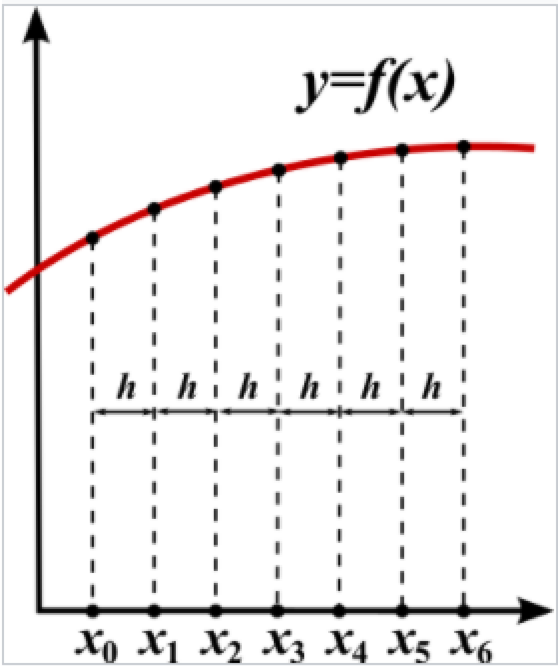


SONLU FARKLAR

- Matematik ve fizikteki problemlerin çoğu sürekli ve çok değişkenlidir

- Fonksiyonlar bir formül şeklinde verilebilir ve değişkenlerin belli değerleri için fonksiyonun değeri hızlıca bulunabilir

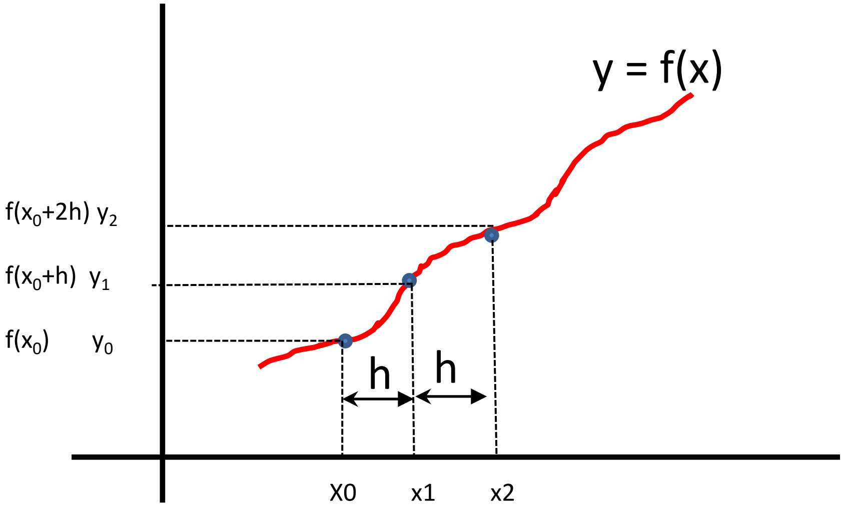
- Bazen bir fonksiyon sadece bir takım ayrık noktalarda belirlenmiş olabilir

- Bu taktirde sonlu farklar matematiği kullanılarak bilinmeyen noktada fonksiyonun değeri için tahmin yapılabilir

Sonlu Farkla ile ilgili Operatörler

Birbirini takip eden iki ayrık nokta arasındaki farka fark aralığı denir ve h ile gösterilir.

$h = x_{k+1} - x_k$ olarak yazılır



Bir f(x) fonksiyonu ve adım uzunluğu **h** kullanılarak **x** noktası için sonlu fark operatörleri

a) Δ ileri fark operatörü

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ şeklinde hesaplanır

b) ∇ geri fark operatörü

$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ şeklinde hesaplanır

c) δ Merkezi fark operatörü

$\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$ olarak hesaplanır

d) μ Ortalama operatörü

$\mu f(x) = \frac{1}{2} [f(x+h/2) + f(x-h/2)]$ olarak hesaplanır

e) E Kaydırma operatörü

$\mathbf{E}\ f(x) = f(x+h)$ şeklindedir.
Bu operatör f(x) fonksiyonunu kendinden sonra gelen ilk değere yükseltir.

$\mathbf{E}\ f(x) = f(x+h) = f(x) + \Delta\ f(x)$
$\mathbf{E}\ f(x) = f(x)\ (1 + \Delta\ )$

$\mathbf{E} = (1 + \Delta\ )$ olarak bulunur

Bir f(x) fonksiyonuna iki defa kaydırma operatörü uygulanırsa;

$\mathbf{E}^2\ f(x) = \mathbf{E}\ (\ \mathbf{E}\ f(x)) = \mathbf{E}\ f(x+h)$
$= f(x + 2h)$ olacaktır

Genelleştirirsek $\mathbf{E}^n f(x) = f(x+nh)$

İki veya daha yüksek dereceden İleri, geri ve Merkezi Farklar ile aralarındaki ilişkiler;

Eşit aralıklarla verilen ayrık noktalar;

$x_1 = x_0 + h$
$x_2 = x_0 + 2h$
$x_3 = x_0 + 3h$
....
$x_n = x_0 + nh$ ile gösterilerek;

f(x) fonksiyonunun bu noktalardaki değerlerine de;

$f(x_0) = f_0$
$f(x_1) = f_1$
……
$f(x_n) = f_n$ dersek,

herhangi bir xi noktasındaki

1.Derece ileri fark;

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ $\quad i=0,1,\dots,n$ şeklinde yazılır

2.Derece ileri fark;

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)$$
$$= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$\Delta f_{i+1} = f_{i+2} - f_{i+1}$$
$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i$$

$$\boldsymbol{\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}$$

3.Derece ileri fark;

$$\Delta^3 f_i = \Delta(\Delta(\Delta f_i))$$

?

$$\Delta^3 f_i = \Delta(\Delta (f_{i+1} - f_i)$$
$$= \Delta(\Delta f_{i+1} - \Delta f_i)$$

$$= \Delta (f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i)$$
$$= \Delta (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)$$

$$= \Delta f_{i+2} - 2 \Delta f_{i+1} + \Delta f_i$$
$$= f_{i+3} - f_{i+2} - 2 (f_{i+2} - f_{i+1}) + f_{i+1} - f_i$$
$$= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

1.Derece geri fark;

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ $\quad$ i=0,1,…,n şeklinde yazılır

2.Derece geri fark;

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) &= \nabla(f_i - f_{i-1}) \\ &= \nabla f_i - \nabla f_{i-1} \\ &= f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2}) \\ &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}$$

3. Derece geri fark

$$\nabla^3 f_i = \nabla(\nabla (\nabla f_i)$$
$$= \nabla(\nabla (f_i - f_{i-1})$$

$$= \nabla (\nabla f_i - \nabla f_{i-1})$$
$$= \nabla (f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2}))$$

$$= \nabla(f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2})$$
$$= \nabla f_i - 2 \nabla f_{i-1} + \nabla f_{i-2}$$
$$= f_i - f_{i-1} - 2(f_{i-1} - f_{i-2}) + (f_{i-2} - f_{i-3})$$
$$= f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

$$\nabla^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

1.Derece merkezi fark;

$\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$ $\qquad$ i=0,1,…,n şeklinde yazılır

2.Derece merkezi fark;

$$\begin{aligned}\delta^2 f_i &= \delta(\delta f_i) = \delta(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) \\ &= f_{i+1} - f_i - (f_i - f_{i-1}) \\ &= f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}$$

3. Derece merkezi fark

$$\delta^3 f_i = \delta(\delta(\delta f_i)$$
$$= \delta(\delta(f_{i+1/2} - f_{i-1/2})$$

$$= \delta(\delta f_{i+1/2} - \delta f_{i-1/2})$$
$$= \delta(f_{i+1} - f_i - (f_i - f_{i-1}))$$

$$= \delta(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$
$$= f_{i+3/2} - f_{i+1/2} - 2(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) + (f_{i-1/2} - f_{i-3/2})$$
$$= f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2}$$

$$\delta^3 f_i = f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2}$$

n. dereceden ileri fark formülü

$\Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$

Üç operatör arasındaki ilişkiler

$\Delta f_i = \boldsymbol{\delta} f_{i+1/2} = \boldsymbol{\nabla} f_{i+1}$

$\Delta^2 f_i = \boldsymbol{\delta}^2 f_{i+1} = \boldsymbol{\nabla}^2 f_{i+2}$

....

$\Delta^r f_i = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{r}} f_{i+r/2} = \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{r}} f_{i+r}$

$$\Delta^k f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f_{k-i}$$

Formülü ile istenilen derecede katsayılar hesaplanabilir.

$\binom{k}{i}$ açılımı $\frac{k!}{i!(k-i)!}$ şeklindedir.

Örnek

k=5 için ileri fark formülünden 5.türevi alınız.

$$\Delta^5 f_5 = \sum_{i=0}^{5} (-1)^i \binom{5}{i} f_{5-i}$$

i=0 $\quad (-1)^0 \binom{5}{0} f_{5-0} = 1 * \frac{5!}{0!5!} f_5 = f_5$

i=1 $\quad (-1)^1 \binom{5}{1} f_{5-1} = -1 * \frac{5!}{1!4!} f_4 = -5f_4$

i=2 $\quad (-1)^2 \binom{5}{2} f_{5-2} = 1 * \frac{5!}{2!3!} f_3 = 10f_3$

i=3 $\quad (-1)^3 \binom{5}{3} f_{5-3} = -1 * \frac{5!}{3!2!} f_2 = -10f_2$

i=4 $\quad (-1)^4 \binom{5}{4} f_{5-4} = 1 * \frac{5!}{4!1!} f_1 = 5f_1$

i=5 $\quad (-1)^5 \binom{5}{4} f_{5-5} = -1 * \frac{5!}{5!0!} f_0 = -f_0$

$$\Delta^5 f_5 = f_5 - 5f_4 + 10f_3 - 10f_2 + 5f_1 - f_0$$

Sonlu Fark Tabloları

İleri Fark Tablosu $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(xi)$	$\Delta^2 f(xi)$	$\Delta^3 f(xi)$	$\Delta^4 f(xi)$
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	Δf_3	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(xi)$	$\Delta^2 f(xi)$	$\Delta^3 f(xi)$	$\Delta^4 f(xi)$
x_0	$f(x_0)$				
x_0+h	$f(x_0+h)$	$\Delta f(x_0)$			
x_0+2h	$f(x_0+2h)$	$\Delta f(x_0+h)$	$\Delta^2 f(x_0)$		
x_0+3h	$f(x_0+3h)$	$\Delta f(x_0+2h)$	$\Delta^2 f(x_0+h)$	$\Delta^3 f(x_0)$	
x_0+4h	$f(x_0+4h)$	$\Delta f(x_0+3h)$	$\Delta^2 f(x_0+2h)$	$\Delta^3 f(x_0+h)$	$\Delta^4 f(x_0)$

Geri Fark Tablosu $\nabla f_i = f_i - f_{i+1}$

x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(xi)$	$\nabla^2 f(xi)$	$\nabla^3 f(xi)$	$\nabla^4 f(xi)$
x_0	f_0				
x_1	f_1	∇f_1			
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$		
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$	
x_4	f_4	∇f_4	$\nabla^2 f_4$	$\nabla^3 f_4$	$\nabla^4 f_4$

Merkezi Fark Tablosu $\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$

x_i	$f(x_i)$	$\delta f(xi)$	$\delta^2 f(xi)$	$\delta^3 f(xi)$	$\delta^4 f(xi)$
x_0	f_0				
x_1	f_1	δf_0			
x_2	f_2	δf_1	$\delta^2 f_0$		
x_3	f_3	δf_2	$\delta^2 f_1$	$\delta^3 f_0$	
x_4	f_4	δf_3	$\delta^2 f_2$	$\delta^3 f_1$	$\delta^4 f_0$

Örnek

$F(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonu için h=1 ve [-3, 2] aralığında ileri fark tablosunu çıkarınız.

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(xi)$	$\Delta^2 f(xi)$	$\Delta^3 f(xi)$	$\Delta^4 f(xi)$
-3	-18				
-2	-2	16			
-1	2	4	-12		
0	0	-2	-6	6	
1	-2	-2	0	6	0
2	2	4	6	6	0

Genelde n.dereceden bir polinomun n.dereceden farkı sabit bir sayıya eşittir.

Genel bir polinom:

$Pn(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ şeklinde gösterirsek 3.dereceden bir polinom için üçüncü fark $\Delta^3 P_3(x) = 6a_0h^3$ dür.

h=1 ve $a_0=1$ için $\Delta^3 f(x) = 6*1*1^3 = 6$ olup, fark tablosundan da aynı sonuca erişilmiştir.

Sonlu Fark Tablosunda Hatanın Yayılması

Ayrık değerleri verilen f(x) fonksiyonunda $f_3=f(x_3)$ değerinde ε gibi bir hata olduğunu varsayalım. Bunu fark tablosunda nasıl gösterebiliriz ?

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(xi)$	$\Delta^2 f(xi)$	$\Delta^3 f(xi)$	$\Delta^4 f(xi)$	$\Delta^5 f(xi)$	$\Delta^6 f(xi)$
x_0	f_0						
x_1	f_1	Δf_0					
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$				
x_3	$f_3+\varepsilon$	$\Delta f_2+\varepsilon$	$\Delta^2 f_1+\varepsilon$	$\Delta^3 f_0+\varepsilon$			
x_4	f_4	$\Delta f_3-\varepsilon$	$\Delta^2 f_2-2\varepsilon$	$\Delta^3 f_1-3\varepsilon$	$\Delta^4 f_0-4\varepsilon$		
x_5	f_5	Δf_4	$\Delta^2 f_3+\varepsilon$	$\Delta^3 f_2+3\varepsilon$	$\Delta^4 f_1+6\varepsilon$	$\Delta^5 f_0+10\varepsilon$	
x_6	f_6	Δf_5	$\Delta^2 f_4$	$\Delta^3 f_3-\varepsilon$	$\Delta^4 f_2-4\varepsilon$	$\Delta^5 f_1-10\varepsilon$	$\Delta^6 f_1-20\varepsilon$

ε önündeki katsayıların Binom katsayıları olduğuna dikkat edelim