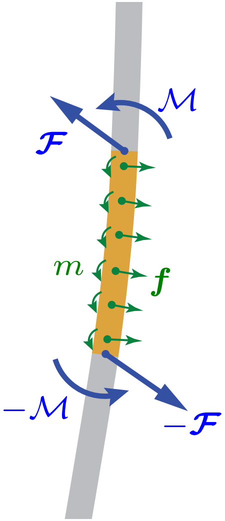
Mécanique des milieux déformables MEC 430

Amphi 8



Basile Audoly

Plan du cours

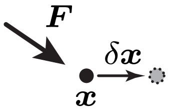
Amphi 1	géométrie efforts, équilibre	Ch 1 (début) + Ch 2
Amphi 2	déformation comportement	Ch 1 (suite) + Ch 3
Amphi 3	problèmes aux limites	Ch 4
Amphi 4	statique	Ch 4
Amphi 5	le modèle HPP	Ch 5
Amphi 6	dynamique	Ch 6
Amphi 7	dynamique	Ch 6
Amphi 8	approche variationnelle de l'équilibre	Ch 7 + Ch 8
Amphi 9	stabilité	Ch 7 + Ch 8
Amphi 10	ouverture	—

Rappels sur l’énergie

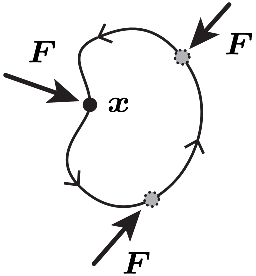
Énergie potentielle

Quand on passe de $\boldsymbol{x}$ à $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$, $\boxed{\underbrace{\delta\mathcal{P}_{\text{ext}}}_{} = -\underbrace{\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{x}}_{\delta\mathcal{W}}}$

énergie potentielle travail élémentaire



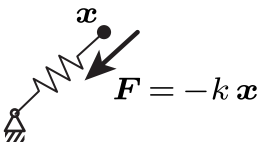
- Cas d'une force invariable $\boldsymbol{F}$
  - $\delta\mathcal{P}_{\text{ext}} = -\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{x} = \delta(-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{ext}} = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x} + \text{Cte}}$



- Cas général : $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ dépend de la position
  - $\delta\mathcal{P}_{\text{ext}} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\delta\boldsymbol{x}$ n'est *intégrable* que si $\left\{\oint \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \ \forall \text{ chemin fermé}\right\}$

    la force est alors dite *conservative*
  - exemple, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -k\,\boldsymbol{x}$ (ressort linéaire) :

    $\delta\mathcal{P}_{\text{ext}} = k\,\boldsymbol{x}\cdot\delta\boldsymbol{x} = \delta\left(\frac{1}{2}\,k\,\boldsymbol{x}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{ext}} = \boxed{\frac{1}{2}}\,k\,\boldsymbol{x}^2 + \text{Cte} \quad \boxed{\neq -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}}}$



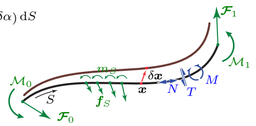
Énergie élastique

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathtt{ela}} = \int_0^{\ell_R} \mathtt{W_e}(\varepsilon, \kappa)\,\mathrm{d}S \quad \text{et} \quad \delta\mathcal{P}_{\mathtt{ela}} = \int_0^{\ell_R} (N\,\delta\varepsilon + M\,\delta\kappa)\,\mathrm{d}S}$$

Résultat préliminaire : travail élémentaire des efforts extérieurs

Une configuration $\boldsymbol{x}(S)$ est maintenue en équilibre par un effort extérieur $\boldsymbol{f}_S(S)$, $m_S(S)$ distribué, et $(\boldsymbol{\mathcal{F}}_0, \mathcal{M}_0)$ et $(\boldsymbol{\mathcal{F}}_1, \mathcal{M}_1)$ aux extrémités. Le travail des efforts extérieurs $\delta\mathcal{W}$ pour passer à une configuration $\boldsymbol{x}(S) + \delta\boldsymbol{x}(S)$ voisine vaut :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{W} &= \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{F}}_0}_{-\boldsymbol{R}(S_0)} \cdot \delta\boldsymbol{x}_0 + \underbrace{\mathcal{M}_0}_{-M(S_0)} \delta\alpha_0 + \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{F}}_1}_{\boldsymbol{R}(S_1)} \cdot \delta\boldsymbol{x}_1 + \underbrace{\mathcal{M}_1}_{M(S_1)} \delta\alpha_1 + \int_{S_0}^{S_1} \Big(\underbrace{\boldsymbol{f}_S}_{-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}S}} \cdot \delta\boldsymbol{x} + \underbrace{m_S}_{-\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}S} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} \wedge \boldsymbol{R}\right)} \delta\alpha \Big)\,\mathrm{d}S \\
&= \Big[\boldsymbol{R} \cdot \delta\boldsymbol{x} + M\,\delta\alpha \Big]_{S_0}^{S_1} - \int_{S_0}^{S_1} \Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}S} \cdot \delta\boldsymbol{x} + \Big(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}S} + (1+\varepsilon)\,\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{R} \Big)\,\delta\alpha \Big)\,\mathrm{d}S \\
&= \int_{S_0}^{S_1} \Big(\boldsymbol{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} + M\,\frac{\mathrm{d}\delta\alpha}{\mathrm{d}S} - (1+\varepsilon)\,\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}\,\delta\alpha \Big)\,\mathrm{d}S \\
&= \int_{S_0}^{S_1} \Big(\boldsymbol{R} \cdot \Big[\frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} - (1+\varepsilon)\,\boldsymbol{n}\,\delta\alpha \Big] + M\,\frac{\mathrm{d}\delta\alpha}{\mathrm{d}S} \Big)\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$



Relations cinématiques :

config. $\boldsymbol{x}$	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} = \boldsymbol{t}\,(1+\varepsilon)$	$\kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S} - \frac{\mathrm{d}\alpha_R}{\mathrm{d}S}$
config. $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$	$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{x}+\delta x)}{\mathrm{d}S} = (\boldsymbol{t} + \boldsymbol{n}\,\delta\alpha)\,(1+\varepsilon+\delta\varepsilon)$	$\kappa + \delta\kappa = \frac{\mathrm{d}(\alpha+\delta\alpha)}{\mathrm{d}S} - \frac{\mathrm{d}\alpha_R}{\mathrm{d}S}$
différence	$\frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}S} = \boldsymbol{t}\,\delta\varepsilon + \boldsymbol{n}\,(1+\varepsilon)\,\delta\alpha$	$\delta\kappa = \frac{\mathrm{d}\delta\alpha}{\mathrm{d}S}$

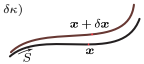
$\Rightarrow \boxed{\delta\mathcal{W} = \int_{S_0}^{S_1} (N\,\delta\varepsilon + M\,\delta\kappa)\,\mathrm{d}S}$

Le comportement élastique

Définition (milieu élastique) :
le travail fourni par les efforts extérieurs est stocké sous forme d'énergie élastique $\mathcal{P}_{\mathtt{ela}} = \int_{S_0}^{S_1} \underbrace{\mathtt{W_e}}_{\text{potentiel élastique}}(\varepsilon(S), \kappa(S))\,\mathrm{d}S$.

La variation d'énergie élastique entre deux équilibres voisins *quelconques* (ε, κ) et $(\varepsilon + \delta\varepsilon, \kappa + \delta\kappa)$

$$\begin{aligned}
\delta\Big[\int_{S_0}^{S_1} \mathtt{W_e}(\varepsilon(S), \kappa(S))\,\mathrm{d}S \Big] &= \int_{S_0}^{S_1} \delta[\mathtt{W_e}(\varepsilon(S), \kappa(S))]\,\mathrm{d}S \\
&= \int_{S_0}^{S_1} \Big(\frac{\partial \mathtt{W_e}}{\partial\varepsilon}(\varepsilon(S), \kappa(S))\,\delta\varepsilon(S) + \frac{\partial \mathtt{W_e}}{\partial\kappa}(\varepsilon(S), \kappa(S))\,\delta\kappa(S) \Big)\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$



est donc identifiée avec le travail des efforts extérieurs $\delta\mathcal{W} = \int_{S_0}^{S_1} (N\,\delta\varepsilon + M\,\delta\kappa)\,\mathrm{d}S$

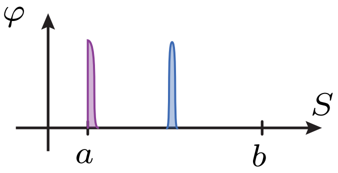
$\Rightarrow$ *comportement général d'une poutre élastique :* $\begin{aligned} N &= \mathtt{N_e}(\varepsilon, \kappa) \\ M &= \mathtt{M_e}(\varepsilon, \kappa) \end{aligned}$ où $\begin{aligned} \mathtt{N_e}(\varepsilon, \kappa) &= \frac{\partial \mathtt{W_e}}{\partial\varepsilon}(\varepsilon, \kappa) \\ \mathtt{M_e}(\varepsilon, \kappa) &= \frac{\partial \mathtt{W_e}}{\partial\kappa}(\varepsilon, \kappa) \end{aligned}$

Pas de loi de comportement pour T qui peut être calculé par l'équilibre $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}S} + (1+\varepsilon)\,T + m_S = 0$.

Outils pour le calcul variationnel

Lemme fondamental du calcul des variations

- soient deux réels F_a, F_b, une fonction $f\colon (a\,,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ et des fonctions test $\varphi\colon (a\,,b) \longrightarrow \mathbb{R}$



$$\left[\forall \varphi \;\; F_a\,\varphi(a) + F_b\,\varphi(b) + \int_a^b f(S)\,\varphi(S)\,\mathrm{d}S = 0\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_a = 0 \\ F_b = 0 \\ f(S) = 0 \quad \forall S \end{cases}$$

  - *preuve* : considérer des φ localisées

- variante, avec perturbations restreintes

$$\left[(\forall \varphi \text{ telles que } \varphi(a) = 0) \;\; F_a\,\underbrace{\varphi(a)}_{=0} + F_b\,\varphi(b) + \int_a^b f(S)\,\varphi(S)\,\mathrm{d}S = 0\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cancel{F_a = 0} \\ F_b = 0 \\ f(S) = 0 \quad \forall S \end{cases}$$

- interdit d'avoir la dérivée de la fonction test sous l'intégrale

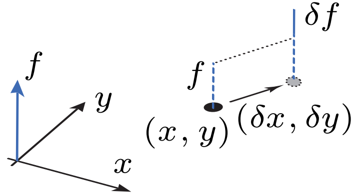
$$\left[\forall \varphi \qquad a \cdot \varphi(a) + (-b)\,\varphi(b) + \int_a^b [1 \cdot \varphi(S) + S \cdot \boxed{\varphi'(S)}\,]\,\mathrm{d}S = 0\right] \quad \not\Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

Première variation d'une fonction

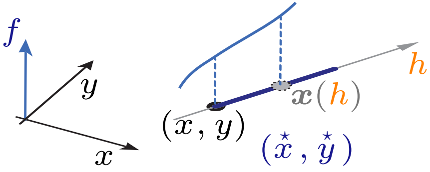
Pour $f(x, y)$ une fonction à deux variables réelles,

Définition (*1^e^ variation*) :

$$\delta f = f'(x,y)(\delta x, \delta y) = \left[\begin{array}{l}\text{termes d'ordre 1 dans le développement de Taylor}\\ \text{de } f(x+\delta x, y+\delta y) \text{ par rapport à } (\delta x, \delta y)\end{array}\right]$$



Exemple : $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y \rightarrow$
$$\begin{aligned} f(x+\delta x, y+\delta y) &= \frac{1}{2}(x+\delta x)^2(y+\delta y) - \frac{1}{2}x^2 y \\ &= \frac{1}{2}x^2 y + \underbrace{x\, y\, \delta x + \frac{1}{2}x^2\, \delta y}_{\begin{aligned}\delta f &= f'(x,y)(\delta x, \delta y)\\ &= \boxed{\mathrm{grad}\, f(x,y)\cdot(\delta x, \delta y)}\end{aligned}} + \mathcal{O}(|\delta x, \delta y|^2)\end{aligned}$$



Point de vue équivalent :

- configurations $\boldsymbol{x}(h) = (x + \overbrace{h\, \overset{\star}{x}}^{\delta x}, y + \overbrace{h\, \overset{\star}{y}}^{\delta y})$ indexées par un temps « virtuel » h
- $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}h} = (\overset{\star}{x}, \overset{\star}{y})$: vitesse virtuelle (*finie*)
- $\boxed{\frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}(h))}{\mathrm{d}h}(0) = f'(x,y)(\overset{\star}{x}, \overset{\star}{y})}$ est la dérivée *virtuelle* ou *directionnelle*
  - *preuve* : $f(\boldsymbol{x}(h)) = f(x,y) + h\, f'(x,y)(\overset{\star}{x}, \overset{\star}{y}) + h^2 \cdots$

Première variation d'une fonctionnelle

Soit par exemple $\mathcal{L}(\mathtt{w}) = \int_0^1 \sqrt{1+\mathtt{w}'^2(x)}\,\mathrm{d}x$, pour $\mathtt{w}\colon (0,1) \to \mathbb{R}$.

Calcul de la 1^{e} variation,

- on se donne deux fonctions $(0,1) \to \mathbb{R}$: $\mathtt{w}(\cdot)$ et $\delta\mathtt{w}(\cdot)$,
- on développe au 1^{er} ordre en supposant $\delta\mathtt{w}(\cdot)$ petit

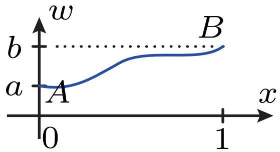
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathtt{w}+\delta\mathtt{w}) &= \int_0^1 \sqrt{1+\big(\mathtt{w}'(x)+\delta\mathtt{w}'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+\mathtt{w}'^2(x)+2\,\mathtt{w}'(x)\,\delta\mathtt{w}'(x)+\cdots}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+\mathtt{w}'^2(x)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathtt{w}'(x)}{\sqrt{1+\mathtt{w}'^2(x)}}\,\delta\mathtt{w}'(x)\,\mathrm{d}x}_{\delta\mathcal{L}=\mathcal{L}'(\mathtt{w})(\delta\mathtt{w})} + \mathcal{O}(|\delta\mathtt{w},\delta\mathtt{w}',\ldots|^2)
\end{aligned}$$

- ce $\mathcal{L}'(\mathtt{w})(\delta\mathtt{w})$ *remplace* la notion de gradient : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\mathtt{w}}$ n'a aucun sens

On peut aussi utiliser $\mathcal{L}'(\mathtt{w})(\delta\mathtt{w}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\int_0^1 \sqrt{1+\big(\mathtt{w}'(x)+h\,\delta\mathtt{w}'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{h=0} = \cdots$

Un problème de plus court chemin

$\mathcal{L}(\mathtt{w}) = \int_0^1 \sqrt{1+\mathtt{w}'^2(x)}\,\mathrm{d}x$ s'interprète comme la longueur du graphe



En calculant les *points stationnaires* $\mathtt{w}$ de $\mathcal{L}(\mathtt{w})$, peut-on obtenir le **plus court chemin** de A à B ? $\Updownarrow$ $\forall \delta\mathtt{w} \quad \mathcal{L}'(\mathtt{w})(\delta\mathtt{w}) = 0$

La réponse est $\boxed{\text{non}}$:

- prenons $\delta\mathtt{w}(x) = h\,\mathtt{w}(x)$, $h \ll 1$: $\quad 0 = \mathcal{L}'(\mathtt{w})(\delta\mathtt{w} \equiv h\,\mathtt{w}(\cdot)) = h\int_0^1 \frac{\mathtt{w}'^2(x)}{\sqrt{1+\mathtt{w}'^2(x)}}\,\mathrm{d}x$ et donc $\mathtt{w}' \equiv 0 \Rightarrow \boxed{\mathtt{w}(x) = \mathrm{Cte}}$
- on n'a pas résolu le bon problème :
  - on n'a jamais spécifié les extrémités A et B
  - il faut chercher les points stationnaires de $\mathcal{L}(\mathtt{w})$ dans $\overbrace{\{\mathtt{w} : \mathtt{w}(0) = a \text{ et } \mathtt{w}(1) = b\}}^{\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \text{ (ensemble des configurations admissibles)}}$

Un problème variationnel est défini à la fois par $\boxed{\text{l'énergie } \mathcal{L}}$ et par $\boxed{\text{l'espace } \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}}$

Condition de stationnarité

Pb : trouver les points stationnaires
de $\mathcal{L}(w) = \int_0^1 \sqrt{1 + w'^2(x)}\,\mathrm{d}x$
dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \{w : w(0) = a \text{ et } w(1) = b\}$

Perturbations admissibles : étant donné $w \in \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$, $\delta w \in \boxed{\mathcal{V}_{\mathrm{ad}}(w)}$ ssi $w + \delta w$ vérifie les conditions d'appartenance à $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ (au 1$^{\text{er}}$ ordre en δw)

- w tel que $\begin{cases} w(0) = a \\ w(1) = b \end{cases}$; δw tel que $\begin{cases} w(0) + \delta w(0) = a \\ w(1) + \delta w(1) = b \end{cases}$
- $\boxed{\mathcal{V}_{\mathrm{ad}}(w) = \{\delta w : \delta w(0) = 0 \text{ et } \delta w(1) = 0\}}$

Condition de stationnarité :
w rend $\mathcal{L}$ stationnaire sur $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$

$$\text{ssi} \begin{cases} w \in \mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \\ \boxed{\forall \delta w \in \mathcal{V}_{\mathrm{ad}}} \quad \overbrace{\mathcal{L}'(w)(\delta w)}^{\delta \mathcal{L}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w(0) = a \text{ et } w(1) = b \\ \boxed{\forall \delta w \text{ t.q. } \delta w(0) = 0 \text{ et } \delta w(1) = 0} \quad \int_0^1 \frac{w'(x)}{\sqrt{1 + w'^2(x)}}\, \delta w'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

Remarques :

- tout minimum de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ est un point stationnaire (amphi 9)
- l'incrément δw est une variable muette, que l'on va éliminer avant de trouver $w(\cdot)$

$\mathtt{w}$ rend $\mathcal{L}$ stationnaire sur $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ ssi :

$$\begin{cases} \mathtt{w}(0) = a \text{ et } \mathtt{w}(1) = b \\ \forall \delta\mathtt{w} \text{ t.q. } \delta\mathtt{w}(0) = 0 \text{ et } \delta\mathtt{w}(1) = 0 \end{cases}$$

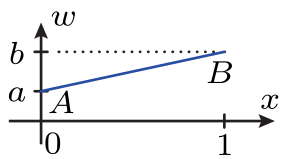
$$\int_0^1 \frac{\mathtt{w}'(x)}{\sqrt{1+\mathtt{w}'^2(x)}}\,\delta\mathtt{w}'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

int. par parties

$$\frac{\mathtt{w}'(1)}{\sqrt{1+\mathtt{w}'^2(1)}}\,\delta\mathtt{w}(1) - \frac{\mathtt{w}'(0)}{\sqrt{1+\mathtt{w}'^2(0)}}\,\delta\mathtt{w}(0) - \int_0^1 \frac{\mathtt{w}''(x)}{(1+\mathtt{w}'^2(0))^{3/2}}\,\delta\mathtt{w}(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Le lemme fondamental du calcul variationnel permet d'éliminer la perturbation $\delta\mathtt{w}$ (variante avec restriction),

$$\mathtt{w}(0) = a \qquad \mathtt{w}(1) = b \qquad (\ldots)\,\mathtt{w}''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathtt{w}(x) = a + (b-a)\,x$$

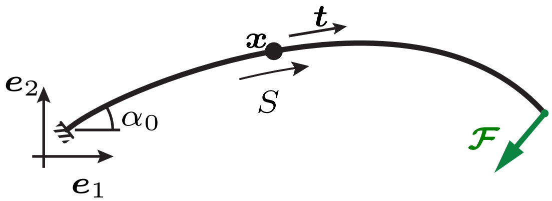


Formulation énergétique d'un problème élastique

Comportement :

inextensible ($\varepsilon = 0$)

flexion élastique linéaire ($M = \overline{EI}\,\kappa$)



Cinématique non-linéaire :

$$\boldsymbol{x}(S) = \int_0^S \boldsymbol{t}(\alpha(\tilde{S}))\,\mathrm{d}\tilde{S}$$

où $\boldsymbol{t}(\alpha) = \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha\,\boldsymbol{e}_2$

$\kappa(S) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S}$

$\alpha(0) = \alpha_0$

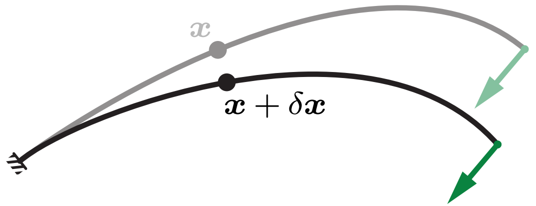
Chargement : $\mathcal{F}$

But : obtenir les équations d'équilibre par une approche énergétique

Devinons le potentiel

- Potentiel **élastique**, $\boxed{\delta \mathcal{P}_{\texttt{ela}} = \int_0^{\ell_R} (M\,\delta\kappa + N\,\delta\varepsilon)\,\mathrm{d}S}$
  - par l'inextensibilité, $\delta\varepsilon = 0$
  - $\delta \mathcal{P}_{\texttt{ela}} = \int_0^{\ell_R} M\,\delta\kappa\,\mathrm{d}S = \int_0^{\ell_R} \overline{EI}\,\kappa\,\delta\kappa\,\mathrm{d}S$

    s'intègre en $\mathcal{P}_{\texttt{ela}}(\kappa) = \int_0^{\ell_R} \frac{\overline{EI}}{2}\,\kappa^2(S)\,\mathrm{d}S$



- Potentiel du **chargement** (force morte)

$$\mathcal{P}_{\texttt{ext}}(\alpha) = -\boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot \overbrace{\int_0^{\ell_R} \boldsymbol{t}(\alpha(S))\,\mathrm{d}S}^{\boldsymbol{x}(\ell_R)}$$
$$= -\mathcal{F}_1 \int_0^{\ell_R} \cos(\alpha(S))\,\mathrm{d}S - \mathcal{F}_2 \int_0^{\ell_R} \sin(\alpha(S))\,\mathrm{d}S$$

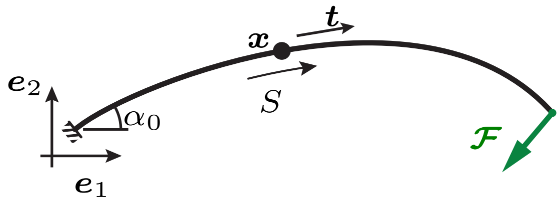
- Au total, $\boxed{\mathcal{P}_{\texttt{tot}}(\alpha) = \underbrace{\int_0^{\ell_R} \frac{\overline{EI}}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S}\right)^2 \mathrm{d}S}_{\mathcal{P}_{\texttt{ela}}} \underbrace{-\boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot \int_0^{\ell_R} \boldsymbol{t}(\alpha(S))\,\mathrm{d}S}_{\mathcal{P}_{\texttt{ext}}}}$

Espace des configuration admissibles

Construction de $\mathcal{C}_{\text{ad}}$ (règle heuristique) :

N'inclure dans $\mathcal{C}_{\text{ad}}$ que les configurations satisfaisant :

- les conditions de bord **cinématiques**,
- l'inextensibilité (le cas échéant)
- et les conditions de régularité



ici,

- $\alpha(0) = \alpha_0$
- automatique car $\boldsymbol{x}(S) = \int_0^S \boldsymbol{t}(\alpha(\tilde{S}))\,\mathrm{d}\tilde{S}$
- α continue et dérivable

$$\boxed{\mathcal{C}_{\text{ad}} = \{\alpha : \alpha(0) = \alpha_0 \text{ et } \alpha \text{ continue et dérivable}\}}$$

Justification : la « vraie » énergie du système est $\begin{cases} \mathcal{P}_{\text{tot}}(\alpha) & \text{si } \alpha \in \mathcal{C}_{\text{ad}} \\ \boxed{\infty} & \text{si } \alpha \notin \mathcal{C}_{\text{ad}} \end{cases}$

par exemple, l'encastrement cache une énergie élastique infinie dès que $\alpha \neq \alpha_0$

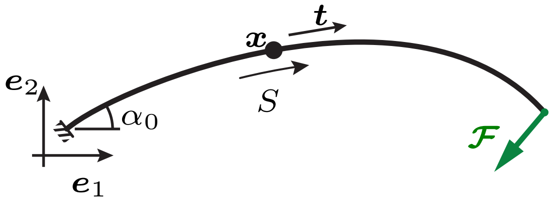
$\boxed{\text{calculer } \mathcal{P}_{\text{tot}}(\alpha) \text{ n'a de sens que si } \alpha \in \mathcal{C}_{\text{ad}}}$

Équivalence équilibre / stationnarité de l'énergie

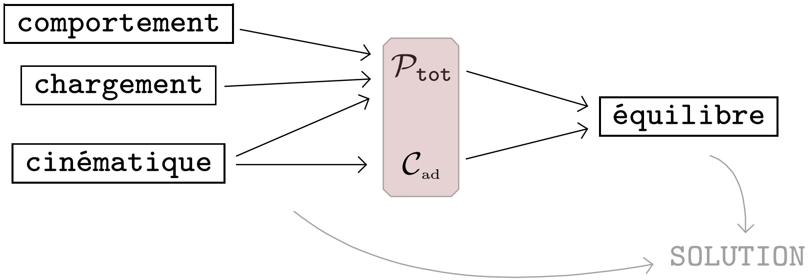
La formulation énergétique

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} &= \{\alpha : \alpha(0) = \alpha_0\} \\
\mathcal{P}_{\mathtt{tot}}(\alpha) &= \int_0^{\ell_R} \frac{EI}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S}\right)^2 \mathrm{d}S \; - \mathcal{F} \cdot \int_0^{\ell_R} \boldsymbol{t}(\alpha(S))\, \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

"$\Longleftrightarrow$"



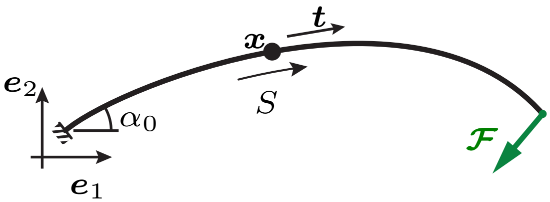
Un aperçu de ce qui suit...



Première variation de l'énergie :

$$\mathcal{P}_{\mathtt{tot}}(\alpha+\delta\alpha) = \int_0^{\ell_R}\Big(\frac{\overline{EI}}{2}\underbrace{(\alpha'+\delta\alpha')^2}_{\alpha'^2+\,2\alpha'\delta\alpha'\,+\cdots} - \boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\underbrace{\boldsymbol{t}(\alpha+\delta\alpha)}_{\boldsymbol{t}(\alpha)+\,\boldsymbol{n}(\alpha)\delta\alpha\,+\cdots}\Big)\,\mathrm{d}S$$

$$= \mathcal{P}_{\mathtt{tot}}(\alpha) + \underbrace{\int_0^{\ell_R}\big(\underbrace{\overline{EI}\,\alpha'}_{\tilde{M}}\,\delta\alpha' - \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\boldsymbol{n}(\alpha)}_{\tilde{T}}\,\delta\alpha\big)\,\mathrm{d}S}_{\delta\mathcal{P}_{\mathtt{tot}}=\mathcal{P}'_{\mathtt{tot}}(\alpha)(\delta\alpha)} + \cdots$$



Perturbations admissibles :

$$\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \{\alpha : \alpha(0)=\alpha_0\} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{V}_{\mathrm{ad}} = \{\delta\alpha : \delta\alpha(0) = 0\}$$

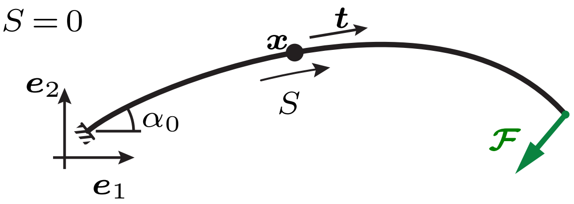
Ainsi α rend $\mathcal{P}_{\mathtt{tot}}(\alpha)$ stationnaire sur $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$

ssi
$$\boxed{\begin{cases}\alpha(0)=\alpha_0\\ \boxed{\forall\delta\alpha \text{ t.q. } \delta\alpha(0)=0} \quad \int_0^{\ell_R}\tilde{M}(S)\,\delta\alpha'(S)\,\mathrm{d}S - \int_0^{\ell_R}\tilde{T}(S)\,\delta\alpha(S)\,\mathrm{d}S = 0\end{cases}}$$
(ppe des travaux virtuels)

$\tilde{M}$: $\boxed{\overline{EI}\,\alpha'(S)}$ $\qquad$ $\tilde{T}$: $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\boldsymbol{n}(\alpha)}$

La stationnarité implique l'équilibre

Supposons $\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0 \\ \forall \delta\alpha \text{ t.q. } \delta\alpha(0) = 0 \quad \int_0^{\ell_R} \underset{\overset{\uparrow}{\overline{EI}\,\alpha'(S)}}{\tilde{M}}(S)\,\delta\alpha'(S)\,\mathrm{d}S - \int_0^{\ell_R} \underset{\overset{\uparrow}{\boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot \boldsymbol{n}(\alpha)}}{\tilde{T}}(S)\,\delta\alpha(S)\,\mathrm{d}S = 0 \end{cases}$



Avec une intégration par parties,

$$(\forall \delta\alpha \text{ tel que } \delta\alpha(0) = 0) \quad \tilde{M}(\ell_R)\,\delta\alpha(\ell_R) - \tilde{M}(0)\,\underbrace{\delta\alpha(0)}_{=0} - \int_0^{\ell_R} \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{M}}{\mathrm{d}S} + \tilde{T} \right) \delta\alpha(S)\,\mathrm{d}S = 0$$

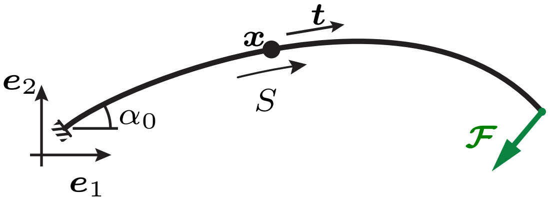
Par le lemme fondamental (avec restriction), on a $\boxed{\tilde{M}(\ell_R) = 0}$ et $\boxed{\frac{\mathrm{d}\tilde{M}}{\mathrm{d}S} + \tilde{T} = 0 \quad \forall S}$.

On retrouve ainsi le problème aux limites *complet* gouvernant l'équilibre: $\overbrace{\overline{EI}\,\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}S^2}}^{\frac{\mathrm{d}\tilde{M}}{\mathrm{d}S}} + \overbrace{\boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot \boldsymbol{n}(\alpha(S))}^{\tilde{T}} = 0$

$$\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0 \\ \alpha'(\ell_R) = 0 \end{cases}$$

L'équilibre implique la stationnarité

Dans l'autre sens, si on suppose les équations d'équilibre vérifiées, $\overline{EI}\,\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}S^2} + \boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\boldsymbol{n}(\alpha(S)) = 0$,
$$\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0 \\ \alpha'(\ell_R) = 0 \end{cases}$$



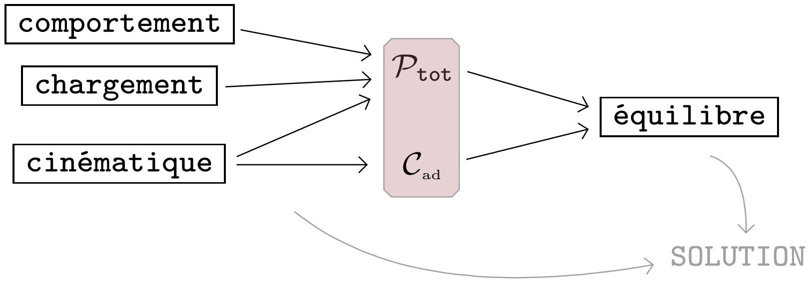
alors

$$\int_0^{\ell_R} [\underbrace{\overline{EI}\,\alpha'}_{\tilde{M}}\,\delta\alpha' - \underbrace{\boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\boldsymbol{n}}_{\tilde{T}}\,\delta\alpha]\,\mathrm{d}S = \overline{EI}\,\underbrace{\alpha'}_{=0}\,\delta\alpha\big|_{\ell_R} - \underbrace{\overline{EI}\,\alpha'\,\delta\alpha\big|_0}_{?} - \int_0^{\ell_R} (\underbrace{\overline{EI}\,\alpha'' + \boldsymbol{\mathcal{F}}\cdot\boldsymbol{n}}_{=0})\,\delta\alpha\,\mathrm{d}S \qquad \text{(intégr. par parties)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0 \\ (\forall \delta\alpha \text{ tel que } \delta\alpha(0) = 0) \quad \int_0^{\ell_R} [\tilde{M}\,\delta\alpha' - \tilde{T}\,\delta\alpha]\,\mathrm{d}S = 0 \end{cases}$$ (stationnarité de $\mathcal{P}_{\mathtt{tot}}$ sur $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$)

Bilan

- Déduction variationnelle des équations d'équilibre :
  - définir $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ et $\mathcal{P}_{\mathtt{tot}}$ (formulation énergétique)
  - en déduire $\mathcal{V}_{\mathrm{ad}}$ et $\mathcal{P}'_{\mathtt{tot}}$
  - principe des travaux virtuels :
    $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ et $(\forall \delta\alpha \in \mathcal{V}_{\mathrm{ad}})\ \mathcal{P}'_{\mathtt{tot}}(\alpha)(\delta\alpha) = 0$
  - intégration par parties pour obtenir l'équilibre
- Condition de validité
  - loi de comportement élastique
    - pas nécessairement linéaire
  - chargement conservatif
- La formulation énergétique ($\mathcal{P}_{\mathtt{tot}}$, $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$)
  caractérise la structure de façon *complète* et *minimale*



- À quoi sert l'approche énergétique ?
  - approximations numériques (méthode des éléments finis)
  - obtenir de façon systématique (et rapide) de nombreux modèles (p. ex. modèle HPP, membrane axisymétrique)
  - unicité de la solution HPP
  - stabilité
  - ...