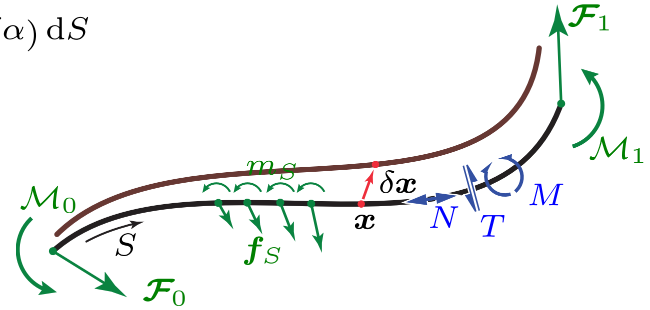
Résultat préliminaire : travail élémentaire des efforts extérieurs

Une configuration $\boldsymbol{x}(S)$ est maintenue en équilibre par un effort extérieur $\boldsymbol{f}_S(S)$, $m_S(S)$ distribué, et $(\boldsymbol{\mathcal{F}}_0, \mathcal{M}_0)$ et $(\boldsymbol{\mathcal{F}}_1, \mathcal{M}_1)$ aux extrémités. Le travail des efforts extérieurs $\delta\mathcal{W}$ pour passer à une configuration $\boldsymbol{x}(S) + \delta\boldsymbol{x}(S)$ voisine vaut :

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{W} &= \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{F}}_0}_{-\boldsymbol{R}(S_0)} \cdot \delta\boldsymbol{x}_0 + \underbrace{\mathcal{M}_0}_{-M(S_0)} \delta\alpha_0 + \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{F}}_1}_{\boldsymbol{R}(S_1)} \cdot \delta\boldsymbol{x}_1 + \underbrace{\mathcal{M}_1}_{M(S_1)} \delta\alpha_1 + \int_{S_0}^{S_1} \Big(\underbrace{\boldsymbol{f}_S}_{-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}S}} \cdot \delta\boldsymbol{x} + \underbrace{m_S}_{-\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}S} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} \wedge \boldsymbol{R}\right)} \delta\alpha \Big) \mathrm{d}S \\
&= \Big[\boldsymbol{R} \cdot \delta\boldsymbol{x} + M\,\delta\alpha \Big]_{S_0}^{S_1} - \int_{S_0}^{S_1} \Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}S} \cdot \delta\boldsymbol{x} + \Big(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}S} + (1+\varepsilon)\,\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{R} \Big) \delta\alpha \Big) \mathrm{d}S \\
&= \int_{S_0}^{S_1} \Big(\boldsymbol{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} + M \frac{\mathrm{d}\delta\alpha}{\mathrm{d}S} - (1+\varepsilon)\,\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}\,\delta\alpha \Big) \mathrm{d}S \\
&= \int_{S_0}^{S_1} \Big(\boldsymbol{R} \cdot \Big[\frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} - (1+\varepsilon)\,\boldsymbol{n}\,\delta\alpha \Big] + M \frac{\mathrm{d}\delta\alpha}{\mathrm{d}S} \Big) \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$



Relations cinématiques :

config. $\boldsymbol{x}$	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} = \boldsymbol{t}\,(1+\varepsilon)$	$\kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S} - \frac{\mathrm{d}\alpha_R}{\mathrm{d}S}$
config. $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$	$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{x} + \delta x)}{\mathrm{d}S} = (\boldsymbol{t} + \boldsymbol{n}\,\delta\alpha)\,(1+\varepsilon+\delta\varepsilon)$	$\kappa + \delta\kappa = \frac{\mathrm{d}(\alpha+\delta\alpha)}{\mathrm{d}S} - \frac{\mathrm{d}\alpha_R}{\mathrm{d}S}$
différence	$\frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} = \boldsymbol{t}\,\delta\varepsilon + \boldsymbol{n}\,(1+\varepsilon)\,\delta\alpha$	$\delta\kappa = \frac{\mathrm{d}\delta\alpha}{\mathrm{d}S}$

$$\Rightarrow \boxed{\delta\mathcal{W} = \int_{S_0}^{S_1} (N\,\delta\varepsilon + M\,\delta\kappa)\,\mathrm{d}S}$$