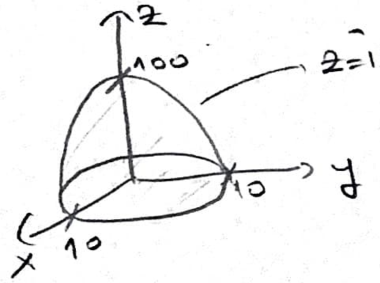
* İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri; Seviye Eğrileri

Tanım: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu düzlemdeki noktaların kümesi f nin seviye eğrisi olarak adlandırılır.

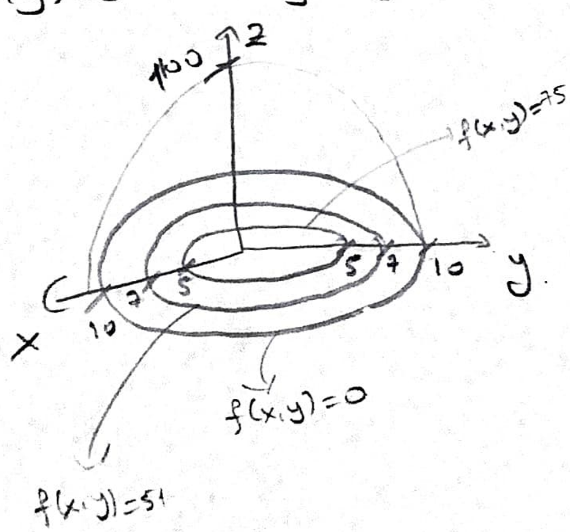
* f nin tanım kümesindeki (x,y) için uzaydaki bütün $(x,y,f(x,y))$ noktaları kümesi f nin grafiğidir. f nin grafiğine $z=f(x,y)$ yüzeyi denir.

* Ör: $f(x,y)=100-x^2-y^2$ grafiğini çiziniz.

$f(x,y)=z$ dersek. $z=100-x^2-y^2$ paraboloid



b.) düzlemdeki f nin tanım kümesinde $f(x,y)=0$, $f(x,y)=51$ ve $f(x,y)=75$ seviye eğrileini gösteriniz



$f(x,y)=100-x^2-y^2$ paraboloidi

* $f(x,y)=0$ seviye eğrise. xy düzleminde

$0=100-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=100$

$x^2+y^2=100$ $M(0,0)$ $r=10$ olan çember.

* $f(x,y)=51$ seviye eğrisi

$51=100-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=49$

$x^2+y^2=49$, $M(0,0)$ $r=7$ olan çember

* $f(x,y)=75$ seviye eğrisi

$x^2+y^2=25$ $M(0,0)$ $r=5$ olan çember.

68. $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ ve $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ gibi iki düzlemin ne zaman paralel ve ne zaman dik olduklarını nasıl söyleyebilirsiniz? Cevabınızın gerekçesini açıklayınız.

69. Kesişimleri $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$ doğrusu olan iki farklı düzlem bulunuz. Her düzlemin denklemini $Ax + By + Cz = D$ şeklinde yazınız.

70. Orijinden geçen ve M: $2x + 3y + z = 12$ düzlemini dik açıyla kesen bir düzlemi bulunuz. Düzleminizin M'ye dik olduğunu nasıl bilebilirsiniz?

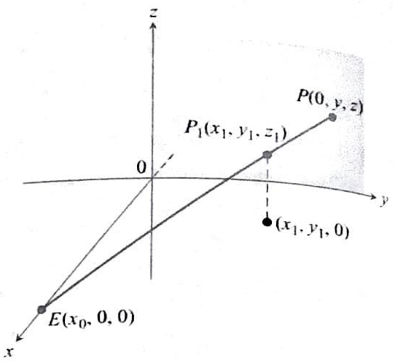
71. Sıfırdan farklı herhangi a, b ve c sayıları için, $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$'in grafiği bir düzlemdir. Hangi düzlemlerin bu şekilde bir denklemi vardır?

72. L_1 ve L_2'yi ayrık (kesişmeyen), paralel olmayan doğrular olarak varsayınız. Sıfırdan farklı bir vektörün hem L_1'e hem L_2'ye dik olması mümkün müdür? Cevabınızın gerekçesini açıklayınız.

73. Bilgisayar grafiklerinde perspektif Bilgisayar grafikleri ve perspektif çizimlerinde, uzayda gözle gördüğümüz cisimleri iki boyutlu bir düzlemdeki görüntüler olarak temsil etmemiz gerekir. Yanda gösterildiği gibi, gözün $E(x_0, 0, 0)$'da bulunduğunu ve bir $P_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasını yz-düzleminde bir nokta olarak temsil etmek istediğimizi varsayınız. Bunu E'den gelen bir ışınla P_1'in düzlem üzerine izdüşümünü düşürerek yaparız. P_1 noktası $P(0, y, z)$ noktası olarak görülecektir. Grafik tasarımcıları olarak sorunumuz E ve P_1 verildiğinde, y ve z'yi bulmaktır.

a. $\overrightarrow{EP}$ ve $\overrightarrow{EP_1}$ arasında geçerli olan bir vektör denklemi yazınız. Denklemi kullanarak y ve z'yi x_0, x_1, y_1 ve z_1 cinsinden ifade ediniz.

b. (a) şıkkında y ve z için bulunan formülleri $x_1 = 0$ ve $x_1 =$ x_0'daki davranışları araştırarak ve $x_0 \to \infty$ iken neler oldu- ğunu görerek kontrol ediniz. Neler görürsünüz.



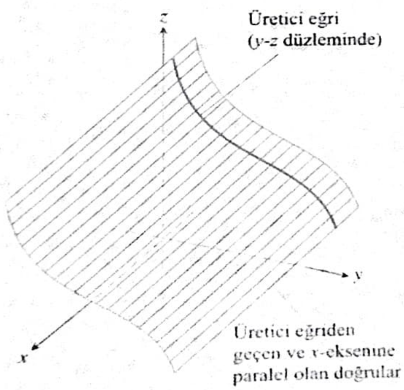
74. Bilgisayar grafiklerinde saklı doğrular Burada bilgisayar grafiklerinin başka bir tipik problemi verilmektedir. Gözünüz (4, 0, 0)'dadır. Köşeleri (1, 0, 1), (1, 1, 0) ve (−2, 2, 2)'de olan bir üçgen plakaya bakıyorsunuz. (1, 0, 0)'dan (0, 2, 2)'ye giden doğru parçası plakadan geçmektedir. Plaka, doğru parçasının hangi kısmını görmenizi engeller? (Bu problem, doğrularla düzlemlerin kesişmesini bulmakla ilgili bir alıştırmadır.)

12.6 Silindirler ve İkinci Dereceden (Kuadratik) Yüzeyler

Şu ana kadar yüzeylerin iki özel türünü inceledik: küreler ve düzlemler. Bu bölümde, araştırmamızı silindir ve kuadratik yüzeylerin türlerini kapsayacak şekilde genişleteceğiz. Kuadratik yüzeyler x, y, z cinsinden ikinci-derece denklemlerle tanımlanan yüzeylerdir. Küreler kuadratik yüzeylerdir, ancak Bölüm 14–16'da ele alacağımız ve aynı ölçüde ilginç olan başka yüzeyler de vardır.

Silindirler

Bir **silindir**, verilen sabit bir doğruya paralel olan ve verilen bir düzlem eğrisi boyunca hareket eden doğrunun ürettiği bir yüzeydir. Bu eğriye silindirin **üretici eğrisi** denir (Şekil 12.4). Silindirin, *dairesel silindir* anlamına geldiği katı geometrisinde, üretici eğriler çemberlerdir ancak şimdilik üretici eğri ayırımı yapmıyoruz. İlk örneğimizdeki silindir bir parabol tarafından üretilmiştir.

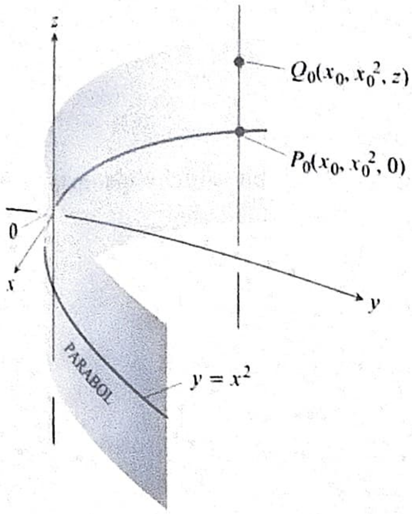


ŞEKİL 12.43 Bir silindir ve üretici eğri.

ÖRNEK 1 z–eksenine paralel olan ve $y = x^2$, $z = 0$ parabolünden geçen doğruların oluşturduğu silindirin denklemini bulunuz (Şekil 12.44).

Çözüm $P_0(x_0, x_0^2, 0)$ noktasının xy-düzlemindeki $y = x^2$ parabolünde bulunduğunu varsayalım. Bu durumda z'nin herhangi bir değeri için $Q_0(x_0, x_0^2, z)$ noktası silindir üzerinde bulunacaktır, çünkü P_0'dan geçen ve z-eksenine paralel olan $x = x_0$, $y = x_0^2$ doğrusu üzerindedir. Bunun tersine, y-koordinatı x-koordinatının karesi olan herhangi $Q_0(x_0, x_0^2, z)$ noktası silindirin üzerindedir, çünkü P_0'dan geçen ve z-eksenine paralel olan $x = x_0$, $y = x_0^2$ doğrusu üzerindedir (Şekil 12.44).

Dolayısıyla z'nin değerinden bağımsız olarak, yüzeydeki noktalar, koordinatları $y = x^2$ denklemini sağlayan noktalardır. Bu durum $y = x^2$'yi silindirin denklemi yapar. Bu nedenle silindire "$y = x^2$" silindiri denir.



ŞEKİL 12.44 Örnek 1'deki silindirin her noktasının koordinatı (x_0, x_0^2, z) biçimindedir. Buna "$y = x^2$" silindiri denir.

Örnek 1'in önerdiği gibi xy-düzlemindeki herhangi bir $f(x, y) = c$ eğrisi, denklemi yine $f(x, y) = c$ olan z-eksenine paralel bir silindiri tanımlar. Örneğin, $x^2 + y^2 = 1$ denklemi z-eksenine paralel doğrularla yapılmış ve xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 1$ çemberinden geçen bir silindiri tanımlar.

Benzer şekilde, xy-düzlemindeki herhangi bir $g(x, z) = c$ eğrisi, y-eksenine paralel ve uzay denklemi yine $g(x, y) = c$ olan bir silindiri tanımlar. Herhangi bir $h(y, z) = c$ denklemi x-eksenine paralel ve uzay denklemi yine $h(y, z) = c$ olan bir silindiri tanımlar. Ancak bir silindirin ekseninin herhangi bir eksene paralel olması gerekmez.

İkinci Dereceden Yüzeyler

Bir **kuadratik yüzey** x, y, z cinsinden ikinci-derece bir denklemin uzaydaki grafiğidir. A, B, C, D, E birer sabit olmak üzere

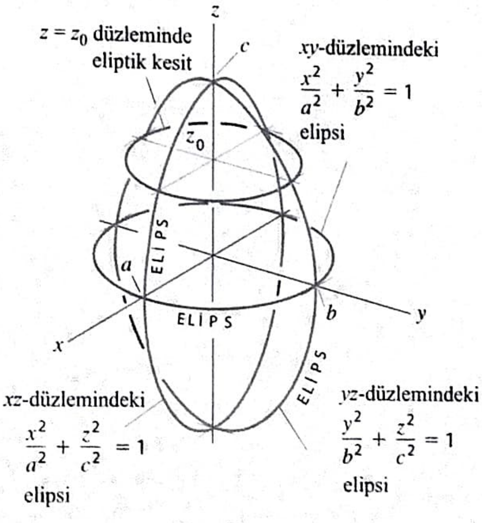
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dz = E$$

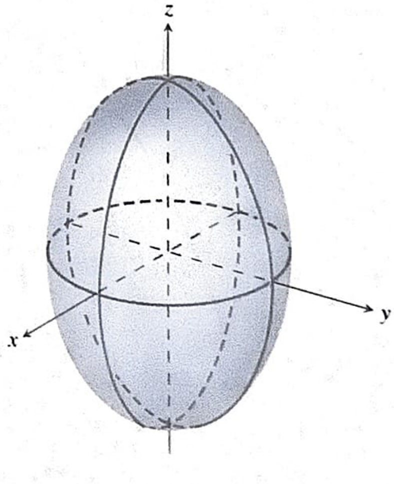
özel denkleme odaklanalım. Temel kuadratik yüzeyler **elipsoidler**, **paraboloidler**, **eliptik koniler** ve **hiperboloidlerdir**. Küreler elipsoidlerin özel durumlarıdır. Bir kuadratik yüzeyin nasıl çizildiğini gösteren birkaç örneğini göstereceğiz ve sonra temel türlerin grafiklerinin bir özet tablosunu vereceğiz.

ÖRNEK 2 Aşağıdaki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elipsoidi (Şekil 12.45), $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ koordinat eksenlerini keser. Bu elips $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$ eşitsizliği sağlayan kutunun içinde yer alır. Eğriyi tanımlayan denklemde tüm terimler kare olduğundan yüzey tüm koordinat düzlemlerine göre simetriktir.





ŞEKİL 12.45 Örnek 2'deki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

elipsoidi her üç koordinat düzlemine göre eliptik kesite sahiptir.

Üç koordinat düzleminin yüzeyi kestiği eğri elipstir. Örneğin,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad z = 0 \text{ iken.}$$

$|z_0| < c$ olmak üzere $z = z_0$ düzleminin kestiği yüzeyin eğrisi de bir elipstir;

$$\frac{x^2}{a^2(1 - (z_0/c)^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - (z_0/c)^2)} = 1.$$

Eğer a, b, c yarı-eksenlerden herhangi ikisi eşit ise, yüzey bir **dönel elipsoittir**. Her üçü de eşit ise, yüzey bir küredir.

ÖRNEK 3 Aşağıdaki **hiperbolik paraboloid**

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \qquad c > 0$$

$x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerine göre simetriktir (Şekil12.46). Bu düzlemdeki kesitleri şunlardır

$$x = 0 \text{ için, } z = \frac{c}{b^2}y^2 \text{ parabolü} \qquad (1)$$

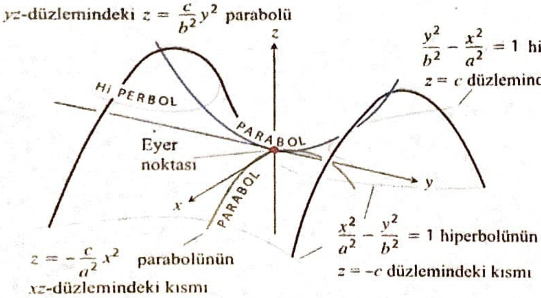
$$y = 0 \text{ için, } z = -\frac{c}{a^2}x^2 \text{ parabolü.} \qquad (2)$$

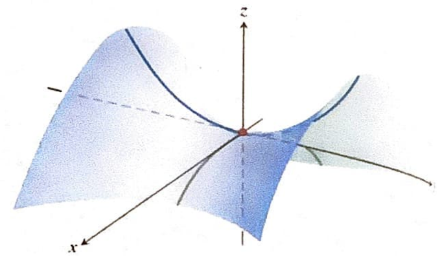
$x = 0$ düzleminde parabolün kolları orijinden yukarıya doğru açılır. $y = 0$ düzlemindeki parabolde ise aşağı doğru açılır.

Eğer yüzeyi bir $z = z_0 > 0$ düzlemi ile kesersek kesit bir hiperboldür,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c}$$

ve odak eksenleri y-eksenine paraleldir, tepe noktaları Denklem (1)'deki parabolün üzerindedir. Eğer z_0 negatif ise, odak eksenleri x-eksenine paraleldir ve tepe noktaları Denklem (2)'deki parabolün üzerindedir.



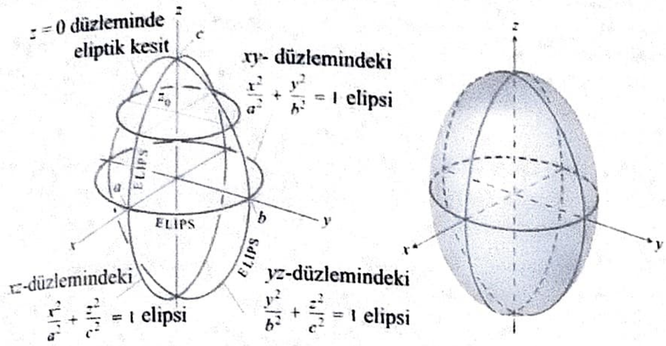


ŞEKİL 12.46 $(y^2/b^2) - (x^2/a^2) = z/c$, $c > 0$ hiperbolik paraboloidi. z-eksenine dik düzlemin üst kesiti ile xy-düzleminin alt kesiti hiperboldür. Diğer eksenlere dik olan düzlemlerle elde edilen kesitler paraboldür.

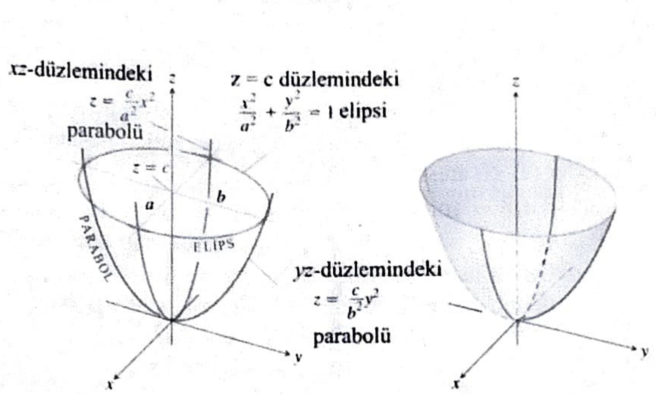
Orijin civarında, yüzey bir eyer veya dağ geçidi şeklindedir. Orijin, yz-düzlemi boyunca hareket eden bir kişiye bir minimum gibi görünür; xz-düzlemi boyunca hareket eden bir kişiye ise bir maksimum gibi görünür. Bu tip bir noktaya yüzeyin **eyer noktası** denir. Bölüm 14.7'de eyer noktaları ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Tablo 12.1 kuadratik yüzeylerin altı temel türünün grafiklerini göstermektedir. Her yüzey z-eksenine göre simetrik olarak ele alınmıştır, ancak diğer koordinat eksenlerine göre de ayarlanabilir (denklemde uygun değişiklik yapılarak).

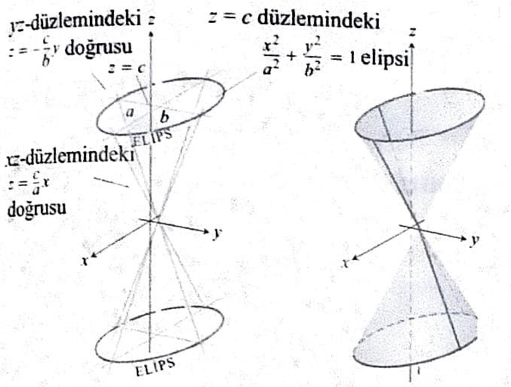
TABLO 12.1 Kuadratik Yüzeylerin Grafiği



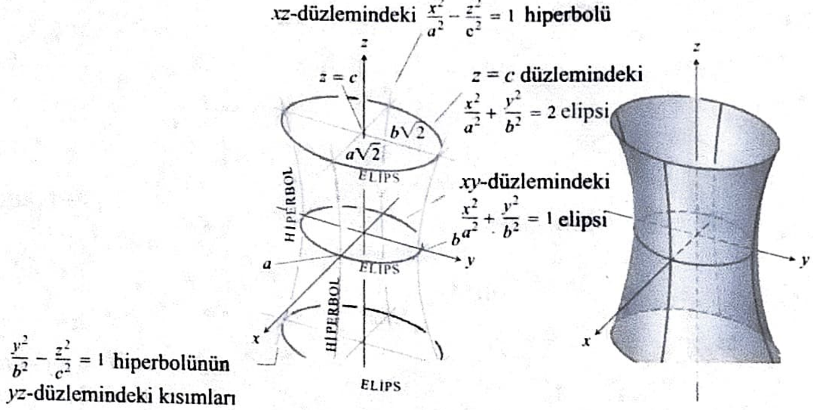
ELİPSOİD $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



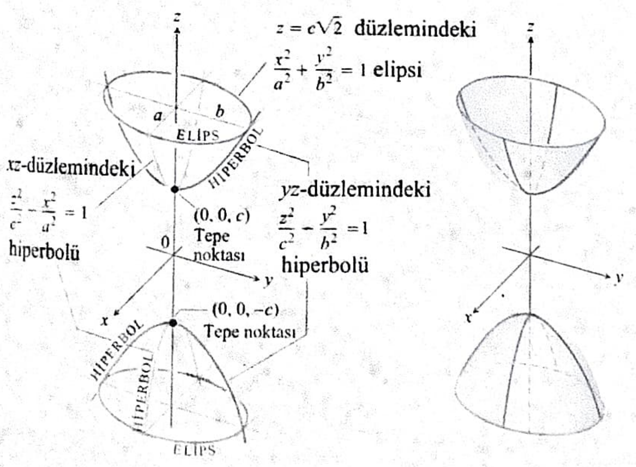
ELİPTİK PARABOLOİD $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$



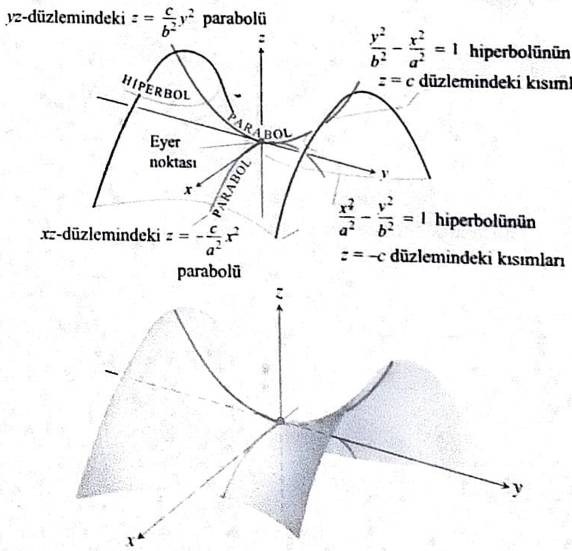
ELİPTİK KONİ $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$



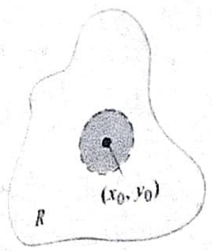
KANATLI HİPERBOLOİD $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



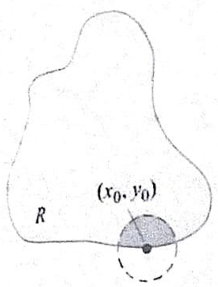
İKİ KANATLI HİPERBOLOİD $$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



HİPERBOLİK PARABOLOİD $$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c},\quad c>0$$



(a) İç Nokta

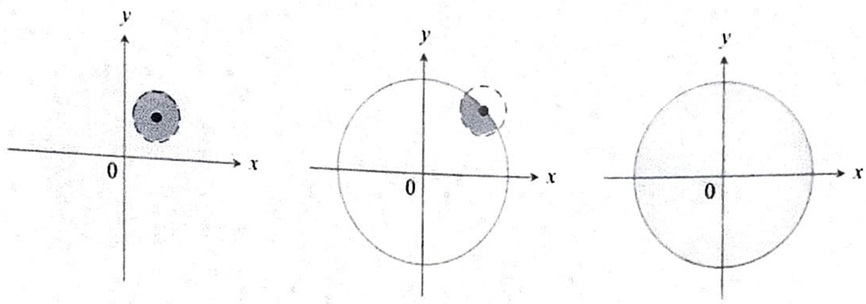


(b) Sınır Noktası

ŞEKİL 14.2 Düzlemdeki bir R bölgesinin iç noktaları ve sınır noktaları. Bir iç noktanın kaçınılmaz olarak R'nin bir noktası olması gerekir. R'nin bir sınır noktasının R'ye ait olması gerekmez.

TANIMLAR Eğer bir (x_0, y_0) noktası pozitif yarıçapı bütünüyle bir R bölgesi içinde bulunan bir dairenin merkezi ise, xy-düzlemindeki bir R bölgesindeki (kümesinde) (x_0, y_0) noktası R'nin bir **iç noktasıdır** (Şekil 14.2). Eğer merkezi (x_0, y_0)'da olan her daire R'nin içindeki noktaların yanı sıra R'nin dışındaki noktaları da içeriyorsa, (x_0, y_0) noktası R'nin bir **sınır noktasıdır**. (Sınır noktasının R'ye ait olması gerekmez.)

Bir bölgenin iç noktaları bir küme olarak bölgenin **içini** oluştururlar. Bölgenin sınır noktaları bölgenin **sınırını** oluşturur. Bir bölge sadece iç noktalarından oluşuyorsa **açıktır**. Bir bölge bütün sınır noktalarını içeriyorsa **kapalıdır** (Şekil 14.3).



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
Açık birim daire.
Her nokta bir iç noktadır.

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Birim dairenin sınırı.
(Birim çember)

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
Kapalı birim daire.
Bütün sınır noktalarını içerir.

ŞEKİL 14.3 Düzlemde birim dairenin iç noktaları ve sınır noktaları.

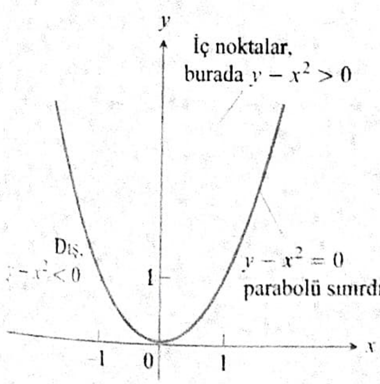
$[a, b)$ reel sayılarının bir yarı-açık aralığı gibi, düzlemdeki bazı bölgeler ne açık ne de kapalıdır. Şekil 14.3'teki açık daire ile başlarsanız ve ona bazı sınır noktalarını (tümü olmayacak şekilde) eklerseniz, ortaya çıkan küme ne açık ne de kapalı olur. Oradaki sınır noktaları kümeyi açık olmaktan korur. Kalan sınır noktalarının yokluğu kümeyi kapalı olmaktan korur.

TANIMLAR Düzlemdeki bir bölge sabit yarıçaplı bir dairenin içindeyse, o bölge **sınırlıdır**. Bir bölge sınırlandırılmamış ise **sınırsızdır**.

Düzlemde *sınırlı* kümelerin örnekleri arasında doğru parçaları, üçgenler, üçgenlerin içleri, dikdörtgenler, çemberler ve daireler bulunur. Düzlemde *sınırsız* kümelerin örnekleri doğruları, koordinat eksenlerini, sonsuz aralıklarda tanımlı fonksiyonların grafiklerini, dörtte bir bölgeleri, yarım-düzlemleri ve düzlemin kendisini kapsar.

ÖRNEK 2 $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini tanımlayınız.

Çözüm f sadece $y - x^2 \geq 0$ olduğu yerde tanımlandığı için, tanım kümesi Şekil 14.4'te gösterilmiş olan kapalı ve sınırsız bölgedir. Parabol $y = x^2$ tanım kümesinin sınırıdır. Parabolün üstündeki noktalar tanım kümesinin iç bölgesini oluşturur. ■

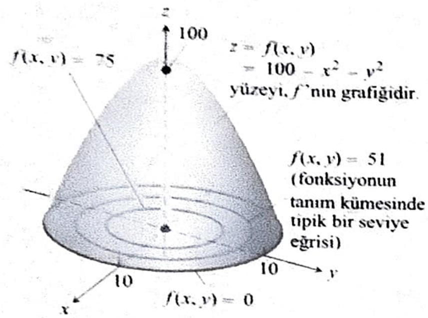


ŞEKİL 14.4 Örnek 2'deki $f(x, y)$'nin tanım kümesi parabolle sınırlanan gölgeli bölgeden oluşmaktadır.

İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri, Seviye Eğrileri ve Konturları

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun değerlerini resimlemenin iki standart yolu vardır. Biri f'nin sabit bir değerinin bulunduğu tanım kümesindeki eğrileri çizip, isimlendirmektir. Diğeri ise uzayda $z = f(x, y)$ yüzeyini çizmektir.

TANIMLAR Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir $f(x, y) = c$ sabit değerine sahip olduğu düzlemdeki noktaların kümesi, f'nin **seviye eğrisi** olarak adlandırılır. f'nin tanım kümesindeki (x, y) için uzaydaki bütün $(x, y, f(x, y))$ noktaları kümesi f'nin **grafiğidir**. f'nin grafiğine $z = f(x, y)$ **yüzeyi** de denir.



ŞEKİL 14.5 Örnek 3'deki $f(x, y)$ fonksiyonunun grafiği ve seçilmiş seviye eğrileri.

ÖRNEK 3 $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$'nin grafiğini çiziniz ve düzlemdeki f'nin tanım kümesinde $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 51$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrilerini gösteriniz.

Çözüm f'nin tanım kümesi tüm xy-düzlemidir ve f'nin görüntü kümesi 100'den küçük veya eşit reel sayıların kümesidir. Grafik $z = 100 - x^2 - y^2$ paraboloididir ve pozitif kısım Şekil 14.5'de gösterilmiştir.

$f(x, y) = 0$ seviye eğrisi, xy-düzleminde

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{veya} \qquad x^2 + y^2 = 100$$

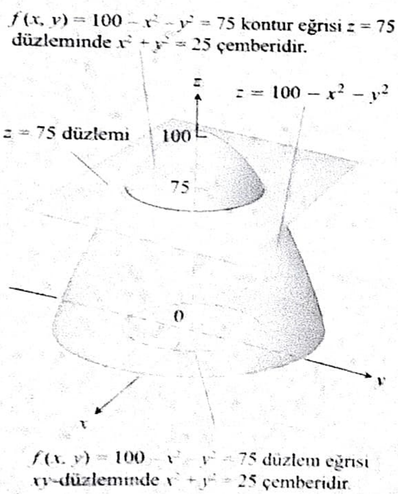
olduğu noktalar kümesidir, merkezi orijinde ve yarıçapı 10 olan bir çemberdir. Benzer şekilde, $f(x, y) = 51$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrileri aşağıdaki çemberlerdir (Şekil 14.5);

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 51 \qquad \text{veya} \qquad x^2 + y^2 = 49$$

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75 \qquad \text{veya} \qquad x^2 + y^2 = 25.$$

$f(x, y) = 100$ seviye eğrisi sadece orijini içerir. (Hala bir seviye eğrisidir).

Eğer $x^2 + y^2 > 100$ ise, $f(x, y)$ değeri negatiftir. Örneğin, $x^2 + y^2 = 144$ çemberini ele alalım, burada çember merkezi orijindedir ve yarıçap 12'dir. $f(x, y) = -44$ sabit değeri verir ve f'nin bir seviye eğrisidir. ∎



ŞEKİL 14.6 xy-düzlemine paralel bir $z = c$ düzlemiyle kesişen $z = f(x, y)$ düzlemi bir kontur eğrisi üretir.

Uzayda $z = c$ düzleminin bir $z = f(x, y)$ yüzeyini kestiği eğri, $f(x, y) = c$ fonksiyon değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna $f(x, y) = c$ **kontur eğrisi** denir; bu tanımın amacı f'nin tanım kümesindeki $f(x, y) = c$ seviye eğrisinden ayırt etmektir. Şekil 14.6, $z = 100 - x^2 - y^2$ yüzeyi üzerinde $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ fonksiyonuyla tanımlanan $f(x, y) = 75$ kontur eğrisini göstermektedir. Kontur eğrisi $x^2 + y^2 = 25$ çemberinin hemen üzerinde bulunmaktadır; bu çember fonksiyonun tanım kümesindeki $f(x, y) = 75$ seviye eğrisidir.

Ancak herkes bu ayrımı yapmaz ve iki eğriyi de aynı isimle adlandırmak isteyebilir ve aklınızda hangi bağlamda yer aldığını bildiğinize güvenebilirsiniz. Örneğin çoğu haritalarda, sabit yükseklikleri (deniz seviyesinden yükseklik) temsil eden eğrilere seviye eğrileri değil, konturlar denir (Şekil 14.7).

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

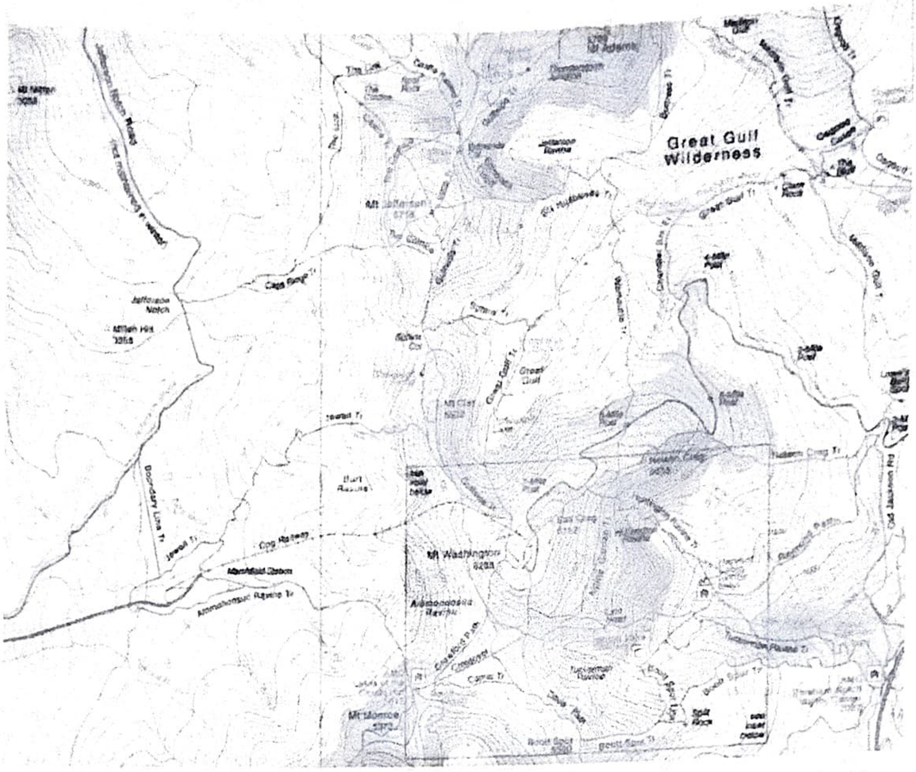
Düzlemde, iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir eğri oluşturur. Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir yüzey oluşturur.

TANIM Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu (x, y, z) noktaları kümesi, f'nin **seviye yüzeyi** olarak tanımlanır.

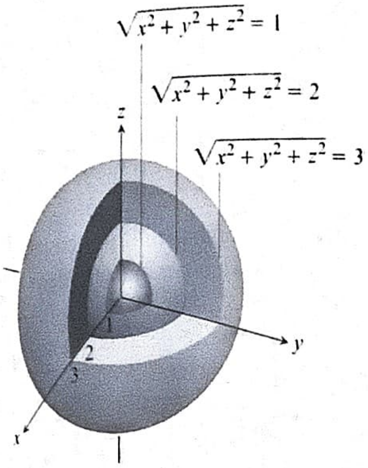
Üç değişkenli fonksiyonların grafiği dört boyutlu uzayda bulunan $(x, y, z, f(x, y, z))$ noktalarını içerdiği için onları üç boyutlu referans çerçevemizde etkin olarak çizemeyiz. Ancak üç boyutlu seviye düzeylerine bakarak fonksiyonun nasıl davrandığını anlayabiliriz.

ÖRNEK 4 Aşağıdaki fonksiyonun seviye yüzeylerini tanımlayınız:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



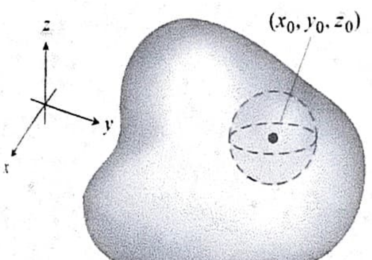
ŞEKİL 14.7 New Hampshire'daki Mt. Washington dağı üzerindeki konturlar (Appalachian Dağcılık Kulübü izniyle yeniden üretildi).



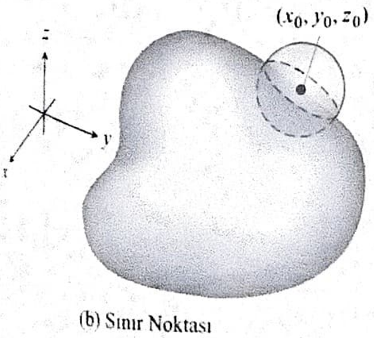
ŞEKİL 14.8 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$'nin seviye yüzeyleri eşmerkezli kürelerdir (Örnek 4).

Çözüm f'nin değeri orijinden (x, y, z) noktasına olan uzaklıktır. Her seviye yüzeyi $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$, $c > 0$, merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir küredir. Şekil 14.8 bu kürelerden üçünün görünüşünü vermektedir. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ seviye yüzeyi sadece orijinden oluşmaktadır.

Burada fonksiyonun grafiğini çizmiyoruz; fonksiyonun tanım kümesindeki seviye yüzeylerine bakıyoruz. Seviye yüzeyleri, tanım kümesi içinde hareket ettiğimizde fonksiyonun değerlerinin nasıl değiştiğini gösterir. Merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir kürenin üzerinde kalırsak fonksiyon c ile adlandırılan bir sabit bir değer alır. Eğer bir küredeki bir noktadan diğer bir küredeki bir noktaya hareket edersek fonksiyonun değeri değişir. Orijinden uzaklaştığımızda artar, orijine yaklaştığımızda azalır. Değerlerin değişim şekli takip edeceğimiz yöne bağlıdır. Yöndeki değişime bağlılık önemlidir. Bu konuya Bölüm 14.5'te döneceğiz. ■



(a) İç Nokta



(b) Sınır Noktası

ŞEKİL 14.9 Uzaydaki bir bölgenin sınır ve iç noktaları. Düzlemdeki bölgelerle birlikte, bir sınır noktasının R uzay bölgesine ait olmasına gerek yoktur.

Uzaydaki bölgeler için iç, sınır, açık, kapalı, sınırlı, sınırsız tanımları düzlemdeki bölge tanımlarının benzerdir. Fazladan boyut için daireler yerine pozitif yarıçaplı katı toplar kullanırız.

TANIMLAR Uzaydaki bir R bölgesindeki bir (x_0, y_0, z_0) noktası, Şekil 14.9a'daki gibi R'de bütünüyle bulunan bir katı topun merkezinde ise R'nin bir **iç noktasıdır**. Eğer merkezi (x_0, y_0, z_0)'da bulunan katı top R'nin içinde olduğu gibi R'nin dışında yer alan noktaları da içeriyorsa, bu (x_0, y_0, z_0) noktası R'nin bir **sınır noktasıdır** (Şekil 14.9b). R'nin **içi**, R'nin iç noktalarının kümesidir. R'nin **sınırı**, R'nin sınır noktalarının kümesidir.

Eğer bir bölge tamamen iç noktaları içeriyorsa bu bölge **açıktır**. Eğer bütün sınır noktalarını içeriyorsa bu bölge kapalıdır.

Uzaydaki *açık* kümelerin örnekleri bir kürenin içini, açık yarı-uzayı $z > 0$, x, y, z'nin hepsinin pozitif olduğu birinci sekizde bir bölgeyi ve uzayın kendisini kapsar. Uzaydaki *kapalı* kümelerin örnekleri çizgileri, düzlemleri ve kapalı yarı-uzayı $z \geq 0$ kapsar. Sınırı-