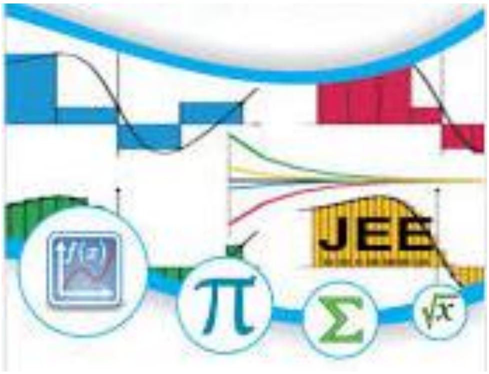
SAYISAL INTEGRAL



Yıldız Teknik Üniversitesi- Banu Diri

Sayısal Integrasyon Kavramı ve Çeşitleri

$$\int_a^b f(x).dx \approx yaklaşık\ hesaplama$$

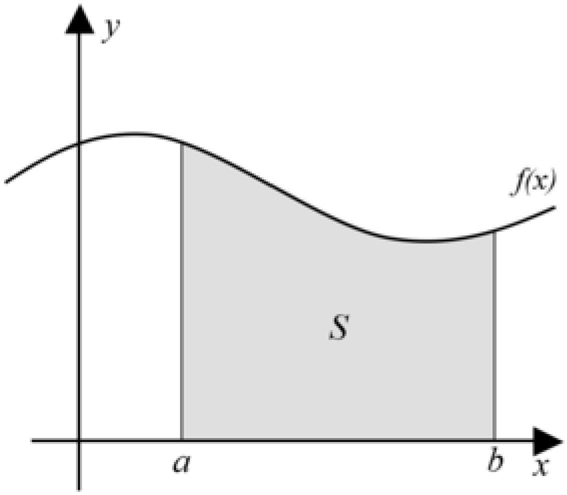
fikirlerinin bütününe **sayısal integrasyon** denir

Sayısal Analiz dersinde Newton Cotes formüllerine odaklanacağız

polinom $f_n(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

$$\int_a^b f(x).dx \approx \int_a^b f_n(x).dx \approx$$

Polinomu doğru, parabol, kübik bir ifade olarak uydurabiliriz. Bunların her biri de Newton Cotes için bir alt başlıktır



$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

İntegralin sınırları olan a ve b sayıları sabit ve fonksiyon bu aralıkta sürekli ise integralin sonucu da sabit olup, değeri y=f(x) eğrisinin altında ve x=a ile x=b doğruları arasında kalan alana eşittir

Sayısal Integral Çeşitleri

Doğru Uydurma

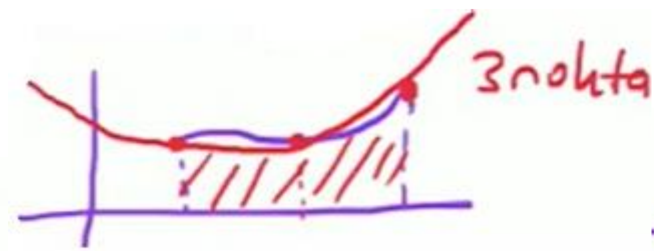
$f_n(x) = a_0 + a_1 x$

YAMUK Kuralı
(Trapezoidal Rule)

Parabol Uydurma

$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Simpson's 1/3 kuralı



Kübik Polinom Uydurma

$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

Simpson's 3/8 kuralı

TRAPEZ (YAMUK) YÖNTEMİ

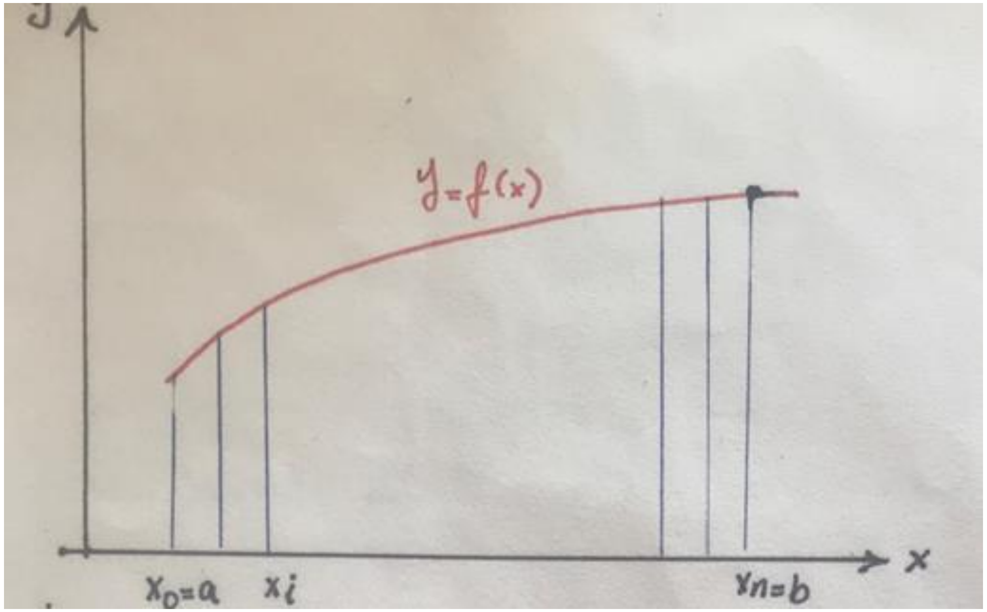
Bu yöntemde integral **n** sayıda dikdörtgen kullanılarak hesaplanır
N ne kadar büyük ise gerçek değere o kadar yakın sonuç elde edilir

$$I = \sum h_i f_i$$

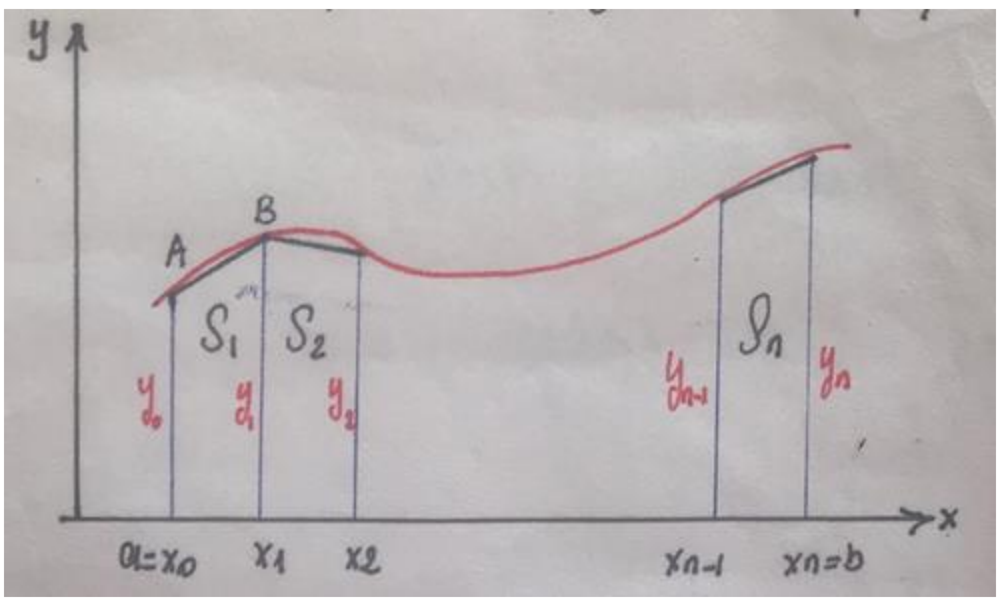
$f_i \rightarrow f(x_i)$
$h_i \rightarrow$ i. dikdörtgenin genişliği

$h_i = x_{i+1} - x_i$ olarak tanımlanır

Eğer dikdörtgenlerin genişliği sabit olduğundan $h = \frac{b-a}{n}$ olarak yazılır



I = $\int_a^b f(x).dx$ integralinin değerini hesaplamak üzere [a, b] kapalı aralığını **n** eşit parçaya ayıralım



Her bölme noktasından (xi) dik doğrular çıkarak, diklerin f(x) eğrisini kestiği noktaları birer doğru ile birleştirerek **n** tane yamuk elde edebiliriz x_0ABx_1 dik yamuğunun alanı :

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\, h(y_0 + y_1)$$

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\, h(y_1 + y_2)$$

$$S_3 = \tfrac{1}{2}\, h(y_2 + y_3)$$

....

$$S_n = \tfrac{1}{2}\, h(y_{n-1} + y_n)$$

Toplam Alan $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$ olacağından

$$S = \tfrac{1}{2}\, h(y_0 + y_1) + \tfrac{1}{2}\, h(y_1 + y_2) + \tfrac{1}{2}\, h(y_2 + y_3) + \ldots + \tfrac{1}{2}\, h(y_{n-1} + y_n)$$

$$S = h/2\,[\, y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n]$$

$$S = h\left[\frac{(y_0 + yn_)}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + yn_{-1}\right]$$

$$\boxed{S = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]}$$

$a \rightarrow x_0$ $b \rightarrow x_n$ $h = \Delta x = (x_n - x_0)/n$ olarak kabul edersek

$$\boxed{S = \Delta x\left[\frac{f(x_0) + f(xn)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_0 + k\Delta x)\right]}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\ x^2}\ dx$$

İntegralini n=4 alarak Trapez yöntemi ile hesaplayınız.

$x_0 = 0 \quad x_n = 1 \qquad h = (1 - 0)\ /4 = 0{,}25$

	x	f(x)
x0	0 +0,25	1
x1	0,25 +0,25	0,94118
x2	0,5 +0,25	0,8
x3	0,75 +0,25	0,64
x4	1	0,5

$$S = 0{,}25\left[\frac{1+0{,}5}{2} + \ (0{,}9412 + 0{,}8 + 0{,}64)\right]$$

$S = 0{,}78279\ br^2$

Bu fonksiyon için gerçek integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x \,\Big|_0^1 = \text{arctg}(x)\,\Big|_0^1 = \text{arctg}(1) - \text{arctg}(0) = 45^o$$

$I = \pi/4 = 0{,}78539$

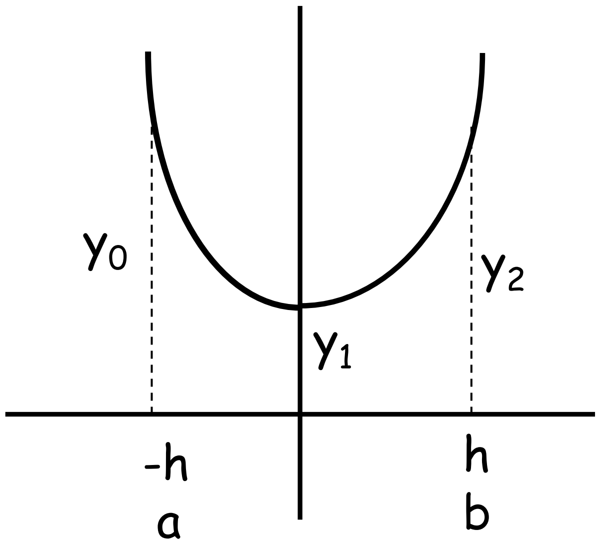
Hata = |0,78539 – 0,78279| = 0,0026

n=9 alınsaydı I= 0,78488 olurdu

Hata = |0,78539 – 0,78488| = 0,00051

SIMPSON YÖNTEMİ (1/3 kuralı)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde verilmiş ise



$$S = \int_a^b f(ax^2 + bx + c)dx$$

Analitik olarak incelersek

$$S = a\frac{x^3}{3} + b\,\frac{x^2}{2} + cx\,\Bigg|_{-h}^{h} = a\,\frac{h^3}{3} + b\,\frac{h^2}{2} + ch - [-a\,\frac{h^3}{3} + b\,\frac{h^2}{2} - ch]$$

$$S = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Denklemin katsayıları bilinmediğinden S eşitliğini y_0, y_1, y_2 cinsinden bulalım

$x = -h$ için $f(x) = y_0 = ah^2 - bh + c$

$x = 0$ için $f(x) = y_1 = c$

$x = h$ için $f(x) = y_2 = ah^2 + bh + c$

$$y_0 + y_2 = ah^2 - bh + c + ah^2 + bh + c = 2ah^2 + 2c$$

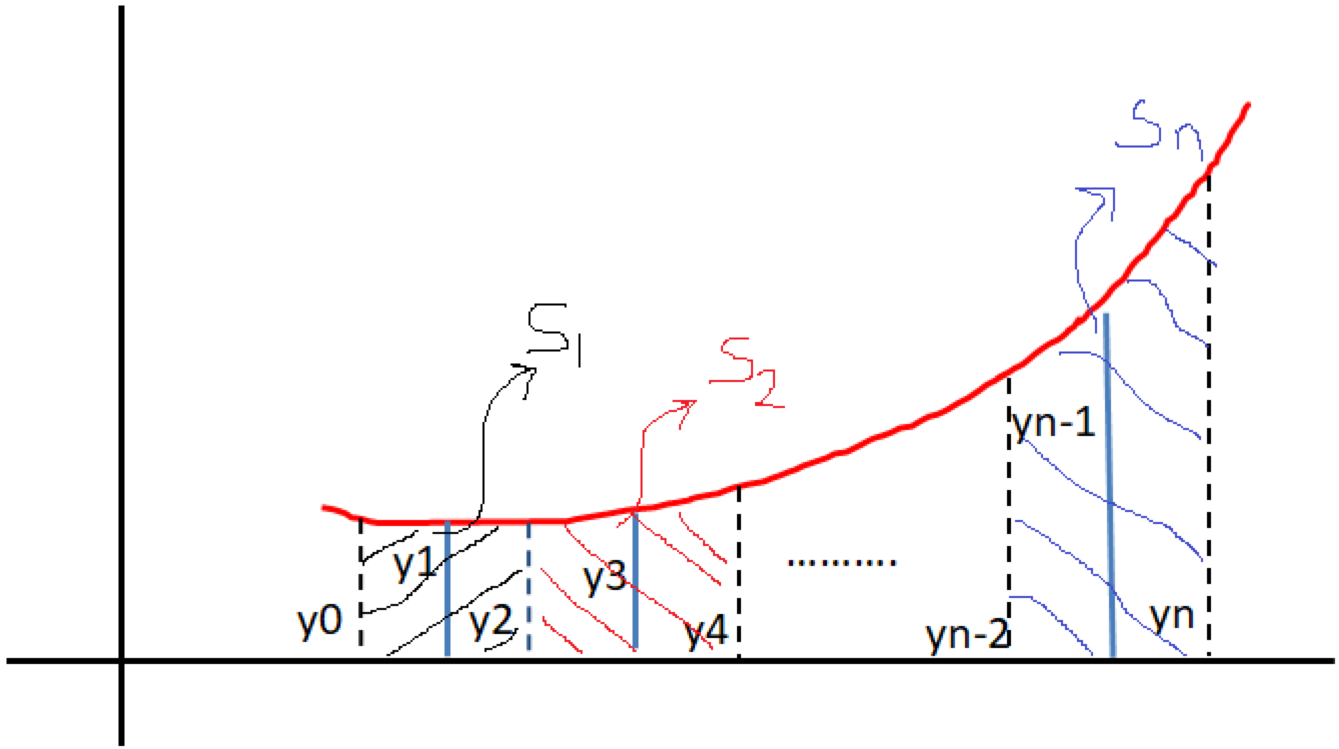
$c = y_1$ olduğundan:

$$2ah^2 + 2y_1 = y_0 + y_2$$

$$2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$$

$$S = h/3\ (y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1)$$

$$S = h/3\ (y_0 + 4y_1 + y_2)$$



$S_1 = h/3\ (y_0 + 4y_1 + y_2)$
$S_2 = h/3\ (y_2 + 4y_3 + y_4)$
....
$S_n = h/3\ (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$

$S = \Sigma\ S_i$ toplamı hesaplanacak integralin değeridir

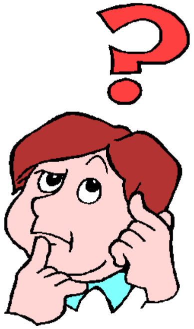
!!!!! Simpson yönteminde çubuklar ikişer ikişer alındığından aralık sayısı **ÇİFT** olmalıdır

Simpson formülünde $h = (x_n - x_0) / n$ alınarak

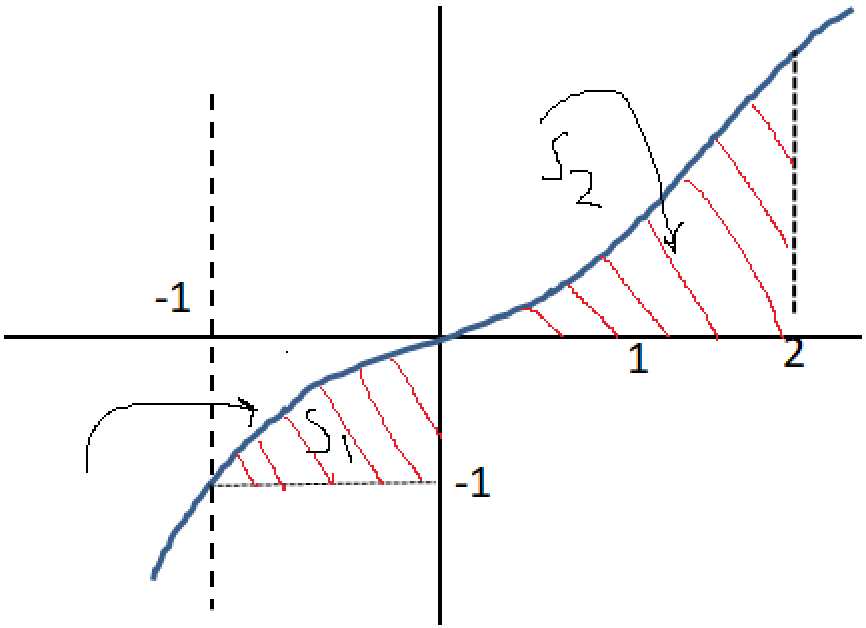
$S_1 = h/3\ (y_0 + 4y_1 + y_2)$
$S_2 = h/3\ (y_2 + 4y_3 + y_4)$
....
$S_n = h/3\ (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$

$S = \Sigma\, Si = h/3\ (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$

$$S = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k * h) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i * h) \right]$$



$y = x^3$ eğrisinin x=-1, x=2 ve Ox ekseni ile sınırlı bölgenin alanı nedir?



$$S_1 = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx$$

n=4   h=0,25

	x	f(x)
x0	-1	1
x1	-0,75	0,4218
x2	-0,5	0,125
x3	-0,25	0,0156
x4	0	0

S_1 = 0,25/3 [(1 + 0) + 2*(0,125) + 4*(0,4218 + 0,0156)] = 0,2499

$$S_2 = \int_{0}^{2} x^3\,dx$$

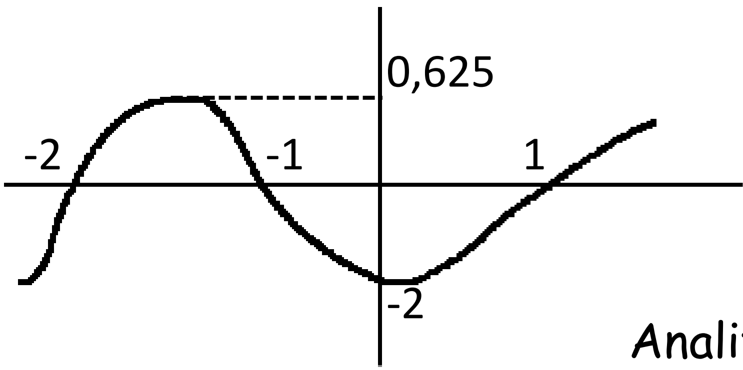
n=4   h=0,5

	x	f(x)
x0	0	0
x1	0,5	0,125
x2	1	1
x3	1,5	3,375
x4	2	8

S = 4 + 0,2499 = 4,25 br^2

S_2 = 0,5/3 [(0 + 8) + 2*1 + 4*(0,125 + 3,375)] = 4

$f(x) = (x^2 - 1)\,(x + 2)$ eğrisinin altında ve Ox ekseninin üstünde kalan bölgenin alanını bulunuz n=4 alarak bulunuz.



Analitik çözüm

$$I = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2)\,dx$$

$$I = \frac{1}{4}x^4 + 2/3\,x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \Big|_{-2}^{-1} = 0{,}41 \text{ br}^2$$

Trapez Yöntemi ile çözüm

$$S_T = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\,(x + 2)\,dx$$

n=4 h=(-1-(-2))/4 = 0,25

	x	f(x)
x0	-2	0
x1	-1,75	0,5156
x2	-1,50	0,625
x3	-1,25	0,4218
x4	-1	0

$$S_T = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$$

$$S_T = 0{,}25\left[\frac{0+0}{2} + (0{,}5156 + 0{,}625 + 0{,}4218)\right]$$

S = 0,391 br^2

Hata = |0,41 - 0,391| = 0,019 br^2

Simpson Yöntemi ile çözüm

$$S_T = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\,(x + 2)\,dx$$

	x	f(x)
x0	-2	0
x1	-1,75	0,5156
x2	-1,50	0,625
x3	-1,25	0,4218
x4	-1	0

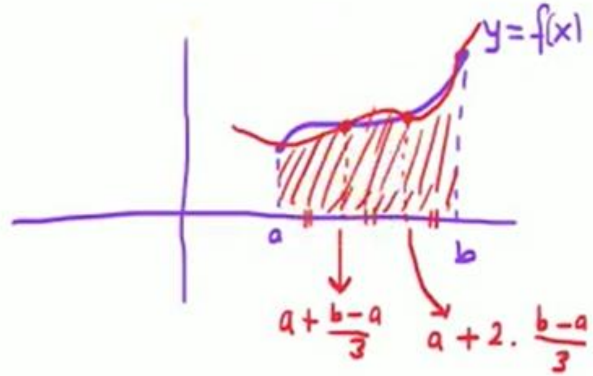
n=4 h=(-1-(-2))/4 = 0,25

$$S_s = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k * h) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i * h)\right]$$

Ss = 0,25/3 [(0 + 0) + 2*0,625 + 4*(0,4218 + 0,0156)] = 0,4166 br^2

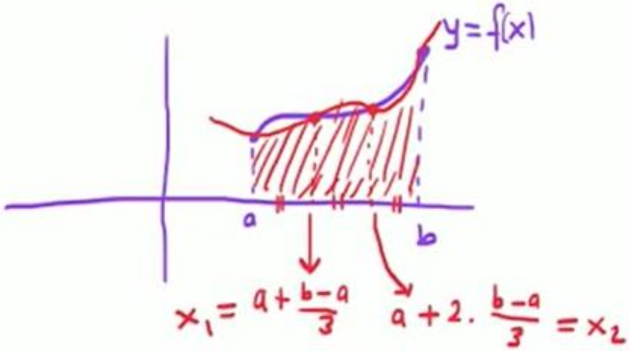
Simpson's 3/8 kuralı

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx = \boxed{(b-a)\cdot\frac{f(a)+3.f(x_1)+3.f(x_2)+f(b)}{8}}$$

n = 1 için



n = 2 için $\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx$

Ör: $\int_0^6 \frac{1}{1+x^4}dx$ ile verilen integralin sayısal çözümünü Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı ile $n=1$ ve $n=2$ için yapınız.

$n=1 \Rightarrow \int_0^6 \frac{1}{1+x^4}dx \cong (\overset{6}{b}-\overset{0}{a}) \cdot \frac{f(\overset{0}{a})+3f(\overset{2}{x_1})+3f(\overset{4}{x_2})+f(\overset{6}{b})}{8}$

$\frac{6-0}{3}=2$

$x_1 = 0+2=2$

$x_2 = 0+2.2=4$

$\cong 6 \cdot \frac{1+3.(1/17)+3.(1/257)+\frac{1}{1297}}{8}$

$\cong 0,8917$

$$n=2 \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{1+x^4}\,dx + \int_3^6 \frac{1}{1+x^4}\,dx \qquad \frac{6-3}{3}=1$$

$$\frac{3-0}{3}=1$$

$$3\cdot\frac{f(0)+3\cdot f(1)+3f(2)+f(3)}{8} + 3\cdot\frac{f(3)+3f(4)+3\cdot f(5)+f(6)}{8}$$

$$= 3\cdot\frac{1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{17}\right)+\frac{1}{82}}{8} + 3\cdot\frac{\frac{1}{82}+3\cdot\frac{1}{257}+3\cdot\frac{1}{626}+\frac{1}{1297}}{8}$$

1,0082   0,0110

$$\cong 1{,}0192$$

İki Katlı Integralin Sayısal Çözümü

I = $\int_2^3 \int_x^{2x^3} (x^2 + y)dydx$

I = $\int_2^3 g(x)dx$ n=4

h = (b-a)/n = (3-2)/4 = 0,25

	x	g(x)
x0	2	g0
x1	2,25	g1
x2	2,5	g2
x3	2,75	g3
x4	3	g4

1.Adım
x_0=2 için

I = $\int_2^{16} ({x_o}^2 + y)dy$ h = (16-2)/4 = 3,5

	y	f(y)
y0	2	6
y1	5,5	9,5
y2	9	13
y3	12,5	16,5
y4	16	20

g_0 = 3,5/3 [(6 + 20) + 2*13 + 4*(9,5 + 16,5)] = 182

2.Adım

x_1=2,25 için

I = $\int_{2,25}^{22,78}(x_1{}^2 + y)dy$ h = (22,78-2,25)/4 = 5,13

g_1 = 5,13/3 [(7,31 + 27,76) + 2*17,57 + 4*(12,44 + 22,7)]

g_1 = 360,417

	y	f(y)
y0	2,25	7,31
y1	7,38	12,44
y2	12,51	17,57
y3	17,64	22,7
y4	22,77	27,76

3.Adım

x_2=2,5 için

I = $\int_{2,5}^{31,25}(x_2{}^2 + y)dy$ h = (31,25-2,5)/4 = 7,19

g_2 = 7,19/3 [(8,75 + 37,51) + 2*23,13 + 4*(15,94 + 30,32)]

g_2 = 665,22

	y	f(y)
y0	2,5	8,75
y1	9,69	15,94
y2	16,88	23,13
y3	24,07	30,32
y4	31,26	37,51

4.Adım
x_3=2,75 için

I = $\int_{2,75}^{41,59}(x_3{}^2 + y)dy$ h = (41,59-2,75)/4 = 9,71

	y	f(y)
y0	2,75	10,31
y1	12,46	20,02
y2	22,17	29,73
y3	31,88	39,44
y4	41,59	49,15

g_3 = 9,71/3 [(10,31 + 49,15) + 2*29,73 + 4*(20,02 + 39,44)]
g_3 = 1154,7

5.Adım
x_4=3 için

I = $\int_{3}^{54}(x_4{}^2 + y)dy$ h = (54-3)/4 = 12,75

	y	f(y)
y0	3	12
y1	15,75	24,75
y2	28,5	37,5
y3	41,25	50,35
y4	54	63

g_4 = 12,75/3 [(12 + 63) + 2*37,5 + 4*(24,75 + 50,35)]
g_4 = 1912,5

$Ss = h/3\ [\ g_0 + g_4 + + 4*(g_1 + g_3) + 2*g_2]$

$Ss = 0{,}25/3\ [182 + 1912{,}5 + 4*(360{,}417 + 1154{,}7) + 2*665{,}22] = 790{,}451$

$S_{analitik} = 790{,}55$
$Ss \quad = 790{,}451$

Hata = $|790{,}451 - 790{,}55| = 0{,}099$