Vektörel Fonksiyonlar

Uzayda Eğriler

Uzaydaki bir cisim bir I zaman aralığında hareket ederken cismin koordinatlarını I aralığında tanımlanan bir fonksiyon olarak düşünürüz.

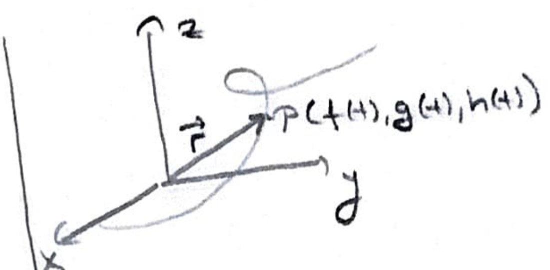
$$\left.\begin{array}{l} x=f(t) \\ y=g(t) \qquad t\in I \\ z=h(t) \end{array}\right\} \text{ Eğriyi parametrize eder.}$$

$(x,y,z)=(f(t),g(t),h(t))$ noktalarının uzayda meydana getirdiği eğriye parçacığın yolu denir. Uzaydaki bir eğri vektör formundada gösterilebilir. t zamanında orjinden $P(f(t),g(t),h(t))$ konumuna kadar

(vektörel fonksiyon)

$\vec{r}(t)=\vec{OP}=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$

vektörü parçacığın **konum vektörüdür**.



- f, g, h fonksiyonlarına konum vektörünün bileşenleri denir.
- parçacığın yolunu I zaman aralığında $\vec{r}$ ile takip edilen eğri olarak düşüneceğiz.

* Uzayda hareket eden bir parçacığın $\vec{r}=\vec{OP}$ konum vektörü, zamanın bir fonksiyonudur.

Ör: $\vec{r}=(\cos t)\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\vec{k}$ vektör fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

t nin tüm reel değerleri için tanımlı.

Çözüm: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ }

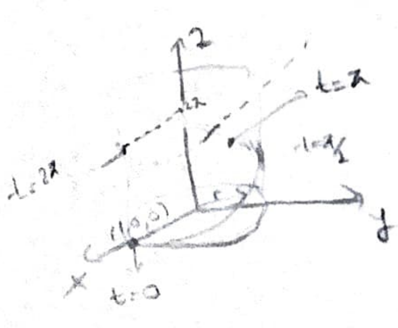
$t=0$ için $x=1$ $y=0$, $z=0$

$t=\frac{\pi}{2}$ " $x=0$, $y=1$, $z=\frac{\pi}{2}$

$t=\pi$ için $x=-1$, $y=0$, $z=\pi$

$t=2\pi$ için $x=1$, $y=0$ $z=2\pi$.

[t değerinin her 2π artışında eğri silindir etrafında bir tur atar. Bu eğriye "helis" denir]



Limitler ve Süreklilik

Tanım: $\vec{F}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$, D tanım bölgeli vektör değerli bir fonksiyon ve $\mathcal{L}$ bir vektör olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ sayısı için tüm $t\in D$ değerlerinde

$|F(t)-\mathcal{L}|<\varepsilon$ $(0<|t-t_0|<\delta$ olduğunda$)$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa, t değeri t_0'a yaklaşırken $\vec{F}$, $\mathcal{L}$ limitine sahiptir denir ve aşağıdaki gibi yazılır

* $\lim\limits_{t\to t_0} F(t)=\mathcal{L}$

Eğer $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\vec{i}+\mathcal{L}_2\vec{j}+\mathcal{L}_3\vec{k}$ ise

* $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\mathcal{L}$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=\mathcal{L}_1$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=\mathcal{L}_2$, $\lim\limits_{t\to t_0} h(t)=\mathcal{L}_3$

* $\lim\limits_{t\to t_0} F(t)=\left(\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\right)\vec{i}+\left(\lim\limits_{t\to t_0} g(t)\right)\vec{j}+\left(\lim\limits_{t\to t_0} h(t)\right)\vec{k}$

---

* Ör: $\vec{F}(t)=\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}+e^t\vec{k}$ eğrisinin $t=\frac{\pi}{4}$ noktasındaki limiti?

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} F(t)=\left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\cos t\right)\vec{i}+\left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\sin t\right)\vec{j}+\left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} e^t\right)\vec{k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}+e^{\pi/4}\vec{k}$$

Tanım: Eğer $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ ise $\vec{r}(t)$ vektör fonksiyonu tanım bölgesindeki bir $t=t_0$ noktasında süreklidir denir.

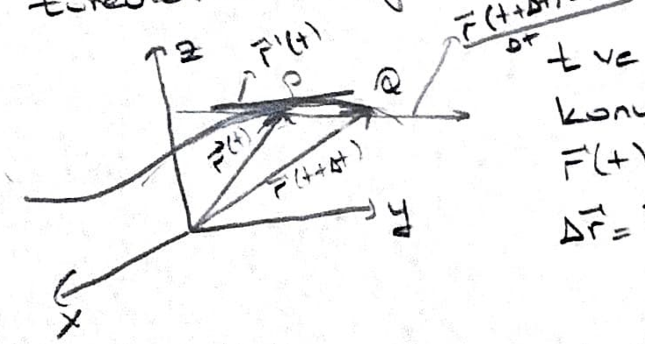
Eğer bir fonksiyon tüm tanım kümesindeki her noktada sürekli ise bu fonksiyona süreklidir denir.

* Ör: $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \sin 2t\,\vec{k}$ eğrisi süreklidir çünkü t nin $(-\infty, \infty)$ aralığındaki her değerindeki bileşen fonksiyonları süreklidir.

* Ör. $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k}$ eğrisi $t=0$ nok.da sürekli değildir.

Türevler

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ uzayda bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın konum vektörü ve f, g ve h da türevlenebilen fonksiyonlar olsun.



t ve $t+\Delta t$ anlarında parçacığın konum vektörleri $\vec{r}(t)$ ve $\vec{r}(t+\Delta t)$ olur.

$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

Tanım: Eğer f, g, h fonksiyonları t'de türevlere sahipse $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ vektör fonksiyonu t de türeve sahiptir (diferansiyellenebilirdir). Türevi aşağıdaki vektör fonksiyonudur.

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\vec{i} + \frac{dg}{dt}\vec{j} + \frac{dh}{dt}\vec{k}$$

* Eğer bir $\vec{r}$ vektör fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında türevlenebilir ise ona türevlenebilir denir.

* Eğer $\frac{d\vec{r}}{dt}$ sürekli ise ve asla $\vec{0}$ olmuyorsa, yani f, g ve h fonksiyonlarının hepsinin aynı anda sıfır olmayan sürekli birinci mertebeden türevleri mevcutsa $\vec{r}$ tarafından çizilen eğri düzgündür.

* $\vec{r}'(t)$ vektörü $\vec{0}$ dan farklı ise p noktasında eğriye teğet olan vektör olarak tanımlanır.

* Tanım: (Hız ve İvme Vektörü)

Eğer $\vec{r}$ uzayda düzgün bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın konum vektörü ise,

bu durumda

* $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

parçacığın hız vektörüdür. ve eğriye teğettir.

* $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

türevi parçacığın ivme vektörüdür.

i.) Hız, konumun türevidir : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

ii.) Sürat, hızın büyüklüğüdür : Sürat $= |\vec{v}|$

iii.) İvme, hızın türevidir : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

iv.) $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ birim vektörü, t zamanında hareketin yönüdür.

* **Ör:** Uzayda hareketi $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 5\cos^2 t\,\vec{k}$ konum vektörü ile verilen parçacığın hızını ve ivmesini bulunuz.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t) = -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} - \underbrace{10\cos t\sin t}_{-5\sin 2t}\,\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\cos t\,\vec{i} - 2\sin t\,\vec{j} - 10\cos 2t\,\vec{k}$$

* **b.)** $\vec{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ ve $\vec{a}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ (hız ve ivme) lerini bulunuz.

$\frac{2\pi + 3\pi}{2}$

$$\vec{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\vec{i} + 2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\vec{j} - 5\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)\vec{k}$$

$$= -2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{j} - 5(-1)\vec{k}$$

$$= \sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{a}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\vec{i} - 2\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\vec{j} - 10\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)\vec{k}$$

$$= -2\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{j} + 0.\vec{k}$$

$$= -\sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}$$

* **Ör:** $\vec{r}(t) = t^3\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$ düzlem eğrisi

$\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$ için düzgün bir eğridir. O zaman

$\frac{d\vec{r}}{dt} = 3t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}$ dır ve <u>$t=0$ için düzgün değildir</u>

<u>diğer bütün noktalarda düzgündür.</u>

* Vektör Fonksiyonları İçin Türev Alma Kuralları

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$, t nin diferansiyellenebilir vektör fonksiyonları, $\vec{c}$ sabit bir vektör λ keyfi skaler ve f diferansiyellenebilir keyfi bir skaler fonksiyon olsun

1. sabit fonksiyon kuralı: $\frac{d}{dt}(\vec{c})=\vec{0}$
2. skaler çarpım kuralı: $\frac{d}{dt}[\lambda\vec{u}(t)]=\lambda\vec{u}'(t)$
3. toplam kuralı: $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)+\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)+\vec{v}'(t)$
4. Fark kuralı: $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)-\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)-\vec{v}'(t)]$
5. noktasal çarpım kuralı: $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t).\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t).\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\,\vec{v}'(t)$
6. vektörel çarpım kuralı: $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\,\vec{v}(t)\times\vec{u}(t)\,\vec{v}'(t)$
7. zincir kuralı: $\frac{d}{dt}[\vec{u}(f(t))]=\vec{u}'(f(t)).f'(t)$.

* Bir Uzay Eğrisi Boyunca Yay Uzunluğu.

Bir $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, $a\le t\le b$ düzgün eğrisinin uzunluğu ($t=a$ dan $t=b$ ye artarken yalnızca bir kez geçilen eğrinin uzunluğu) aşağıdaki gibidir.

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$ (yay uzunluğu formülü)

Yada

$$L=\int_a^b|\vec{v}|\,dt,\quad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}'(t)$$ (yay uzunluğu formülü)

* Ör: $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + \sqrt{5}\,t\,\vec{k}$, $0 \le t \le \pi$ aralığında eğrinin uzunluğunu hesaplayınız.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + \sqrt{5}\,\vec{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (\sqrt{5})^2}$$

$$= \sqrt{\underbrace{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}_{4\cdot\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}} + 5}$$

$$= \sqrt{4+5}$$

$$= 3$$

$$L = \int_{t=0}^{\pi} |\vec{v}|\,dt = \int_{t=0}^{\pi} 3\,dt = 3t \Big|_{0}^{\pi} = 3(\pi - 0) = 3\pi .$$

* Teğet vektör: $\vec{r}(t)$ eğrisinin teğet vektörü $\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$ dir.

* Teğet birim vektör: $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$ vektörü $\vec{r}(t)$ eğrisinin teğet birim vektörüdür.

* Ör: $\vec{r}(t) = \cos^3 t\,\vec{i} + \sin^3 t\,\vec{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ eğrisinin teğet birim vektörünü bulunuz.

$$\underbrace{\vec{r}\,'(t)}_{\vec{v}} = -3\cos^2 t\,\sin t\,\vec{i} + 3\sin^2 t\cos t\,\vec{k} \rightarrow \text{teğet vektörüdür.}$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = |\vec{v}| = \sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2} = \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}}$$

$$= \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}$$

$$= 3\cdot|\cos t\sin t| = 3\cos t\sin t \quad , \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$|\vec{r}'(t)| = 3\cos t \sin t$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(-3\cos^2 t \sin t\, \vec{i} + 3\sin^2 t \cos t\, \vec{k})}{3\cos t \sin t}$$

$\vec{T} = -\cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{k}$. $\Rightarrow$ teğet birim vektörü.

* Çok Değişkenli Fonksiyonlar

* **Tanım:** D nin $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ gibi n tane reel sayıdan oluşan bir küme olduğunu varsayalım. D üzerinde bir reel değerli fonksiyonun D deki her elemana bir

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

tek (bir tane) reel sayı atanması bir kuraldır. D kümesi fonksiyonun tanım kümesidir. f nin aldığı w değerlerinin kümesi fonksiyonun değer kümesidir. W sembolü f nin bağımlı değişkenidir ve f ye x_1'den x_n'e kadar n bağımsız değişkenin bir fonksiyonu denir.

* $z = f(x, y) \longrightarrow$ 2 bağımsız, 1 bağımlı değişken
* $w = f(x, y, z) \longrightarrow$ 3 " , 1 "

* Tanım ve Değer Kümesi

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Değer Kümesi
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y - x^2 \geq 0$ tanımlı	$[0, \infty)$
$z = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$ tanımlı	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$z = \sin(xy)$	düzlemin tümü	$[-1, 1]$

* Üç Değişkenli Fonksiyonlarda Tanım ve Değer Kümesi

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Değer Kümesi
$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	uzayın tümü	$[0,\infty)$
$w=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$	$(x,y,z)\neq(0,0,0)$ tanımlı	$(0,\infty)$
$w=xy\ln z$	uzayın yarısı $(z>0)$	$(-\infty,\infty)$

Tanım:

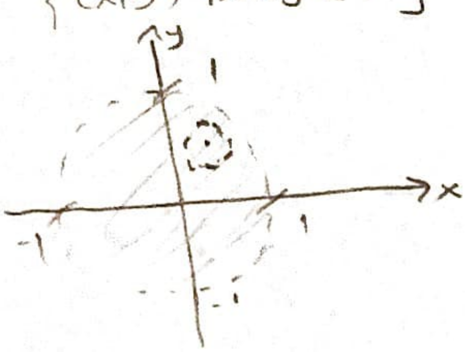
iç nokta

(x_0,y_0) R nin bir iç noktası

sınır noktası

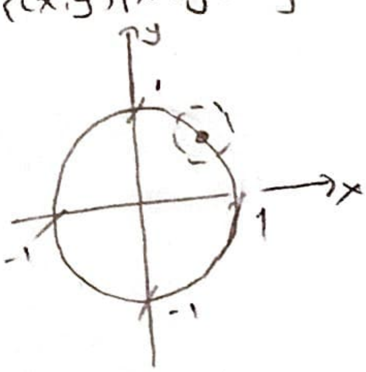
(x_0,y_0) R nin sınır noktası

Ör: $\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$



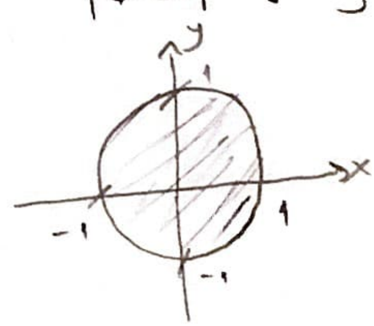
Açık birim daire
her nokta bir iç nokta

$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$



Birim dairenin sınırı
birim çember

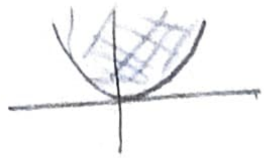
$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$



Kapalı birim daire
Bütün sınır noktalarını içerir

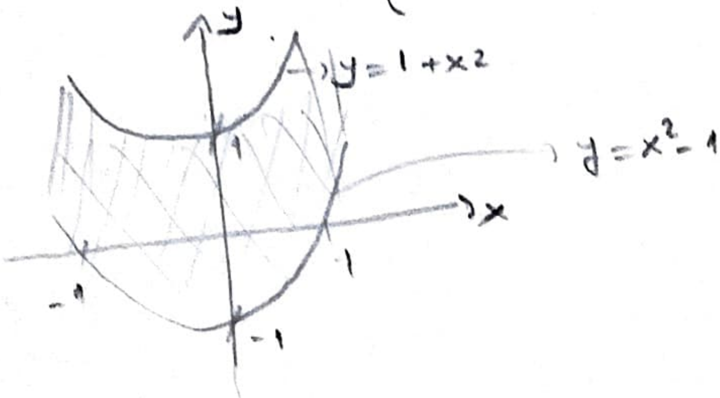
* Ör: $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz.

$y-x^2 \geq 0$ için tanımlı.



* Ör: $f(x,y)=\cos^{-1}(y-x^2)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz

$$-1 \leq y-x^2 \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} y-x^2 \leq 1 \Rightarrow y \leq 1+x^2 \\ y-x^2 \geq -1 \Rightarrow y \geq x^2-1 \end{cases}$$

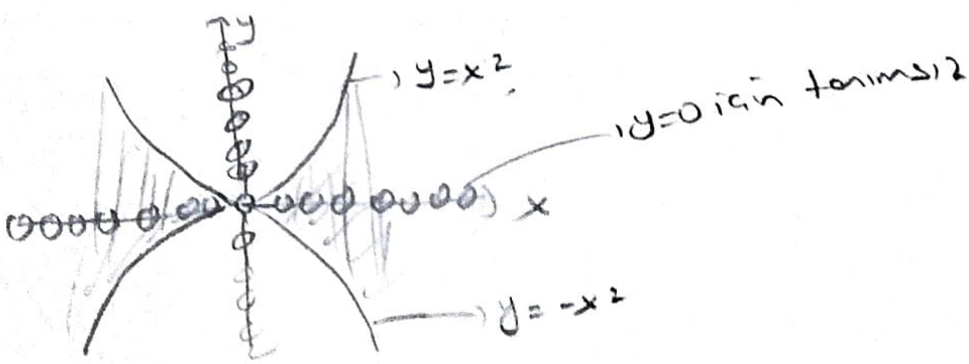


* Ör: $f(x,y)=\frac{1}{y}\arcsin\left(\frac{y}{x^2}\right)$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz

$\frac{y}{x^2}$: $x \neq 0$ için tanımlı

$\arcsin\left(\frac{y}{x^2}\right)$: $-1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 1$ için tanımlı $\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x^2} \leq 1 \Rightarrow y \leq x^2 \\ -1 \leq \frac{y}{x^2} \Rightarrow y \geq -x^2 \end{cases}$

$\frac{1}{y}$: $y \neq 0$ için tanımlı.



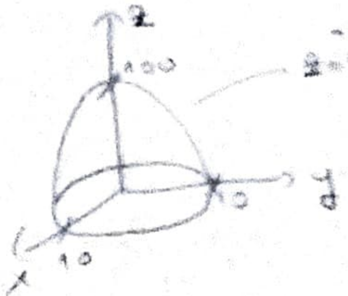
* İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri, Seviye Eğrileri

__Tanım__ Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu düzlemdeki noktaların kümesi f nin __seviye eğrisi__ olarak adlandırılır.

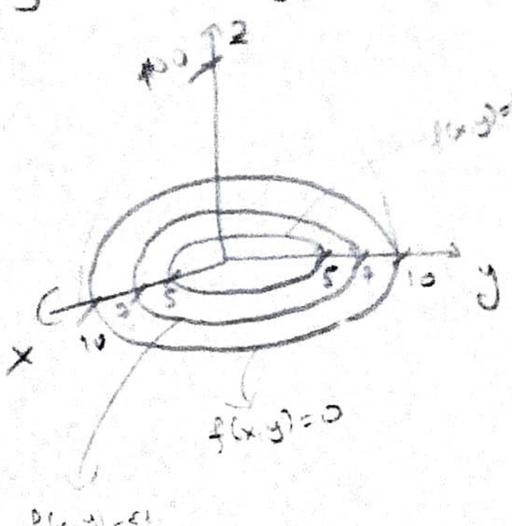
* f nin tanım kümesindeki (x,y) için uzaydaki bütün $(x,y,f(x,y))$ noktaları kümesi f nin grafiğidir. f nin grafiğine $z=f(x,y)$ yüzeyi denir.

* __Ör__ $f(x,y)=100-x^2-y^2$ grafiğini çiziniz.

$f(x,y)=z$ dersek $z=100-x^2-y^2$ paraboloid



b) düzlemdeki f nin tanım kümesinde $f(x,y)=0$, $f(x,y)=51$ ve $f(x,y)=75$ seviye eğrilerini gösteriniz.



$f(x,y)=100-x^2-y^2$ paraboloidi

* $f(x,y)=0$ seviye eğrisi xy düzleminde

$0=100-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=100$

$x^2+y^2=100$ $M(0,0)$, $r=10$ olan çember

* $f(x,y)=51$ seviye eğrisi

$51=100-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=49$

$x^2+y^2=49$, $M(0,0)$ $r=7$ olan çember

* $f(x,y)=75$ seviye eğrisi

$x^2+y^2=25$ $M(0,0)$ $r=5$ olan çember

* Üç Değişkenli Fonksiyonlar.

* **Seviye Yüzeyleri:** Uzayda üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x,y,z)=c$ değerine sahip olduğu (x,y,z) noktaları kümesi f nin seviye yüzeyi olarak tanımlanır.

* **Ör:** Aşağıdaki fonksiyonun seviye yüzeylerini tanımlayınız.

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

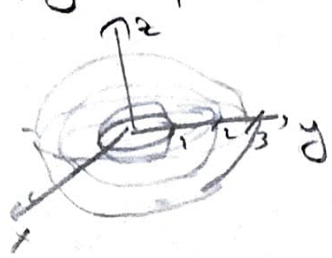
$c=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$c>0$ için $M(0,0,0)$ olan yarıçapı c olan bir küredir

$1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

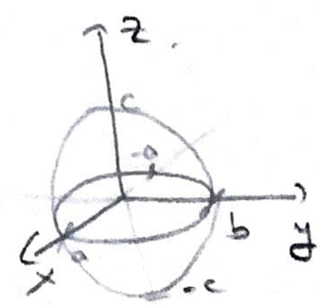
$2=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$3=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$



$c=0$ için bir $(0,0,0)$ orijin noktasıdır.

Ör: Elipsoid: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

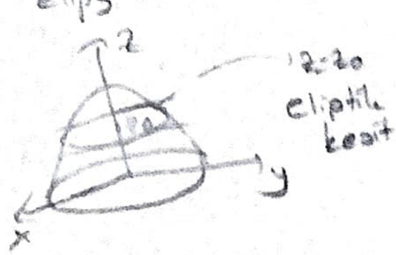


$z=0$ için $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ elipsi (xy düzleminde) elips

$y=0$ için $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ elipsi (xz düzleminde) elips

$x=0$ için $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ elipsi (yz düzleminde) elips

$z=z_0$ için $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z_0^2}{c^2}$ (eliptik kesit)

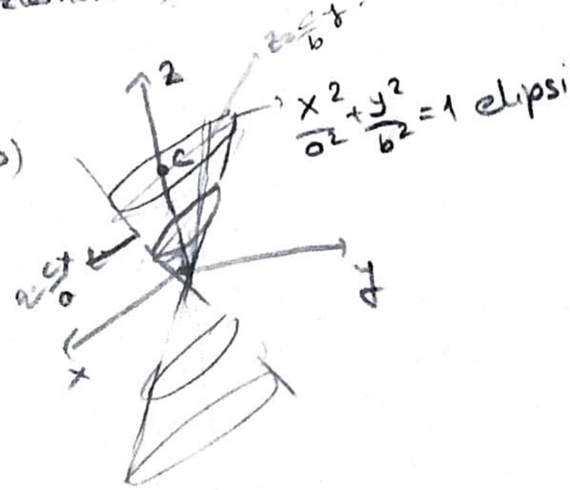


Not: elipsoid her üç koordinat düzlemine göre eliptik kesite sahiptir

1 Ör: Eliptik Koni : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

$x=0 \Rightarrow z=\mp\frac{c}{b}y$ (yz düzleminde $z=\frac{c}{b}y$ ve $z=-\frac{c}{b}y$ doğrusu)

$y=0 \Rightarrow z=\mp\frac{c}{a}x$ (xz düzleminde)



$z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ $(x=0, y=0)$

$z=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{c^2}$

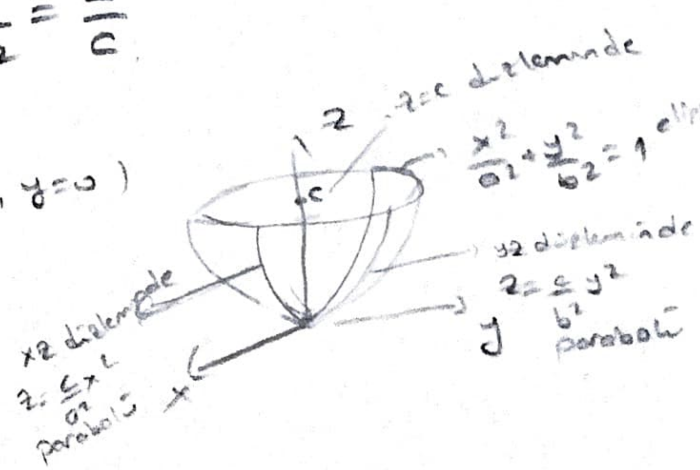
$z=-1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{c^2}$

$z=c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$z=-c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Ör: $x^2+y^2=z^2$ dairesel koni

1 Ör: Eliptik Paraboloid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$



$z=0$ için $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ $(x=0, y=0)$

$z=1$ için $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{c}$

$z=c$ için $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

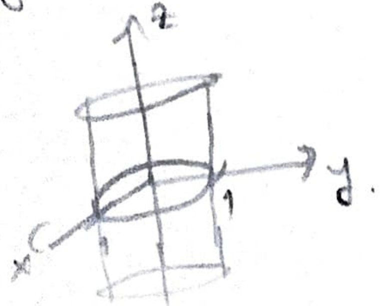
$z=-1$ için $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{-1}{c}$ X (sağlanmaz)

$x=0$ için $z=\frac{c}{b^2}y^2$, $y=0$ için $z=\frac{c}{a^2}x^2$ parabolü

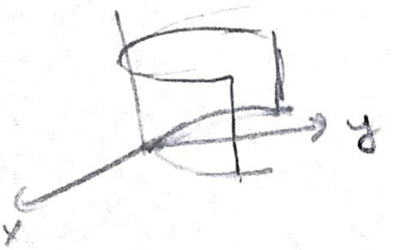
Parabolü

* **Ör:** Silindir: Bir silindir verilen sabit bir doğruya paralel olan ve verilen bir düzlem eğrisi boyunca hareket eden doğrunun ürettiği bir yüzeydir.

* Ör: $x^2+y^2=1$ çemberi z-eksenine paralel doğrularla yapılmış ve xy-düzlemindeki $x^2+y^2=1$ çemberinden geçen silindiri tanımlar



* Ör: y-eksenine paralel olan $y=x^2$, $z=0$ parabolünden geçen doğruların oluşturduğu silindir



İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit

* Tanım: Eğer $\forall \varepsilon>0$ sayısına karşılık f nin tanım kümesindeki her (x,y) noktası için

$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ olduğu her yerde $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı bulunabilirse, (x,y) noktası (x_0,y_0)'a yaklaşırken f fonksiyonu L limitine yaklaşır deriz ve aşağıdaki şekilde yazarız

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

* İki Değişkenli Fonksiyonların Limitlerinin Özellikleri

Eğer L, M ve k reel sayılar ve

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$ ise.

1) Toplam (Fark) Kuralı: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \mp g(x,y)) = L \mp M$

2.) Sabitle Çarpım Kuralı: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k f(x,y) = kL$ (k herhangi bir sabit)

3.) Çarpım Kuralı: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = L \cdot M$.

4.) Bölüm Kuralı: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$.

5.) Kuvvet Kuralı: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = L^n$, n pozitif tamsayı.

6.) Kök Kuralı: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n pozitif tamsayı

***Ör:** $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = ?$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \frac{3}{-1} = -3$$

***Ör:** $\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$

$\frac{0}{0}$

* **Ör:** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x.(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x.\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}.(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

* Ör: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$ limitini limit tanımından gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0 \frown \delta > 0$?

öyleki $0 < \underbrace{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}_{\sqrt{x^2+y^2}<\delta} < \delta$ iken $\left|\dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$ olsun.

$\left|\dfrac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\dfrac{4xy^2}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{4|x|y^2}{x^2+y^2} < 4|x| < 4\delta$, $4\delta = \varepsilon$ alırsak

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$ bulunur.

$x^2+y^2 > y^2$

$\Downarrow$

$\dfrac{1}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow \dfrac{4|x|y^2}{x^2+y^2} < \dfrac{4|x|\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = 4|x|$

$x^2 < x^2+y^2 \Rightarrow |x| < \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 4|x| < 4\sqrt{x^2+y^2}$
$4|x| < 4\delta$

Sandviç Teoremi

Merkezi (x_0, y_0)'da olan $\left((x,y) \neq (x_0,y_0)\right)$ bir dairenin içinde $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ iken.

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$ ise

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ dir.

Ör:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini bulunuz.

$-1 \leq \sin(\frac{1}{y}) \leq 1$ dir. O zaman.

$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{y} \leq x^2$ bulunur.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -x^2 = 0$ ve $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$. dolayısıyla Sandviç Teoremi gereği

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \sin\frac{1}{y} = 0$ elde edilir.

NOT limiti direk çözmeye çalışırsak,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \sin\frac{1}{y} \to \sin\frac{1}{0}$ değeri? çözemeyiz

* Ardışık Limit (İki Kat Limit)

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ için

$\lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right] = L_1$ ve $\lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right] = L_2$ olsun

* i) $L_1 = L_2$ ise $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasında iki katlı limiti vardır. Fakat $L_1 = L_2$ olması $f(x,y)$ nin (a,b) noktasında bir limiti olduğunu söylememiz için yeterli değildir.

* ii) $L_1 \neq L_2$ ise fonksiyonun (a,b) noktasında iki kat limiti yoktur. dolayısıyla limiti yoktur.

* Limitin Yokluğu İçin Çift Yol Testi

Eğer bir $f(x,y)$ fonksiyonunun f nin tanım kümesinde (x,y) noktası farklı iki yol boyunca (x_0,y_0)'a yaklaşırken farklı limitleri varsa bu durumda

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ limiti mevcut değildir.

Örneğin (0,0) noktasında f(x,y) fonksiyonunun limitinin mevcut olmadığını göstermek için

★ I. yöntem

$y = x$
$y = x^2$
$y = x^3$
⋮

} yolları boyunca alınan limitlerin sonuçlarının farklı olduğunu göstermek limitinin mevcut olmadığını söylemek için yeterlidir.

yada

★ II. yöntem.

$y = kx$ veya $y = kx^2$ veya $y = kx^3$ veya $y = kx^4$ veya $y = kx^5$ ... yolları boyunca alınan limitler k ya bağlı bulunuyorsa o zaman limitin mevcut olmadığını söyleyebiliriz.

★ III. yöntem

Ardışık limitin (iki kat limitin) olmadığı gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir

Ör: $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonunun (0,0) noktasında limitinin olup olmadığını araştırınız.

II. yöntem ile çözümü:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \overset{\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}}{=} \underset{y=kx^2 \text{ boyunca}}{\lim_{x\to 0}} \frac{2x^2kx^2}{x^4+(kx^2)^2} = \underset{y=kx^2 \text{ boyunca}}{\lim_{x\to 0}} \overset{\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}}{\frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4}} = \lim \frac{2k\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(1+k^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2}$$

$$= \frac{2k}{1+k^2}$$ (limit yok) sonuç k'ya bağlı bulundu

k değeri değiştikçe limit değeri değişir dolayısıyla limit yok)

Aynı örneği II. yöntem ile çözersek;

$f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonun $(0,0)$ noktasındaki limitini iki farklı yol boyunca hesaplayalım

* $y=x^2$ yolu boyunca $f(x,y)$ fonksiyonunun limitini bulalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=x^2 \text{ boyunca}}} \frac{2x^2 \cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{2x^4}{2x^4}}_{1} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

* $y=2x^2$ yolu boyunca $f(x,y)$ fonksiyonunun limitini bulalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=2x^2 \text{ boyunca}}} \frac{2x^2\,2x^2}{x^4+(2x^2)^2} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=2x^2 \text{ boyunca}}} \frac{4x^4}{x^4+4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cancel{x^4}}{5\cancel{x^4}} = \frac{4}{5}$$

Sonuç: iki farklı yol boyunca limitler farklı çıktığı için $f(x,y)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limiti YOKTUR.

III. yöntem ile çözersek.

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^4+0}\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{0+y^2}\right] = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

limitler aynı çıktı!!! limitlerin aynı olması limitinin var olduğunu söylemek için yeterli değildir. III. yöntemden bir sonuç elde edemedik!!! Ama biz diğer iki yöntemle limitinin var olmadığını göstermiş olduk. (III. yöntem bu soru için yanıt vermez diğer iki yöntemden biri kullanılmalı)

Ör: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}$ limitinin olup olmadığını araştırınız.

I. yol

* II. yöntem ile çözersek,

$y=kx$ boyunca limit alalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2} = \lim_{\substack{x\to0 \\ (y=kx \text{ boyunca})}} \frac{3x^2-(kx)^2}{3.(kx)^2+x^2} = \lim_{x\to0} \frac{3x^2-k^2x^2}{3k^2x^2+x^2} = \lim_{x\to0} \frac{(3-k^2)\cancel{x^2}}{(3k^2+1)\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{3-k^2}{3k^2+1}$$

sonuç "k" ya bağlı dolayısıyla limit YOK

II. yol

* I. yöntem ile çözersek

$y=x$ boyunca limit alalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2} = \lim_{\substack{x\to0 \\ (y=x \text{ boyunca})}} \frac{3x^2-x^2}{3x^2+x^2} = \lim_{x\to0} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

$y=x^2$ boyunca limit aldım $\frac{0}{0}$ belirsizliği!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2} = \lim_{\substack{x\to0 \\ (y=x^2 \text{ boyunca})}} \frac{3x^2-x^4}{3x^4+x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\cancel{x^2}(3-x^2)}{\cancel{x^2}(3x^2+1)} = \lim_{x\to0} \frac{3-x^2}{3x^2+1} = 3$$

$\frac{1}{2} \neq 3$. limit Yok.

III. yol

* III. yöntem ile çözersek

$$\lim_{x\to0} \left[\lim_{y\to0} \frac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}\right] = \lim_{x\to0} \left[\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\right] = 3$$

$$\lim_{y\to0} \left[\lim_{x\to0} \frac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}\right] = \lim_{y\to0} \left[-\frac{\cancel{y^2}}{3\cancel{y^2}}\right] = \lim_{y\to0} \left[-\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3}$$

ardışık (iki kat) limit yoktur. limitler birbirinden farklı çıktı

Dolayısıyla (LİMİT MEVCUT DEĞİL)

* Süreklilik

Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi süreklilik limit cinsinden ifade edilebilir.

* Tanım Eğer

1. f, (x_0, y_0) da tanımlı
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ mevcut
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

bu üç koşul sağlanıyorsa f fonksiyonu (x_0,y_0) noktasında süreklidir denir.

* Eğer fonksiyon tanım kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyona süreklidir denir.

Ör:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekliliğini araştırınız

1.) $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ nok da tanımlıdır. $f(0,0)=0$ dır.

II.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\,kx}{x^2+(kx)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2kx^2}{(1+k^2)x^2}$

$y=kx$ koyunca

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2k}{1+k^2}$

$= \dfrac{2k}{1+k^2} \Rightarrow$ k'ya bağlı sonuç

limit YOK

limit olmadığı için $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli değildir !!!

* Bileşke Fonksiyonların Sürekliliği

Eğer f fonksiyonu (x_0, y_0) da sürekli ve g'de $f(x_0, y_0)$ da sürekli olan bir tek değişkenli fonksiyon ise bu durumda

$h(x,y) = g(f(x,y))$ ile tanımlanan bileşke fonksiyon

$h = g \circ f$, (x_0, y_0) da süreklidir.

ör: $f(x,y) = x - y$, $g(x,y) = e^x$ olsun.

$h = g \circ f = e^{x-y}$ $\Rightarrow$ $\forall$ x, y noktasında süreklidir (f ve g sürekli)

ör: $\cos\left(\frac{xy}{x^2+1}\right)$, $\ln(1+x^2y^2)$ $\forall$ x, y nokta da süreklidir

* İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonlar

İki değişkenli fonksiyonlar için yapılan limit süreklilik tanımları ile toplam, fark, çarpım, sabitle çarpım bölüm ve kuvvetlerin limitleri ve süreklilikleriyle ilgili sonuçlar üç veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

ör: $\ln(x+y+z)$ ve $y\frac{\sin z}{x-1}$ tanım kümesi boyunca süreklidir

ör:
$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0} = \frac{1}{2}$$