Alterne Seriler

Serinin terimlerinin işareti bir pozitif bir negatif olan seriye alterne seri denir.

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\dots$ (Alterne harmonik seri)

$-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{(-1)^n 4}{2^n}+\dots$ (Alterne seridir ayrıca geometrik seridir)

$1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n+1}n+\dots$ (Alterne seri)

Alterne Seri Testi

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ alterne serisi için

i.) $a_n>0$ ($\forall n=1,2,3,\dots$ için)

ii.) $a_{n+1}\leq a_n$ ($\forall n=1,2,3,\dots$ için)

iii.) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

şartları sağlanıyor ise alterne seri yakınsaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ } Alterne harmonik seri

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

Alterne seri testini uygulayalım.

i.) $a_n = \frac{1}{n} > 0$ $(\forall n = 1,2,3,\ldots$ için$)$

ii.) $a_{n+1} < a_n$ olmalı

$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $a_n = \frac{1}{n}$. $\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ dir $(\forall n = 1,2,3,\ldots$ için$)$

iii.) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

* i.), ii) ve iii.) koşulları sağlandığı için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ alterne harmonik serisi yakınsaktır.

Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

* **Mutlak Yakınsaklık:** Eğer mutlak değerli terimlerden oluşan $\sum |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisi de mutlak yakınsaktır. (mutlak yakınsar denir)

* Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır.

NOT: Terimleri hem negatif hem pozitif olan serilerde terimlerin mutlak değerini aldığımızda pozitif terimli serilerdeki testleri uygulayabiliriz.

ör: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$ serisinin karakterini bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$ serisi alterne seridir. Bu serinin Mutlak değerler serisi $\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{2^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ dir

Yani $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$ serisinin mutlak değerler serisi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ dir

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi geometrik seridir ve $|r| = \frac{1}{2} < 1$ dir dolayısıyla yakınsak bir seridir. Dolayısıyla $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$ serisi mutlak yakınsaktır.

her mutlak yakınsak seri de yakınsaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin mutlak değerler serisi

$* \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+1} \right| = * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ dir

$* \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{\sum a_n}$ serisi pozitif terimli bir seridir. Bu serinin yakınsaklığını araştıralım

limit karşılaştırma testinden: $\sum b_n = \underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}_{\substack{p\text{-serisi} \\ p=2>1 \text{ yakınsak seri}}}$ serisini alalım

limit karşılaştırma testi

$\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 > 0$ olduğu için

limit karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ seriside yakınsaktır.

$* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ serisini yakınsak bulduk. dolayısıyla

$* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ serisi yakınsak olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2}$

serisi mutlak yakınsaktır.

*Ayrıca her mutlak yakınsak seri yakınsaktır.

Şartlı Yakınsaklık

Yakınsak olup ta mutlak yakınsak olmayan serilere şartlı yakınsak seri denir.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ alterne harmonik serisinin

karakterini inceleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisinin mutlak değerler serisi

$* \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisidir (ıraksak bir seridir)

O halde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisinin mutlak değerle serisi ıraksak bir seridir ve mutlak yakınsak değildir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisi şartlı yakınsak olabilir Alterne testi uygulayalım. Alterne testi uygu-lanırsa (daha önceden gösterildi)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisi yakınsaktır.

$* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisi yakınsak fakat mutlak yakınsak olmadığı için seri şartlı yakınsaktır.

Ör: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots$$

$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ serisi altene seridir

Mutlak değerler serisi $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ dir

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisinin karakterine inceleyim (Pozitif terimli seri)

karşılaştırma testinden
$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$ olduğu için

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak olduğu için $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisi de ıraksaktır. O halde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$ serisi mutlak yakınsak değildir. Acaba şartlı yakınsak mı?

Altene testi : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisi için

i.) $a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$ dir. ✓

ii) $\ln(n+1) > \ln n \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}$ $(a_{n+1} < a_n)$ ✓

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ ✓

3 koşul sağlandığı için $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n}$ serisi yakınsaktır. Fakat mutlak yakınsak olmadığı için şartlı yakınsaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.\cos(n\pi)}{2^n}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.\cos(n\pi)}{2^n} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . n}{2^n} \text{ dir}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.\cos(n\pi)}{2^n}$ serisi alterne seridir.

mutlak değerler serisi $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n.\cos(n\pi)}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n.(-1)^n}{2^n} \right|$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \text{ dir}$$

oran testinden

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{a_n}$ serisinin karakterini inceleyelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\cancel{2^{n+1}}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ olduğu için seri yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . n}{2^n} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.\cos n\pi}{2^n} \right)$

serisi de mutlak yakınsaktır.

(NOT: Her mutlak yakınsak seri yakınsaktır)

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{3^2} + \cdots$$ negatif ve pozitif terimler içerir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ serisi pozitif terimli seri değildir

Mutlak değerler serisi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ dir.

mutlak değerler serisinin karakterini bulalım.

$0 \leq |\sin n| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ dir

karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak

olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ serisi de yakınsaktır.

O zaman $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ serisi mutlak yakınsaktır.

Ayrıca her mutlak yakınsak seri yakınsak bir seridir.

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ yakınsak

Kuvvet Serileri

$x=0$ civarındaki bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots + c_n x^n + \dots$$

şeklindeki bir seri olarak tanımlanır.

$x=a$ civarındaki bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a)^1 + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots$$

şeklindeki bir seri olarak tanımlanır.

Burada a serinin merkezi ve $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ sabitleri de serinin katsayıları olarak ifade edilebilir.

* Kuvvet serilerinin terimleri bir x değişkeninin fonksiyonu olduğundan x'in her bir değeri için yakınsayabilir veya yakınsamayabilir. Serinin yakınsak olduğu x değerleri için toplam x'e bağlı bir fonksiyon tanımlar.

Ör: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ kuvvet serisi hangi x değerleri

için yakınsar?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

serisi hem kuvvet serisidir hem de geometrik

seridir. Dolayısıyla

$a=1$, $r=x$ dir eğer $|r| = |x| < 1 \Rightarrow$ seri yakınsaktır

ve serinin toplamı $= \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$ dir

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , \quad |x|<1 \text{ dir}$$

Bir Kuvvet Serisinin Yakınsaklık Yarıçapı

$\sum c_n (x-a)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklığı aşağıdaki 3 durumdan biriyle açıklanabilir

1. Seri bütün x reel sayı değerleri için yakınsar $(R=\infty)$
2. Seri sadece $x=a$'da yakınsar. $(R=0)$
3. Seri, $|x-a|<R$ şartını sağlayan x değerlerinde mutlak yakınsar (yakınsar), $|x-a|>R$ şartını sağlayan her x değerinde ıraksar. Seri $x=a-R$ ve $x=a+R$ uç noktalarında yakınsayabilir veya ıraksayabilir

* Burada 3. durumda R sayısına kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı denir. 1. durumda yakınsaklık yarıçapı $R=\infty$ dur. 2. durumda yakınsaklık yarıçapı $R=0$ dır.

Bir Kuvvet Serisinin Yakınsaklığını Test Etmek

1- Oran Testi (Genelde Oran Testi) veya kök testi kullanılarak serinin mutlak yakınsadığı bir aralık bulunuz. Normal şartlar altında bu bir açık aralıktır.
$|x-a|<R$ veya $a-R<x<a+R$ dir.

2- Eğer mutlak yakınsaklık aralığı sonlu ise uç noktalarda yakınsaklık veya ıraksaklık incelemesi yapınız.

3- Yakınsaklık aralığı dışındaki noktalarda seri ıraksaktır.

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$ serisi

hangi x değerleri için yakınsar?

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ serisi pozitif terimli olmadığından

mutlak değerler serisi * $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ dir.

mutlak değerler serimiz: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{|x|^n}{n}}_{a_n}$ bu seri için oran testi uygularsak

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{n}{n+1} = |x| < 1$ için yakınsaktır. oran testine göre

* $\sum \frac{|x|^n}{n}$ serisi yakınsak olduğu için $\sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ serisi mutlak yakınsaktır.

$|x| < 1$ için seri mutlak yakınsaktır. Yani $\boxed{-1 < x < 1}$ mutlak yakınsak

Uç noktalar: $x = 1$ ve $x = -1$ dir

$x = 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ serisi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ dir

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ (Alterne harmonik seridir yakınsaktır)

$x = -1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ serisi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n}$ dir

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = -\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\right)}_{\text{Harmonik seri}}$ dir

Yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dir (Harmonik seridir ıraksaktır)

Serimiz $\boxed{-1 < x \leq 1}$ aralığında yakınsaktır. Diğer bölgelerde ıraksaktır

Ör: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hangi x değerleri için yakınsar?

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ seri pozitif terimli değil. Mutlak değerler serisini inceleyelim.

$* \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{|x|^n}{n!}}_{a_n}$ (Mutlak değerler serisi için oran testini uygulayalım)

Oran Testi: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{|x|^{n+1}}^{|x|}}{\underset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{|x|^n}}$

$= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ olduğu için bütün x'ler için yakınsaktır. (oran testine göre)

$* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ mutlak değerler serisi bütün x'ler için yakınsadığı için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisi bütün x'ler için mutlak yakınsar.

Ör: $\sum_{n=0}^{\infty} n!.x^n$ hangi x'ler için yakınsar?

$\sum_{n=0}^{\infty} n!.x^n$ seri pozitif terimli değil. Mutlak değerler serisini inceleyelim $* \sum_{n=0}^{\infty} |n!\, x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n!.|x|^n}_{a_n}$ dır $*$ serisi için oran testi uygulanırsa.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}^{n+1} . \cancel{|x|^{n+1}}^{|x|}}{\cancel{n!} . \cancel{|x|^n}} = \lim_{n\to\infty} (n+1).|x| = \infty$ $\left.\right\}$ x=0 hariç bütün x'ler için ıraksak

$\sum_{n=0}^{\infty} n!.x^n$ serisi x=0 hariç bütün x değerleri için ıraksar. Seri sadece merkezinde yani x=0 da yakınsar.

Ör: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1).3^n}$ Serisinin yakınsaklık merkezini, yakınsaklık aralığını, mutlak veya şartlı yakınsak olduğu * değerlerini ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Mutlak değerler serisi : * $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{|2x+5|^n}{(n^2+1).3^n}}_{a_n}$ dir. (Oran testi Bu seri için)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|2x+5|^{n+1}}{((n+1)^2+1)\, 3^{n+1}} \cdot \frac{(n^2+1).3^n}{|2x+5|^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|2x+5|}{3} \cdot \underbrace{\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}}_{1} = \frac{|2x+5|}{3} < 1 \text{ için yakınsak}$$

* serisi $\frac{|2x+5|}{3} < 1$ için yakınsak, Dolayısıyla

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1).3^n}$ serisi $\frac{|2x+5|}{3} < 1$ için mutlak yakınsaktır.

$\left|\frac{2x+5}{3}\right| < 1 \Rightarrow \quad |2x+5| < 3 \Rightarrow 2.\left|x+\frac{5}{2}\right| < 3 \Rightarrow \left|x+\frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2}$

$\left|x+\frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2} \Rightarrow$ ($|x-a| < R$ formatında a, serinin yakınsaklık merkezi R, serinin yakınsaklık yarıçapı)

Buna göre : serinin $a = -\frac{5}{2}$ yakınsaklık merkezi $R = \frac{3}{2}$ yakınsaklık yarıçapı

$\left|x+\frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x+\frac{5}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{-4 < x < -1}$ mutlak yakınsaktır.

uç noktalar: * $x = -1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n^2+1).3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ olur.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisi $\underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}_{\substack{p=2>1 \\ \text{seri yakınsak}}}$ seri ile karşılaştırma testinden $\frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$ olduğundan $\sum \frac{1}{1+n^2}$ serisi yakınsaktır.

* $x = -4$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n^2+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ dir. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ serisi yakınsak olduğu için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ serisi mutlak yakınsaktır.

Sonuç olarak : $-4 \le x \le 1$ aralığında yakınsaktır, $[-4,1]$ diğer x'ler için ıraksaktır. Şartlı yakınsaklık yok.

Kuvvet Serilerinde İşlemler

Yakınsama aralıklarının kesişiminde iki kuvvet serisi tıpkı sabit terimli serilerde olduğu gibi terim terim eklenip çıkarılabilir.

Kuvvet Serileri İçin Seri Çarpım Teoremi

Eğer $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x|<R$ aralığında mutlak yakınsak iki seri ise ve.

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

olarak verilirse o zaman $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ serisi $|x|<R$ aralığında $A(x).B(x)$'e yakınsar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

NOT: İki kuvvet serisinin çarpımından oluşan serinin c_n genel katsayısını bulmak çok zor olabilir ve bazı durumlarda genel bir formülde bulunmayabilir. İlk bir kaç terim hesaplanması genelde yeterlidir.

Ör: $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = (1+x+x^2+x^3+\dots).\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\right)$$

$$= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots\right) + \left(x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+\dots\right) + \left(x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\dots\right)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \dots$$

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerlerini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$ serisi pozitif değerli değil. Mutlak değerler serisini bulalım. * $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} \right| = *\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{|x-1|^n}{n}}_{a_n}$ dır.

* serisi için oran testini uygulayalım.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x-1|^n} = \lim_{n\to\infty} |x-1| \cdot \frac{n}{n+1} = |x-1| < 1$ için * serisi yakınsak

* serisi $|x-1| < 1$ için yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$ serisi $|x-1| < 1$ için mutlak yakınsaktır. Yakınsaklık yarıçapı $R = 1$ dir.

$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow \boxed{0 < x < 2}$ mutlak yak.

Uç noktalar: $x = 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n}$ serimiz

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots = -\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right)}_{\text{harmonik seri}}$
ıraksaktır.

$x = 2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ (Alterne harmonik seridir) yakınsaktır (şartlı yakınsaktır)

Buradan serinin yakınsaklık aralığı $0 < x \leq 2$ $((0, 2])$

Şartlı yakınsaklık: $x = 2$ de şartlı yakınsaktır.

$\mathbb{R} - (0, 2]$ de seri ıraksaktır.

önemli

** ör. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ kuvvet serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise serinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \Big\}$$ geometrik seri

$a=1$, $r=x$ ve $|r|=|x|<1$ için yakınsar

$|x|<1 \Rightarrow -1<x<1$ aralığındaki x değerleri için yakınsar ve kuvvet serisinin toplamı $= \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$ dir.

Yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\substack{\Uparrow \\ \text{serinin yakınsadığı değer}}}, \quad \underbrace{|x|<1}_{\substack{\Uparrow \\ \text{serinin yakınsaklık aralığı}}} \text{ dir.}$$

($\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisi $|x|<1$ aralığında $\frac{1}{1-x}$ fonksiyonuna yakınsar. yani $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$ dir)

Teorem: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x|<R$ için mutlak yakınsak ise o zaman her sürekli f fonksiyonu için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ serisi de $|f(x)|<R$ için yakınsaktır.

Ör: $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n . x^{2n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsadığı fonksiyonu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisi yardımıyla bulunuz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1 \qquad (x \text{ yerine } 4x^2 \text{ yazalım}) \quad x \to 4x^2$$

$$\frac{1}{1-4x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n, \quad |4x^2|<1$$

$$4|x^2|<1 \Rightarrow -\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\frac{1}{1-4x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}, \quad -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \quad \left(|x|<\frac{1}{2}\right)\right\} \Rightarrow$$

($\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$ serisi $|x|<\frac{1}{2}$ aralığında yakınsaktır ve $\frac{1}{1-4x^2}$ değerine yakınsar.)

Teorem: Eğer $\sum c_n(x-a)^n$ serisi $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahipse $a-R<x<a+R$ aralığında aşağıdaki fonksiyonu tanımlar

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n.(x-a)^n$$

Bu fonksiyonun aralığın iç noktalarında her mertebeden türevi vardır ve bu türevi bulmak için serinin tek tek türevini buluruz

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n.c_n.(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$

ve böyle devam eder. Bu yeni elde edilmiş türev serilerinin her biri $a-R<x<a+R$ aralığının her noktasında yakınsaktır.

Terim Terime İntegrasyon

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisinin $a-R<x<a+R$ $(R>0)$ için

yakınsak olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+C$$ serisi $a-R<x<a+R$.

için yakınsaktır

Ör: $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$ serisinin 1. ve 2. mertebeden türevinden elde edilen seriler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1$$

yada

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$$

Türev serisi (1. mertebeden): $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1}$, $|x|<1$

yada

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+n.x^{n-1}+\cdots, \quad |x|<1 \; (-1<x<1)$$

Türev serisi (2. mertebeden): $\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)x^{n-2}$, $|x|<1$

yada

$$\frac{2}{(1-x)^3}=2+6x+\cdots+n.(n-1)x^{n-2}+\cdots, \quad |x|<1 \; -1<x<1$$

şeklinde elde edilir

ör: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $-1<x<1$ ise serinin yakınsadığı fonksiyonu bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad |x|<1$$

Türev alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cancel{(2n+1)} x^{2n}}{\cancel{2n+1}} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n \frac{(2n+1)}{2n+1} x^{2n} + \dots, \quad |x|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n . x^{2n}}_{(-x^2)^n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \quad |x|<1$$

$\left(* \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \right.$ $|x|<1$ olduğunu biliyoruz.

x yerine $-x^2$ yazarsak. * serisinde.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \quad |-x^2|<1 \text{ elde ederiz}$$

$$|x^2|<1 \Rightarrow \boxed{-1<x<1}$$

integral alırsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \underbrace{\int \frac{1}{1+x^2} . dx}_{\arctan x + C}, \quad |x|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x + C, \quad |x|<$$

$x=0$ için $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$.dır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x, \quad |x|<1$$

$\Downarrow$

yakınsadığı fonksiyon

Soru: Aşağıdaki fonksiyonların kuvvet serisi temsillerini ve geçerli oldukları aralıkları bulunuz.

i.) $\frac{1}{(1-x)^2}$ ii.) $\frac{1}{(1-x)^3}$ iii.) $\ln(1+x)$

i.) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$ idi türev alırsak.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1}$$

ii.) Bir kez daha türev alırsak.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x|<1.$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^3}, \quad |x|<1.$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^3}, \quad |x|<1}$$

iii.) $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$ serisinde $x=-t$ dönüşümü yapalım

$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\dots+(-1)^n t^n\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$, $|-t|<1$, $|t|<1$ dir.

integral alırsak $\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$, $|t|<1$ $(-1<t<1)$

$t=0$ için $\ln(1) = C \Rightarrow C=0$ dır. Yani $\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$, $-1<t<1$

Ör: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$ serisini kullanarak.

i.) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ serisinin toplamını bulunuz

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1$$ (x ile çarpalım)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1$$ (Türev alalım)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1$$ (x ile çarp)

$$* \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n} = \frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^2}, \quad -1<x<1$$

ii.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz

* serisinde $x=\frac{1}{5}$ alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} = \frac{\frac{1}{5} \cdot (1+\frac{1}{5})}{(1-\frac{1}{5})^2} = \frac{\frac{1}{\cancel{5}} \cdot \frac{6}{\cancel{5}}}{\frac{16}{\cancel{25}}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} = \frac{3}{8}$$