

Подготовка к контрольно работе.

1 вариант

1. Верно ли, что матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ является обратной для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$?

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^T$$

$$A^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: не является.

$$2) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = ?$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Решить матричное уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Методом элементарных преобразований найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: ранг=2

5) Решить по правилу Крамера систему $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{-5} = -2$$

6) Методом Жордана-Гаусса найти общее решение системы $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 3 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 7/2 & -11/2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & | & 0 \\ 0 & 7/2 & -11/2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -11/7 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/7 & | & 0 \\ 0 & 1 & -11/7 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{cases} z = C \\ x + 5/7C = 0 \\ y - 11/7C = 0 \end{cases}$$

Ответ: $x = -5C, y = 11C, z = C$

7) Методом Жордана-Гаусса найти общее решение системы $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 3 & -1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & -7 & 5 & | & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -5/7 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/7 & | & 1 \\ 0 & 1 & -5/7 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z = 7C \\ x + 3C = 1 \\ y - 5C = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 7C \\ x = 1 - 3C \\ y = 1 + 5C \end{cases}$$

Ответ: $x=1-3C$, $y=1+5C$, $z=7C$

2 вариант

1) Являются ли строки матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ линейно зависимыми?

Ответ: да, так как размерность векторов меньше количества векторов.

$$2) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = ?$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Методом элементарных преобразований найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -7 & -19 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: ранг матрицы-3.

4) Решить по правилу Крамера систему $\begin{cases} 2x + 7y = 3 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -13$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 65$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -5$$