Réduction

Valeurs propres, vecteurs propres

$$A\,X = \lambda\,X \text{ et } X \neq 0$$

Polynôme caractéristique

$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda\, I_p - A)$ unitaire de degré p

si $p=2$ $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\,\lambda + \det(A)$

$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Racines}(\chi_A)}$

Sous-espaces propres

$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda\, I_p)$

toujours en somme directe

$\boxed{1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m_\lambda(A)}$

$$\mathbb{K}^p = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$$

Trigonalisation

CNS : χ_A scindé

toujours vrai dans $\mathbb{C}$

$T = P^{-1}\,A\,P$ triangulaire

Système différentiel linéaire

$X' = A\,X$

$X(t) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, e^{\lambda_k t}\, U_k$

où $\alpha_k \in \mathbb{K}$

On pose $Y(t) = P^{-1}\,X(t)$

$Y' = TY$ se résout en partant du bas

Diagonalisabilité

CNS : χ_A scindé et $m_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A)$

Diagonalisation

$\mathcal{B} = (U_1, \ldots, U_n)$ base telle que $A\,U_k = \lambda_k\,U_k$

$D = P^{-1}\,A\,P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$

où $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$

cas part.1 : χ_A scindé à racines simples

cas part.2 : $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ singleton

Alors A diagonalisable $\Leftrightarrow A = \lambda\, I_p$

Théorème spectral

Si $A^T = A$, alors A possède une base orthonormale de vecteurs propres

Puissances de A

$A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

où $D^n = \mathrm{diag}(\lambda_k^n)$

Récurrence linéaire

$$u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, u_{n+k} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \text{ et } U_{n+1} = A\,U_n \text{ d'où } U_n = A^n\,U_0$$

$u_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, \lambda_k^n$ où $\alpha_k \in \mathbb{K}$

by Julien Frontisi