Introduction to Digital Logic

Ders 1

İşaretler ve Sayı Sistemleri

İşaretler

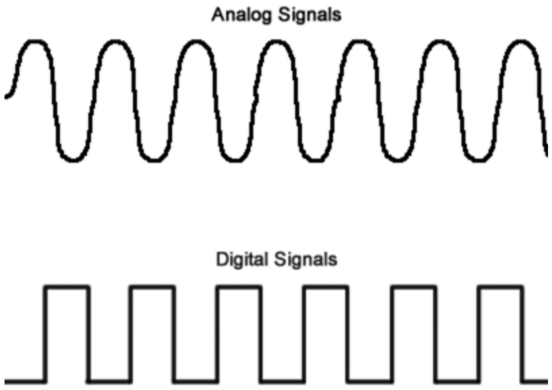
- İşaret = Fiziksel bir olayın elektriksel olarak gösterilmesidir. Örnek: Ortamdaki ısı değişimi veya elektrik devresinden çekilen akım işaret ile gösterilebilir ve tanımlanabilir.
- Lojik devre tasarımı temelinde belirli özellikte işaretleri giriş olarak alıp belirli bir işi yerine getirmek üzere çıkış işareti üretmektir.
- İşaretler iki forma sahiptir.
    - Analog İşaret
    - Sayısal İşaret
- Lojik devre uygulamalarında sayısal işaret kullanılır.

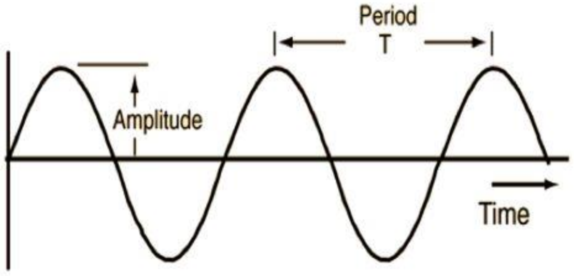
İşaretler

- Gerçek dünyada karşılaştığımız birçok fiziksel büyüklüğün (akım, gerilim,sıcaklık, ışık şiddeti vb.) değeri sürekli bir aralık içinde değişmektedir.
- Sınırlar arasındaki her türlü olası değeri alabilen, kesintisiz bu tür işaretlere **analog işaretler** denir.
- **Sayısal işaretler** ise, bilginin veya analog işaretin belli aralıklarla örneklenmesi/kodlanması ile elde edilir. Dijital işaretlerde süreklilik yoktur. Geçişler merdiven basamağı şeklinde ayrıktır.
- Sayısal işaretlerde önemli olan işaretin büyüklüğü değil, var/yok durumudur.

İşaretler

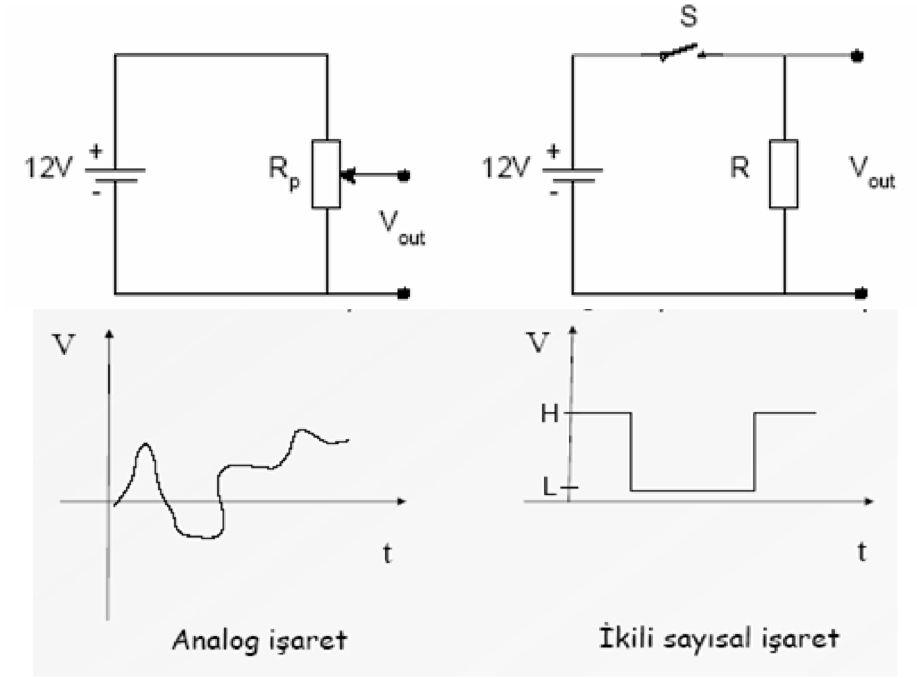
- İşaret şekli belli zaman aralıklarında kendini tekrarlayan özellikte ise “**periyodik özelliğe**” sahiptir denir.
- Periyodik işaretlerin, Periyot Zamanı (t) ve Frekans (Hz) bileşeni vardır.





$$f = \frac{1}{T}$$

İşaretler

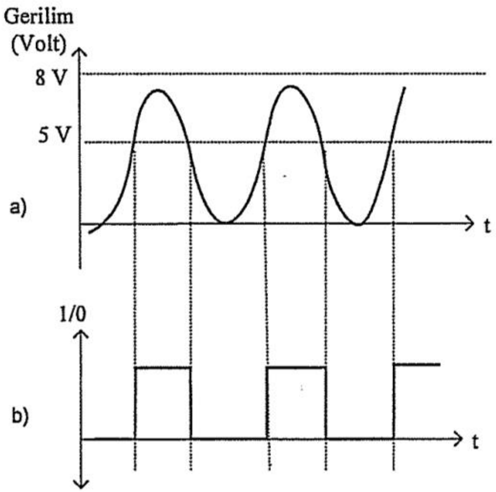

12V
+
-
R_p
V_{out}
S
12V
+
-
R
V_{out}
V
t
Analog işaret
V
H
L
t
İkili sayısal işaret

İşaretler

- Sayısal işaretler, en temelde ikili işarettir (1/0 - on/off - H/L). İşaret herhangi bir anda ya 1 veya 0 değerinde bulunabilir.
- Örnek: Lambanın yanık olma durumu 1, sönük olma durumu 0 ile temsil edilebilir. Bu aşamada lambanın ne kadar akım çektiği veya lambaya uygulanan gerilim önemli değildir.
- Genel anlamda sayısal işaret iki sınıfa ayrılır.
    - İkili işaret (Binary signal)
    - Kodlanmış sayısal işaret (Encoded Digital Signal)

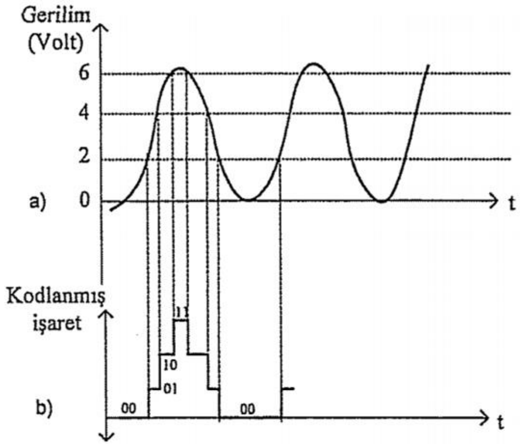
İşaretler

- İkili işaret, herhangi bir anda tek bitlik değişimi barındıran, kodlanmış sayısal işaret ise 2’den çok ayrık durumdan birini alabilen işaretlerdir.



Şekil-2.2. Analog işaretten ikili işaret elde edilmesi.

0 1 0 1 0 1

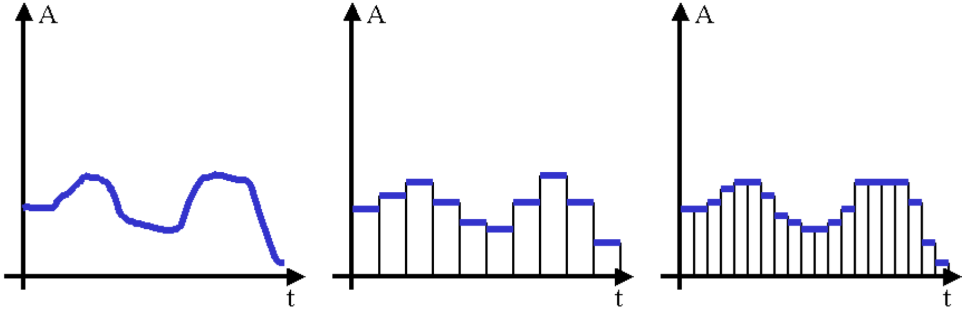


Şekil-2.3. Analog işaretten kodlanmış sayısal işaret elde edilmesi.

0 → 00 (0 Volt)
1 → 01 (2 Volt)
2 → 10 (4 Volt)
3 → 11 (6 Volt)

İşaretler

- Analog işaretten kodlanmış sayısal işaret ADC çeviriciler ile elde edilebilir. Ters işlem ise DAC çeviriciler ile mümkündür.
- Analog dönüşümlerde duyarlılık oluşturulacak sayısal sinyalin kalitesi belirtir. Analog sinyalin sayısal sinyaldeki örneklem durum sayısını yani basamak sayısını belirtir.



Analog signal – continuously varying

Digital signal – large time divisions

Digital signal – small time divisions

$$a = \frac{V_{maks}}{2^n}$$

$$\omega_s \geq 2\omega_c$$

Örnek

Bir analog işaret 0 ile 15 Volt arasında kesintisiz değerler alabilmektedir; bu işaretin 100 mV duyarlılıkla kodlanmış sayısal işarete dönüştürülmesi için kaç bitlik bir ADC gerekir.

4-bitlik bir DAC devresinin çıkış gerilim aralığı 0 V ile 6 V arasında değişmektedir. 0000 sayısal girişi 0 V'a, 1111 sayısal girişi 6 V'a karşılık düşecek biçimde DAC'a ait dönüştürme tablosu oluşturunuz.

Sayı Sistemleri

- Sayı sistemleri aşağıdaki gibi kategorize edilebilir:
  - a) Onluk (Decimal) sayı sistemi → 10 tabanlı
  - b) Sekizlik (Octal) sayı sistemi → 8 tabanlı
  - c) İkili (Binary) sayı sistemi → 2 tabanlı
  - d) Onaltılı (Hexadecimal) sayı sistemi → 16 tabanlı
- Herhangi bir tabandaki sayı şu şekilde ifade edilir:
  - $(173,25)_{10} = 1x10^{2} + 7x10^{1} + 3x10^{0} + 2x10^{-1} + 5x10^{-2}$
  - $(1247,172)_{8} = 1x8^{3} + 2x8^{2} +4x8^{1} + 7x8^{0} + 1x8^{-1} + 7x8^{-2} + 2x8^{-3}$
  - $(10111)_{2}= 1x2^{4} + 0x2^{3} + 1x2^{2} + 1x2^{1} + 1x2^{0}$
- İkili Sayı sisteminde her bir hane “bit”, 4 bit “nibble”, 8 bit “byte”, 16 bit (2 byte) “word” olarak adlandırılır.

Sayı Sistemleri

$15_{10} = 1111_2 = 17_8 = F_{16}$

Tablo-3.1. Çeşitli tabanlarda verilmiş sayılar.

10 Tabanı	2 Tabanı	8 Tabanı	16 Tabanı
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

İkili ---> Decimal (Ondalık)

Örnek: $(1010)_2 = (?)_{10}$

Örnek: $(11001)_2 = (?)_{10}$

Örnek: $(111,101)_2 = \quad (?)_{10}$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Decimal (Ondalık) ---> İkili

Örnek: (33)10 = (?) 2

Örnek: $(172)_{10} = (\ ?\ )_2$

$(172)_{10} = (10111100)_2$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Decimal (Ondalık) ---> İkili

Örnek: $(7,8125)_{10} = (\ ?\ )_2$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Octal (Sekizlik) ---> Decimal (Onluk)

Örnek: $(47)_8 = (?)_{10}$

Örnek: $(153,51)_8$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Decimal (Onluk) ---> Octal (Sekizlik)

Örnek: $(247)_{10} = (\ ?\ )_8$

Örnek: $(153,513)_{10} = (\ ?\ )_8$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Binary ---> Octal (Sekizlik)

Örnek: $(101110011)_2 = (\ ?\ )_8$

Örnek: $(10110)_2 = (?)_8$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Octal ---> Binary

Örnek: $(237)_8 = (?)_2$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Hexadecimal ---> Decimal

Örnek: $(1A3)_{16} = (?)_{10}$

Örnek: $(A,3)_{16} = (?)_{10}$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Decimal ---> Hexadecimal

Örnek: $(1357)_{10} = (?)_{16}$

Örnek: $(25,125)_{10} = (?)_{16}$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Binary---> Hexadecimal

Örnek: $(100111000011)_2 = (?)_{16}$

Örnek: $(10110111,101001)_2 = (?)_{16}$

Sayı Sistemleri - Dönüşümler

Hexadecimal ---> Binary

Örnek: $(F7C)_{16} = (?)_2$

Sayı Sistemleri - Aritmetik İşlemler

Toplama

Örnek: $(011)_2 + (001)_2 = (\ ?\ )_2$

$$
\begin{array}{r}
1\ 1\ \ \ \\
0\ 1\ 1 \\
+\,0\ 0\ 1 \\
\hline
1\ 0\ 0
\end{array}
$$

Örnek: $(263)_8 + (157)_8$

$$
\begin{array}{r}
(263)_8 \\
+\quad (157)_8 \\
\hline
(442)_8
\end{array}
$$

İşlemin yapılışı	1. Haneler	3+7=2	Elde1
	2. Haneler	Elde1+6+5=4	Elde1
	3. Haneler	Elde1+2+1=4	

Örnek: $(A17)_{16} + (1F3)_{16}$

$$
\begin{array}{r}
a\text{- } (A17)_{16} \\
+\ (1F3)_{16} \\
\hline
(C0A)_{16}
\end{array}
$$

İşlemin yapılışı →	1. Haneler	3+7=10(A)	
	2. Haneler	1+F=0	Elde 1
	3. Haneler	Elde 1+A+1=C	

Sayı Sistemleri - Aritmetik İşlemler

10 tabanı için kullanılan yöntem ile çıkarma

$$\begin{array}{r} (011)_2 \\ -\ (001)_2 \\ \hline (010)_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ -\ 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

Bir alt basamağa 1 borç verildiğinden

Bir üst basmaktan borç alındığında bu sütun 10 olur

(0 – 0= 0)

(10 – 1 = 1)

$$\begin{array}{rccc} & 0 & & \\ & \cancel{1} & {}^{1}0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (100)_2 \\ -\ (011)_2 \\ \hline (\quad)_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (1010)_2 \\ -\ (0011)_2 \\ \hline (\quad)_2 \end{array}$$

Sayı Sistemleri - Aritmetik İşlemler

Tümleyen aritmetiği ile çıkarma

Sayı sistemlerinde direkt çıkarma yapılacağı gibi Tamamlayıcı (Komplementer) yöntemiyle de çıkarma yapılabilir Tamamlayıcı (Komplementer) yöntemiyle çıkarma işlemi aslında bir toplama işlemidir. Bu işlemde bir üst basamaktan borç alınmaz. Her sayı sistemine ilişkin iki adet tümleyen (komplementer) bulunabilir. Bunlar; r sayı sisteminin tabanını göstermek üzere

1. ***r-1 Komplementer***
2. ***r Komplementer***

olarak gösterilebilir. Taban yerine konduğunda bu iki tümleyen (komplementer) Binary(İkilik) sayılarda 1. ve 2. Tümleyen (komplementer), Decimal(Onlu) sayılarda 9. ve 10. Tümleyen (komplementer) adını alır.

Sayı Sistemleri - Aritmetik İşlemler

Bire Tümleyen aritmetiği ile çıkarma

$$\begin{array}{r} (11001)_2 \\ \underline{-(10011)_2} \end{array}$$

Çıkan sayının 1.Tümleyen (komplementer)i $(10011)_2 \longrightarrow (01100)_2$

$$\begin{array}{r} 11001 \\ \underline{+\ \ 01100} \\ 1\ 00101 \\ \underline{+\ \ \ \ \ \ \ \ 1} \\ (00110)_2 \end{array}$$

Eğer elde 1 oluşmuşsa sonuç pozitiftir ve gerçek sonuç eldenin en sağdaki basamağa eklenmesi ile bulunur.

Sayı Sistemleri - Aritmetik İşlemler

Bire Tümleyen aritmetiği ile çıkarma

$$\begin{array}{r} (1001)_2 \\ \underline{-\ (1101)_2} \end{array}$$

Çıkan sayının 1.Tümleyen $(1101)_2 \longrightarrow (0010)_2$

$$\begin{array}{r} 1001 \\ \underline{+\ \ 0010} \\ 1011 \end{array}$$

Eğer elde 1 oluşmamışsa sonuç negatiftir ve gerçek sonuç çıkan sonucun terslenmesi ile bulunur.

$-(0100)_2$

a- $(10011)_2$ $\underline{-\ (10000)_2}$	b- $(011011)_2$ $\underline{-\ (100111)_2}$	c- (10001) $\underline{-\ \ (111)_2}$

Sayı Sistemleri - Aritmetik İşlemler

İkiye Tümleyen aritmetiği ile çıkarma

$$\begin{array}{r} (10100)_2 \\ \underline{-(10011)_2} \end{array}$$

1.Tümleyen (komplementer) $\rightarrow$ 10011 $\rightarrow$ 01100

$$\begin{array}{r} 01100 \\ \underline{+\quad\;\; 1} \\ 01101 \end{array}$$

2.Tümleyen $\rightarrow$ 01101

$$\begin{array}{r} 11001 \\ \underline{+\; 01101} \\ 1\,00110 \end{array}$$

Eğer elde 1 oluşmuşsa sonuç pozitiftir ve gerçek sonuç eldenin atılması ile bulunur.

$\rightarrow (00110)_2$

a- $(11101)_2$	b- $(001100)_2$	c- (11011)
$-(11010)_2$	$-(101000)_2$	$-\ (101)_2$

Sayı Sistemleri

Bilgisayarda sayıların gösterimi

Tamsayılar 2 şekilde bilgisayarda gösterilir.

- İşaretsiz
- İşaretli
    - İşaret Biti İle
    - Tümleyen Aritmatiği ile

- $-5_{10} = \underline{1}0101_2 \quad 5 = \underline{0}0101_2$ *(İşaret biti kullanılıyor)*
- $5_{10} = 0101_2 \xrightarrow{1'\text{e tümleme}} 1010_2 \xrightarrow{2'\text{e tümleme}} 1011_2 \Rightarrow -5_{10} = 1011_2$ *(İş.bit kullanılmıyor)*

Sayı Sistemleri

İşaretli Sayılarda Tümleme aritmetiği ile çıkarma

- $(66358)_{10} - (2164)_{10} = ?$

  $(2164)_{10}$ sayısının 10' a tümleyeni alınır: $10^5 - (2164)_{10} = (97836)_{10}$

  $(66358)_{10} + (97836)_{10} = (164194)_{10}$ Elde oluştuğu için sonuç pozitiftir ve atılır, çıkarma işleminin sonucu **+64194** olarak elde edilir.

- $(2164)_{10} - (66358)_{10} = ?$

  $(66358)_{10}$ sayısının 10' a tümleyeni alınır: $10^5 - (66358)_{10} = (33642)_{10}$

  $(2164)_{10} + (33642)_{10} = (35806)_{10}$ Elde oluşmadığı için sonuç negatiftir, bu yüzden sonucun 10' a tümleyeni alınır:

  $(10^5)_{10} - (35806)_{10} = (-64194)_{10}$ olarak bulunur.

Sayı Sistemleri

İşaretli Sayılarda Tümleme aritmetiği ile çıkarma

- $(1110011)_2 - (1101010)_2 = ?$

  $(1101010)_2$ sayısının 2' e tümleyeni alınır: 1' tümleme $\longrightarrow (0010101)_2$

  2' tümleme $\longrightarrow (0010101)_2 + (0000001)_2 = (0010110)_2$

  $(1110011)_2 + (0010110)_2 = (10001001)_2$ taşma olduğu için sonuç pozitif olarak alınır, elde göz önünde bulundurulmaksızın sonucun **+0001001** olduğu söylenir.

- $(1101010)_2 - (1110011)_2 = ?$

  $(1110011)_2$ sayısının 2' e tümleyeni alınır: 1' tümleme $\longrightarrow (0001100)_2$

  2' tümleme $\longrightarrow (0001100)_2 + (0000001)_2 = (0001101)_2$

  $(1101010)_2 + (0001101)_2 = (1110111)_2$ elde yok, sonuç negatiftir bu yüzden 2' ye tümleyeni alınır.

  $(1110111)_2$ sayısının 2' e tümleyeni alınır: 1' tümleme $\longrightarrow (0001000)_2$

  2' tümleme $\longrightarrow (0001000)_2 + (0000001)_2 = (0001001)_2$

  Sonuç= $\mathbf{-0001001_2}$