Sonsuz Diziler

Dizi, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ gibi belli bir düzenle verilmiş sayılardır. Burada a_1, a_2, a_3 terimlerinden her biri bir sayıyı kastetmektedir

Örneğin

$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots$

dizisinde ilk terim $a_1 = 2$, ikinci terim $a_2 = 4$ ve genel olarak n. terim $a_n = 2n$ dir. Burada n tamsayısına a_n'nin indisi denir a_n teriminin kaçıncı sırada olduğunu gösterir.

$2, 4, 6, 8, \ldots$ dizisi ile $4, 2, 6, 8, \ldots$ dizisi farklı dizilerdir.

* Bir sonsuz sayı dizisini tanım kümesi pozitif tamsayılar olan bir fonksiyon olarak tanımlayabiliriz.

- Örneğin, $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$

- Ör: $12, 14, 16, 18, \ldots$ dizisi

$a_n = 10 + 2n$ formülü ile tanımlanırsa $n=1$'den başlar. $n=6$'dan başlar

aynı dizi $b_n = 2n$ formülü ile tanımlanırsa b_6 ile başlar.

$\{a_n\}$ dizisi a_1 ile başlarken $\{b_n\}$ dizisi

* Diziler aşağıdaki gibi terimleri belirtilen yazılım kuralları ile $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, $c_n = \frac{n-1}{n}$, $d_n = (-1)^{n+1}$ terimlerini listeleme şeklinde de gösterilebilir.

ifade edilebileceği gibi

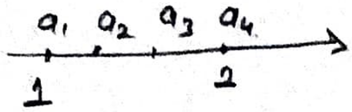
* $\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$ ya da $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$

$\{b_n\} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\}$ ya da $\{b_n\} = \{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$

$\{c_n\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\}$ ya da $\{c_n\} = \{\frac{n-1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$

$\{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ ya da $\{d_n\} = \{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

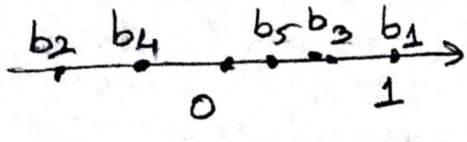
* Dizileri grafiklerle iki şekilde temsil edilebilir.



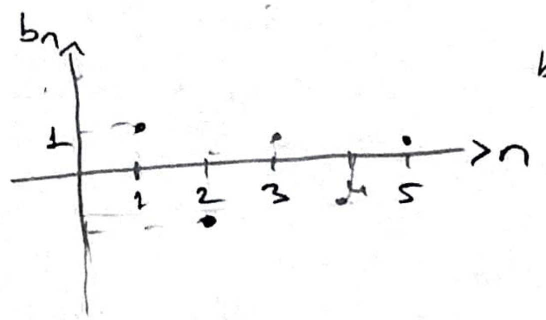
$a_n = \sqrt{n}$

,

$a_n = \sqrt{n}$



$b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$



$b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Yakınsama ve Iraksama

Bazen bir dizinin indis sayısı n arttıkça dizideki sayılar belli bir değere yaklaşır.

Örneğin

* $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ---, \frac{1}{n}, ---\}$ dizisindeki n büyüdükçe terimler 0'a yaklaşır.

* $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ----, 1-\frac{1}{n}, ---\}$ dizisinde n büyüdükçe terimler 1'e yaklaşır.

* $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ---, \sqrt{n}, ---\}$ dizisinde n büyüdükçe terimler verilen her sayıdan büyük olur.

* $\{1, -1, 1, -1, ---, (-1)^{n+1}, ---\}$ dizisinde ise terimler -1 ile 1 arasında gidip gelir.

Tanım: Eğer verilen her pozitif ε sayısı için

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

şartını sağlayan bir N tamsayısı bulunuyorsa $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsar. Eğer böyle bir L sayısı yoksa $\{a_n\}$ dizisi ıraksar.

** Eğer $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsıyorsa bunu

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ veya $a_n \to L$ ile gösteririz ve L'ye dizinin limiti deriz.

Tanım: Eğer verilen her M sayısı için N'den büyük bütün n'ler için $a_n > M$ koşulu sağlanacak biçimde bir N tamsayısı bulunuyorsa $\{a_n\}$ dizisi sonsuza ıraksar. Bu koşul gerçekleştiğinde yazılım şöyledir.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ veya $a_n \to \infty$

Benzer şekilde verilen her m sayısı için, N'den büyük bütün n'ler için $a_n < m$ koşulu sağlanacak biçimde bir N tamsayısı bulunuyorsa, $\{a_n\}$ dizisi eksi sonsuza ıraksar ve yazılımı şöyledir.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ veya $a_n \to -\infty$

Dizilerin Limitlerinin Hesaplanması

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri birer reel sayı dizisi ve A ve B birer reel sayı olsunlar. Eğer $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ ise

1. Toplam Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = A+B$
2. Fark Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = A-B$
3. Sabitle Çarpım Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(k.a_n) = k.A$ (k bir sabit)
4. Çarpım Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = A.B$
5. Bölüm Kuralı: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ (eğer $B \neq 0$ ise)

Ör: Genel terimi $a_n = -\frac{1}{n}$ olan dizinin limitini hesaplayınız

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

Ör: Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin limitlerini hesaplayıp yakınsak ya da ıraksaklığını bulunuz.

i.) $a_n = \frac{n-1}{n}$ ii.) $b_n = \frac{5}{n^2}$ iii.) $c_n = \frac{4-7n^6}{n^6+3}$

i.) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ (yakınsaktır)

ii.) $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 5.\frac{1}{n}.\frac{1}{n} = 0$ (Yakınsaktır)

iii.) $\lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^6}-7}{1+\frac{3}{n^6}} = -7$ (Yakınsaktır)

* $\{a_n+b_n\}$ limiti olması $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerinin limitleri olduğu anlamına gelmez.

Örneğin,

$\{a_n\}=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ ve $\{b_n\}=\{-1,-2,-3,\ldots,-n,\ldots\}$

dizileri ıraksaktır fakat

$\{a_n+b_n\}=\{0,0,0,\ldots\}$ dizisi 0'a yakınsar.

* Her ıraksak dizinin sıfırdan farklı herhangi bir sabit katıda ıraksaktır.

Diziler İçin Sandviç (Sıkıştırma) Teoremi

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ birer reel sayı dizisi olsunlar. Eğer belli bir N sayısından büyük bütün n'ler için $a_n \le b_n \le c_n$ şartı sağlanıyorsa ve eğer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ ise o zaman $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ olur.

Ör: $\frac{1}{n} \to 0$ olduğunu biliyoruz.

(a) $\frac{\cos n}{n} \to 0$ çünkü $-\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$.

(b) $\frac{1}{2^n} \to 0$ çünkü $0 \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n}$

(c) $(-1)^n\frac{1}{n} \to 0$ çünkü $-\frac{1}{n} \le (-1)^n\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}$

Diziler İçin Sürekli Fonksiyon Teoremi

$\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $a_n \to L$ ise ve f fonksiyonu her a_n de tanımlı olup L de sürekli ise o zaman $f(a_n) \to f(L)$ dir.

Ör: $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$ olduğunu gösteriniz

$\frac{n+1}{n} \to 1$ olduğunu biliyoruz.

$f(x) = \sqrt{x}$ alırsak.

$f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ ve $f(1) = 1$ olur. Dolayısıyla.

$\frac{n+1}{n} \to 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1.$ dir.

Ör: $\{\frac{1}{n}\}$ dizisi 0'a yakınsar $\{2^{\frac{1}{n}}\}$ dizisi 1'e yakınsar.

$\frac{1}{n} \to 0.$

$f(x) = 2^x$ olsun. $\Rightarrow f(\frac{1}{n}) = 2^{1/n}$ ve $f(0) = 2^0 = 1$

$\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \underbrace{2^{1/n} \to 1}$ dır.

$2^{1/n}$ dizisi 1'e yakınsar

L'Hopital Kuralını Kullanmak

$f(x)$'in bütün $x \geq n_0$ için tanımlı bir fonksiyon olduğunu ve $\{a_n\}$'nin de bütün $n \geq n_0$ için $a_n = f(n)$ şartını sağlayan bir reel sayı dizisi olduğunu varsayalım. O halde

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = L$$

Ör: Genel terimi $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ olan dizisi için

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ limitini hesaplayınız.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ fonksiyonu $x \geq 1$ için tanımlıdır ve verilen dizi ile aynı değerleri alır. Bundan dolayı $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ limit değeri $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ limit değerine eşittir.

Yani fonksiyonlar için,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ ''elde ederiz.}$$

O zaman dizinin limitini de $(\ast\ast\ast)$ elde ederiz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Örn: n'inci terimi verilen

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

dizisi yakınsak mıdır?

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \quad (1^\infty \text{ belirsizliği})$$

$$\ln a_n = \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

$$\ln a_n = n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right) \quad \text{(Her iki tarafın limiti alınırsa)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n . \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right) \quad (\infty . 0 \text{ belirsizliği})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}\right)$$

(L'Hopital Kuralı)

$$\overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2}{n^2-1}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1}$$

$$= 2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^2 \checkmark$$

$\{a_n\}$ dizisi e^2'ye yakınsar.

Sıkça Rastlanan Limitler.

Aşağıdaki altı dizi karşılarındaki limitlere yakınsar.

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ 2.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x>0)$ 4.) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x|<1)$

5.) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ (her x için) 6.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (her x için)

* Burada. x sabit bir sayı.

Ör: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2.\frac{\ln n}{n} = 2.0 = 0$

Ör: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1} . \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1} = 1.$

Ör: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{1} . \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1} = 1.$

Ör: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0.$

Ör: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}.$

Ör: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0$

Tekrarlı Tanımlanan Diziler

Ör: (a): $a_1=1$ ve $n>1$ için $a_n=a_{n-1}+1$ ifadeleri

$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ pozitif tam sayı dizisini

tanımlar. $a_1=1$ ile $a_2=a_1+1=2$, $a_3=a_2+1=3$ ... elde edilir.

(b): $a_1=1$ ve $n>1$ için $a_n=n.a_{n-1}$ ifadeleri

$1, 2, 6, 24, \ldots, n!, \ldots$ faktöriyel dizisini tanımlar

(c): $a_1=1$, $a_2=1$ ve $n>2$ için $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ ifadeleri

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ Fibonacci sayılarını tanımlar

Sınırlı Monoton Diziler

* Eğer bütün n'ler için $a_n \leq M$ şartını sağlayacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlı bir dizidir. M sayısı $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır. Eğer M, $\{a_n\}$ için bir üst sınırsa ve M den küçük hiç bir sayı $\{a_n\}$ için bir üst sınır değilse. M'ye en küçük üst sınır denir.

* Eğer bütün n'ler için $a_n \geq m$ şartını sağlayacak şekilde bir m sayısı varsa, $\{a_n\}$ dizisi alttan sınırlı bir dizidir. m sayısı $\{a_n\}$ için bir alt sınırdır. Eğer m, $\{a_n\}$ için bir alt sınırsa ve m'den büyük hiç bir sayı $\{a_n\}$ için bir alt sınır değilse m'ye en büyük alt sınır denir.

* Eğer $\{a_n\}$ dizisi hem alttan hem üstten sınırlı ise $\{a_n\}$'ye sınırlı dizi denir. Eğer $\{a_n\}$ sınırlı değilse ona sınırsız diziden

Örnek:

* i) $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ dizisi üstten sınırlı değildir. Ama dizi alttan 1'e eşit veya 1'den küçük her reel sayı ile sınırlıdır. $m=1$ sayısı bu dizi için en büyük alt sınırdır.

* ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ dizisi

1'den büyük ya da 1'e eşit her reel sayıyla üstten sınırlıdır. $M=1$ en küçük üst sınırdır. Aynı zamanda dizi $\frac{1}{2}$'den küçük veya $\frac{1}{2}$'ye eşit her reel sayıyla alttan sınırlıdır. $m=\frac{1}{2}$ → (en büyük alt sınır)

Tanım: Eğer bütün n'ler için $a_n \leq a_{n+1}$ sağlanıyorsa $\{a_n\}$ dizisine azalmayan dizi denir. Yani $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$'dir. Eğer bütün n'ler için $a_n \geq a_{n+1}$ sağlanıyorsa $\{a_n\}$ dizisine artmayan dizi denir. Eğer $\{a_n\}$ dizisi artmayan veya azalmayan bir dizi ise buna monoton dizi denir.

(a) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ dizisi azalmayan bir dizidir.

(b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ " " "

(c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ dizisi artmayan bir dizidir.

(d) $3, 3, 3, \dots, 3, \dots$ sabit dizisi hem azalmayan hem artmayan bir dizidir.

(e) $1, -1, 1, -1, \dots$ dizisi monoton değildir.

* **Monoton Dizi Teoremi:** Bir $\{a_n\}$ dizisi hem sınırlı hemde monoton ise bu dizi yakınsaktır.

Ör: $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}_{e^{-1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-2}}_{1}$$

$$= e^{-1}$$

Ör: Genel terimi $a_n = n - \ln(e^n+1)$ olan dizinin limitini bulunuz.

$(\infty - \infty)$ belirsizliği

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n - \ln(e^n+1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln e^n - \ln(e^n+1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)$$

* I.yol. $= \ln\left[\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n+1}\right]$

$$= \ln\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{e^n}}_{0}}\right]$$

$$= \ln 1$$
$$= 0$$

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği

NOT * II.yol. $= \ln\left[\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n+1}\right]$

$$\overset{L'H}{=} \ln\left[\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}}\right]$$

$$= \ln 1 = 0.$$

Ör: Eğer $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ve.

$$2a_n + 3a_{2n+1} = \frac{5n+1}{2n+3}$$

ise, $\{a_n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} (2a_n + 3a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{2n+3}$$

$$2A + 3A = \frac{5}{2}$$

$$5A = \frac{5}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}.$$

NOT: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ dersek. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = A$ dır. $(A \in \mathbb{R})$ $\downarrow$ reel sayı

Ör: Ardışık olarak $a_1=\frac{1}{2}$ ve $n\geq 1$ doğal sayısı için

$a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}-1$ ile verilen $\{a_n\}$ dizisi için

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ olduğu bilindiğine göre $\left\{\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}\right\}$

dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+a_n}-1-1}{a_n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3+a_n}-2\right)\left(\sqrt{3+a_n}+2\right)}{(a_n-1).\left(\sqrt{3+a_n}+2\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3+a_n-4)}{(a_n-1)\left(\sqrt{3+a_n}+2\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(a_n-1)}}{\cancel{(a_n-1)}.\left(\sqrt{3+a_n}+2\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3+a_n}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

Ör: Genel terimi $a_n = n - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2n})$, $(n=1,2,\dots)$, olan dizinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2n})$$ ($\infty - \infty$ belirsizliği

$\ln(1+e^{2n})^{1/2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln e^n - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{e^n}{(1+e^{2n})^{1/2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{e^n}{\sqrt{e^{2n}\left(\frac{1}{e^{2n}}+1\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}$$

$$= \ln \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}$$

$$= \ln 1$$

$$= 0$$

Ör: Genel terimi $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n$ olan.

$\{a_n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2-2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\left(1 - \frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2}}_{e^{-3}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{3}{3n+2}\right)^{-2}}_{1}\right]^{1/3}$$

$$= \left(e^{-3}\right)^{1/3}$$

$$= e^{-1}$$

$$= \frac{1}{e}$$