Sonsuz Seriler

Verilen bir $\{a_n\}$ dizisi için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ifadesine bir **sonsuz seri** denir. a_n, serinin n'inci

terimidir.

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_n \Rightarrow (\text{n'inci kısmi toplam})$$
$$\vdots$$

ile tanımlı $\{s_n\}$ dizisine serinin kısmi toplamlar
dizisi denir. Buradaki s_n sayısı n'inci kısmi toplamdır.
Eğer kısmi toplamlar dizisi bir L limitine yakınsıyorsa seri yakınsaktır ve L toplamına sahiptir.

Bu durumda,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$$

yazılır. Eğer serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsamıyorsa seri ıraksaktır denir.

NOT: Kısmi toplamlar dizisinin bir L limitine yakınsaması: $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ dir.

Ör: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1).(k+2)}$ serinin toplamını bulunuz.

(teleskopik seri)

$$\frac{1}{(k+1).(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1).(k+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$$

seri yakınsaktır

ve serinin toplamı

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1).(k+2)} = 1$$

Ör: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k.(k+1)}$ "teleskopik serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{1}{k.(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k.(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ seri yakınsaktır ve.

serinin toplamı:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k.(k+1)} = 1$$

* Geometrik Seri

$(a \neq 0)$ a, r sabit sayılar olmak üzere

$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ şeklindeki seriye geometrik seri denir

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ ya da

$a.(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} + \dots)$ geometrik seri

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$ geometrik seridir

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots$ geometrik seri

** Eğer $|r| < 1$ ise $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ geometrik serisi $\frac{a}{1-r}$'ye yakınsar ve.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1$$

** Eğer $|r| \geq 1$ ise seri ıraksaktır.

Ör: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\right)}_{\text{geometrik seri}}$$

$a = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$. $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ dir

$|r| = \frac{1}{2} < 1$ olduğu için seri yakınsaktır ve .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Ör: $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)}_{\text{geometrik seri}}$$

$a = \frac{1}{9}$, $r = \frac{1}{3}$ ve $|r| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

ve serinin toplamı $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{1/9}{1-1/3} = \frac{1}{6}$ //

Ör: $5-\frac{5}{4}+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}+\cdots$ serisinin toplamını bulunuz

$$5-\frac{5}{4}+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}+\cdots=5.\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots\right)$$

$$=5.\underbrace{\left(1+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\right)}_{\text{geometrik seri}}$$

$a=5$, $r=-\frac{1}{4}$ ve $|r|=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}<1$ olduğu için seri yakınsaktır ve serinin toplamı

$$5-\frac{5}{4}+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}+\cdots=\frac{a}{1-r}=\frac{5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=4$$

Ör: $1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\cdots$ serisi yakınsak mıdır? ıraksak mıdır?

$$\underbrace{1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\cdots}_{\text{geometrik seri}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^{n-1}$$

$a=1$, $r=\sqrt{2}$ ve $|r|=|\sqrt{2}|=\sqrt{2}>1$ olduğu için seri ıraksaktır.

Ör: $1-1+1-1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ serisi geometrik seridir

$a=1$, $r=-1$ ve $|r|=|-1|=1\geq 1$ olduğu için seri ıraksaktır.

Ör: 5,232323... tekrarlayan ondalık sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak yazınız

$$5,232323... = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots$$

$$= 5 + \underbrace{\frac{23}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \frac{1}{(100)^3} + \cdots\right)}_{\text{geometrik seri}}$$

$a = \frac{23}{100}$ $\quad r = \frac{1}{100}$ ve $|r| = \left|\frac{1}{100}\right| = \frac{1}{100} < 1$

olduğu için

toplamı $\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{99}$

Buna göre $5,232323... = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}$.

Örn: $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = ?$ (serinin toplamını bulunuz)

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cancel{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln\frac{1}{2}.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{1}{2}$$

"n. Terim Testi"

**: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

fakat tersi doğru değildir.

** n. Terim Testi: $\lim_{n\to\infty} a_n$ mevcut değilse veya

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise. seri ıraksaktır.

ör: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ serisi

$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ olduğu için ıraksaktır.

ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ serisi $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ olduğu için $1 \neq 0$

ıraksaktır.

ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ serisi $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2}$ olduğu $-\frac{1}{2} \neq 0$

için seri ıraksaktır.

özetlersek

*NOT: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise serinin karakterini bilemiyoruz yakınsakta

seri olabilir ıraksakta olabilir. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise

seri ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = ?$ $\quad \rightarrow \frac{2.2^n}{3^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\text{geometrik seri}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}_{\text{geometrik seri}}$$

$\Downarrow$

$a=\frac{1}{3}, \; r=\frac{1}{3}$

$|r|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/3}{1-1/3} \quad \left(\rightarrow \frac{a}{1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$a=\frac{4}{3}, \; r=\frac{2}{3}$

$|r|=\left|\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}<1$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} \quad \left(\rightarrow \frac{a}{1-r}\right)$$

$$= 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} + 4$$

$$= 9/2$$

Ör: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{6^n} = ?$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{6^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{geometrik seri}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{geometrik seri}}$$

$\Downarrow$ $a=1,\ r=\frac{1}{2}$ $\Downarrow$ $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1.$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$\Downarrow$ $a=1,\ r=\frac{1}{3}.$ $\Downarrow$ $|r| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$ $\Downarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= 2 - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Serileri Birleştirmek

* Sonsuz terimli bir seriye sonlu sayıda bir terim eklemek veya çıkarmak serinin karakterini değiştirmez.

*. $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ serileri yakınsak iki seri olsun

1) $\sum (a_n \mp b_n) = \sum a_n \mp \sum b_n = A \mp B$.

2) $\sum k.a_n = k \sum a_n = k.A$

* $\sum a_n$ yakınsak. $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum (a_n + b_n)$ ve $\sum (a_n - b_n)$ serilerinin ikiside ıraksaktır.

* Hem $\sum a_n$ hemde $\sum b_n$ ıraksak olsalar bile $\sum (a_n + b_n)$ serisi yakınsak olabilir

Ör: $\sum a_n = 1+1+1+\dots$ ve $\sum b_n = (-1)+(-1)+(-1)+\dots$

serileri ıraksak. oldukları halde

$\sum a_n + b_n = 0+0+0+\dots+0+\dots$ serisi yakınsaktır.

Ön: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = ?$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4 + \frac{4}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots$$

$$= \underbrace{4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right)}_{\text{geometrik seri}}$$

$a = 4, \quad r = \frac{1}{2}$

$|r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

Terim Eklemek veya Terim Silmek

Bir serinin yakınsaklığını veya ıraksaklığını etkilemeden seriye sonlu sayıda terim ekleyebilir veya seriden sonlu sayıda terim silebiliriz. Ancak yakınsak seride bu işlemler genelde seri toplamını değiştirebilir.

* Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

* Yeniden İndisleme.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ serisinin

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}$ veya $\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$ serileriyle de

ifade edebiliriz.

Pozitif Seriler İçin Yakınsaklık Testleri

1- İntegral Testi

Teorem: f fonksiyonu bir pozitif N tamsayısı için $[N, \infty)$ aralığında pozitif, sürekli ve azalan bir fonksiyon olmak üzere $a_n = f(n)$ olsun

Bu durumda.

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi ile $\int_N^{\infty} f(x)dx$ integrali birlikte yakınsarlar veya birlikte ıraksarlar

yani her ikisi ya yakınsaktır ya da ıraksaktır.

** Ör: Harmonik serinin ıraksak olduğunu gösteriniz

(önemli)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$ (Harmonik seri)

$f(x) = \frac{1}{x}$, f $[1, \infty)$ aralığında sürekli, pozitif ve azalandır

azalan $\Rightarrow$ ($f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. $[1,\infty)$da)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x} \cdot dx = \lim_{R\to\infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} [\ln R - \underbrace{\ln 1}_{0}]$$

$$= \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$ improper integral ıraksaktır dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin karakterini bulunuz.

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, f, $[1,\infty)$ aralığında sürekli pozitif ve $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}<0$ olduğu için azalandır.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\arctan x \Big|_1^R \right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} (\underbrace{\arctan R}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan 1}_{\pi/4})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ (improper integral yakınsaktır

dolayısıyla integral testine göre. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ serisi de yakınsaktır.

** p_serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$ serisine p serisi denir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$ $\to p>1$ ise seri yakınsaktır. $\to p \leq 1$ ise seri ıraksaktır.

Ör: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ serisi (Harmonik seri)

$p=1$ dir seri ıraksaktır.

Ör: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ serisi

$p=2$ dir seri yakınsaktır. $(p=2>1)$

Ör: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$ serisi

$p=\frac{1}{2}<1$ dir seri ıraksaktır.

2- Karşılaştırma Testi

$\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ negatif olmayan terimlerden oluşan seriler olsunlar

(i.) Eğer her n için

$a_n \leq b_n \Rightarrow \sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsaktır.

(ii.) Eğer her n için

$c_n \leq a_n \Rightarrow \sum c_n$ ıraksak ise. $\sum a_n$ de ıraksaktır.

* karşılaştırma testinde genellikle. seçilen seri ya. geometrik, ya harmonik ya da p-serisidir.

ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ serisinin karakterini belirleyiniz

$5n-1 < 5n \Rightarrow \frac{1}{5n-1} > \frac{1}{5n}$. $\Rightarrow \frac{5}{5n-1} > \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}n} = \frac{1}{n}$.

$\boxed{\frac{1}{n} < \frac{5}{5n-1}}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ harmonik seri ıraksak olduğundan

karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ serisi de ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2n^2}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{n+1}{n^3+2n^2} = \frac{n+1}{n^2.(n+2)}$$

$\frac{n+1}{n^2(n+2)} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi p serisidir $p=2>1$ olduğundan yakınsak bir seridir

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2.(n+2)}$

seri de yakınsaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$(n+1)^3 > n^3 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$$

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}_{p\text{-serisi}}$, $p=3>1$ seri yakınsaktır.

karşılaştırma testine göre. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ serisi de yakınsaktır.

Ör: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisinin karakterini inceleyiniz

$\ln n < n$ ($n \geq 2$ için)

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksaktır.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğu için karşılaştırma testine göre. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisi de ıraksaktır.

Ör: $5+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+\underbrace{1+\frac{1}{2+\sqrt{1}}+\frac{1}{4+\sqrt{2}}+\frac{1}{8+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}+\dots}_{\Downarrow \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}}$

serisinin karakterini inceleyiniz

$2^n+\sqrt{n} > 2^n \Rightarrow \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi geometrik seridir $a=1$, $r=\frac{1}{2}$, $|r|=|\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}<1$ seri yakınsaktır. Dolayısıyla. karşılaştırma testine göre $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$ serisi de yakınsaktır. Ayrıca yakınsak bir seriye terim eklesek ($5+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$) eklenen serinin karakteri değişmez yine yakınsaktır. O zaman sorulan seri yakınsaktır.

3- Limit Karşılaştırma Testi

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli iki seri olmak üzere.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$ olsun.

1- Eğer $L>0$ ise her iki seride aynı karakter'dedir. Birlikte yakınsar veya birlikte ıraksar.

2- Eğer $L=0$ ise $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsaktır.

3- Eğer $L=\infty$ ise $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ de ıraksaktır.

Ör: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}}_{a_n}$ serisinin karakterini belirleyiniz

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{b_n}$ serisini seçelim ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ harmonik seri ıraksaktır)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2+2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2>0.$$

limit karşılaştırma testine göre Her iki seri de aynı karakterlidir.

Yani $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğu için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}$ serisi de ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}_{a_n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{b_n}$ serisini seçelim $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}}_{p\text{-serisi}}$, $p=\frac{1}{2}<1$ ıraksak seridir

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1>0$. olduğu için her iki seri aynı karakterlidir.

limit karşılaştırma testine göre

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi ıraksak olduğu için $\sum \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ serisi de ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ serisinin karakteri?

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}_{p\text{-serisi}}$ serisini seçelim $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$, $p=\frac{1}{3}<1$ seri ıraksaktır.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} 1+\ln n = \infty$ limit karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ serisi ıraksak olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ serisi de ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^n-1}}_{a_n}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{b_n}$ serisini seçelim. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi geometrik

seridir. $a=\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{2}$ dir ve $|r|=\frac{1}{2}<1$ olduğundan

seri yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1 > 0.$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ olduğu için her iki seri de

aynı karakterlidir. Dolayısıyla

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi yakınsak olduğu için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ serisi de yakınsaktır.

Örn: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \cdot \sqrt{n}}}_{a_n}$ serisinin karakteri ?

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}}_{b_n}$ serisini seçelim.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots = \underbrace{\frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots\right)}_{\text{geometrik seri}}$

$a = \frac{1}{e}, \ r = \frac{1}{e}$ dir

$|r| = \frac{1}{e} < 1$ dir seri

$|r| = \frac{1}{e} < 1$ olduğu için

seri yakınsaktır.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{e^n \sqrt{n}}}{\frac{1}{e^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ de yakınsak

İdi o zaman

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ serisi yakınsak olduğu için $\sum \frac{1}{e^n \sqrt{n}}$

serisi de limit karşılaştırma testine göre

yakınsaktır.

Ör: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1+n.\ln n}{n^2+5}}_{a_n}$ serisinin karakteri ?

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$ serisini seçelim $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}.\left(\frac{1}{n}+\ln n\right)}{\cancel{n^2}.\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}+\ln n}{1+\underset{\to 0}{\frac{5}{n^2}}} = \infty$$

limit karşılaştırma testine göre

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \Rightarrow \sum b_n$ serisi ıraksak ise $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

O zaman

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğu için limit karşılaştırma testine göre $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

serisi de ıraksaktır.

4- Oran Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olduğunu varsayalım

i.) $L<1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

ii.) $L>1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

iii.) $L=1$ ise test sonuç vermez başka bir test denenmeli.

Ör: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^n}{n!}}_{a_n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)^{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$ olduğu için oran testine göre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ serisi ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n+5}{3^n}}_{a_n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5}{\cancel{3^{n+1}}_{3^1}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{2^n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{2^n}\cdot\left(2+\frac{5}{2^n}\right)}{\cancel{2^n}\cdot\left(1+\frac{5}{2^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(2+\frac{5}{2^n}\right)^{\to 0}}{\left(1+\underbrace{\frac{5}{2^n}}_{\to 0}\right)}$$

$= \frac{2}{3} < 1$ olduğu için oran testine göre seri yakınsaktır.

Ör: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2n)!}{n!.n!}}_{a_n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!.(n+1)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!.n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2.(n+1))!}{\underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{n+1}.\underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{n+1}} . \frac{\cancel{n!.n!}}{(2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2n!}.(2n+1).\overbrace{(2n+2)}^{2.(n+1)}}{\cancel{(n+1)}.(n+1).\cancel{2n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1).2}{n+1}$$

$= 4 > 1$ seri ıraksaktır.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ serisi ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n! \cdot n!}{(2n)!}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (n+1)!}{(2(n+1))!}}{\dfrac{4^n \cdot n! \cdot n!}{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4^{n+1}}^{\,4} \cdot \cancel{(n+1)!}^{\,(n+1)} \cdot \cancel{(n+1)!}^{\,(n+1)}}{\underbrace{(2 \cdot (n+1))!}_{\cancel{2n!} \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}} \cdot \frac{(2n)!}{\cancel{4^n} \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot (n+1) \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+2)}$$

$= 1$ ← Test cevap vermez

başka bir test denenerek serinin karakteri bulunmalı

5- Kök Testi

$\sum a_n$ terimleri negatif olmayan bir seri olsun

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.

i.) Eğer $L<1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

ii.) Eğer $L>1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

iii.) Eğer $L=1$ ise test sonuç vermez

başka bir test denenmeli.

Ör: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n}{n^3}}_{a_n}$ serisinin karakteri?

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^3}} = \frac{2}{1^3} = 2 > 1$

kök testine göre seri ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0 < 1$$

Kök testine göre seri yakınsaktır.

Ör: $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(\ln n)^n}}_{a_n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$= 0 < 1$. Kök testine göre seri yakınsaktır.

**
Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\cancel{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$= 1$ Kök testine göre test cevap vermez farklı bir test denemeliyiz

n. terim testini deneyelim.

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$ olduğu için n. terim testine göre seri ıraksaktır.