חוק גאוס

קורס פיזיקה 2 – חשמל ומגנטיות

הרצאה 3

מרצה: רננה אלטמן

מבוא

- חוק קולון מאפשר למצוא שדה חשמלי על-פי מטען

  אבל – החישוב לעיתים מסובך.

חוק גאוס הוא משפט מתמטי, הנותן לחוק קולון צורה נוחה לפתרון בעיות עם סימטריה מרחבית.

חוק גאוס מתבסס על המושג "שטף חשמלי"

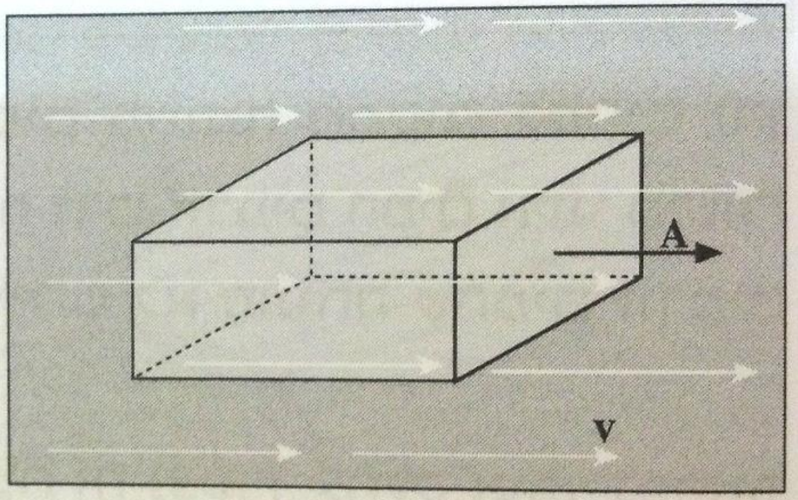
שרל קולון
1806 - 1736

קרל פ. גאוס
מתמטיקאי גרמני
1855 -1777

שטף

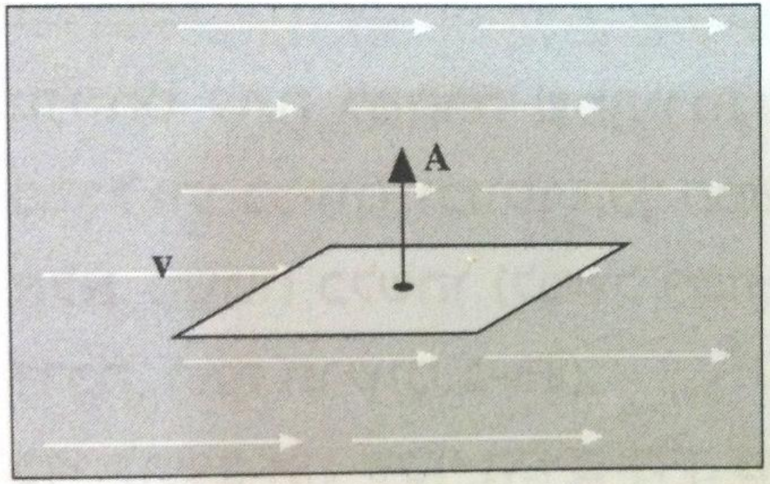
המושג "שטף" (באופן כללי)

- אנלוגיה לשטף של זרימה



תרשים ב-19
שטף מים דרך מסגרת מלבנית A
המאונכת לכיוון זרימת המים.

$$\Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta x \cdot A}{\Delta t} = \frac{v \Delta t A}{\Delta t} = v \cdot A$$



תרשים ב-20
״שטף המים״ דרך מסגרת מלבנית A
המקבילה לכיוון זרימת המים מתאפס.

$$\Phi = 0$$

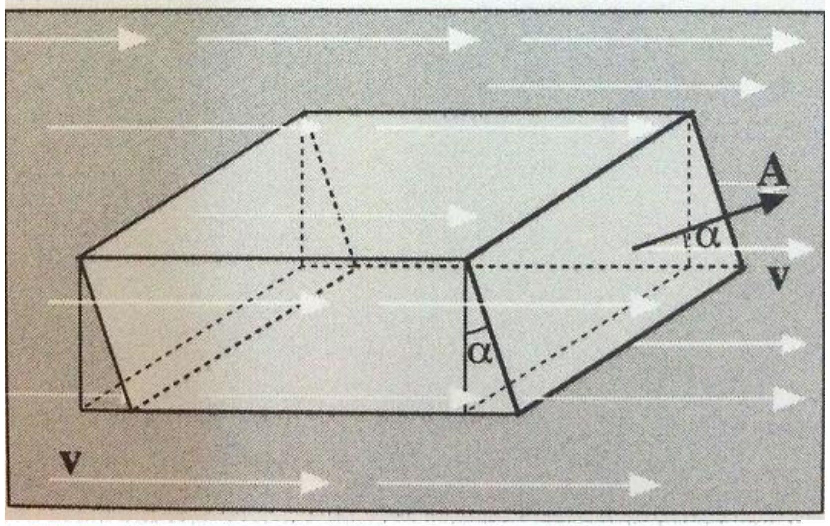
שטף

- שטף של זרימה
  - אם כוון הזרימה אינו מקביל ואינו מאונך למסגרת -

מכפלה זו מזכירה **<u>מכפלה סקלארית</u> של ווקטורים**, ולצורך כך נתאר את המסגרת כווקטור

נגדיר:
גודלו של הוקטור $\vec{A}$ פורפורציוני לשטח A שעליו מדובר, וכוונו <u>בניצב</u> לפני השטח.

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A} = |v| \cdot |A| \cdot \cos\alpha$$

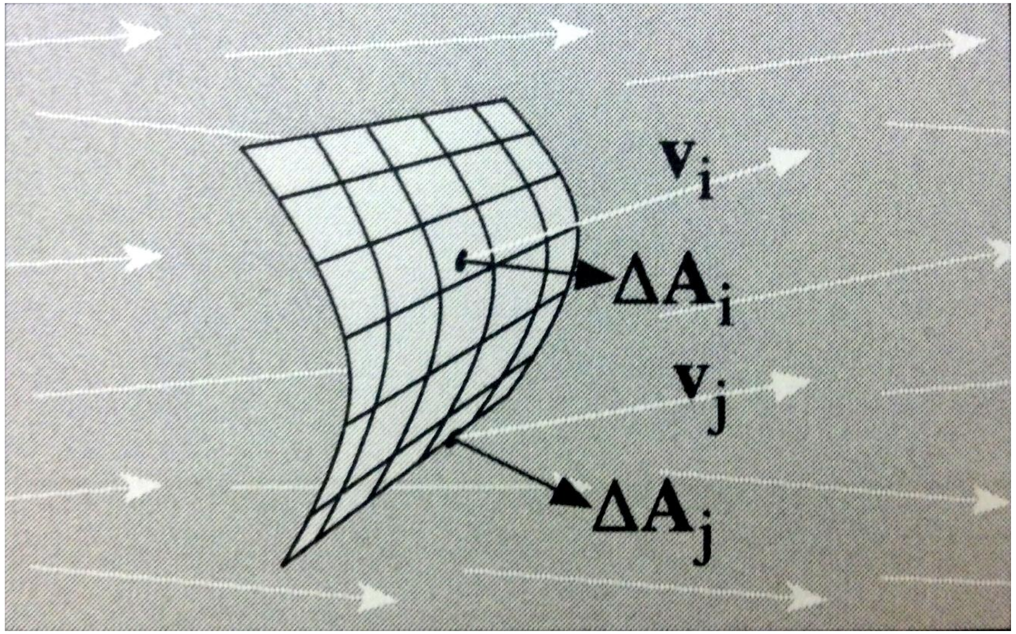


$$\Phi = vA\cos\alpha$$

שטף

שטף של זרימה

- ומה עושים במקרה ש...
  - מהירות הזרימה משתנה ממקום למקום
  - המשטח אינו ישר



- נחלק את המשטח לחלקים קטנים ΔA
- אם החלק מספיק קטן נוכל להניח שהזרימה בו קבועה

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{\Delta A_i}$$

- נקטין עוד יותר את חלקי השטח:

$$\Phi = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta A_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{\Delta A_i}$$

$$\Phi = \int_A \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA}$$

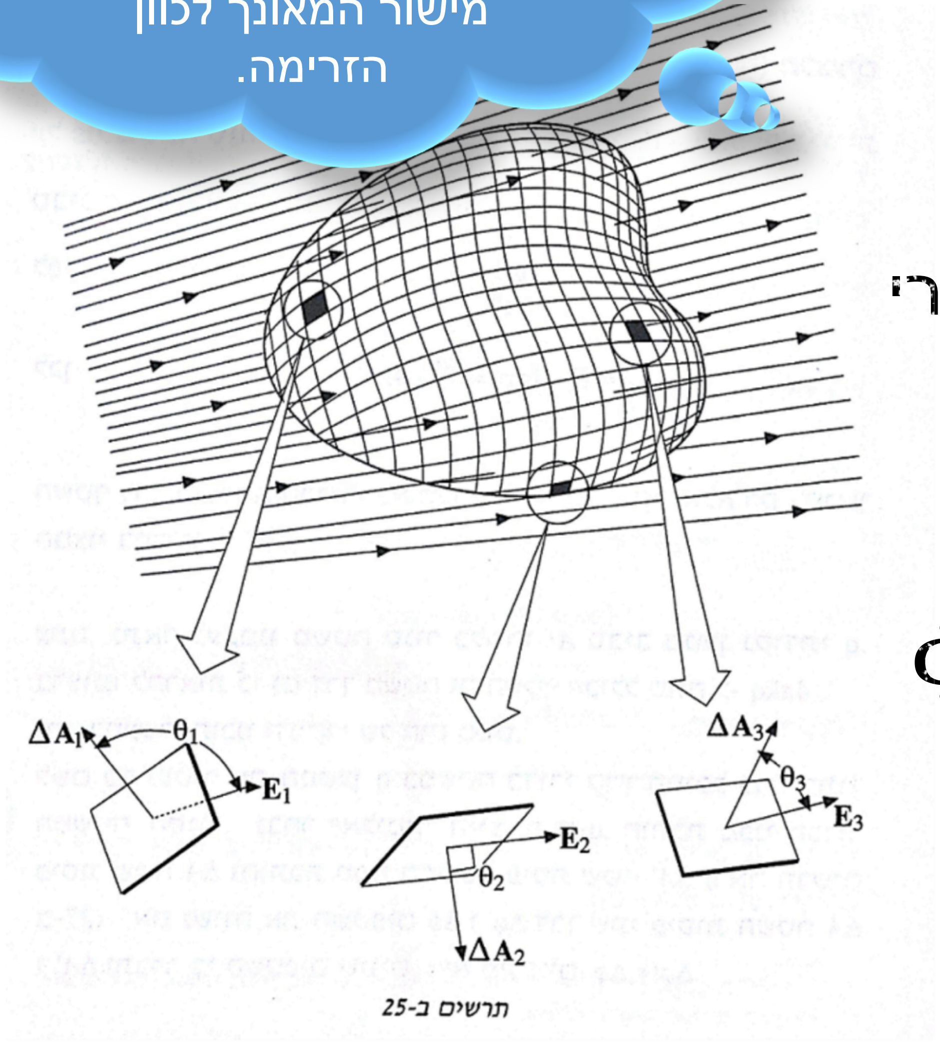
נשים לב:
ערכו של השטף אינו תלוי בצורת המשטח ("הרשת"), אלא בגודל היטל שלו על מישור המאונך לכוון הזרימה.

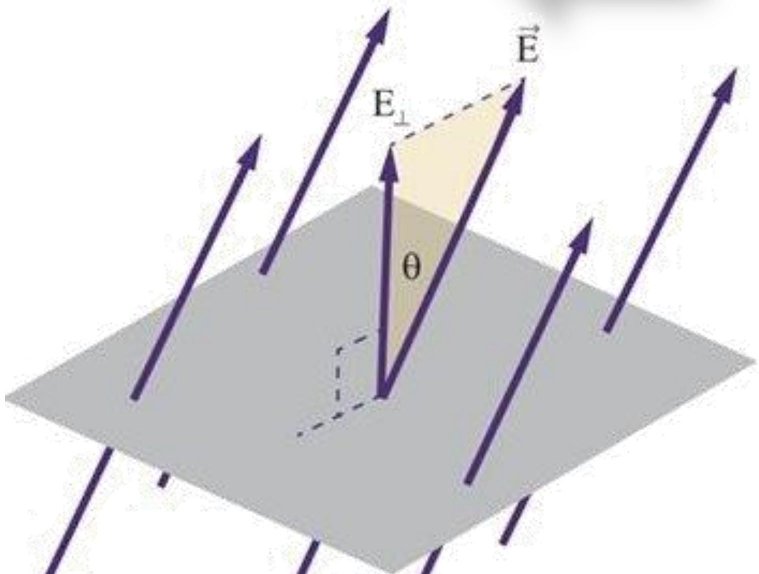
שטף

- שטף של שדה זרימה: $\Phi = \int_A \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA}$
- ניתן להגדיר את מושג השטף עבור כל שדה וקטורי

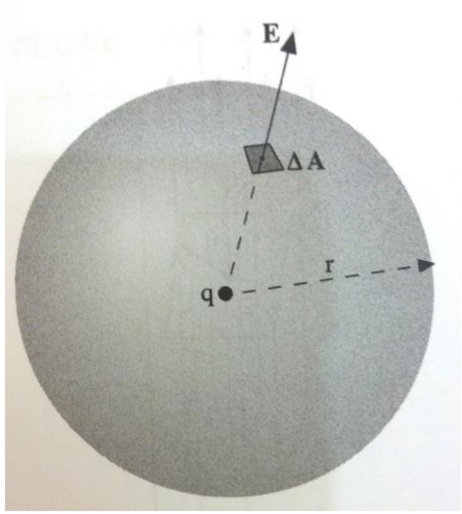
שטף של שדה חשמלי:

$$\Phi = \int_A \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$$

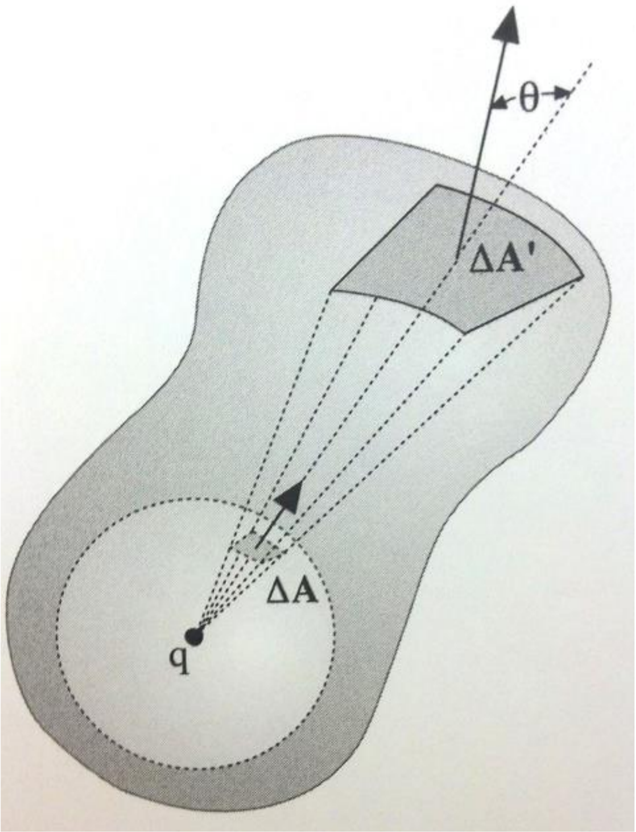




חוק גאוס - הוכחה



- הוכחה (של הקשר בין שטף לבין מטען) עבור מטען נקודתי ומשטח כדורי:



- הרחבת הקשר עבור משטח בכל צורה אחרת:

- מסקנה: שטף השדה החשמלי שיוצר מטען נקודתי q דרך מעטפת בכל צורה שהיא שווה ל- $4\pi kq$ (או $\frac{q}{\varepsilon_0}$)

חוק גאוס – המשך ההוכחה

אם המשטח הסגור עוטף מספר מטענים:

- לפי עקרון הסופרפוזיציה: $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \cdots + \overrightarrow{E_n}$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \oint \overrightarrow{E_1} \cdot \overrightarrow{dA} + \oint \overrightarrow{E_2} \cdot \overrightarrow{dA} + \cdots + \oint \overrightarrow{E_n} \cdot \overrightarrow{dA}$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = 4\pi k q_1 + 4\pi k q_2 + \cdots + 4\pi k q_n$$

$$= 4\pi k (q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = 4\pi k \sum q_{in}$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \frac{\sum q_{in}}{\varepsilon_0}$$

חוק גאוס – הניסוח המתמטי הכללי

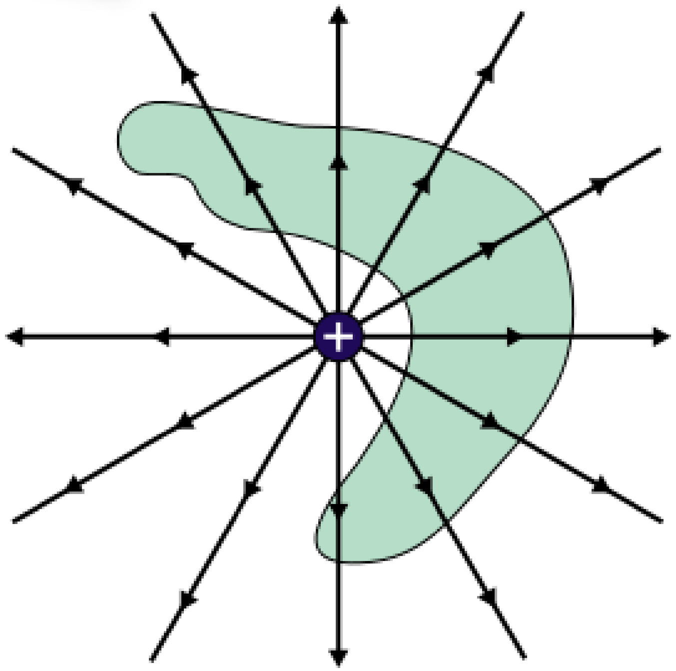
השטף החשמלי הכולל דרך משטח סגור כלשהו – תלוי אך ורק בכמות המטען $\sum Q$ הנמצא בתוך האזור הסגור על-ידי המשטח, וערכו (של השטף) **הוא** $\frac{\sum Q}{\varepsilon_0}$

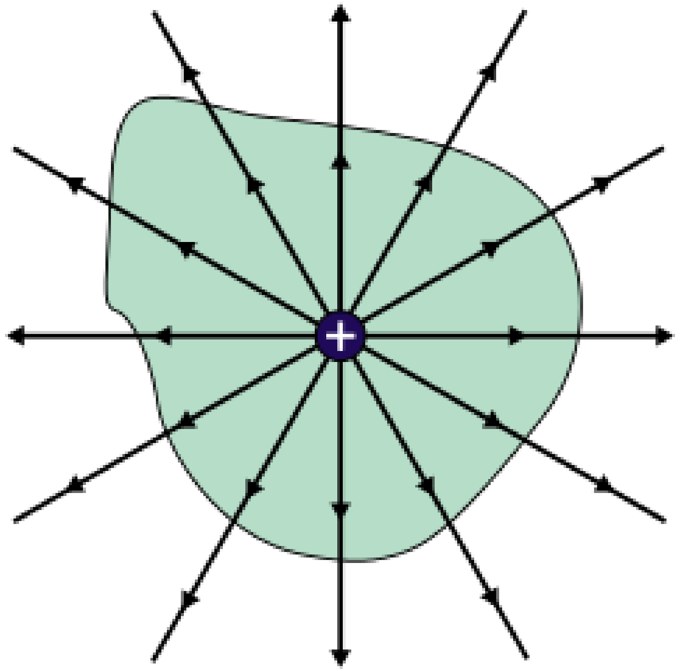
חוק גאוס

המטען שנמצא מחוץ למשטח הגאוסי שאנו בוחרים – אינו משפיע על השטף!

כיצד??

מטען חיצוני למערכת לא משפיע על סך השטף שלה, משום שכל קו שדה שלו הנכנס אליה גם יוצא ממנה בסופו של דבר

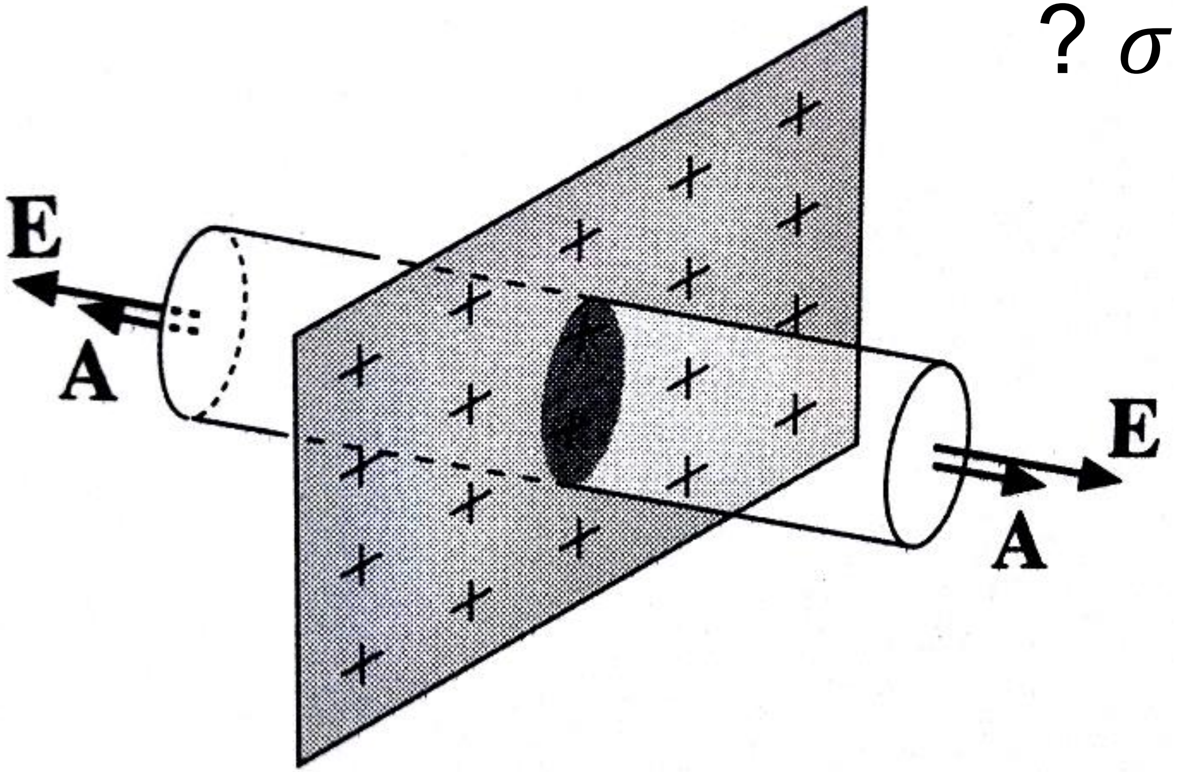




שימושים בחוק גאוס

1. מישור אינסופי טעון

מהו השדה החשמלי בקרבת שיכבה מישורית אינסופית הטעונה בצפיפות מטען אחידה σ ?



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

שימושים בחוק גאוס

2. קליפה כדורית הטעונה במטען Q המפולג באופן אחיד

- השדה החשמלי מחוץ לקליפה
  (במרחק r ממרכזה)

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

- השדה החשמלי בתוך הקליפה

$$E = o$$

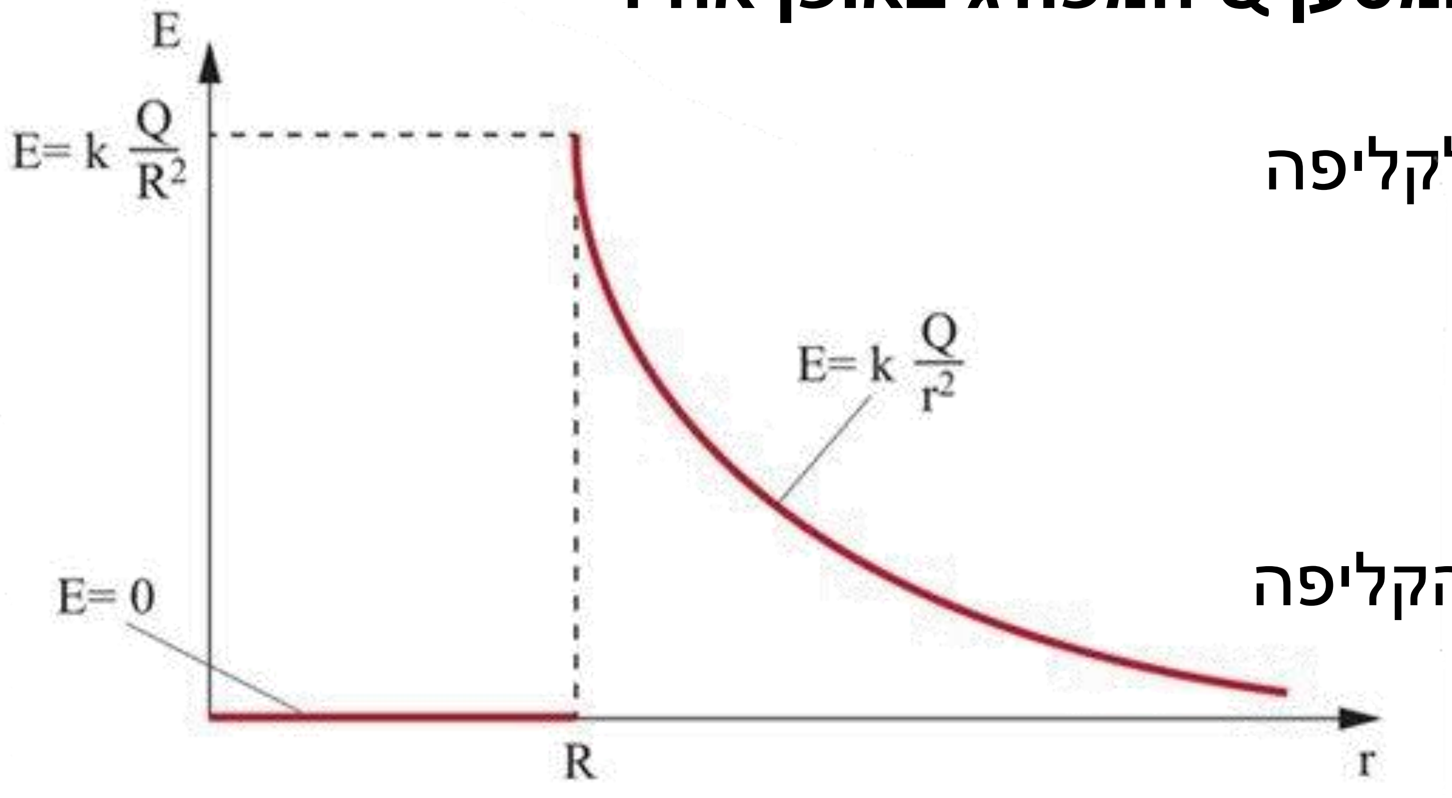
השדה מחוץ לקליפה זהה לשדה הנוצר ע"י מטען נקודתי!
(אילו המטען הנקודתי היה ממוקם במרכז הקליפה)

שימושים בחוק גאוס

2. קליפה כדורית הטעונה במטען Q המפולג באופן אחיד

- השדה החשמלי מחוץ לקליפה
  (במרחק r ממרכזה)

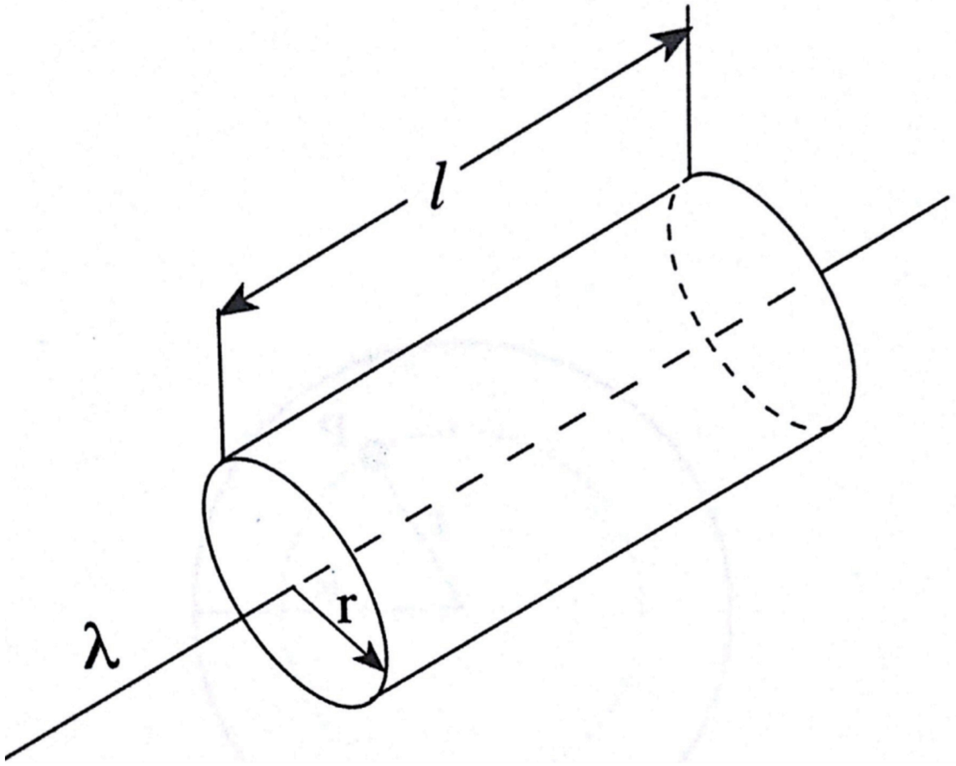
- השדה החשמלי בתוך הקליפה



השדה החשמלי של כדור טעון כפונקציה של המרחק ממרכז הכדור

תרגול

שימוש בחוק גאוס



3. תיל אינסופי טעון

מהו השדה החשמלי במרחק r מחוט ישר אינסופי הטעון בצפיפות מטען אחידה λ ?

$$E = \frac{2k\lambda}{r}$$

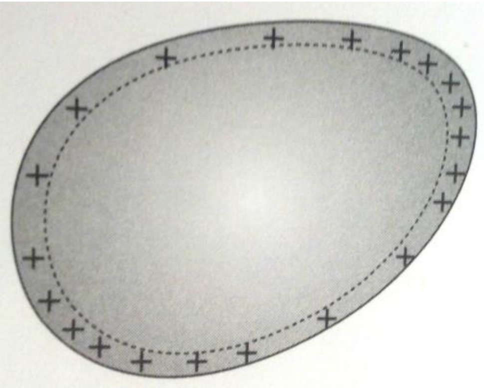
שדות חשמליים במוליכים

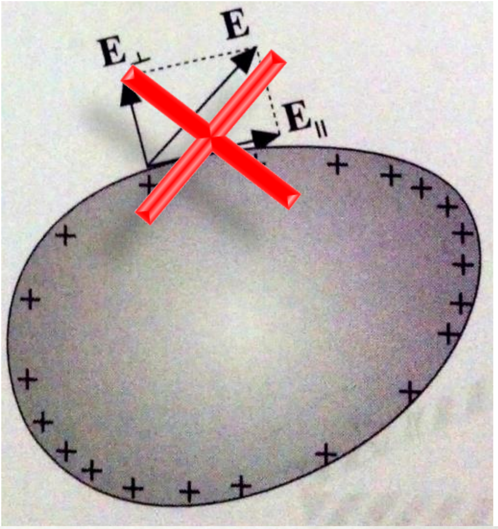
- במוליך הנמצא בשיווי משקל אלקרטרוסטטי:

- <u>בתוך</u> המוליך: **E=0**

לפי חוק גאוס $q_{in} = 0$

כל עודפי המטען נמצאים על שפת המוליך

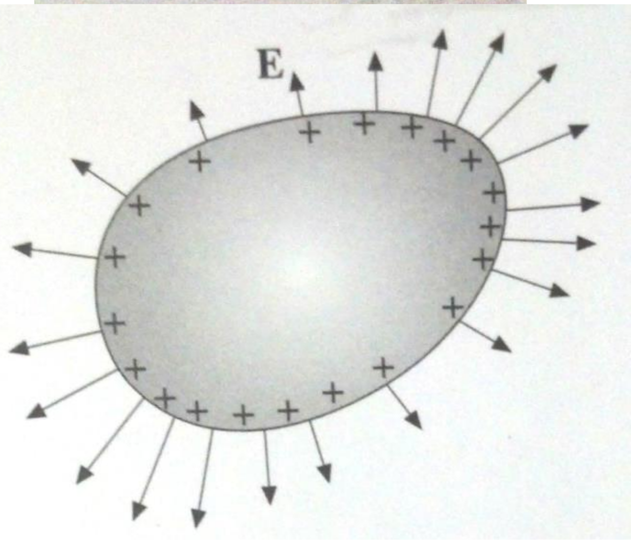


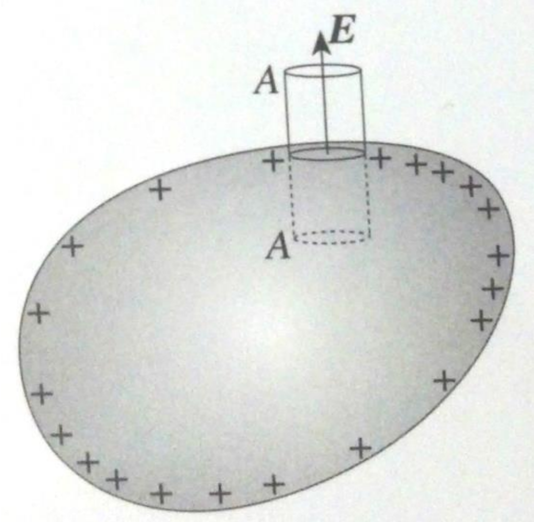


- בכל נקודה <u>על-פני</u> המוליך:

כוון: ווקטור השדה **מאונך** לפניו.

גודל (עוצמה): $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (נוכיח בעזרת חוק גאוס)





$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

שדות חשמליים במוליכים

כדור מוליך טעון

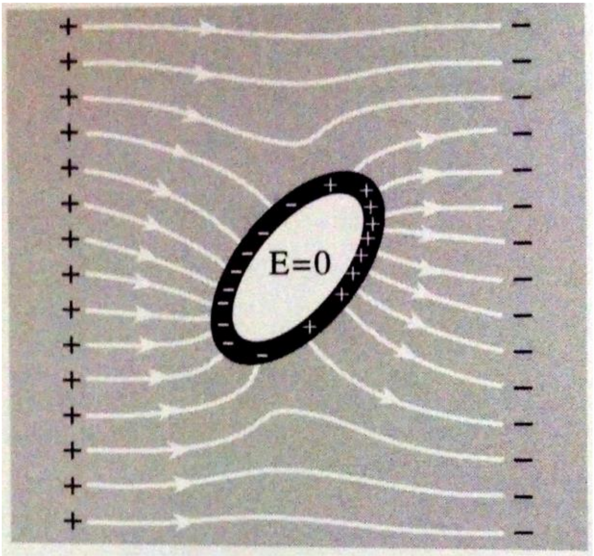
- השדה החשמלי ממרכז הכדור ועד לפני הכדור שווה אפס.
- על פני הכדור ומחוצה לו, עוצמת השדה שווה לזו שהייתה מתקבלת אילו כל המטען היה מרוכז במרכז, כלומר ביחס הפוך לריבוע המרחק.

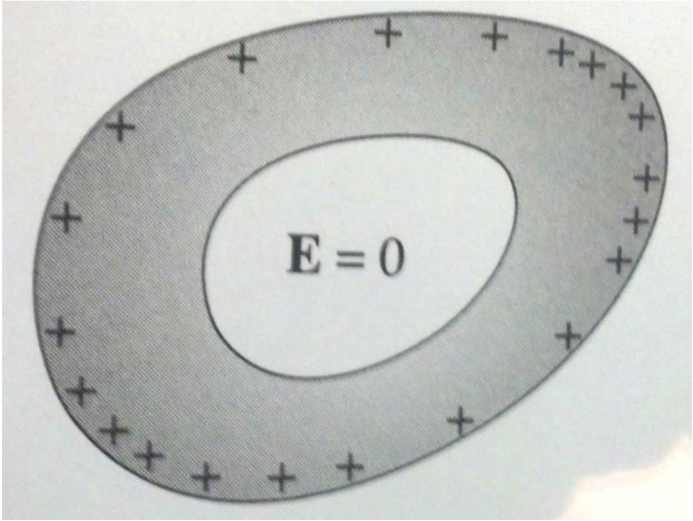
השדה החשמל – כמו של קליפה טעונה!

שדות חשמליים במוליכים

זהו היסוד לסיכוך חשמלי:
כדי לבודד מכשיר חשמלי כלשהו מהשפעות חשמליות חיצוניות – די להכניסו לתוך עטיפת מתכת

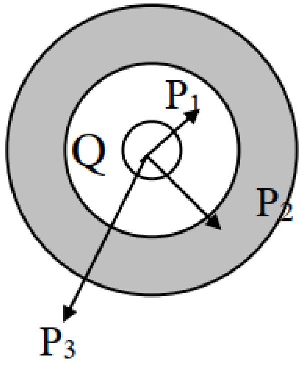
בתוך מוליך חלול טעון אין שדה חשמלי (לפי חוק גאוס...)





ואם ממוקם מטען בתוך החלל?
-השדה בחלל מושפע מהמטען שבתוך החלל בלבד
-השדה בתוך המעטפת המוליכה הוא אפס (כמו בכל מוליך), אך המטענים מתפלגים גם על השפה הפנימית של המעטפת ולא רק על השפה החיצונית שלה.
-המטען על השפה הפנימית שווה בגודלו ומנוגד בסימנו למטען שבתוך החלל.

תרגול



2. כדור שטעון במטען $Q=2\mu C$ ושרדיוסו $r=5cm$ נמצע בתוך כדור ברזל חלול (קליפה עבה) ניטרלי שרדיוסיו (הפנימי החיצוני) הם $r_a=15cm$ ו- $r_b=20cm$, בהתאמה. מהו השדה החשמלי בנקודה :
   א. P_1 שמרחקה 10cm מהמרכז?
   ב. P_2 שמרחקה 17cm מהמרכז?
   ג. P_3 שמרחקה 25cm מהמרכז?
   ד. חשבי את התפלגות המטען המשטחית על כל אחד מפני השטח (החיצוני והפנימי) של הקליפה העבה.

(הכדור החלול אינו טעון)

תרגול

5. קליפה כדורית שרדיוסיה הפנימי והחיצוני (בהתאמה) הם R_1=5cm ו- R_2=10cm, טעונה על-ידי מטען חשמלי המפולג באופן אחיד בכל נפח הקליפה (מכיוון שהקליפה עשויה מחומר מבודד). הצפיפות הנפחית של המטען היא ρ=100nC/m^3.
<u>חשב</u> את עוצמת השדה החשמלי E בנקודות המרוחקות ממרכז הקליפה במרחקים:
א) r_1=3cm ; ב) r_2=6cm ; ג) r_3=12cm .

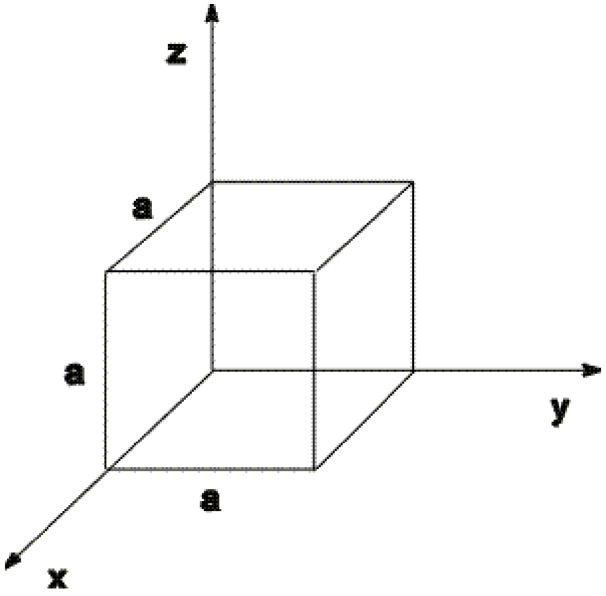
תרגול

6. כדור מלא העשוי מחומר <u>לא מוליך</u>, שרדיוסו 5 ס"מ טעון בנפחו בצפיפות מטען אחידה $\rho = \frac{6}{\pi}\frac{mC}{m^3}$. במרכזו של הכדור נמצא מטען נקודתי $Q = -1\mu C$.

מצא נוסחאות ובנה גרף של עצמת השדה האלקטרוסטטי כפונקציית המרחק ממרכז הכדור – מאפס ועד אינסוף

תרגול

קופסה קובייתית בעלת מקצוע a ממוקמת כך שפאותיה מקבילות לצירים, כמוצג בתרשים. אין מטענים חשמליים בתוך הקוביה, אך בתוך חלל הקוביה ומחוץ לה שורר שדה חשמלי בלתי אחיד, הנתון בפונקציה
E(x,y,z) = c1z2i + c2xyj + c3x2k , כאשר c1, c2, c3 הם קבועים נתונים.
מהו השטף החשמלי דרך הפאה העליונה של הקוביה? זכרו שאנו מגדירים שטף חיובי כאשר הוא מכוון אל מחוץ לקוביה.

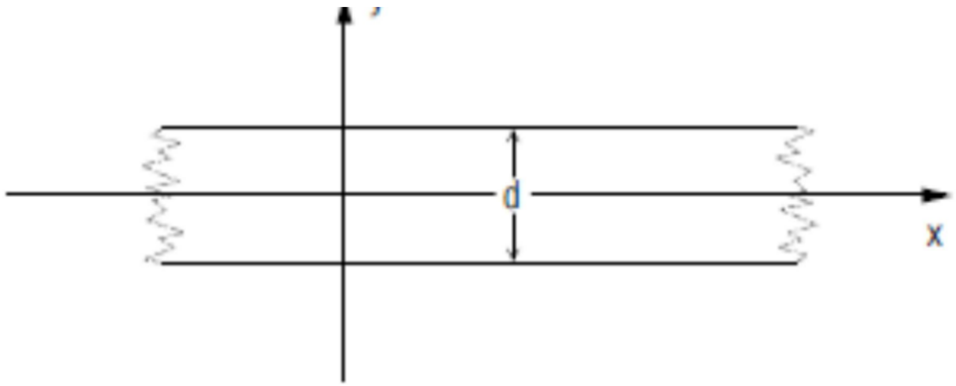


תרגול

An infinite slab of thickness 18 [cm], has a uniform charge density 4.50×10^{-9} [C m^{-3}].

Find the magnitude of the electric field inside the slab (for y=8 [cm]), and outside the slab (y=92 [cm]).

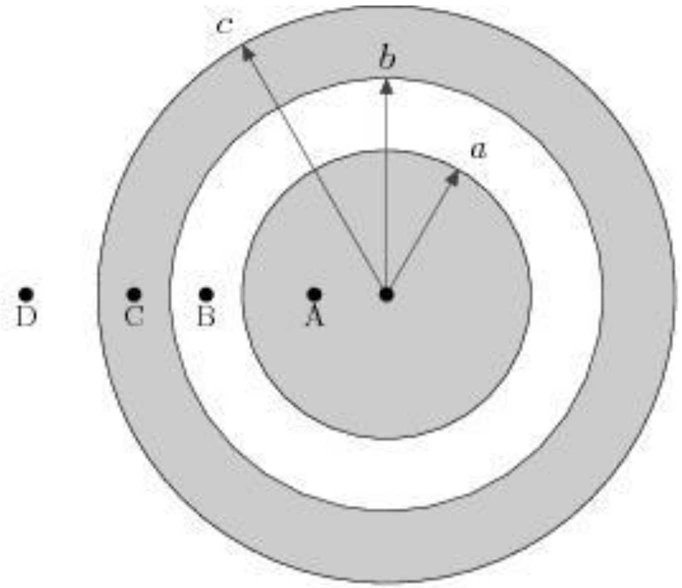
משטח אינסופי שעוביו d הוא בעל התפלגות מטען אחידה ρ . מצאי את עוצמת השדה החשמלי בתוך המשטח, ומחוץ לו.



תרגול

גליל העשוי מחומר מבודד בעל רדיוס a, טעון בצפיפות מטען משתנה הנתונה בפונקציה $\rho(r) = p\cdot r$, כאשר r הוא המרחק מציר הסימטריה של הגליל. הגליל ממוקם בתוך קליפה גלילית עבר בעלת רדיוסים פנימי וחיצוני b ו-c בהתאמה. הקליפה החיצונית טעונה בצפיפות מטען נפחית אחידה $\rho(r) = \rho_0$. הגליל והקליפה הם בעלי מרכז משותף (ראי שרטוט).

פתחי את הנוסחאות עבור עוצמת השדה החשמלי בנקודות A, B, C ו-D.



תרגול

A nonconducting solid sphere of radius 2.30 cm carries a uniformly distributed positive charge of 8.10×10-9 C.

a. Calculate the magnitude of the electric field at a point 1.80 cm away from the center of the sphere.

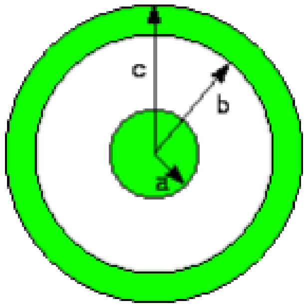
b. Calculate the magnitude of the electric field at a point 3.50 cm away from the center of the sphere.

c. Assume that the sphere is conducting. Calculate the magnitude of the electric field at a point 1.80 cm away from the center of the sphere.

d. Calculate the magnitude of the electric field for the conducting sphere at a point 3.50 cm away from the center of the sphere.

תרגול

A solid metal sphere of radius a = 1.30 cm is surrounded by a concentric spherical metal shell of inner radius b = 2.90 cm and outer radius c = 3.40 cm. The inner sphere has a net charge of Q1 = 3.10 μC, and the outer spherical shell has a net charge of Q2 = -8.70 μC.



a. What is the radial component of the electric field Er at a point located at radius r = 2.60 cm, i.e. between the two conductors? Er is positive if it points outward, negative if it points inward.

b. What is Er at a point located at radius r = 3.80 cm, i.e. outside the outer shell?

c. What is the surface charge density, σb, on the inner surface of the outer spherical conductor?

d. What is the surface charge density, σc, on the outer surface of the outer spherical conductor?