2)$$

với  $q = 1, 2$  và  $\epsilon$  là độ méo tương quan. Các phương pháp lặp đạo hàm nhanh (*Iterative fast gradient methods (I-FGM)*) được trình bày trong (Kurakin, Goodfellow, and Bengio 2016b) là phương pháp lặp sửa dụng FGM với một độ méo mịn hơn. Các cuộc tấn công không nhắm mục tiêu sử dụng FGM và I-FGM có thể được thực hiện theo cách tương tự nhau.

C&W attack: Thay vì sử dụng hàm mất mát trên tập huấn luyện Carlini và Wagner đã thiết kế một hiệu chỉnh  $L_2$  trong hàm mất mát dựa trên lớp logit trong DNNs để sinh ra các mẫu đối nghịch (Carlini and Wagner 2017b). Công thức này hóa ra là một trường hợp riêng của thuật toán EAD của chúng tôi (sẽ được trình bày trong phần sau). Tấn công C&W được coi là một trong những tấn công mạnh nhất đối với DNNs vì nó có thể phá vỡ cả những DNNs được phòng thủ và chất lọc, nó cũng có thể đạt được hiệu suất đáng kể với tấn công chuyển giao.

DeepFool: là một thuật toán tấn công không nhắm mục tiêu  $L_2$  (Moosavi-Dezfooli, Fawzi, and Frossard 2016) dựa trên lý thuyết về phép chiếu tới siêu phẳng phân tách gần nhất trong phân lớp. Nó cũng được sử dụng để tạo ra một nhiễu loạn phổ quát nhằm đánh lừa các DNN được huấn luyện trên các hình ảnh tự nhiên (Moosavi-Dezfooli et al. 2016).



## 2.2 Phòng thủ trong DNNs

Defensive distillation: Chứng cất phòng thủ (Papernot et al. 2016b) bảo vệ chống lại sự nhiễu loạn của đối nghịch bằng cách sử dụng kỹ thuật chưng cất trong (Hinton, Vinyals, and Dean 2015) để huấn luyện lại cùng một mạng với xác suất lớp được dự đoán bởi mạng ban đầu. Phương pháp này đưa ra tham số nhiệt độ  $T$  trong lớp softmax để tăng cường độ mạnh đối với những xáo trộn của mẫu đối nghịch.

Adversarial training: Có thể được triển khai theo 1 số cách khác nhau. Hướng tiếp cận chuẩn là thêm vào tập dữ liệu huấn luyện ban đầu các mẫu đối nghịch đã được sửa đúng nhãn, sau đó huấn luyện lại mạng. (Zheng et al. 2016; Madry et al. 2017; Tramèr et al. 2017; Zantedeschi, Nicolae, and Rawat 2017) đề xuất điều chỉnh training loss hoặc kiến trúc mạng để tăng cường sức mạnh của DNNs trước mẫu đối nghịch.

Detection methods: Sử dụng các test thống kê để phân biệt các mẫu đối nghịch với mẫu gốc (Feinman et al. 2017; Grosse et al. 2017; Lu, Issaranon, and Forsyth 2017; Xu, Evans, and Qi 2017). Tuy nhiên, 10 phương pháp phát hiện khác nhau đã không thể phát hiện được tấn công C&W (Carlini and Wagner 2017a).

### 3 EAD: Tấn công Elastic-Net vào mạng DNNs

#### 3.1 Sơ bộ về hiệu chỉnh Elastic-Net

Hiệu chỉnh elastic-net là công nghệ được sử dụng rộng rãi trong việc giải quyết các bài toán lựa chọn thuộc tính nhiều chiều (Zou and Hastie 2005). Nó được xem là công cụ hiệu chỉnh trong đó tổ hợp tuyến tính hàm phạt (*penalty*)  $L_1$  và  $L_2$ . Nhìn chung, hiệu chỉnh elastic-net được sử dụng trong bài toán cực tiểu hóa sau đây:

$$\text{minimize}_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} f(\mathbf{z}) + \lambda_1 \|\mathbf{z}\|_1 + \lambda_2 \|\mathbf{z}\|_2^2 \quad (3.1)$$

Trong đó  $\mathbf{z}$  là véc tơ của  $p$  biến tối ưu,  $\mathcal{Z}$  là tập nghiệm chấp nhận được,  $f(\mathbf{z})$  là hàm mất mát,  $\|\mathbf{z}\|_q$  là chuẩn  $q$  của  $\mathbf{z}$  và  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  tương ứng là các tham số hiệu chỉnh  $L_1$  và  $L_2$ . Biểu thức  $\lambda_1 \|\mathbf{z}\|_1 + \lambda_2 \|\mathbf{z}\|_2^2$  là được gọi là hiệu chỉnh elastic-net của  $\mathbf{z}$ . Với bài toán hồi quy chuẩn, hàm mất mát  $f(\mathbf{z})$  là hàm lỗi trung bình bình phương (*mean squared error - MSE*), véc tơ  $\mathbf{z}$  biểu diễn trọng số của các thuộc tính và  $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^p$ . Hiệu chỉnh elastic-net trong phương trình 3.1 chính là công thức Lasso khi  $\lambda_2 = 0$  và trở thành công thức hồi quy Ridge khi  $\lambda_1 = 0$ . (Zou and Hastie 2005) đã chỉ ra rằng hiệu chỉnh elastic-net có thể chọn ra 1 nhóm các thuộc tính tương quan mạnh, mà có thể khắc phục sự thiếu sót của việc chọn lựa thuộc tính nhiều chiều khi sử dụng 1 mình hồi quy Lasso hoặc Ridge.

#### 3.2 Xây dựng thuật toán EAD

Từ tấn công C&W (Carlini and Wagner 2017b), ta thêm vào cùng hàm mất mát  $f$  để sinh ra các mẫu đối nghịch. Đặc biệt, cho trước 1 ảnh  $\mathbf{x}_0$  và nhãn đúng của nó là  $t_0$ , gọi  $\mathbf{x}$  là mẫu đối nghịch của  $\mathbf{x}_0$  với lớp đích nhắm đến là  $t \neq t_0$ . Hàm mất mát  $f(\mathbf{x})$  cho tấn công nhắm đích là:

$$f(\mathbf{x}, t) = \max \left( \max_{j \neq t} [\mathbf{Logit}(\mathbf{x})]_j - [\mathbf{Logit}(\mathbf{x})]_t, -\kappa \right) \quad (3.2)$$

Trong đó  $\mathbf{Logit}(\mathbf{x}) = [\mathbf{Logit}(\mathbf{x})_1, \dots, \mathbf{Logit}(\mathbf{x})_K] \in \mathbb{R}^K$  là lớp logit (lớp trước softmax) biểu diễn cho  $\mathbf{x}$  trong mạng DNN,  $K$  là số lượng lớp cần phân loại,  $\kappa > 0$  là tham số tin cậy, nó đảm bảo một khoảng cách cố định giữa  $\max_{j \neq t} [\mathbf{Logit}(\mathbf{x})]_j$  và  $[\mathbf{Logit}(\mathbf{x})]_t$ .

Cần lưu ý rằng, thành phần  $[\mathbf{Logit}(\mathbf{x})]_t$  là xác suất dự đoán  $x$  có nhãn  $t$  theo luật phân loại của hàm softmax:

$$\text{Prob}(\text{Label}(\mathbf{x}) = t) = \frac{\exp([\mathbf{Logit}(\mathbf{x})]_t)}{\sum_{j=1}^K \exp([\mathbf{Logit}(\mathbf{x})]_j)} \quad (3.3)$$

Do đó, hàm mất mát trong phương trình 3.2 có mục đích là để cho ra nhãn  $t$  là lớp có xác suất cao nhất của  $x$  và tham số  $\kappa$  đảm bảo sự phân biệt giữa lớp  $t$  và lớp dự đoán gần nhất khác với  $t$ . Với tấn công không nhắm mục tiêu, hàm mất mát trong phương trình 3.2 trở thành:

$$f(x) = \max \left( [\mathbf{Logit}(\mathbf{x})]_{t_0} - \max_{j \neq t} [\mathbf{Logit}(\mathbf{x})]_j, -\kappa \right) \quad (3.4)$$

Trong bài viết này, chúng tôi tập trung vào tấn công nhắm mục tiêu vì nó khó hơn là không nhắm mục tiêu. Thuật toán EAD có thể được áp dụng trực tiếp vào tấn công không nhắm mục tiêu bằng cách thay  $f(x, t)$  trong phương trình 3.2 thành  $f(x)$  trong phương trình 3.4.

Ngoài ra, để thao túng kết quả dự đoán thông qua hàm mất mát trong 3.2, hiệu chỉnh elastic-net còn tạo ra mẫu đối nghịch tương tự với ảnh gốc. Công thức tấn công elastic-net vào mạng DNNs (EAD) để tạo ra mẫu đối nghịch  $(\mathbf{x}, t)$  cho ảnh gốc  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  như sau:

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{\mathbf{x}} c \times f(\mathbf{x}, t) + \beta \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2 \\ & \text{st } \mathbf{x} \in [0, 1]^p \end{aligned} \quad (3.5)$$

Với  $f(x, t)$  được xác định trong phương trình 3.2,  $c, \beta \geq 0$  lần lượt là các tham số hiệu chỉnh của hàm mất mát  $f$  và hàm phạt  $L_1$ . Miền ràng buộc  $\mathbf{x} \in [0, 1]^p$  giữ cho  $\mathbf{x}$  trong một không gian ảnh mà có thể dễ dàng thỏa mãn điều kiện bằng cách chia mỗi giá trị của pixel cho giá trị lớn nhất (ví dụ 255). Để xác định Khoảng cách (nhiều) giữa  $\mathbf{x}$  và  $\mathbf{x}_0$  bằng  $\delta = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , công thức EAD trong 3.5 được tạo ra để tìm một mẫu đối nghịch  $\mathbf{x}$  mà sẽ được phân loại vào lớp mục tiêu  $t$ , đồng thời cực tiểu hóa  $\beta \|\delta\|_1 + \|\delta\|_2^2$  trong hàm mất mát elastic-net. Đáng chú ý, công thức tấn công C&W (Carlini and Wagner 2017b) trở thành trường hợp đặc biệt của EAD trong công thức 3.5 khi  $\beta = 0$ , không phụ thuộc vào  $L_1$  của  $\delta$ . Tuy nhiên thành phần phạt  $L_1$  là một hiệu trực quan để tạo ra mẫu đối nghịch do  $\|\delta\|_1 = \sum_{i=1}^p |\delta_i|$  biểu diễn tổng sai khác của nhiều và được sử dụng rộng rãi như là hàm thay thế để phát triển các nhiễu thưa. Phần đánh giá hiệu năng sẽ chứng minh rằng khi đưa thành phần  $L_1$  vào nhiễu sẽ sinh ra tập phân biệt các mẫu đối nghịch, và nó cải thiện khả năng chuyển giao tấn công và triển khai huấn luyện đối nghịch.

### 3.3 Thuật toán EAD

Khi giải bài toán EAD trong 3.5 mà không có thành phần  $L_1$ , Carlini and Wagner sử dụng kỹ thuật COV (change-of-variable) qua hàm  $\tanh$  trên  $\mathbf{x}$  nhằm mục đích loại bỏ ràng buộc  $\mathbf{x} \in [0, 1]^p$  (Carlini and Wagner 2017b). Khi  $\beta > 0$ , ta thấy COV

sẽ không hiệu quả để giải bài toán 3.5 vì mẫu đối nghịch tương ứng sẽ không nhạy cảm với thay đổi trên  $\beta$  (xem phần đánh giá hiệu năng để biết chi tiết). Vì  $L_1$  không khả vi trên toàn không gian, COV không giải được bài toán 3.5 do không dùng được phương pháp dưới đạo hàm (*subgradient*) trong việc giải bài toán tối ưu (Duchi and Singer 2009).

Để giải bài toán EAD trong 3.5 để sinh ra các mẫu đối nghịch, bài viết này đề xuất sử dụng thuật toán ISTA (*iterative shrinkage-thresholding algorithm – thuật toán lặp với ngưỡng biến đổi*) (Beck and Teboulle 2009). STA được coi như thuật toán tối ưu bậc nhất phổ biến với thêm một bước điều chỉnh ngưỡng trong mỗi bước lặp. Cụ thể, đặt  $g(\mathbf{x}) = c \times f(\mathbf{x}) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$  và đặt  $\nabla g(\mathbf{x})$  là gradient của  $g(\mathbf{x})$  được tính bởi mạng DNN. Tại bước lặp thứ  $k + 1$ , mẫu đối nghịch  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  của  $\mathbf{x}_0$  được tính như sau:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = S_\beta(\mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \nabla g(\mathbf{x}^{(k)})) \quad (3.6)$$

Trong đó,  $\alpha_k$  là độ dài bước tại bước lặp thứ  $k + 1$ ,  $S_\beta : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  là hàm của phép chiếu biến đổi ngưỡng trên từng phần tử, được xác định bởi:

$$[S_\beta(\mathbf{z})]_i = \begin{cases} \min\{\mathbf{z}_i - \beta, 1\} & \text{nếu } \mathbf{z}_i - \mathbf{x}_{0i} > \beta; \\ \mathbf{x}_{0i} & \text{nếu } |\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_{0i}| \leq \beta; \\ \max\{\mathbf{z}_i + \beta, 0\} & \text{nếu } \mathbf{z}_i - \mathbf{x}_{0i} < -\beta \end{cases} \quad (3.7)$$

Với  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Nếu  $|\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_{0i}| > \beta$ , thành phần  $\mathbf{z}_i$  được co lại với hệ số  $\beta$  và chiếu thành phần kết quả lên miền ràng buộc chấp nhận được thuộc đoạn  $[0, 1]$ . Mặt khác, nếu