Taylor ve Maclaurin Serileri

<u>Tanım:</u> f fonksiyonu bir a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f tarafından $x=a$ noktasında üretilen <u>Taylor Serisi</u> aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(x-a)^k = f(a)+f'(a).(x-a)+f''(a).\frac{(x-a)^2}{2!}+\dots+f^{(n)}(a).\frac{(x-a)^n}{n!}+\dots$$

Tanım: f fonksiyonu tarafından üretilen <u>Maclaurin Serisi</u> de aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0).\frac{x^k}{k!} = f(0)+f'(0).x+f''(0).\frac{x^2}{2!}+\dots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\dots$$

*** <u>NOT</u>: Maclaurin Serisi <u>$x=0$ noktasındaki Taylor Serisidir</u>

Ör: $f(x)=\frac{1}{x}$ tarafından 2 noktasında üretilen Taylor Serisini bulunuz. Hangi noktalarda (eğer varsa) bu seri $\frac{1}{x}$'e yakınsar.

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow f(2)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-1.x^{-2} \Rightarrow f'(2)=-\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x)=\underbrace{1.2}_{2!}.x^{-3} \Rightarrow f''(2)=2!\cdot\frac{1}{2^3}$$

$$f'''(x)=-\underbrace{1.2.3}_{3!}.x^{-4} \Rightarrow f''(2)=-3!\cdot\frac{1}{2^4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n.n!.x^{-(n+1)} \Rightarrow f^{(n)}(2)=-n!\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

Taylor Serisi:

$$f(2)+f'(2).(x-2)+f''(2).\frac{(x-2)^2}{2!}+f'''(2).\frac{(x-2)^3}{3!}+\dots+f^{(n)}(2).\frac{(x-2)^n}{n!}+\dots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}.(x-2)+\frac{1}{2^3}.\cancel{2!}.\frac{(x-2)^2}{\cancel{2!}}-\frac{1}{2^4}.\cancel{3!}.\frac{(x-2)^3}{\cancel{3!}}+\dots+(-1)^n.\frac{1}{2^{n+1}}.\cancel{n!}.\frac{(x-2)^n}{\cancel{n!}}+\dots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}.(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\frac{(x-2)^3}{2^4}+\dots+(-1)^n.\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\dots$$ } Taylor Serisi (Bu seri aynı zamanda geometrik seridir)

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x-2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2^2}-\frac{(x-2)^3}{2^3}+\dots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n}+\dots\right) \Rightarrow$$ geometrik seri

$a=\frac{1}{2}$, $r=\frac{-(x-2)}{2} \Rightarrow |r|=\left|\frac{-(x-2)}{2}\right|<1 \Rightarrow$ seri yakınsak $\frac{|x-2|}{2}<1 \Rightarrow 0<x<4$ aralığında yakınsaktır.

Ayrıca serinin toplamı $\frac{a}{1-r}=\frac{1/2}{1-\left(-\frac{(x-2)}{2}\right)}=\frac{1/2}{\frac{2+(x-2)}{2}}=\frac{1}{x}$ dir ($(0,4)$ aralığında $\frac{1}{x}$'e yakınsar)

Taylor Polinomu: f fonksiyonunun bir a noktasını içeren bir aralıkta $k=1,2,3,\dots,N$ olmak üzere k. mertebeden türevlerinin bulunduğunu varsayalım. Bu durumda 0'dan N'e kadar n herhangi bir tamsayı olmak üzere f tarafından $x=a$ noktasında üretilen n. mertebeden Taylor polinomu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\dots+f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}+\dots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Ör: $f(x)=e^x$ fonksiyonu tarafından $x=0$'da üretilen Taylor serisini ve Taylor polinomunu bulunuz.

$f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $f'''(x)=e^x$, ---, $f^{(n)}(x)=e^x$

$f(0)=e^0=1$, $f'(0)=e^0=1$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=1$, ---, $f^{(n)}(0)=1$

Taylor Serisi:

$$f(0)+\underbrace{f'(0)}_{1}.\frac{x}{1!}+\underbrace{f''(0)}_{1}.\frac{x^2}{2!}+f'''(0).\frac{x^3}{3!}+\dots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\dots$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Taylor Serisi: $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$

n. mertebeden Taylor Polinomu: $P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

Ör: $f(x)=\cos x$ fonksiyonu tarafından $x=0$'da üretilen Taylor serisini ve Taylor polinomlarını bulunuz.

$f(x)=\cos x \Rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x \Rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x \Rightarrow f''(0)=-1$

$f'''(x)=\sin x \Rightarrow f'''(0)=0$

$f^{(4)}(x)=\cos x \Rightarrow f^{(4)}(0)=1$

$f^{(5)}(x)=-\sin x \Rightarrow f^{(5)}(0)=0.$

$\vdots \qquad \vdots$

yani $f^{(2n)}(x)=(-1)^n\cos x$, $f^{(2n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\sin x$

Taylor Serisi: $f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\dots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\dots$

$f(x)=\cos x$'in $x=0$ daki Taylor serisi

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$ dir.

Taylor Polinomu: $P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

Sık Kullanılan Maclaurin Serileri

① $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad |x| < 1$

② $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n + \dots, \quad |x| < 1$

③ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \dots, \quad |x| < \infty$

④ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad |x| < \infty$

⑤ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad |x| < \infty$

⑥ $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dots + \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$

⑦ $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1$

Ör: $\cos x$ tarafından $x=0$ da üretilen Taylor serisi bütün x'ler için $\cos x$'e yakınsar.

yani

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad |x|<\infty$$

Ör: $\sin x$ tarafından $x=0$ da üretilen Taylor serisi bütün x'ler için $\sin x$'e yakınsar.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \quad |x|<\infty.$$

NOT: Taylor serileri de kuvvet serileri olduklarından bu seriler ortak yakınsaklık aralıklarının kesiştikleri yerlerde birbirleriyle toplayabiliriz, çıkarabiliriz ve çarpabiliriz.

Ör: $\frac{1}{3}(2x + x\cos x)$ fonksiyonu için Maclaurin serisini yazınız.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad |x|<\infty \text{ olduğunu biliyoruz}$$

$$\frac{1}{3}(2x + x\cos x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\cdot x\cos x$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.2!} + \frac{x^5}{3.4!} + \cdots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{72} + \cdots$$

Ör: $e^x\cos x$ fonksiyonu için Maclaurin serisini bulunuz

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \quad , \quad |x|<\infty$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \quad , \quad |x|<\infty$$

$$e^x\cdot\cos x = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)-\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{2!2!}+\frac{x^5}{2!\cdot 3!}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{4!}+\frac{x^6}{4!2!}+\cdots\right)+\cdots$$

$$=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\cdots$$

Ör: $\cos 2x$'in Maclaurin serisini bulunuz.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots , \quad |x| < \infty$$

x yerine $2x$ yazarsak,

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots , \quad |2x| < \infty \Downarrow |x| < \infty$$

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{2^{2k} \cdot x^{2k}}{(2k)!}$$ elde edilir.

Ör: e^{x^2}'nin Maclaurin serisini bulunuz

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots , \quad |x| < \infty$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \dots + \frac{(x^2)^n}{n!} + \dots , \quad |x^2| < \infty \Downarrow |x| < \infty$$

Ör: $e^{-x^2/3}$'nin Maclaurin serisini bulunuz

$$e^{-x^2/3} = 1 + \left(-\frac{x^2}{3}\right) + \left(-\frac{x^2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} + \dots , \quad |x| < \infty$$

$$e^{-x^2/3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{3^k \cdot k!} , \quad |x| < \infty$$

Binom Serisi

$-1<x<1$ için $(1+x)^m = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$

olsun. Burada

$$\binom{m}{1}=m,\quad \binom{m}{2}=\frac{m.(m-1)}{2!}$$ ve

$$\binom{m}{k}=\frac{m.(m-1).(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}\quad k\geq 3 \text{ için}$$

olarak tanımlanır.

Ör: $m=-1$ ise. yani

$$(1+x)^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-1}{k}.x^k$$

$$\binom{-1}{1}=-1,\quad \binom{-1}{2}=\frac{-1.(-2)}{2!}=1$$ ve

$$\binom{-1}{k}=\frac{-1.-2.-3\dots(\cancel{-1}-k+\cancel{1})}{k!}=\frac{(-1)^k.\cancel{k!}}{\cancel{k!}}=(-1)^k$$

$$(1+x)^{-1}=1+(-1).x+1.x^2-1.x^3+\dots+(-1)^k.x^k+\dots$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^k x^k+\dots,\quad -1<x<1$$

Ör: $(1+x)^{1/2}$ nin kuvvet seri temsilini bulunuz.

$m=\frac{1}{2}$ dir.

$$(1+x)^{1/2} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k.$$

$$= 1+\binom{1/2}{1}x+\binom{1/2}{2}x^2+\binom{1/2}{3}x^3+\cdots$$

$$\binom{1/2}{1}=\frac{1}{2}, \quad \binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}=-\frac{1}{8}$$

$$\binom{1/2}{3}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}=\frac{+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{3!}=\frac{1}{16}$$

$$\binom{1/2}{4}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot 2\cdot\cancel{3}\cdot 4}=-\frac{5}{128}.$$

$$(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots, \quad -1<x<1$$

Elementer Olmayan İntegrallerin Hesaplanması.

$\int \sin x^2 dx$ integralini bir kuvvet serisi olarak ifade ediniz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \frac{(x^2)^7}{7!} + \frac{(x^2)^9}{9!} + \cdots$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} + \cdots$$

$$\int \sin(x^2)dx = \int \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} + \cdots\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19 \cdot 9!} + \cdots$$

Hatırlatma:

Örn: Aşağıdaki fonksiyonun kapalı formunu bulunuz

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+---,\ -1\leq x\leq 1$$

f(x)'in tek tek türevini alalım.

$$f'(x)=1-\frac{3x^2}{3}+\frac{5x^4}{5}+---\ ,\ -1<x<1$$

$$f'(x)=1-x^2+x^4+---\ \ ,\ -1<x<1$$

Ayrıca $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+---,\ -1<x<1$ olduğunu biliyoruz

Buna göre $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+---$ dır. Bundan dolayı

$\Downarrow$
$(-1<x<1)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ dir. (İntegral alırsak

$$\int f'(x)\,dx=\int\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow f(x)=\underset{(\tan^{-1}x)}{\arctan x}+C$$

$x=0$ için $\underbrace{f(0)}_{0}=\underbrace{\arctan 0}_{0}+C.\Rightarrow C=0$ dır.

$f(x)=\arctan x$ 'dır. Yani $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+---=\arctan x,\ \underline{-1<x<1}$

serinin uç noktalarında $x=\mp 1$ için seri arctanx'e yakınsar.

Dolayısıyla $\boxed{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+---=\arctan x\ ,\ -1\leq x\leq 1}$

Belirsizlik Durumundaki Limitleri Hesaplamak

* Bazen belirsiz durumdaki limitleri hesaplamak için fonksiyonların Taylor serilerinden (Maclaurin) faydalanabiliriz.

Örn: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ limitini seri açılımından bulunuz.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} \xrightarrow{\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + \cdots}{x-1} \xrightarrow{\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\cdot\left[1 - \frac{1}{2}\cdot(x-1) + \cdots\right]}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{2}\cdot(x-1) + \cdots}{1} = 1$$

NOT: $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x < 1$

x yerine $x-1$ yazarsak

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}, \quad -1 < x-1 < 1$$

$$\ln x = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

Ör: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$ limitini hesaplayınız.

$\to \dfrac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \cdots}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)}{\cancel{x^3}} = -\frac{1}{2}$$

NOT: tanx'in Maclaurin seri açılımı (ilk üç terime göre Maclaurin seri açılımı)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}$$

İlk üç terime göre.

$$\begin{array}{r|l}
x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\hline
-\left(x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!}\right) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\
-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6}\right) & \\
\frac{2x^5}{15} - \cdots &
\end{array}$$

Ör: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ limitini hesaplayınız.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}---\right)}{x.\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}---\right)}$$

$\to\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}---}{x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}+---}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+---}{x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}+---}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{x}{3!}-\frac{x^3}{5!}+---\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+---\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3!}-\frac{x^3}{5!}+---}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+---}$$

$=0$

Ör: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad , |x| < \infty$

olduğunu biliyoruz.

$i^2 = -1$ olmak üzere ($a+ib$ – kompleks sayısı.)

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$ → Her reel θ sayısı için

Euler Özdeşliği

Düzlem Eğrilerinin Parametrize Edilmesi

Parametrik Denklemler

Eğer x ve y, t değerlerinin I aralığında ($t \in I$)

$x = f(t)$, $y = g(t)$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar ise, o zaman bu denklemlerle tanımlanan $(x,y) = (f(t), g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. Bu denklemlere eğri için parametrik denklemler denir.

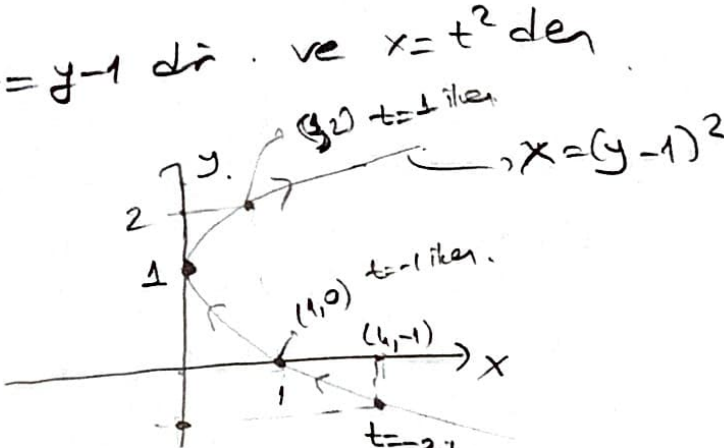
t değişkeni eğri için bir parametre ve tanım kümesi I da parametre aralığıdır. Eğer I kapalı bir aralık, yani $a \leq t \leq b$ ise eğrinin başlangıç noktası $(f(a), g(a))$ ve bitiş noktası $(f(b), g(b))$ olur. Bir eğrinin parametrik denklemleri ve bir parametre aralığı verildiğinde bu eğri parametrize edilmiştir deriz. Aralıkla birlikte denklemlere eğrinin bir parametrizasyonu denir.

Ör: $x = t^2$, $y = t+1$, $-\infty < t < \infty$ eğrisini x, y cinsinden bulup eğriyi çiziniz.

$x = t^2$, $y = t+1 \Rightarrow t = y-1$ dir. ve $x = t^2$ den

$x = (y-1)^2$ elde edilir

$x = (y-1)^2$ (parabol)



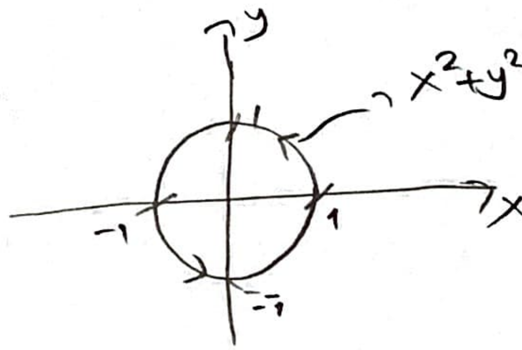
$t \to \infty$ iken $x \to \infty$
$t \to -\infty$ " $x \to \infty$
$t \to \infty$ iken $y \to \infty$
$t \to -\infty$ iken $y \to -\infty$

$t=-2$ iken $y=-1$ $x=4$ dür.
$t=-1$ " $y=0$ $x=1$ dir
$t=1$ iken $y=2$ $x=1$

Ör: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le 2\pi$. eğrisini x, y cinsinden bulup eğriyi çiziniz

$$\left.\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin t \end{array}\right\} \quad 0\le t\le 2\pi.$$

$$x^2+y^2=\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{1} \Rightarrow x^2+y^2=1.$$



$t=0$ için $x=1$, $y=0$

$t=2\pi$ için $x=1$, $y=0$.

$t=\pi$ için $x=-1$, $y=0$.

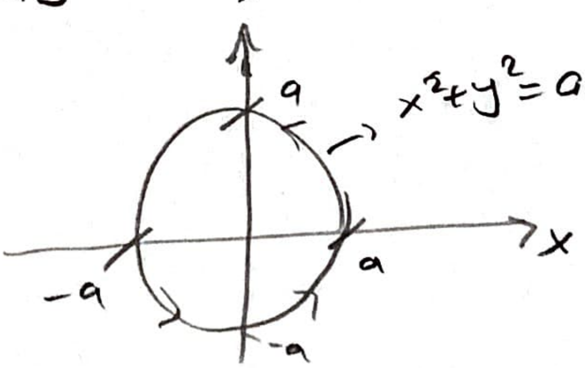
⋮

Ör: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ eğrisini x, y cinsinden bulup eğriyi çiziniz.

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t=a^2\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1}=a^2$$

$x^2+y^2=a^2$, $\quad t=0 \Rightarrow x=a,\ y=0$

$t=2\pi \Rightarrow x=a,\ y=0.$



$x^2+y^2=a^2$ (a yarıçaplı merkezil çember)

Örn: $x=\sqrt{t}$, $y=t$, $t\geq 0$ eğrisini x,y cinsinden bulup eğriyi çiziniz

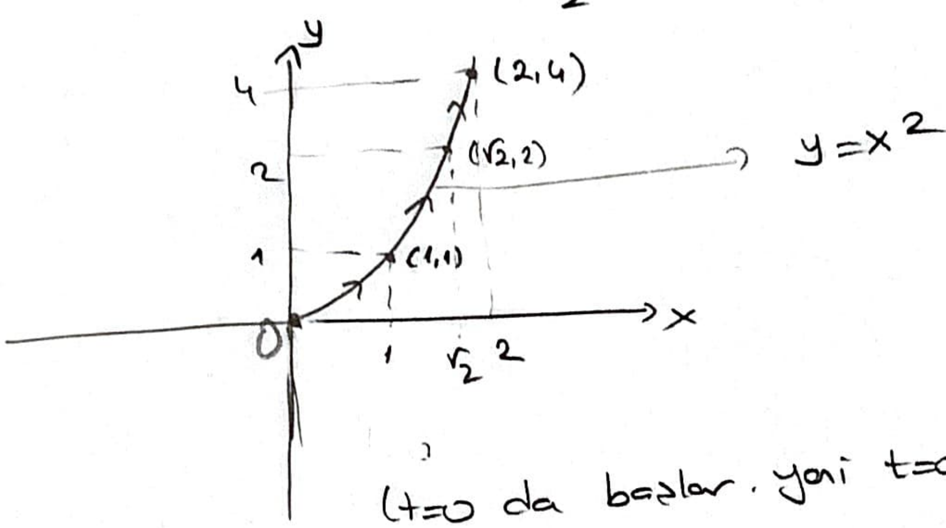
$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{t} \\ y=t \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=\sqrt{y} \Rightarrow y=x^2 \text{. dir}$$

$t\geq 0 \Rightarrow$ $t=0 \Rightarrow x=0$, $y=0$

$t=1 \Rightarrow x=1$, $y=1$

$t=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$, $y=2$

$t=4 \Rightarrow x=\underbrace{\sqrt{4}}_{2}$, $y=4$.



($t=0$ da başlar. yani $t=0$ iken $(\overset{x}{0},\overset{y}{0})$'de başlar).

Örn: $f(x)=x^2$ fonksiyonunun bir parametrizasyonunu yazınız

$x=t$ alırsak $y=t^2$ (ya da $f(t)=t^2$) dir.

yani eğrinin bir parametrizasyonu.

$x=t$, $y=t^2$, $-\infty < t < \infty$ dur.

NOT
** Bir eğrinin birden fazla parametrizasyonu vardır.

Ör: (3,5) noktasından geçen eğimi 7 olan doğruyu parametrize ediniz.

(3,5) noktasından geçen eğimi 7 olan doğru:

$y-5=7.(x-5)$

$y=7x-30$ dır.

$x=t$ dersek. $y=7t-30$ olur Yani

$\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=7t-30 \end{array}\right\} \quad -\infty<t<\infty$ dır. (Eğrinin parametrizasyonu)

ya da $y=t$ dersek

$x=\dfrac{t+30}{7}$ dir. Yani;

$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{t+30}{7} \\ y=t \end{array}\right\} \quad -\infty<t<\infty$

(Eğrinin diğer bir parametrizasyonudur.)

Ör: (a,b) noktasından geçen eğimi m olan doğruyu parametrize ediniz.

Doğrunun kartezyen koordinatlardaki denklemi

$y-b=m.(x-a)$ dır.

$t=x-a$ alırsak.

$\left.\begin{array}{l} x=a+t \\ y=b+mt \end{array}\right\} \quad -\infty<t<\infty$

dır.

** **

Türev: Eğer f ve g fonksiyonları t noktasında türevlenebilir ise x=f(t) ve y=g(t) parametrik eğrisi de t noktasında türevlenebilir.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ör: $x=\sec t$, $y=\tan t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ eğrisinin $(\sqrt{2},1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

t noktasındaki eğimini bulalım.

$(\sqrt{2},1)$ için $\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}=\sec t\\ 1=\tan t\end{array}\right\} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$ dür.

$(\sqrt{2},1)$ noktasında $t=\frac{\pi}{4}$ dür.

Eğim $m = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^{\cancel{2}} t}{\cancel{\sec t}.\tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{1}{\sin t}$

$(\sqrt{2},1)$ noktasındaki yani $t=\frac{\pi}{4}$ deki eğimi

$$m\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = y'\Big|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

$(\sqrt{2},1)$ noktasından geçen eğimi $\sqrt{2}$ ise

$y-1=\sqrt{2}.(x-\sqrt{2})$

$\boxed{y=\sqrt{2}x-1}$

Ör: $x = t - t^2$ ve $y = t - t^3$ eğrisinin $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini

t cinsinden bulunuz.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-3t^2}{1-2t}.$$

$$* \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{dir}$$

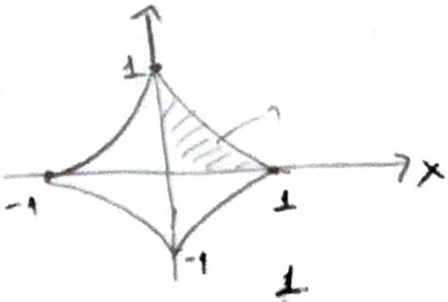
$$y' = \frac{1-3t^2}{1-2t} \Rightarrow \frac{dy'}{dt} = \frac{-6t.(1-2t) - (1-3t^2).(-2)}{(1-2t)^2}.$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{-6t + 12t^2 + 2 - 6t^2}{(1-2t)^2} = \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1-2t)^2} \quad \text{dir}$$

$$* \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^2}}{1-2t} = \frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$$

Örn: Astroid ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Astroid: $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$



$x=\cos^3 t \Rightarrow dx=(\cos^3 t)'.dt$

$dx=3\cos^2 t.(-\sin t)dt$

$x=0$ iken $0=\cos^3 t$, $t=\frac{\pi}{2}$ dır

$x=1$ iken $1=\cos^3 t$, $t=0$ dır.

Simetriden dolayı: $\underset{\text{Alan}}{A}=4\int_0^1 y\,dx=4\int_{\pi/2}^{0}\sin^3 t.3.\cos^2 t.(-\sin t)dt$.

$$A=12\int_0^{\pi/2}\sin^4 t.\cos^2 t.dt.$$

$$=12\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2.\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right).dt$$

$$=\frac{12}{8}\int_0^{\pi/2}(1+\cos^2 2t-2\cos 2t).(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos^2 2t-2\cos 2t+\cos 2t+\cos^3 2t-2\cos^2 2t)dt.$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos^3 2t-\cos^2 2t-\cos 2t)dt$$

$$=\frac{3}{2}\left[t-\sin 2t\right]\Big|_0^{\pi/2}+\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^3 2t\,dt-\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos^2 2t}_{\frac{(1+\cos 4t)}{2}}.dt$$

NOT: $\sin 2t=u$ dersek $2\cos 2t\,dt=du$

$\int\cos^3 2t\,dt=\int\cos^2 2t.\cos 2t\,dt$

$=\int(1-\sin^2 2t).\cos 2t\,dt$

$=\int(1-u^2)\frac{du}{2}=\frac{u}{2}-\frac{u^3}{6}$

$=\frac{\sin 2t}{2}-\frac{\sin^3 2t}{6}$

$$=\frac{3}{2}\left[t-\sin 2t\right]\Big|_0^{\pi/2}+\frac{3}{2}.\left[\frac{\sin 2t}{2}-\frac{\sin^3 2t}{6}\right]\Big|_0^{\pi/2}-\frac{3}{2}\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 4t}{8}\right]\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}.(0)-\frac{3}{2}.\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}$$

Parametrik Olarak Tanımlı Eğrinin Uzunluğu

Tanım: Eğer C eğrisi $x=f(t)$ ve $y=g(t)$, $a\le t\le b$ ile parametrik olarak tanımlanıyorsa $t=a$'dan $t=b$'ye artarken C eğrisi üzerinden sadece bir kere geçiliyorsa, bu durumda C eğrisinin uzunluğu aşağıdaki belirli integraldir.

$$L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

Ör: $x=r\cos t$ ve $y=r\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ ile tanımlı r yarıçaplı çemberin uzunluğunu hesaplayınız.

$x=r\cos t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt}=-r\sin t$

$y=r\sin t \Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=r\cos t$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

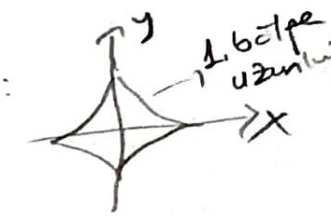
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\underbrace{r^2\sin^2t+r^2\cos^2t}_{r^2.(\underbrace{\sin^2t+\cos^2t}_{1})}}\,dt \Rightarrow \sqrt{r^2}=r$$

$$=\int_0^{2\pi} r\,dt = rt\Big|_0^{2\pi}=r.(2\pi-0)=2\pi r$$

Ör: Astroidin uzunluğunu bulunuz.

Astroid: $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\leq t\leq 2\pi$.

Astroid:



$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$x=\cos^3 t \Rightarrow \frac{dx}{dt}=3\cos^2 t.(-\sin t) \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=9\sin^2 t\cos^4 t$$

$$y=\sin^3 t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=3\sin^2 t.\cos t \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2=9\cos^2 t\sin^4 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t+9\cos^2 t\sin^4 t}$$

$$=\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t.(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{1})}$$

$$=\sqrt{9.\sin^2\cos^2 t}$$

$$=3.|\sin t\cos t|$$

Birinci bölgedeki eğri uzunluğu: $L_1=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

1. bölge olduğu için

$$L_1=\int_0^{\pi/2}3.|\sin t\cos t|\,dt=\int_0^{\pi/2}3.\underbrace{\sin t.\cos t}\,.dt=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt$$

$$=-\frac{3}{2}.\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=-\frac{3}{4}.\Big[\underbrace{\cos\pi-\cos 0}_{\underbrace{-1-1}_{-2}}\Big]=\frac{3}{2}$$

Astroidin uzunluğu $L=4L_1=4.\frac{3}{2}=6$ //

(Dört bölgenin uzunluğu da birbirine eşittir)