CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA 1
14 Gennaio 2015

Nome e Cognome:	1	2	3	4	5	Σ
Matricola:						

1. Provare che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dove F_n è l'ennesimo numero di Fibonacci.

SOLUZIONE - Passo base:
$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1$ quindi $F_0F_2 - F_1^2 = 1 = (-1)^1$.
- Passo di induzione: proviamo che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = \text{ (definizione di numeri di Fibonacci)}$$

$F_n(F_{n+1}+F_n)-F_{n+1}^2 = F_nF_{n+1}+F_n^2-F_{n+1}^2 =$ (ipotesi induttiva)
$F_nF_{n+1}+F_{n-1}F_{n+1}-(-1)^n-F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n+F_{n-1})-(-1)^n-F_{n+1}^2 =$
(definizione di numeri di Fibonacci) $F_{n+1}^2-F_{n+1}^2+(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$.

2. Sia $A = \{2, 3, 6\}$. Si consideri la seguente relazione in $A \times A$:

$$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \iff a|a' \ \& \ b|b',$$

dove $|$ è la relazione di divisibilità.

a. Provare che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine;

b. tracciare il suo diagramma di Hasse;

c. l'insieme parzialmente ordinato $(A \times A, \mathcal{R})$ è un reticolo?

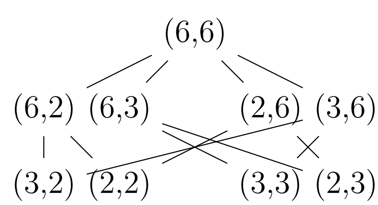
SOLUZIONE

a. **RIFLESSIVA**: $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$ infatti $a|a$ e $b|b$.

ANTISIMMETRICA: $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ e $(a', b')\mathcal{R}(a, b) \Rightarrow (a, b) = (a', b')$ infatti $a|a'$ e $a'|a$ implica $a = a'$ (essendo $a, a' \in A$); analogamente per $b = b'$.

TRANSITIVA $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$ e $(a', b')\mathcal{R}(a'', b'') \Rightarrow (a, b)\mathcal{R}(a'', b'')$ infatti $a|a'$ e $a'|a''$ implica $a|a''$ e analogamente con b, b', b''.

b.



c. No. L'insieme parzialmente ordinato $(A \times A, \mathcal{R})$ ha quattro elementi minimali mentre un reticolo finito ha un unico elemento minimale (il minimo).

3. Un'urna contiene 11 palline, di cui 6 sono rosse e le altre 5 verdi. In quanti modi si possono estrarre contemporaneamente 4 palline:

a. in tutto;

b. in modo che almeno una delle palline estratte sia verde;

c. in modo che esattamente una delle palline estratte sia verde;

d. in modo che le 4 palline estratte siano tutte dello stesso colore?

SOLUZIONE

a. Avendo in tutto undici palline, ci sono $\binom{11}{4} = 330$ modi di scegliere quattro palline tra queste undici.

b. Il numero di modi di estrarre almeno una pallina verde è uguale al numero di modi totali di estrarre le quattro palline meno il numero di modi di estrarre quattro palline di cui nessuna è verde (cioè tutte le palline sono rosse). Abbiamo quindi che il numero cercato è $\binom{11}{4} - \binom{6}{4} = 330 - 15 = 315$.

c. Dobbiamo scegliere una pallina verde ($\binom{5}{1} = 5$ modi) e scegliere le altre tre palline tra le sei palline rosse contenute nell'urna ($\binom{6}{3}$ scelte). In totale abbiamo $5 \cdot \binom{6}{3} = 100$ modi possibili.

d. In questo caso dobbiamo scegliere quattro palline tra le sei rosse oppure quattro palline tra le cinque verdi. Dunque in totale abbiamo $\binom{6}{4} + \binom{5}{4} = 20$ modi possibili.

4. Nel gruppo simmetrico S_6 si considerino le permutazioni:

$$\alpha = (1\ 3\ 5), \quad \beta = (2\ 6\ 4).$$

a. Determinare il sottogruppo G generato da α e β;

b. determinare il periodo degli elementi di G;

c. dimostrare che G è commutativo;

d. G è ciclico?

SOLUZIONE

a. Essendo α e β cicli disgiunti si ha $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$. Inoltre, entrambe sono cicli di lunghezza 3, quindi hanno periodo 3; questo significa che

$$\alpha^2 = \alpha^{-1} = (1\ 5\ 3), \quad \beta^2 = \beta^{-1} = (2\ 4\ 6).$$

Allora, per lo stesso motivo, anche α^2 e β^2 commutano. Dunque

$$G = \{id, \alpha, \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha^2 \cdot \beta^2, \alpha \cdot \beta^2, \alpha^2 \cdot \beta\}$$

.

b. Essendo α, β, α^2, β^2 cicli di lunghezza 3, il loro periodo è 3. Essendo $\alpha \cdot \beta$, $\alpha^2 \cdot \beta$, $\alpha \cdot \beta^2$, $\alpha^2 \cdot \beta^2$ prodotti di cicli disgiunti di lunghezza 3 il loro periodo è 3. Dunque tutti gli elementi di G eccetto l'identità hanno periodo 3.

c. Due elementi di G generici sono della forma $\alpha^i \cdot \beta^j$ con $0 \leq i, j \leq 2$ e $\alpha^k \cdot \beta^l$ con $0 \leq k, l \leq 2$. Siccome α e β commutano,

$$\alpha^i \cdot \beta^j \cdot \alpha^k \cdot \beta^l = \alpha^{i+k} \cdot \beta^{j+l} = \alpha^k \cdot \beta^l \cdot \alpha^i \cdot \beta^j$$

quindi G è commutativo.

d. G non è ciclico perchè la sua cardinalità è 9, ma non contiene elementi di periodo 9.

5. Sia
$$G=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & b\end{bmatrix}; a,b\in\mathbb{Z}_3, b\neq 0\right\}.$$

a. Dimostrare che G è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto righe per colonne.

b. Determinare l'ordine di G e il periodo dei suoi elementi.

c. Dimostrare che la funzione $f: G\to\mathbb{Z}_3^*$ definita da
$$f\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & b\end{bmatrix}\right)=b$$
è un omomorfismo del gruppo G nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_3^*$.

d. Sia
$$H=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}; a\in\mathbb{Z}_3\right\}.$$
Dimostrare che H è un sottogruppo normale di G.

SOLUZIONE

a. Siano $\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & b\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1 & 0\\ c & d\end{bmatrix}$ due elementi di G. Allora
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & b\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a+bc & bd\end{bmatrix}$$
appartiene a G perché $b\neq 0$ e $d\neq 0\Rightarrow bd\neq 0$.
Inoltre, data $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & b\end{bmatrix}$ in G, essendo $b\neq 0$ e dunque invertibile in $\mathbb{Z}_3$, l'inversa della matrice A è la matrice di G data da $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -ab^{-1} & b^{-1}\end{bmatrix}$. Dunque G è un gruppo con l'operazione di prodotto righe per colonne ed ha come elemento neutro la matrice identica 2×2.

b. L'elemento a può essere scelto in 3 modi, mentre per b ci sono solo 2 scelte (1 e $-1=2$); quindi l'ordine di G è 6. Abbiamo poi per ogni $a\in\mathbb{Z}_3$:
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2a & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}^3=I,$$

mentre per ogni $a \in \mathbb{Z}_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{bmatrix}^2 = I.$$

Quindi gli elementi di G diversi dall'identità hanno periodo 2 oppure 3.

c. Siano $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ due elementi di G. Allora

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{bmatrix}\right) = bd = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}\right) f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}\right),$$

quindi f è un omomorfismo.

d. Si noti che $H = ker f$ dove f è l'omomorfismo di gruppi discusso nel punto (c). Il nucleo di un omomorfismo è sempre un sottogruppo normale.