

РГР

Вариант 14

1 Исследовать функцию $y = x^3 + x^2$ и построить ее график.

1) Область определения: $E(y) = (-\infty; +\infty)$

2) Асимптоты отсутствуют

3)

а) При $y=0$

$$x^3 + x^2 = 0$$

$$x^2(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

б) При $x=0$

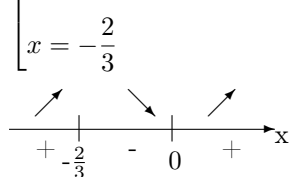
$$y=0$$

4) Функция не является ни четной, ни нечетной

$$5) y' = 3x^2 + 2x$$

$$3x^2 + 2x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$



$$x_{min} = 0$$

$$x_{max} = -\frac{2}{3}$$

Моноotonно возрастает $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (0; +\infty)$

Моноotonно возрастает $x \in (-\frac{2}{3}; 0)$

$$6) y'' = 6x + 2$$

$$6x + 2 = 0$$

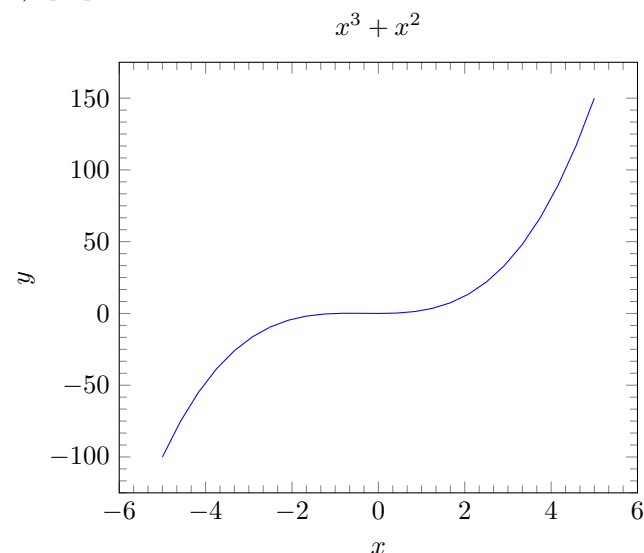
$$x = -\frac{1}{3}$$

$x \in (-\infty; -\frac{1}{3})$ Функция выпуклая

$x \in (-\frac{1}{3}; \infty)$ Функция вогнутая

7) Асимптот нет

8) График:



2 Исследовать функцию $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ и построить ее график.

1) $E(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

2) $x = 2$ вертикальная асимптота

3) а) при $y = 0$ $x = 1$

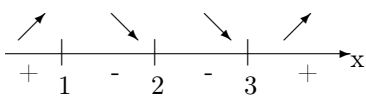
б) при $x = 0$ $y = -1/2$

4) функция является ни четной, ни нечетной

$$5) y' = \frac{2(x-1)(x-2) - (x-1)^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 6x + 4 - x^2 + 2x - 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

приводим производную к нулю

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0$$



$$x_{max} = 1$$

$$x_{min} = 3$$

Функция возрастает при $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Функция убывает при $x \in (1; 2) \cup (2; 3)$

$$6) y'' = \frac{((x-3)+(x-1))(x-2)^2 + 2(x-1)(x-3)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(2x-4)(x-2) + 2(x-1)(x-3)}{(x-2)^3} = \frac{2x^2 - 8x + 8 - 2x^2 + 8x - 10}{(x-2)^3} = \frac{-2}{(x-2)^3}$$

При $x \in (-\infty; 2)$ вогнута

При $x \in (2; +\infty)$ выпукла

7) вертикальные и горизонтальные асимптоты

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (kx + b + f(x))$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x-1)^2}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x(x-2)} = 1$$

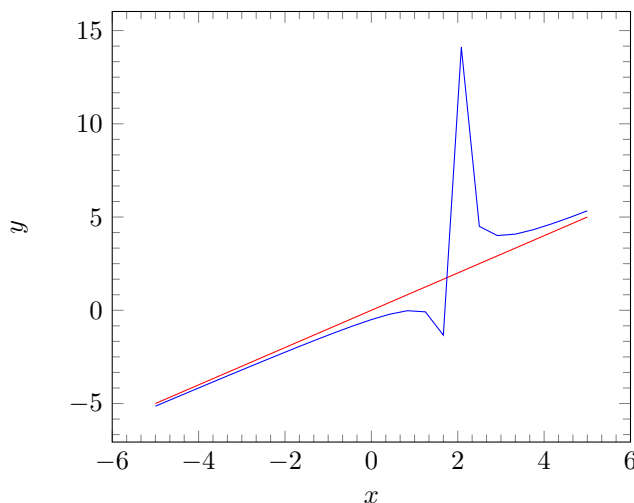
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x-2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

Получается уравнение $y=x$ наклонной асимптоты

Вертикальная асимптота $x=2$

$$\frac{(x-1)^2}{x-2}$$



3 Исследовать функцию $y = \frac{1}{(x-1)e^x}$ и построить ее график.

$$1) E(y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$$

2) функция общего вида

$$3) x = 0, y = -1$$

$y = 0$ пересечений нет

$$4) y' = \frac{e^{-x}(x-1) - e^{-x}}{(x-1)^2} = \frac{-e^{-x}x}{(x-1)^2}$$

$$\frac{-e^{-x}x}{(x-1)^2} = 0$$

Убывает при $x \in (0, 1) \cup (1, = \infty)$

Возрастает при $x \in (-\infty, 0)$

$$5) y'' = \frac{(e^{-x}x - e^{-x})(x-1)^2 + 2e^{-x}x(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{e^{-x}((x-1)^2 + 2x)}{(x-1)^3} = \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3 e^x}$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)^3 e^x} = 0$$

Вогнута при $x \in (1; +\infty)$

Выпукла при $x \in (-\infty; 1)$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} (kx + b + f(x))$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)e^x} = 0$$

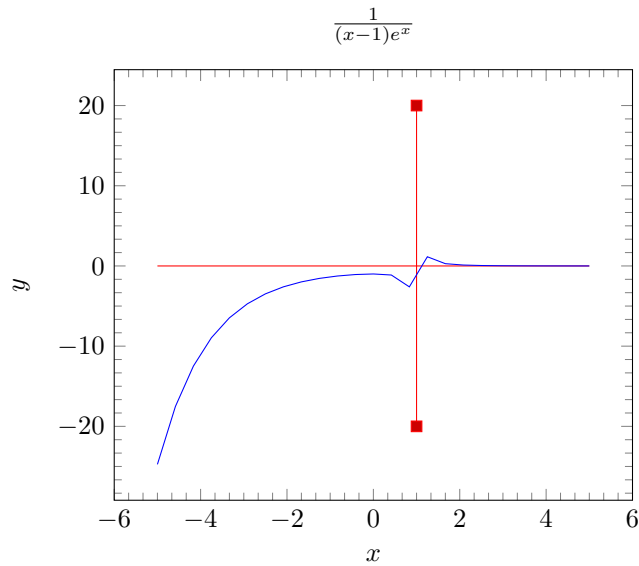
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)e^x} - 0x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)e^x} = 0$$

$y = 0$ горизонтальная асимптота

$x = 1$ вертикальная асимптота

7) график

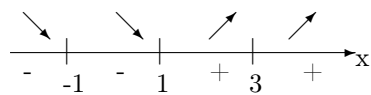


4 Найти наименьшее значение функции $y = \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-3} + 2$ на отрезке $[0, 2]$.

$$y' = \frac{-3}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x-3)^2} = \frac{-3x^2 + 18x - 27 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2(x-3)^2} = \frac{24x - 24}{(x+1)^2(x-3)^2}$$

$$\frac{24x - 24}{(x+1)^2(x-3)^2} = 0$$

$$\frac{x - 1}{(x+1)^2(x-3)^2} = 0$$



$$x_{min} = 1$$