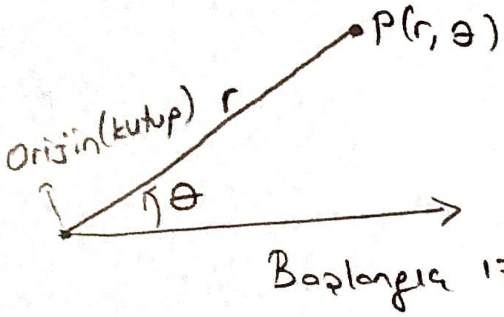
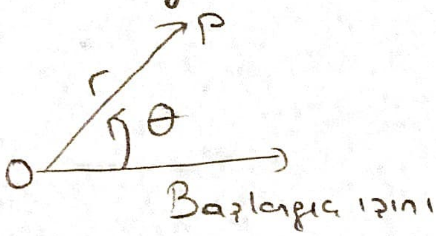
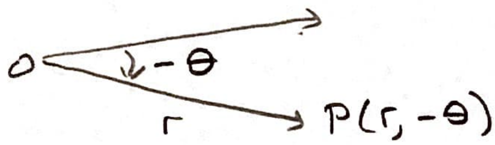
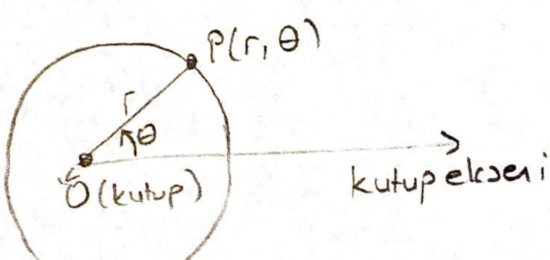
Kutupsal Koordinatlar



*Düzlemde kutupsal koordinatı tanımlamak için kutup denilen bir O orijini (buna kutup diyeceğiz) ve bir başlangıç ışını sabitliyoruz. Bu durumu düzlemde bir P noktasını (r, θ) kutupsal koordinat çifti ile gösterebiliriz. Burada r, P nin orijine olan uzaklığı ve θ da başlangıç ışını ile OP arasındaki yönlü açıyı vermektedir.







r: kutupten P'ye olan yönlü uzaklık

θ: kutup ekseninden OP'ye olan yönlü açı.

Kutupsal Koordinatlar: P(r, θ)

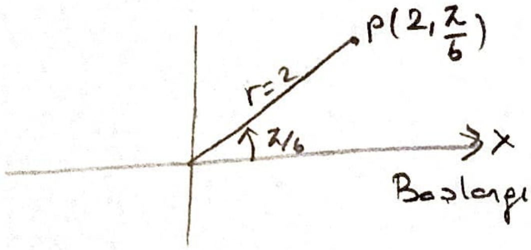
- r: O'dan P'ye olan yönlü uzaklık
- θ: Başlangıç ışınından OP'ye olan yönlü açı

* r negatif değer alabildiği için P(r, θ) noktası tanımlanırken yönlü uzaklık kavramını kullanıyoruz

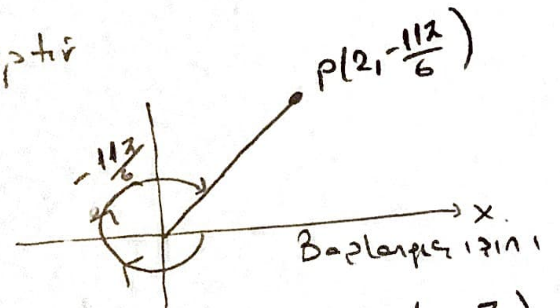
* Düzlemdeki bir noktanın sadece bir çift kartezyen koordinat olmasına karşın sonsuz miktarda kutupsal koordinat çifti vardır.

Örn: $\theta=\frac{\pi}{6}$ ışını üzerinde 2 birim uzaktaki bir noktanın

$r=2$ ve $\theta=\frac{\pi}{6}$ kutupsal koordinatları vardır.

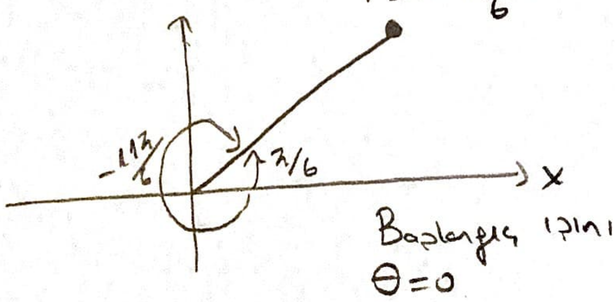


Ama aynı nokta $r=2$ ve $\theta=-\frac{11\pi}{6}$ kutupsal koordinatlarına da sahiptir



$$P=\left(2,\frac{\pi}{6}\right)=\left(2,-\frac{11\pi}{6}\right)$$

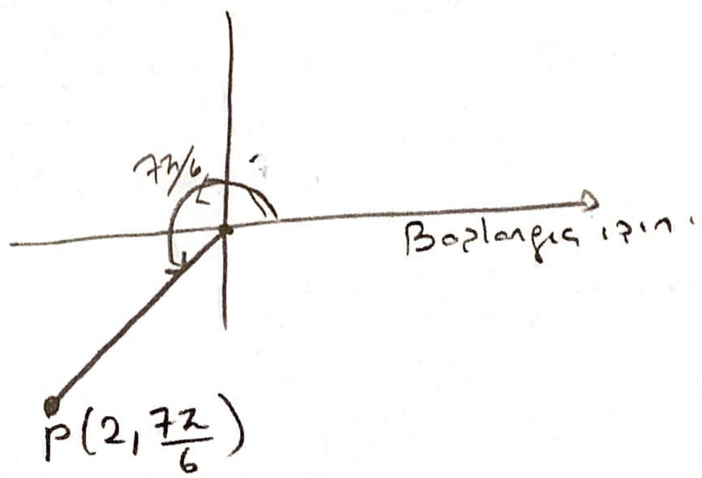
Yani;



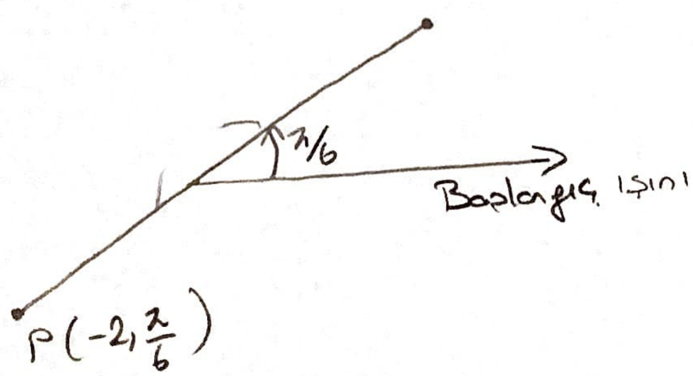
* Eğer $r=0$ ise θ açısı ne olursa olsun P kutuptur.

* Bazen r negatif değer alabilir

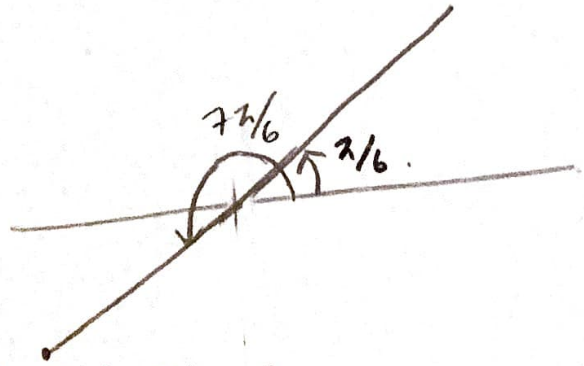
örneğin, noktayı başlangıç ışınından saatin ters yönünde $\frac{7\pi}{6}$ radyan döndürüp 2 birim orijinden ilerleyerek $P(2, \frac{7\pi}{6})$ noktasına varabiliriz



Ya da aynı noktayı açıyı saatin ters yönünde $\frac{\pi}{6}$ kadar döndürdükten sonra orijinden ters yönde 2 birim ilerleyerek ulaşabiliriz



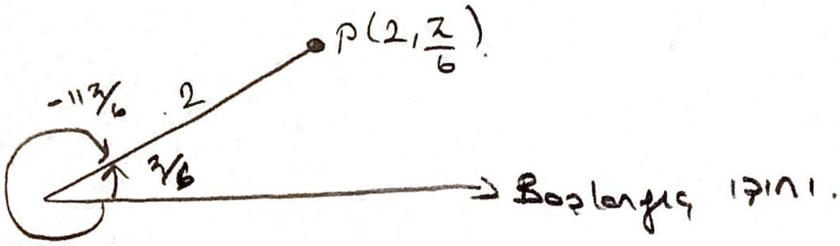
Yani;



$P(2, \frac{7\pi}{6}) = P(-2, \frac{\pi}{6})$

NOT: Eğer $r<0$ ise. P, θ açılı ışının ters yönündeki $\theta+\pi$ açılı ışın üzerinde olup kutuptan $|r|$ birim uzaklıktadır.

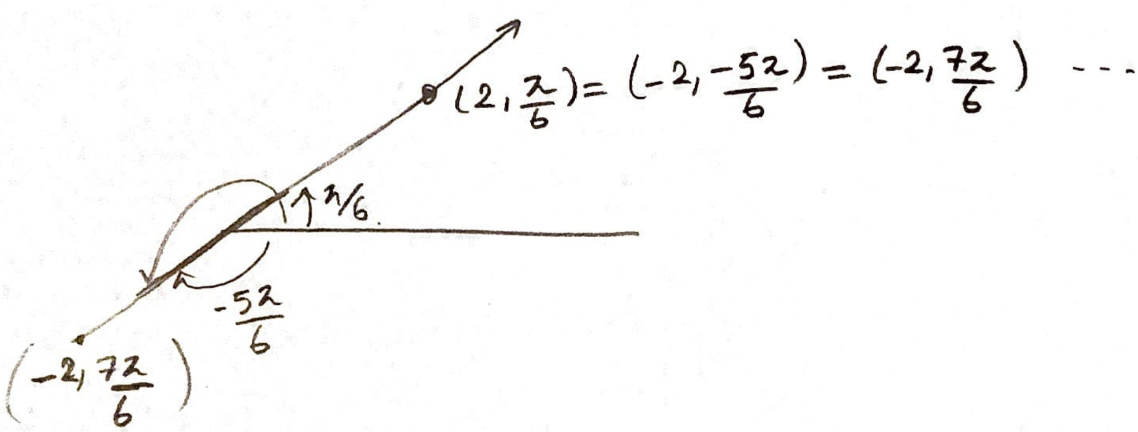
Ör: $P(2, \frac{\pi}{6})$ noktasının tüm kutupsal koordinatlarını bulunuz.



$r=2$ için açıların tüm listesi

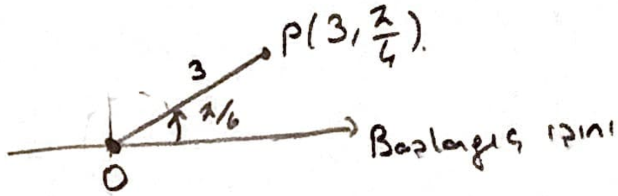
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \pm 2\pi, \frac{\pi}{6} \pm 4\pi, \frac{\pi}{6} \pm 6\pi.$

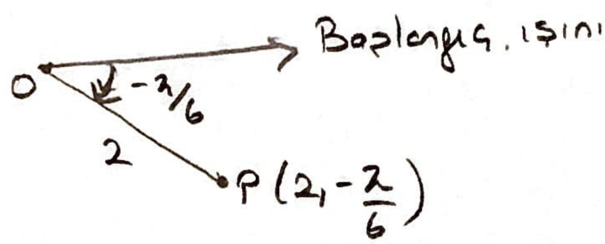
$r=-2$ için açıların tüm listesi: $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, -\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \ldots$

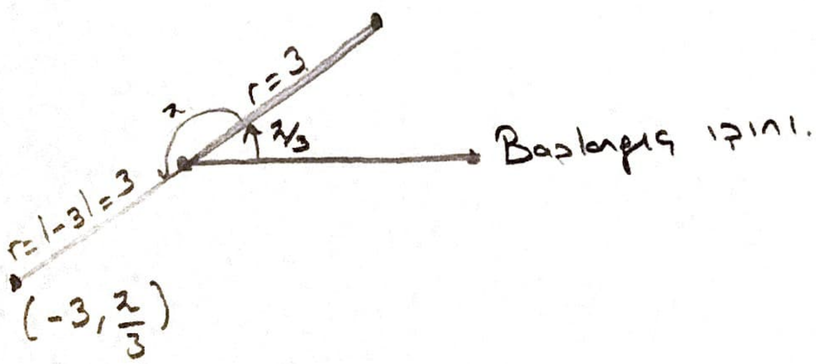


Ör: $(3, \frac{\pi}{4})$, $(2, \frac{-\pi}{6})$, $(-3, \frac{\pi}{3})$ noktalarının

kutupsal koordinatlarda gösteriniz.

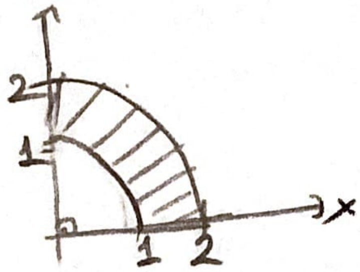




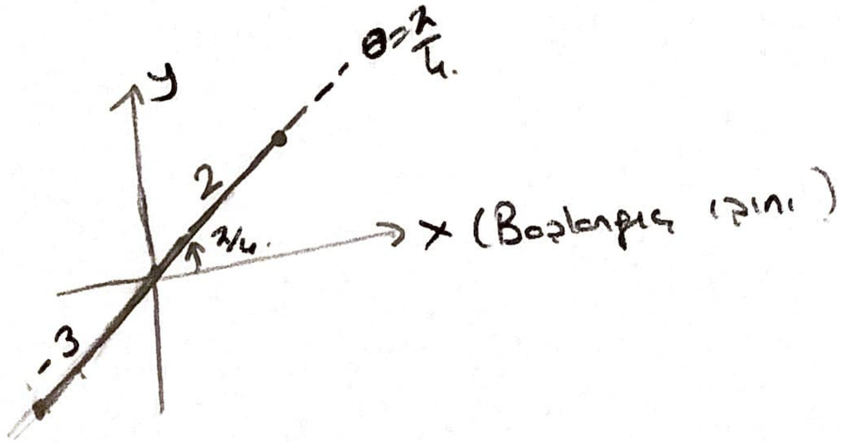


Ör: Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çiziniz

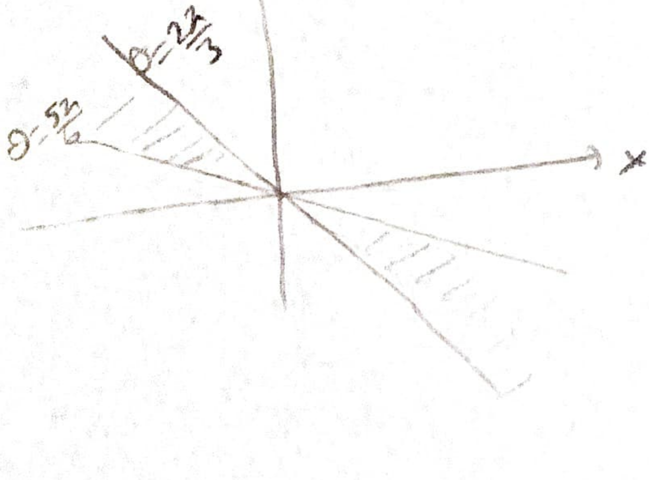
i.) $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



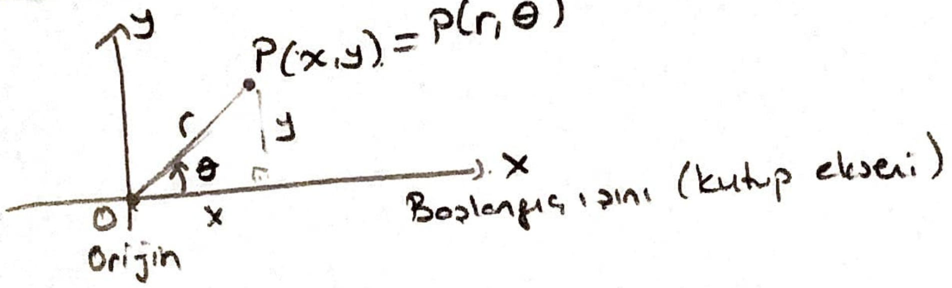
ii.) $-3 \leq r \leq 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$



iii) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ (r üzerinde kısıtlama yok)



Kutupsal Denklemler ve Grafikleri



$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

Ör: $x^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal gösterimini bulunuz

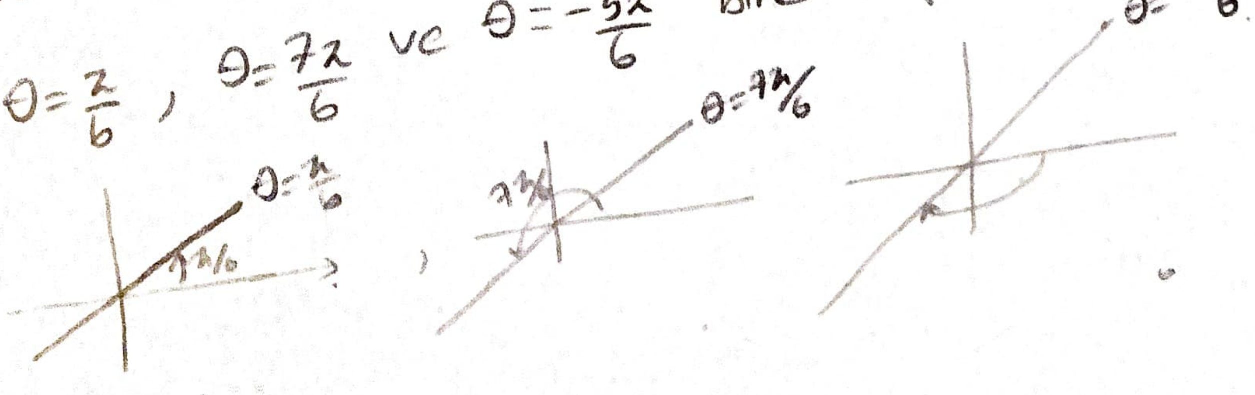
$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=r^2 \;,\; r^2=a^2 \Rightarrow \boxed{r=a}$

Önemli ***

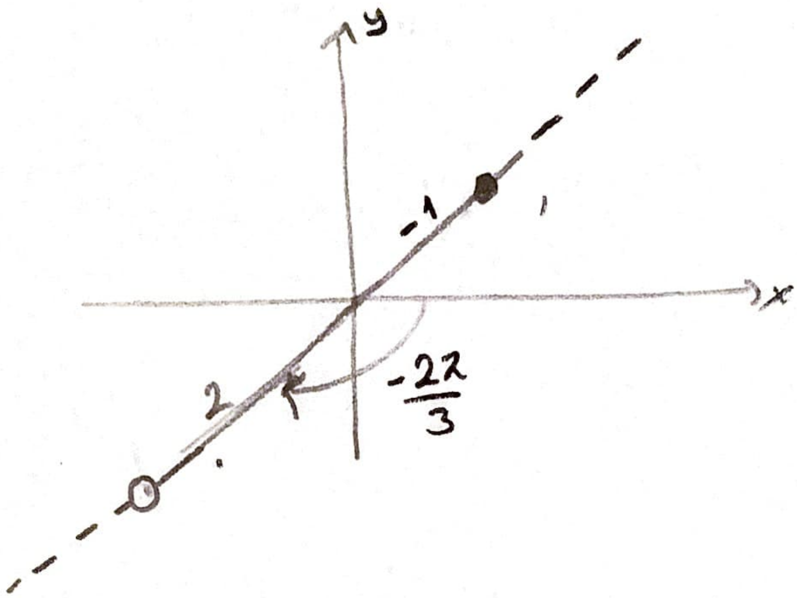
Denklem	Grafiği
* $r=a$	Merkezi orijin O'da yarıçapı $\lvert a\rvert$ olan çember
* $\theta=\theta_0$	O'dan geçen ve başlangıç ışını ile θ_0 açısı yapan doğru

* Ör: $r=1$ ve $r=-1$ merkezi O'da yarıçapı 1 olan çember.

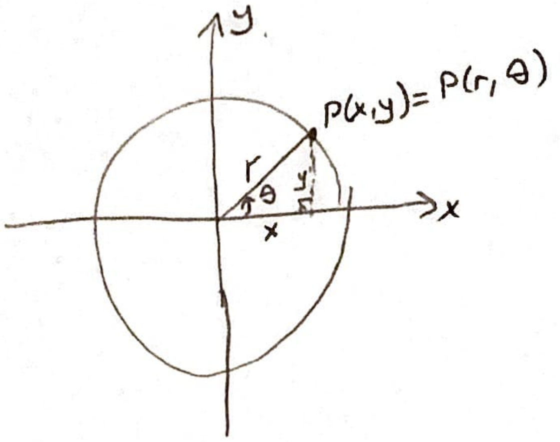
Ör: $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\theta=\frac{7\pi}{6}$ ve $\theta=-\frac{5\pi}{6}$ birer doğrudur.



Sr: Kutupsal koordinatları $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ ve $-1 \leq r < 2$ şartlarını sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çiziniz



Kutupsal ve Kartezyen Koordinatlar Arasındaki İlişki



$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{array}$$

Ör: $x^2 + (y-3)^2 = 9$ çemberi için kutupsal denklem bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 3)^2 = 9$$

$$\underbrace{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}_{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} - 6r\sin\theta + \cancel{9} = \cancel{9}$$

$$r^2 - 6r\sin\theta = 0$$

$$r^2 = 6r\sin\theta$$

$$\boxed{r = 6\sin\theta}$$

Ör: $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ çemberinin kutupsal denklemini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

$$(r\cos\theta - a)^2 + r^2\sin^2\theta = a^2$$

$$r^2\cos^2\theta - 2ra\cos\theta + \cancel{a^2} + r^2\sin^2\theta = \cancel{a^2}$$

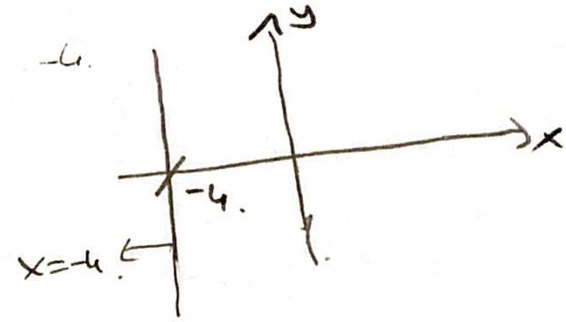
$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2ra\cos\theta = 0$$

$$r^2 = 2ra\cos\theta$$

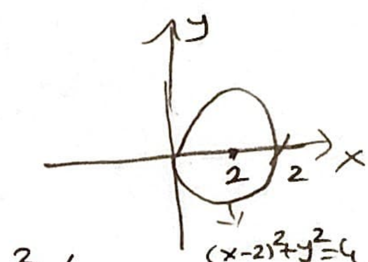
$$\boxed{r = 2a\cos\theta}$$

Ör: Aşağıdaki eğrilerin kutupsal koordinatların yerine kartezyen denklemlerini bulunuz ve bu grafikleri tanımlayınız.

(a) $r\cos\theta = -4$



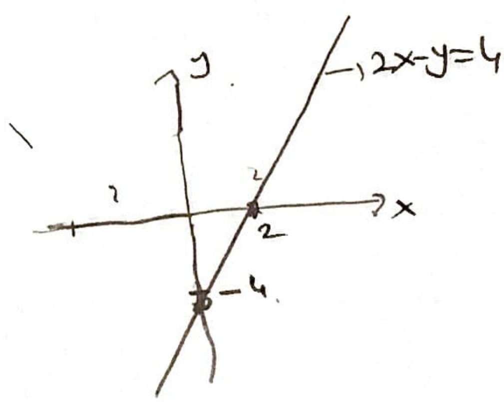
$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} r\cos\theta = -4 \\ x = -4 \end{array}$$



(b) $r^2 = 4r\cos\theta$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2+y^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} r^2 = 4r\cos\theta \\ x^2+y^2 = 4x \end{array} \Rightarrow (x-2)^2+y^2 = 4$$

$\underbrace{M(2,0)}_{\text{Merkez}}$, $\underbrace{r=2}_{\text{yarıçapı}}$ olan çember



(c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} 2r\cos\theta - r\sin\theta = 4 \\ 2x - y = 4 \end{array} \Big\} \Rightarrow$$

(d) $r = 1 + 2r\cos\theta$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2+y^2 = r^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (r)^2 = (1+2r\cos\theta)^2 \\ r^2 = 1 + 4r^2\cos^2\theta + 4r\cos\theta \\ x^2+y^2 = 1 + 4x^2 + 4x \Rightarrow y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0 \end{array}$$

(e) $r = 1 - \cos\theta \Rightarrow$ r ile çarpalım $r^2 = r - r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2 = r - x$

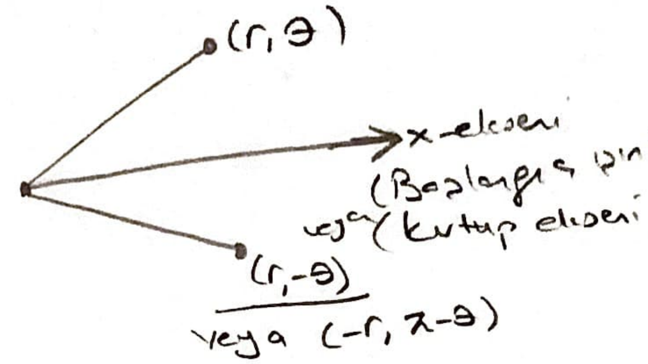
$(x^2+y^2+x)^2 = r^2 \Rightarrow \boxed{(x^2+y^2+x)^2 = x^2+y^2}$

Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi

$r=f(\theta)$'da

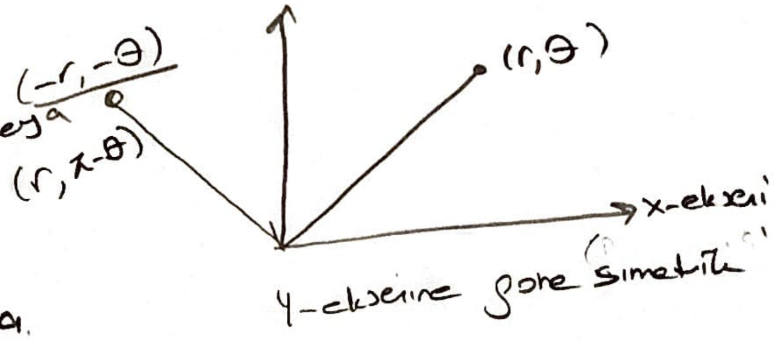
1.) x-eksenine göre simetri:

Eğer (r,θ) noktası grafik üzerinde ise $(r,-\theta)$ veya $(-r,\pi-\theta)$ noktası da grafik üzerindedir.



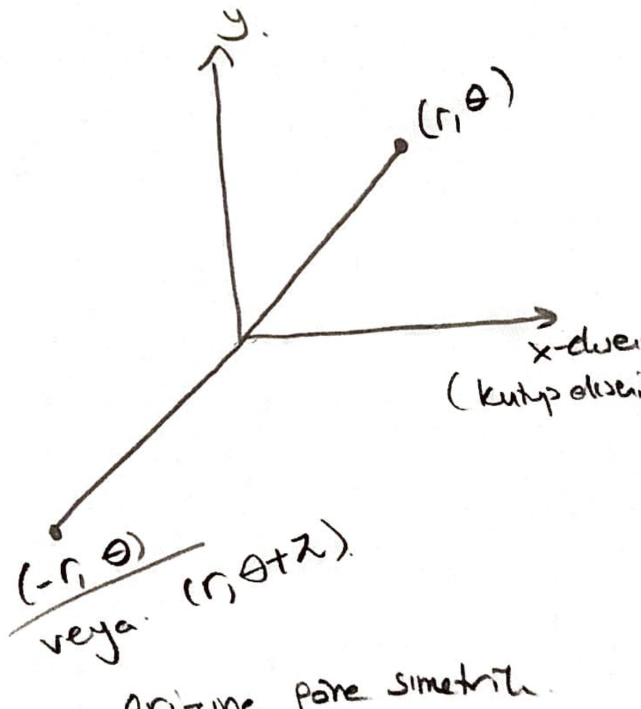
2.) y-eksenine göre simetri:

Eğer (r,θ) noktası grafik üzerinde ise $(-r,-\theta)$ veya $(r,\pi-\theta)$ noktası da grafik üzerindedir.



3.) Orijine göre simetri:

Eğer (r,θ) noktası grafik üzerinde ise $(-r,\theta)$ veya $(r,\theta+\pi)$ noktası da grafik üzerindedir



Eğim: $r=f(\theta)$ kutupsal eğrisinin eğimi

$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$
$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$

(r,θ) noktasında $r=f(\theta)$ kutupsal eğrisinin eğimi

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \; \} \Rightarrow \frac{dy}{d\theta}}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \; \} \to \frac{dx}{d\theta}} \Rightarrow$$

NOT $r=f(\theta)$ eğrisi $\theta=\theta_0$ noktasında orijinden geçiyorsa $f(\theta_0)=0$ olur ve eğim denklemi

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\theta_0)} = \frac{f'(\theta)\sin\theta_0}{f'(\theta)\cos\theta_0} = \tan\theta_0}$$

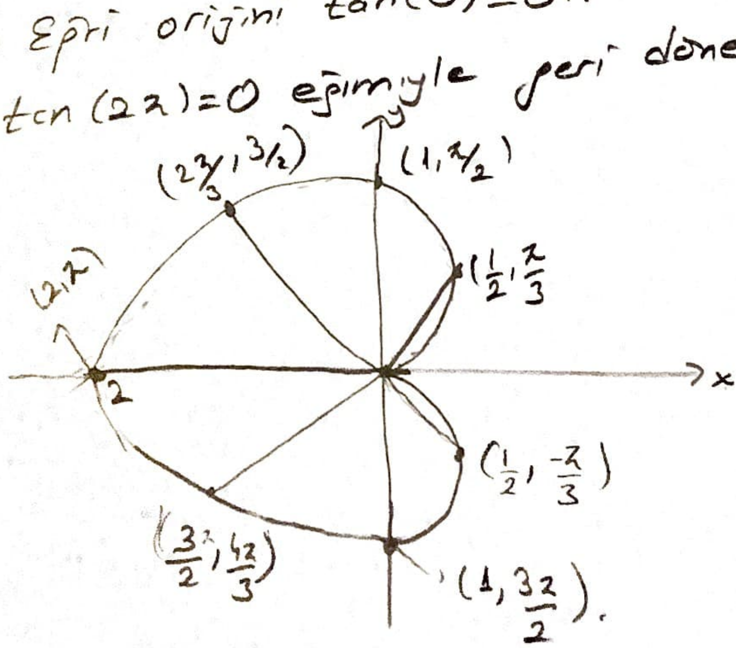
Ör: $r=1-\cos\theta$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

i.) Periyod: $r(\theta+p)=r(\theta)$ olmalı. $1-\cos(\theta+p) = 1-\cos(\theta+2\pi) \Rightarrow p=2\pi$, $[-\pi,\pi]$ aralığında incelenir

ii.) Simetri: $r(\theta)=r(-\theta)$ veya $\underbrace{(r,\theta)=(r,-\theta)}_{x\text{-eksenine göre simetri}}$

(r,θ) için
$r=1-\cos\theta$ idi.
$(r,-\theta)$ noktası için $r=1-\cos(-\theta)=1-\cos\theta$. ($x$-eksenine göre simetrik.)

iii.) Eğri orijini $\tan(0)=0$ eğimi ile terk eder ve orijine tekrar $\tan(2\pi)=0$ eğimiyle geri döner



θ	$r=1-\cos\theta$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2

Örn: $r^2 = 4\cos\theta$ eğrisi hangi eksenlere göre simetriktir.

* (r,θ) yerine $(r,-\theta)$ alalım.

$r^2 = 4\cos(-\theta) = 4\cos\theta$. $\Rightarrow$ x-eksenine göre simetriktir

* (r,θ) yerine. $(-r,-\theta)$ alalım

$(-r)^2 = 4\cos(-\theta)$

$r^2 = 4\cos\theta$.

$(-r,-\theta)$ grafikteki (r,θ) noktasında. (y-eksenine göre simetriktir)

* (r,θ) yerine. $(-r,\theta)$ alalım.

$(-r)^2 = 4\cos\theta$

$r^2 = 4\cos\theta$

$(-r,\theta)$ grafikteki (r,θ) noktasında. (orijine göre simetriktir.

Ör: $r = a.(1+\cos\theta)$ $(a>0)$.

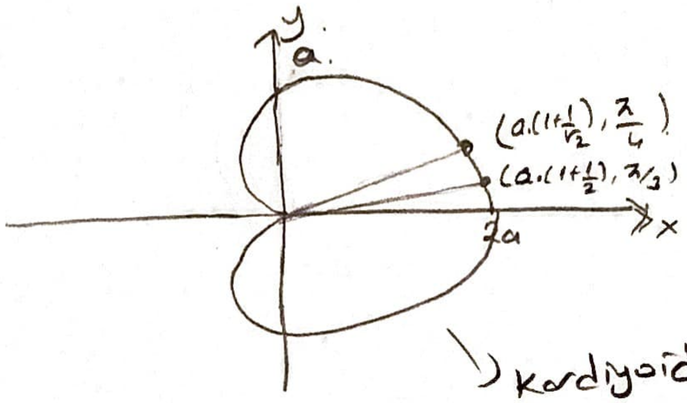
i) Periyod: 2π

ii) Simetri: x-eksenine göre simetrik ✓

$r(\theta) = r(-\theta)$

$a.(1+\cos\theta) = a.(\underbrace{1+\cos(-\theta)}_{(1+\cos\theta)})$

θ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
r	$2a$	$a.(1+\frac{1}{\sqrt{2}})$	$a.(1+\frac{1}{2})$	a	$a(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$	0

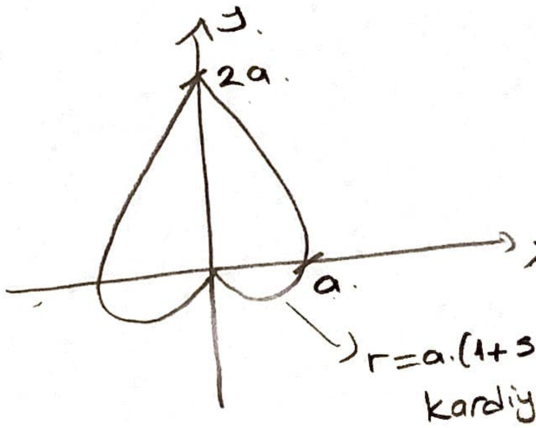


kardiyoid.

$r(\theta-\theta_0)$, $r(\theta)$ nın θ_0 kadar döndürülmesiyle elde edilir

$r = a.(1+\cos(\theta-\frac{\pi}{2}))$ ⇒ Kardiyoidi $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürdük

$r = a.(1+\sin\theta)$ ⇒

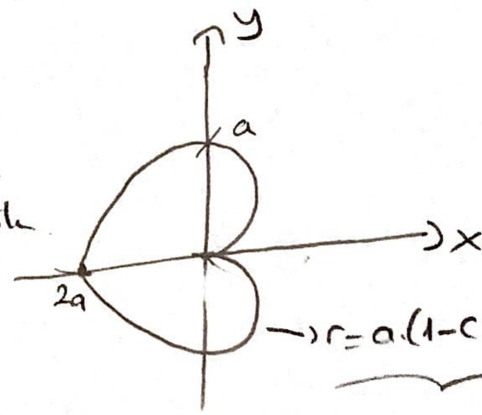


$r=a.(1+\sin\theta)$ kardiyoid.

$r = a.(1+\cos(\theta-\pi))$

$r = a.(1-\cos\theta)$

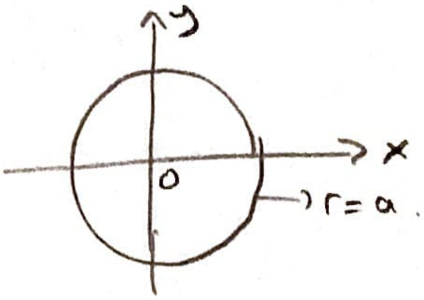
} Kardiyoidi π kadar döndürdük



$\underbrace{r=a.(1-\cos\theta)}_{\text{kardiyoid.}}$

Kutupsal Eğriler (Önemli)

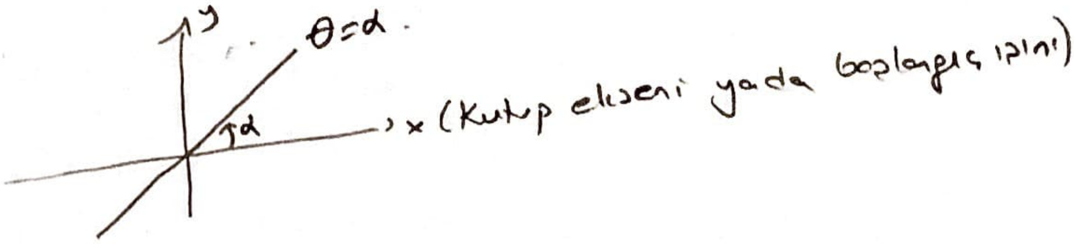
i) $r = a$, yarıçapı $|a|$ olan çember. $(x^2+y^2=a^2)$



merkezi O'da yarıçapı $|a|$ olan çember.

Ör: $r=1$ veya $r=-1$ Merkezi O da yarıçapı 1 olan çember.

ii) $\theta = \alpha$



iii) $r = a\cos\theta$

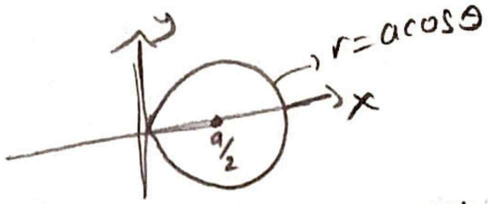
NOT: $r = a\cos\theta$) r ile çarptık

$r^2 = ar\cos\theta$

$x^2+y^2 = ax$

$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}$

$(x-\frac{a}{2})^2 + y^2$, $M(\frac{a}{2}, 0)$



Merkezi $(\frac{a}{2}, 0)$, yarıçapı $\frac{a}{2}$ olan çember

iv) $r = a\sin\theta$

$r^2 = ar\sin\theta$

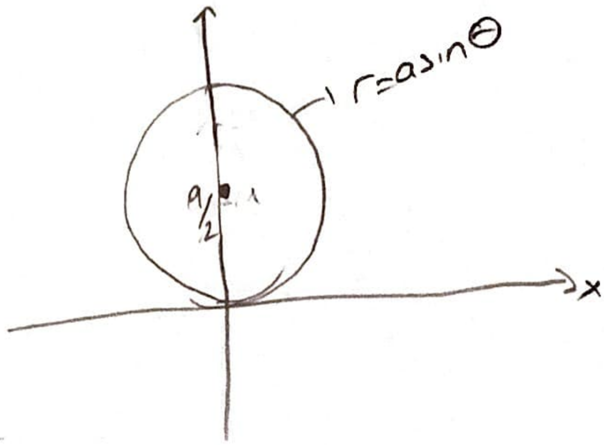
$x^2+y^2 = ay$

$x^2 + y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

$x^2 + (y-\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$

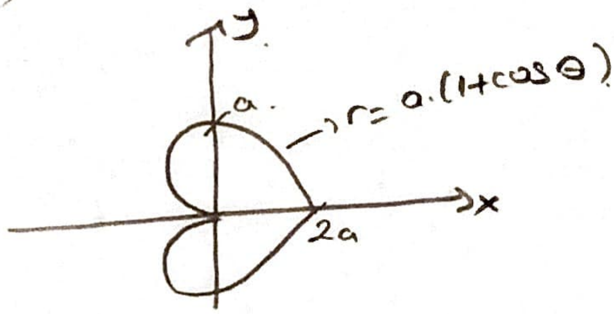
Merkezi $M(0, \frac{a}{2})$

Yarıçapı $\frac{a}{2}$ olan çember

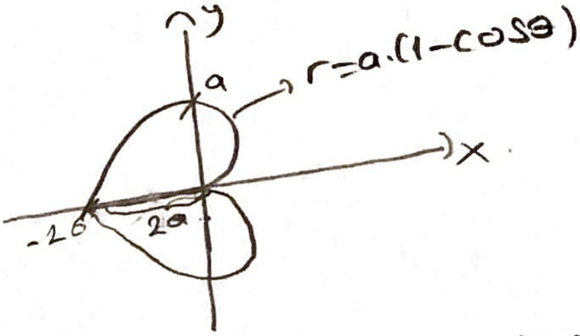


Merkezi $M(0, \frac{a}{2})$, yarıçapı $\frac{a}{2}$ olan çember

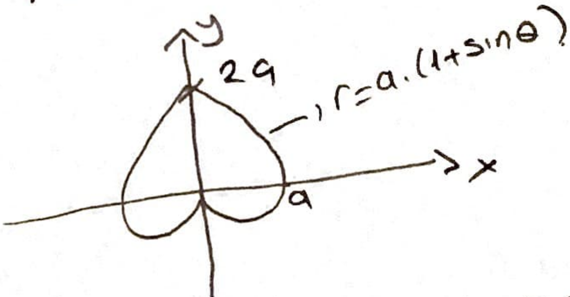
V.) a.) $r=a.(1+\cos\theta)$ Kardioidi $(a>0)$



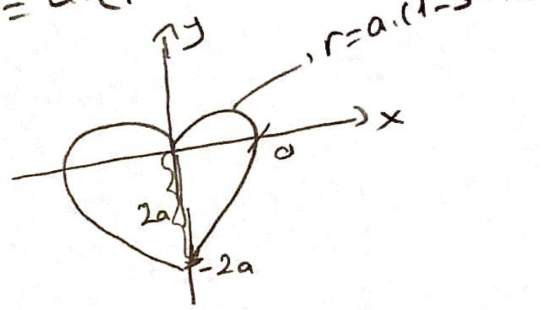
b.) $r=a.(1-\cos\theta)$ Kardioidi $(a>0)$



c.) $r=a(1+\sin\theta)$ Kardioidi $(a>0)$



d.) $r=a.(1-\sin\theta)$ Kardioidi $(a>0)$



VI) $r\cos\theta = a \Rightarrow x=a$ doğrusu.

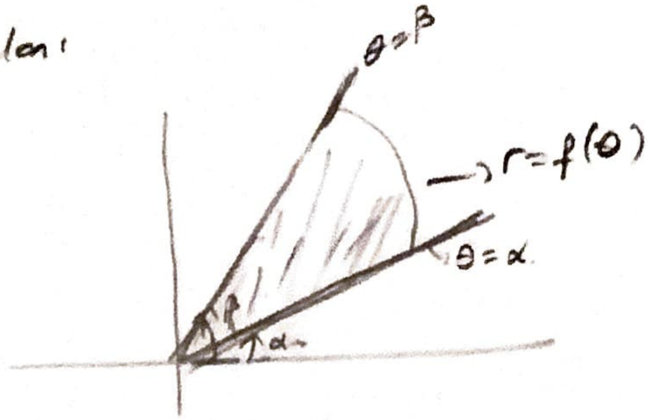
$r\sin\theta = b \Rightarrow y=b$ doğrusu.

NOT: $x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

Kutupsal Koordinatlarda Alanlar ve Uzunluklar

$r=f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ eğrisi ile orijin arasındaki

pervane şekilli bölgenin alanı

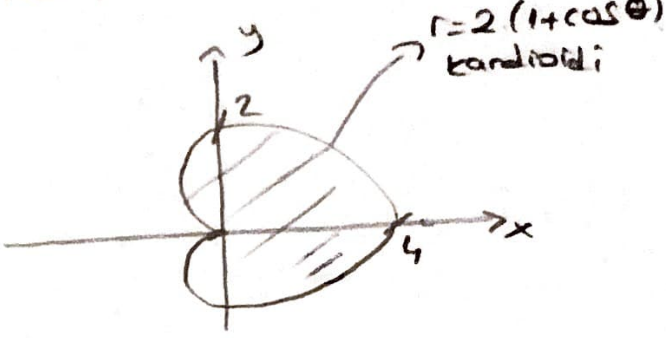


$$\text{Alan}=\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta \text{ dır. Yani}$$

$$\text{Alan}=\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (f(\theta))^2 d\theta .$$

Ör: $r=2(1+\cos\theta)$ kardioidi ile çevrili bölgenin alanını

bulunuz



$$\text{Alan}=\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}.(2.(1+\cos\theta))^2 d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi} 2.(1+\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{(1+\cos 2\theta)}{2}}+2\cos\theta).d\theta$$

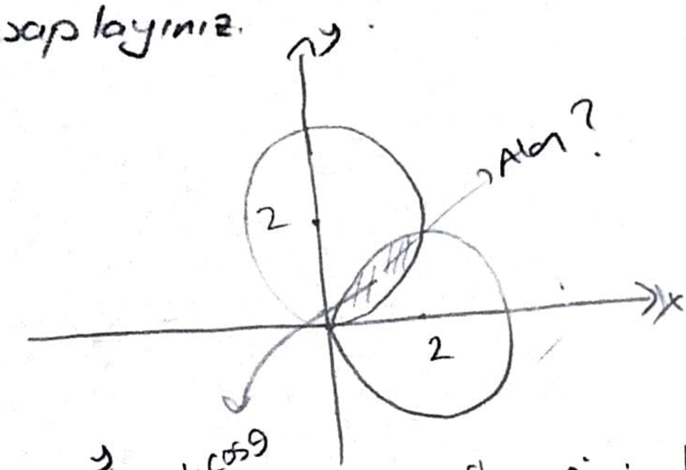
$$=2.\int_{0}^{2\pi} \Big(\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{3/2}+\frac{\cos 2\theta}{2}+2\cos\theta\Big)d\theta$$

$$=2.\left[\frac{3}{2}\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}+2\sin\theta \Big|_{0}^{2\pi}\right]$$

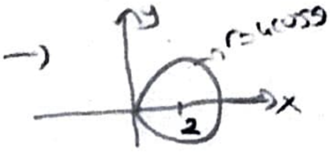
$$=2.3\pi$$

$$=6\pi .$$

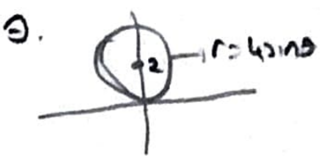
Ör: $r=4\cos\theta$ ile $r=4\sin\theta$ eğrileri arasında kalan alanı hesaplayınız.



$r=4\cos\theta \rightarrow$



$r=4\sin\theta.$



İki eğrinin kesişimi $4\cos\theta = 4\sin\theta$

$1 = \tan\theta$

$\theta = \pi/4.$

$$\text{Alan} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \underbrace{(4\sin\theta)^2}_{16\sin^2\theta,\ \frac{1-\cos2\theta}{2}} d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \underbrace{(4\cos\theta)^2}_{16\cos^2\theta,\ \frac{1+\cos2\theta}{2}} d\theta.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 16\cdot\frac{(1-\cos2\theta)}{2}d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\cdot\frac{(1+\cos2\theta)}{2}d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4}(1-\cos2\theta)d\theta + 4\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$= 4\left[\theta - \frac{\sin2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/4}\right] + 4\left[\theta + \frac{\sin2\theta}{2}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\right]$$

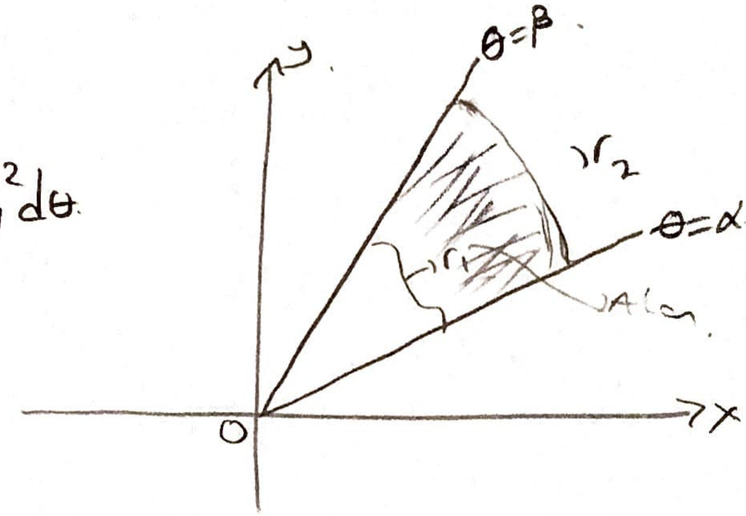
$$= 4\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] + 4\cdot\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \cancel{\pi} - 2 + 2\pi - \cancel{\pi} - 2$$

$$= 2\pi - 4.$$

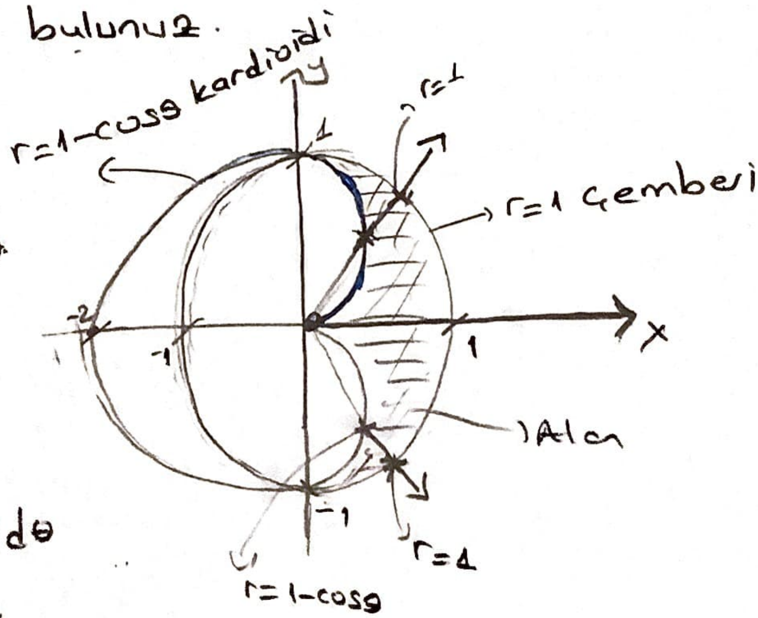
** $\theta=\alpha$'dan $\theta=\beta$'ya $r_1=r_1(\theta)$ ve $r_2=r_2(\theta)$ kutupsal eğrileri arasında bulunan bölgenin alanı.

$$\text{Alan}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r_2^2\,d\theta-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r_1^2\,d\theta$$



$$\text{Alan}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\left(r_2^2-r_1^2\right)d\theta$$

Ör: $r=1$ çemberinin içinde ve $r=1-\cos\theta$ kardioidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$\text{Alan}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1^2-(1-\cos\theta)^2\right)d\theta$$

$$=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\cancel{1}-\cancel{1}-\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}+2\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\cancel{2}\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{\cancel{2}}\left(2\cos\theta-\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=2\sin\theta-\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_{0}^{\pi/2}$$

$$=2-\frac{\pi}{4}$$

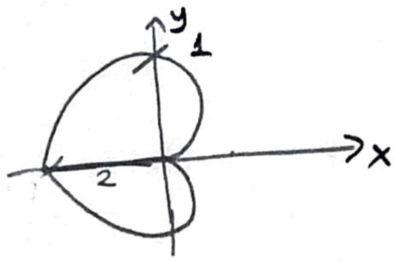
Kutupsal Eğrinin Uzunluğu

Eğer $\alpha \leq \theta \leq \beta$ aralığında $r=f(\theta)$ fonksiyonunun sürekli birinci türevi varsa ve θ değeri α'dan β'ya değişirken $P(r,\theta)$ noktası $r=f(\theta)$ eğrisini sadece bir kez geçiyor ise bu durumda eğrinin uzunluğu aşağıdaki gibidir.

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

Ör 1: $r=1-\cos\theta$ kardioidinin uzunluğunu bulunuz.

$$r=1-\cos\theta \Rightarrow \frac{dr}{d\theta}=\sin\theta.$$



$$L=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

$$L=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\,d\theta=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}}\,d\theta.$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\underset{2\cdot(1-\cos\theta)}{2-2\cos\theta}}\,d\theta=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{2}\cdot\sqrt{(1-\cos\theta)}\,d\theta$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int_{0}^{2\pi}2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta=\int_{0}^{2\pi}2\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot d\theta.$$

$$=4\left(-\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big|_{0}^{2\pi}=-4(\underset{-1}{\cos\pi}-\underset{1}{\cos 0})=8$$