

# МАтан диффуры

№51

$$xydx + (x+1)dy = 0$$

$$\frac{y}{dx} = -\frac{x+1}{x} \frac{dx}{dy}$$

$$-\frac{x}{x+1} = \frac{dy}{y}$$

$$-\int \frac{x}{x+1} = \int \frac{dy}{y}$$

$$-ln(x+1) + x + 1 = ln(y) + C$$

№52

$$\sqrt{y^2+1}dx = xydy$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$ln(x) = \sqrt{y^2+1} + C$$

№55

$$y' =$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}$$

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = dx$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \int dx$$

$$\sqrt[3]{y} = x + C$$

№60

$$\frac{dz}{dx} = 10^x 10^z$$

$$\frac{dz}{10^z} = 10^x dx$$

$$\frac{10^z}{ln(10)} = -\frac{1}{ln(10)10^x}$$

$$10^z = -\frac{1}{10^x}$$

№137

$$(2x+1)y' = 4x+2y$$

решение однородного:

$$(2x+1)y' - 2y = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{x+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{2x+1}$$

$$ln(y) = ln(x+\frac{1}{2}) + ln(C)$$

$$y = C(x+\frac{1}{2})$$

$$(x+\frac{1}{2})(C'(x+\frac{1}{2}) + C) - C(x+\frac{1}{2}) = 2x$$

$$C'(x+\frac{1}{2})^2 = 2x$$

$$dC = \frac{2x dx}{(x+\frac{1}{2})^2}$$

$$C = 2(ln(2x+1) + \frac{1}{2x+1}) + C_2$$

$$y = (2(ln(2x+1) + \frac{1}{2x+1}) + C_2)(x+\frac{1}{2})$$

№139

$$(xy+e^x)dx - xdy = 0$$

$$xy - xy' = -e^x$$

решение однородного

$$xy - xy' = 0$$

$$dx = \frac{dy}{y}$$

$$x = ln(y) - ln(C)$$

$$y = Ce^x$$

$$xCe^x - xC'e^x - xCe^x = -e^x$$

$$xC' = 1$$

$$dC = \frac{dx}{x}$$

$$C = ln(x) + C_2$$

$$y = (ln(x) + C_2)e^x$$

№140

$$x^2y' + xy + 1 = 0$$

Решение однородного

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$ln(y) = -ln(x) + ln(C)$$

$$y = \frac{C}{x}$$

$$C'x - C + C + 1 = 0$$

$$dC = -\frac{dx}{x}$$

$$C = -ln(x) + C_2$$

$$y = \frac{-ln(x)+C_2}{x}$$



1) уравнение вида  $F(x, y, y') = 0$  можно решать двумя методами

а) разрешить уравнение относительно  $y'$ , то есть из уравнения  $F(x, y, y') = 0$  выразить  $y'$  через  $x$  и  $y$  таким образом получится одно или несколько уравнений вида  $y' = f(x, y)$  и каждое из них нужно решить.

б) метод введения параметра. Пусть уравнение  $F(x, y, y') = 0$  можно разрешить относительно  $y$ , то есть записать в виде  $y = f(x, y')$

Вводим параметр  $p = y'$  отсюда следует  $y = f(x, p)$

Приходим к уравнению вида  $M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0$

Если решение этого уравнения  $x = \phi(p)$

Дифференциал  $x = \phi(p)$

$$y = f(\phi(p), p)$$

Пример:

$$y = x + y' - \ln(y')$$

$$p = y'$$

$$y = x + p - \ln(p)$$

$$dy = dx + dp - \frac{dp}{p}$$

$$pdx = dx + dp - \frac{dp}{p}$$

$$dx(p - 1) = dp(1 - \frac{1}{p})$$

$$p \neq 1;$$

$$dx = \frac{dp}{p}$$

$$x = \ln(p) + C$$

$$p = Ce^x$$

$$y = \ln(p) + C + p - \ln(p)$$

$$y = C + p$$

$$y = C + Ce^x$$

$$y = C(e^x + 1)$$

$$p = 1$$

$$y = x + 1$$

Дискриминантная кривая-

решение  $y = \phi(x)$  уравнения  $F(x, y, y') = 0$  называется особым если через каждую точку, кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение  $y = \phi(x)$ , но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Если функция  $F(x, y, y')$  и производная  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и производная  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  непрерывны то любое особое решение уравнения  $F(x, y, y') = 0$  удовлетворяет также уравнению  $\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0$

Пример 2: найти особое решение уравнения

$$y = x + y' - \ln(y')$$

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}$$

$$y' = 1$$

$$y = x + 1$$

$$y_1(x_0) = y_2(x_0)$$

$$y'_1(x_0) = y'_2(x_0)$$

$$x + 1 = e^{x-C} + C$$

$$1 = e^{x-C}$$

$$x_0 = C$$

$$C + 1 = 1 + C$$

Пример 3:

$$(y')^2 - y^2 = 0$$

$$y' = p$$

$$p^2 - y^2 = 0$$

$$pdp = ydx$$

$$p \neq 0$$

$$\frac{dp}{dx} = y$$

$$p = \frac{dp}{dx}$$

$$x = \ln(p) + C$$

$$p = e^{x-C}$$

$$y' = e^{x-C}$$

$$(e^{x-C})^2 - y^2 = 0$$

$$y = e^{\pm x - C}$$

Задача коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + \rho(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

доп условие, которое делает диффур корректным как задачу.

Корректность

- 1) решение существует
- 2) решение единственно
- 3) решение не сильно изменяется от изменения входных данных (решение непрерывно зависит от данных в некоторой разумной топологии)

$$Cx^2 + 2 = 2Cy$$

$$4C + 2 = 2C$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y' + y = e^{-x} \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y' + y = e^{-x} \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\ln(y) + x - \ln(C) = 0$$

$$y = Ce^{-x}$$

$$C'e^{-x} - Ce^{-x} + Ce^{-x} = e^{-x} \sin x$$

$$C' - \sin x = 0$$

$$\frac{dC}{dx} = \sin x$$

$$C_1 = -\cos x + C_2$$

$$y = (-\cos x + C_2)e^{-x}$$

$$C_2 = 1$$

$$\text{Ответ: } y = (1 - \cos x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} y'' - y' = 4x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$$

$$y' = p$$

$$p' - p = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = p$$

$$\ln(p) = y + C$$

$$p = Ce^y$$

$$y' = Ce^y$$

$$\frac{dy}{e^y} = Cdx$$

$$-e^{-y} = Cx + C_2$$

$$y = -\ln(-Cx - C_2)$$

$$-\left(\frac{-C}{-Cx - C_2}\right)' + \left(\frac{-C}{-Cx - C_2}\right) = 4x$$

$$\frac{-C^2}{(-Cx - C_2)^2} + \frac{-C}{-Cx - C_2} = 4x$$

№2451

$$y^2(y'^2 + 1) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$$

$$-\sqrt{1-y^2} = x + C$$

№2452

$$y'^2 - 4y^3 = 0$$

$$y' = y^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} = dx$$

$$-\frac{2}{\sqrt{y}} = x$$

№247

$$xy'^2 = y$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$2\sqrt{x} = 2\sqrt{y} + C$$