

MMPI

ETH Zurich

Marcel Graetz
Annina Lieberherr
Janik Schuettler

HS17

Contents

Contents	i
1 Fourierreihen	1
1.1 Definition, Darstellungssatz	1
1.2 Riemann–Lebesgue-Lemma, Dirichletkern	1
1.3 Reellwertige Darstellung der Fourierreihen	1
1.4 Poisson’sche Summationsformel	1
1.5 Wärmeleitungsgleichung auf einem Ring	1
1.6 Satz von Fejér	1
1.7 Rechnungen	1
2 Fouriertransformation	1
2.1 Definition und elementare Eigenschaften	1
2.2 Fouriertransformierte der Gauss-Funktion	1
2.3 Beispiele für Fouriertransformierte	2
2.4 Umkehrsatz für L^1 -Funktionen	2
2.5 Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n), p \in [1, \infty)$	2
2.6 Fouriertransformation von rotationsinvarianten Funktionen	2
2.7 Regularität und Abfalleigenschaften	2
2.8 Wellengleichung	2
2.9 Wärmeleitungsgleichung	2
2.10 Rechnungen	3
3 Orthogonale Funktionalsysteme, Hilbertraum	3
3.1 Die schwingende Saite	3
3.2 Orthogonale Systeme, Hilberträume	3
3.3 L^2 -Theorie der Fourierreihen	3
3.4 Hermite-Polynome und harmonischer Oszillator	3
3.5 Orthogonale Polynome, Legendre Polynome	3
3.6 Kugelfunktionen	4
3.7 Schwingungen einer kreisförmigen Membran	4
4 Distributionen	4
4.1 Temperierte Distributionen	4
4.2 Operationen auf Distributionen	4
4.3 Rechnungen	4
4.4 Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	4
4.5 Fundamentallösungen für den Laplace-Operator	4
4.6 Fundamentallösungen und Fouriertransformationen	5
4.7 Retardierte Fundamentallösung für den d’Alembert-Operator	5
5 Dirichletproblem	5
5.1 Dirichlet und Neumannrandbedingungen	5
5.2 Greensche Funktionen	5
5.3 Methode der Spiegelbildladung, Poissonformel	5
6 Beweisideen	5
6.1 Fourierreihen	5
A Lebesgue-Integrationstheorie	5
A.1 Das Lebesguesche Integral	5
A.2 Konvergenzsätze	5
A.3 Der Satz von Fubini	5
A.4 L^p -Räume	5
B Misc	6
B.1 Konvergenz, Mittelwertsatz	6
B.2 Vertauschungssätze	6
B.3 Trigonometrie	6
B.4 Ungleichungen, Abschätzungen und other	6
B.5 Integrale und Reihen	6
B.6 Koordinatensysteme	6
B.7 Ansätze	6
B.8 PDEs	6
B.9 Multiple Choice	6

1 Fourierreihen

f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L} x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(\frac{2\pi n}{L} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{L} x)

f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \exp(-\frac{2\pi i n}{L} x) dx

a_n = 2 \operatorname{Re} f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\frac{2\pi n}{L} x) dx, b_n = -2 \operatorname{Im} f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{2\pi n}{L} x) dx

1.1 Definition, Darstellungssatz

Lemma 1.1 $\frac{1}{L} \int_0^L e^{\frac{2\pi i n}{L} x} dx = 0$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $= 1$ für $n = 0$.

Satz 1.2 Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ so, dass $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < \infty$. Dann konvergiert die Fourierreihe $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L} x)$ absolut und gleichmässig für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen eine periodische, stetige Funktion f der Periode L . Weiter gilt $f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \exp(-\frac{2\pi i n}{L} x) dx$.

1.2 Riemann-Lebesgue-Lemma, Dirichletkern

Satz 2.1 (Riemann-Lebesgue) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und L -periodisch (bzw. Lebesgue-integrierbar auf $[0, 1]$). Dann gilt $f_n \rightarrow 0$ für $|n| \rightarrow \infty$.

Korollar 2.2 Sei $f \in C^k(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$. Dann gilt $|n|^k |f_n| \rightarrow 0$ für $|n| \rightarrow \infty$ und somit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^k} < \infty$.

Definition 2.1 (Dirichlet-Kern) $D_N(t) = \sum_{n=-N}^N \exp(2\pi i n t)$. Es gilt

(i) $D_N = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 2N+1 & t \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (iii) $\int_0^1 D_N(t) dt = 1$

(ii) $D_N(t+1) = D_N(t) = D_N(-t)$, (iv) $\int_0^1 |D_N(t)| dt \geq \frac{4}{\pi^2} \log(2(n+1))$

Satz 2.3 (Darstellungssatz I) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$. Dann gilt $f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L} x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (s_N f)(x)$ punktweise $\forall x \in \mathbb{R}$.

Definition (Beschränkte Variation) Eine Funktion $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heisst von *beschränkter Variation*, falls es eine Konstante V gibt, so dass $\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq V$ für alle Einteilungen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Wir schreiben $f(a \pm 0) = \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)$. Stückweise stetig differenzierbare Funktionen sind von beschränkter Variation.

Satz 2.4 (Darstellungssatz II) Sei f L -periodisch und von beschränkter Variation auf $[0, L]$ und $s_N f(x) = \sum_{n=-N}^N f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L} x)$ die N -te Partialsumme ihrer Fourierreihe. Dann gilt

- $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N f(x) = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$. Insbesondere konvergiert die Fourierreihe gegen $f(x)$ in allen ihren Punkten x , wo f stetig ist.
- Die Konvergenz ist gleichmässig auf jedem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, auf welchem f stetig ist.

Satz v. Parseval $(f, g) = \int_0^L \bar{f} g dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{f}_n g_n$.

Falls $f = g \rightarrow \int_0^L |f|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2$

1.3 Reellwertige Darstellung der Fourierreihen

Für f reellwertig mit $f_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n)$, $f_{-n} = \bar{f}_n = \frac{1}{2} (a_n + i b_n)$ gilt $f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(\frac{2\pi n}{L} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{L} x)$, wobei $a_n = 2 \operatorname{Re} f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\frac{2\pi n}{L} x) dx$, $b_n = -2 \operatorname{Im} f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{2\pi n}{L} x) dx$. Es gilt $f_{-n} = \bar{f}_n$ für $n \geq 0$.

Sei $F(x) = \int_0^x f(y) dy$ für $f \in C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. Dann ist $F_n = \frac{f_n}{in}$, falls $n \neq 0$, und $F_n = -\sum_{m \neq 0} \frac{f_m}{im}$, falls $n = 0$.

1.4 Poisson'sche Summationsformel

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $|f|, |f'| \leq \frac{C}{1+x^2}$ für ein $C > 0$ und $g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + kL)$, $g \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$, $g(x+L) = g(x)$. Dann konvergiert diese Reihe gleichmässig auf $[0, L]$, also $g \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ und es gilt $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + nL) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \exp(\frac{2\pi i n}{L} x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} \hat{f}(2\pi n/L) \exp(\frac{2\pi i n}{L} x)$. Insbesondere folgt für $x = 0$ die Poisson'sche Summationsformel $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nL) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\frac{2\pi n}{L})$. Gilt allgemein für f integrierbar, stetig und von beschränkter Variation.

1.5 Wärmeleitungsgleichung auf einem Ring

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung})$$

Periode $L > 0$ und Konstante $D > 0$ können durch passende Substitution von x, t als 2π bzw. 1 angenommen werden.

Satz 5.1 (Wärmeleitungsgleichung) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $K(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-n^2 t + i n x)$ (Jacobische Theta-Funktion) für $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Dann ist $u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x-y, t) f(y) dy$ eine $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (0, \infty))$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung die gleichmässig gegen f für $t \downarrow 0$ konvergiert, d.h. $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = f(x)$. Da $u \in C^\infty$, ist u eindeutig.

Bew: Ansatz: $u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e^{i n x}$, $u_n(0) = f_n$ Mit der Poisson-Formel ist $K(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp(-\frac{(x-2\pi n)^2}{4t}) > 0$.

1.6 Satz von Fejér

Definition 6.1 (Fejerschen-Summen) sind arithmetische Mittel von Fourier-Partialsummen $(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (s_n f)(x)$. Also ist $\sigma_N f(x) = \int_0^1 f(y) K_N(x-y) dy$, wobei der Fejérsche Kern K_N durch $K_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t)$ gegeben ist.

Satz (Eigenschaften des Fejérsche Kern) Es gilt

(i) $K_N(t) = K_N(-t) = K_N(t+1)$, (ii) $\int_0^1 K_N(t) dt = 1$,

(iii) $K_N(t) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)} \right)^2$, fallst $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $K_N(t) = N$, fallst $t \in \mathbb{Z}$.

Satz 6.1 (Fejér, Darstellungssatz III) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, L -periodisch. Sei $\sigma_N f$ die N -te Fejérsche Summe $\sigma_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n f_m \exp(\frac{2\pi i m}{L} x)$. Dann gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} (\sigma_N f)(x) = f(x)$ mit gleichmässiger Konvergenz.

Definition 6.2 (Trigonometrische Polynome) sind endliche Linearkombinationen $\sum_{n=-N}^N c_n \exp(\frac{2\pi i n}{L} x)$

Korollar 6.2 Jede stetige periodische Funktion f kann gleichmässig durch trigonometrische Polynome beliebig gut approximiert werden.

Korollar 6.3 Seien f, g stetig, L -periodisch. Dann gilt $f_n = g_n \implies f = g$ und $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < \infty \implies f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \exp(\frac{2\pi i n}{L} x)$.

1.7 Rechnungen

f gerade $\Rightarrow f_n = f_{-n}$, f ungerade $\Rightarrow f_n = -f_{-n}$

Fourierkoeffizienten Zuerst direkt. Falls Funktion zu hässlich zum Integrieren, e-Darstellungen von \sin, \cos einsetzen, \exp durch Taylorreihe ersetzen

Beispiele $\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{e^{inx}}{n!}$.

Fourierkoeffizienten mit Residuensatz Sei $f = \frac{1}{3-\cos x}$ 2π -periodisch und reellwertig, deshalb $f_{-n} = \bar{f}_n$. Wir berechnen f_{-n} für $n \geq 0$. Mit der Substitution $z = e^{ix}$, $dx = \frac{dz}{iz}$ gilt $f_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{3-\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})} dx = -\frac{1}{\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2-6z+1} dz$. Finde Nullstellen des Nenners, die innerhalb des Einheitskreises liegen, um mit dem Residuensatz f_{-n} auszurechnen. f_n ergibt sich dann aus f_{-n} , wobei n -Abhängigkeiten in den Absolutbetrag gesetzt werden.

PDE mit Fourierreihen (Wärmeleitungsgl.) Nehme an, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und sei u C^∞ -Lösung mit $u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e^{i n x}$ und $u_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) e^{-i n x} dx$.

- Berechne $u_n(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) e^{-i n x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i n x} dx = f_n$. Falls also $u(x, t) \rightarrow f$ gleichmässig für $t \rightarrow 0$, ist $u_n(0) = f_n$.

- DGL in u_n über $\partial_t u_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_t u(x, t) e^{-i n x} dx \stackrel{\text{DGL}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_x^2 u(x, t) e^{-i n x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) (-in)^2 e^{-i n x} dx = -n^2 u_n(t)$.

- Lösung der DGL ist $u_n(t) = e^{-n^2 t} f_n$, woraus $u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-n^2 t + i n x}$ folgt.

- Zeige: 1) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\partial_t f_n e^{-n^2 t + i n x}|$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\partial_x^2 f_n e^{-n^2 t + i n x}| < \infty \implies$ Ableitung und Summe können vertauscht werden, Alternativ: In $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-n^2 h} - 1}{h} (-n^2)^j (i n)^k e^{-n^2 t + i n x} f_n$ können limes und Summe vertauscht werden, da wegen $|e^{-n^2 h} - 1| \leq n^2 |h| e^{n^2 t/2}$ für $|h| \leq t/2$ die Partialsummen nicht mehr von h abhängen und damit glm. in h konvergieren. \Rightarrow per Induktion beliebig oft nach t diffbar; analog für x , 2) $u \in C^\infty$, 3) $\partial_t u = \partial_x^2 u$, 4) Anfangsbedingungen $|u(x, t) - f(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{-n^2 t} - 1| |f_n| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$.

2 Fouriertransformation

2.1 Definition und elementare Eigenschaften

Fouriertransformation Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Fouriertransformierte von f und die inverse Fouriertransformierte sind gegeben durch die Funktionen auf \mathbb{R}^n

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i k \cdot x} dx, \quad \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(k) e^{i k \cdot x} dk.$$

Lemma 1.1 Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann sind die Funktionen \hat{f}, \check{f} gleichmässig stetig und für alle $x, k \in \mathbb{R}^n$ gilt $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$, $|\check{f}(x)| \leq (2\pi)^{-n} \|f\|_1$.

Elementare Eigenschaften Seien $f, g, h \in L^1$, $h \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und bezeichne $f_y(x) = f(x-y)$.

- (i) $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ (v) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} dx$
- (ii) $\widehat{f(\lambda \cdot)}(k) = |\lambda|^{-n} \hat{f}(k/\lambda)$ (vi) $\widehat{\overline{f}}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$
- (iii) $\widehat{f_y}(k) = \hat{f}(k) e^{-i k \cdot y}$
- (iv) $\widehat{f \hat{g}}, \widehat{\hat{f} g} \in L^1$ (vii) $\widehat{\partial_j \hat{h}}(k) = i k_j \hat{h}(k)$

Satz 2.1 (Vertauschen von Ableitung und Integral) Sei $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass

- (i) die Funktion $x \mapsto f(t, x)$ integrierbar für alle $t \in (a, b)$ ist,
- (ii) die partielle Ableitung $f_t(t, x)$ existiert für alle $(t, x) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$,
- (iii) es eine integrierbare Funktion g auf \mathbb{R}^n , sodass $|f_t(t, x)| \leq g(x)$ für alle $(t, x) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$ gibt.

Dann ist $I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) dx$ differenzierbar für $t \in (a, b)$ und es gilt $\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^n} f_t(t, x) dx$.

2.2 Fouriertransformierte der Gauss-Funktion

Beispiel (Gauss-Funktion) Sei $f(x) = e^{-\frac{1}{2} \langle A x, x \rangle}$, $A = A^T$ positiv definit. Dann ist $f \in L^1$ und $\hat{f}(k) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det A)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \langle A^{-1} k, k \rangle}$. Im eindimensionalen Fall $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ ist $\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi} e^{-k^2/2}$.

Allgemein ist $(e^{-\frac{k^2}{a}})^\wedge(k) = \sqrt{a\pi} e^{-\frac{a k^2}{4}}$ und $(e^{-\frac{k^2}{a}})^\vee(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{a x^2}{4}}$

2.3 Beispiele für Fouriertransformierte

Beispiel (Charakteristische Funktion) $\hat{\chi}_{[-1,1]}(k) = \frac{2\sin k}{k}$.

Beispiel (Eigenvektoren der FT, Hermite-Funktionen) Die Hermite-Funktionen $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \partial^n e^{-x^2} = H_n(x) e^{-x^2/2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ sind Eigenvektoren der Fouriertransformation $\hat{h}_m(k) = (-i)^m \sqrt{2\pi} h_m(k)$.

Beispiel (Invariante der FT) $\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)^\wedge(k) = \frac{1}{\sqrt{|k|}}$.

Beispiel (Schranke) $\left(e^{-m|x|}\right)^\wedge(k) = \frac{2m}{m^2+k^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

2.4 Umkehrsatz für L^1 -Funktionen

Satz 4.1 $f, \hat{f} \in L^1 \implies f^{\wedge\vee} = f$ und $f, \check{f} \in L^1 \implies f^{\vee\wedge} = f$ (f.ü.).

Gleichheit in L^1 , also fast überall. Für stetige Funktionen Gleichheit.

Korollar 4.2 ($^\wedge, ^\vee$ injektiv) $^\wedge, ^\vee : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ sind injektiv, $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \hat{f} = 0 \implies f = 0$ (f.ü.), $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \check{f} = 0 \implies f = 0$ (f.ü.).

Korollar 4.3 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies f^{\wedge\wedge}(x) = (2\pi)^n f(-x)$ (f.ü.).

Korollar 4.4 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies \check{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Satz 4.5 (Plancherel-Formel) $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\|f\|_2 = (2\pi)^{-n/2} \|\hat{f}\|_2.$$

Definition (Faltung) $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = (g * f)(x)$.

Satz (Faltungssatz) $f, g \in L^1$. Dann gilt $(f * g)^\wedge(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$.

2.5 Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n), p \in [1, \infty)$

Definition 5.1 (Multiindex) ist ein Element $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.

Definition (C^k -Raum) Für $X = \mathbb{R}^n$ setze $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen definiere $C^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \partial^\alpha f \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k\}$, $C^\infty = \cap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$.

Definition 5.2 (\mathcal{S}) Für $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ definieren wir $\|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$. Der Schwartzraum ist der komplexe Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{\alpha, \beta} < \infty \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$.

Lemma 5.1 (Norm auf \mathcal{S}) Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ ist $\|\varphi\|_{k, l} = \max_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} \|\varphi\|_{\alpha, \beta}$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiele und Eigenschaften

- Beispiele von Schwartz-Funktionen sind glatte Funktionen mit kompaktem Träger $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $e^{-a|x|^2} \forall a > 0$, $e^{-\sqrt{1+|x|^2}}$, $x^\alpha \partial^\beta \varphi$, $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- Keine Schwartz-Funktionen sind nicht glatte Funktionen, $e^{-a|x|}$, $(1 + |x|^2)^{-s}$, $\frac{\varphi(x)}{x}$, $\int_{-\infty}^x \varphi(x)dx \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- Polynome erhalten \mathcal{S} , also für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist auch $P(x)Q(x)\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle Polynome P, Q . $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |P(x)Q(\partial)\varphi(x)| = 0$.
- Für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist auch das punktweise Produkt $\varphi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ im Schwartzraum (Leibnitz-Formel).

Lemma 5.2 (Majorante in \mathcal{S}) Seien $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Konstante $c_{\beta, k} = c_{\beta, k}(\varphi)$, so dass $|\partial^\beta \varphi(x)| \leq \frac{c_{\beta, k}}{(1+|x|^2)^k}$.

Definition 5.3 (Konvergenz in \mathcal{S}) Eine Folge φ_j in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, falls $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{k, l} = 0$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Man schreibt $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ für $j \rightarrow \infty$.

Definition 5.4 (Stetigkeit in \mathcal{S}) Eine lineare Abbildung $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, falls für alle konvergenten Folgen gilt $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \implies F(\varphi_j) \xrightarrow{\mathcal{S}} F(\varphi)$.

Lemma 5.4 (Fourier-Eigenschaften) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

- (i) $(\partial_j \varphi)^\wedge(k) = ik_j \hat{\varphi}(k)$,
- (iii) $(\partial_j \varphi)^\vee(k) = -ik_j \check{\varphi}(k)$,
- (ii) $\partial_j \hat{\varphi}(k) = (-ix_j \varphi)^\wedge(k)$,
- (iv) $\partial_j \check{\varphi}(k) = (ix_j \varphi)^\vee(k)$.

S3A4 a) Sei $f \in L^1$ und $k \in \mathbb{N}_0$ s.d. $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^1$. Dann ist $\hat{f} \in C^k$ und:
 $\partial^\alpha \hat{f} = (-i\hat{x})^\alpha f$ und $\sup_{k \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \hat{f}(k)| < \infty$
b) Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ s.d. $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt $f, \partial^\alpha f \in L^1$. Dann gilt $\partial^{\hat{\alpha}} f = (ik)^\alpha \hat{f}$ und $\sup_{k \in \mathbb{R}^n} |k^\alpha \hat{f}(k)| < \infty$.

Lemma 5.5 (Abgeschlossenheit) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi}, \check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 5.6 (FT als Isomorphismus) Die lineare Abbildung $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \varphi \mapsto \check{\varphi}$ ist bijektiv und stetig. Ihre Inverse $F^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ist ebenfalls stetig.

2.6 Fouriertransformation von rotationsinvarianten Funktionen

Definition (Rotationsinvariante Funktion) $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Funktion, sodass $g(Rx) = g(x)$ für alle R orthogonal ($R^T R = 1$).

Lemma 6.1 (Rotationsinvarianz) Eine Funktion g ist genau dann rotationsinvar., wenn sie die Form $g(x) = f(|x|)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ hat.

Wir führen als neue Koordinaten ein $x_1 = \pm r \sqrt{1 - y_2^2 - \dots - y_n^2}$, $x_2 = ry_2, \dots$, $x_n = ry_n$, wobei $x = ry$. Das Volumenelement ergibt sich als $dx_1 \dots = dx_n = r^{n-1} dr \frac{dy_2 \dots dy_n}{\sqrt{1 - y_2^2 - \dots - y_n^2}} \equiv r^{n-1} dr d\Omega(y)$.

Lemma 6.2 ($|S^{n-1}|$) Die "Oberfläche" der $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ ist gegeben durch

$$|S^{n-1}| = \int_{S^{n-1}} d\Omega(y) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!} & n = 2k \text{ gerade} \\ \frac{2^{2k+1} \pi^k k!}{(2k)!} & n = 2k+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beispiel $|S^1| = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi$, $|S^2| = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4\pi$, $|S^3| = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2$.

Definition (Gamma-Funktion) $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

$g \in L^1$ rotationsinvariant $\implies \hat{g}$ rotationsinvariant, da $\hat{g}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|) e^{-ik \cdot x} dx = \int_0^\infty g(r) (\int_{S^{n-1}} e^{-ik \cdot yr} d\Omega(y)) r^{n-1} dr = \int_0^\infty g(r) C_n(|k|r) r^{n-1} dr$, da $\hat{g}(k) = \hat{g}(|k|, 0, \dots, 0)$.

Lemma 6.3 (G_n -Funktion) $G_n(\rho) = \int_{S^{n-1}} e^{-i\rho y_1} d\Omega(y)$ ist die Einschränkung auf $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ einer ganzen holomorphen Funktion. Für alle $k \in \mathbb{R}^n$ gilt $\int_{S^{n-1}} e^{-ik \cdot y} d\Omega(y) = G_n(|k|)$ (Insbesondere $G_n(0) = |S^{n-1}|$).

Definition 6.1 (Besselfunktion) Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$. Die Besselfunktion (erster Gattung) der Ordnung α ist die durch die konvergente Potenzreihe $J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2k}$ definierte Funktion der komplexen Variable z . Es sind $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z)$ und $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z)$. Weiters gilt $\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z)$

Satz 6.4 (FT für rotationsinvarianten Funktionen) Sei $n \geq 2$. Dann gilt $G_n(\rho) = (2\pi)^{n/2} \rho^{1-n/2} J_{n/2-1}(\rho)$. Für integrierbare rotationsinvariant Funktionen g gilt $\hat{g}(k) = (2\pi)^{n/2} |k|^{1-n/2} \int_0^\infty g(r) J_{n/2-1}(|k|r) r^{n-1} dr$ und $\hat{g}(0) = |S^{n-1}| \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr$. In drei Dimensionen gilt insbesondere $\hat{g}(k) = \frac{4\pi}{|k|} \int_0^\infty g(r) r \sin(|k|r) dr$.

Bessel DGL Die allgemeine Lösung der Bessel-Differentialgleichung $J''_\alpha(x) + \frac{1}{x} J'_\alpha(x) + (1 - \frac{a_\alpha^2}{x^2}) J_\alpha(x) = 0$ lautet $C_1 J_\alpha(x) + C_2 J_{-\alpha}(x)$ für $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ sind J_α und $J_{-\alpha}$ linear unabhängig, für $-\alpha \in \mathbb{Z} < 0$ linear abhängig, da $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Die Neumann-Funktion $N_\alpha = \frac{\cos(\pi\alpha) J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)}$ ist für alle α definiert. Die Funktionen J_α, N_α bilden somit eine allgemeine Basis des Lösungsraums für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

2.7 Regularität und Abfalleigenschaften

Regularität beinhaltet Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Analytizität.

Satz 7.1 (Majorante mit kompakten Träger) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert eine Konstante c mit $|\hat{f}(k)| \leq \frac{c}{(1+|k|)^s}$.

Satz 7.2 (Riemann-Lebesgue) $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$.

Satz 7.3 (i) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, $C, m > 0$, sodass $|f(x)| \leq Ce^{-m|x|}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann hat \hat{f} eine holomorphe Fortsetzung auf dem Streifen $\{|\text{Im} k| < m\}$, ebenso \check{f} .

(ii) Sei $m > 0$, $f : \{z : |\text{Im} z| < m\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gelte für alle $|\eta| < m$ sowohl $f(\cdot + i\eta) \in L^1$ als auch $\max_{|\eta'| \leq |\eta|} |f(x + i\eta')| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$. Dann existiert zu jedem $m' < m$ eine Konstante C' , sodass $|\hat{f}(k)| \leq C' e^{-m'|k|}$. Dasselbe gilt für \check{f} .

2.8 Wellengleichung

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ \partial_t u(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad \text{(Wellengleichung)}$$

Die Lösung $u(t, x)$ ist für $n = 2, 3$ gegeben durch $u(t, x) =$

$$\frac{1}{2\pi c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{|y| \leq ct} \frac{f(x+y) dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} \right) + \int_{|y| \leq ct} \frac{g(x+y) dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} \right),$$
$$\frac{1}{4\pi c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{|y|=ct} f(x+y) d\Omega(y) \right) + \frac{1}{t} \int_{|y|=ct} g(x+y) d\Omega(y) \right).$$

2.9 Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}$$

Definition (Wärmeleitungskern) $K_t(x) = (e^{-k^2 t})^\vee(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$.

Satz 9.1 (Lösung) Sei f stetig und beschränkt auf \mathbb{R}^n . Dann ist $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(y) dy$ ($= K * f$) eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$.

2.10 Rechnungen

f gerade $\Rightarrow \hat{f} \in \mathbb{R}, f$ ungerade $\Rightarrow \hat{f} \in i\mathbb{R}, f \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Re}(\hat{f})$ gerade und $\operatorname{Im}(\hat{f})$ ungerade.

Fouriertransformierte mit Residuensatz Für reellwertige f ist $\hat{f}(-x) = \overline{\hat{f}(x)}$, deswegen genügt es $\hat{f}(-k)$ für $k \geq 0$ zu berechnen. Dann ist $\hat{f}(-k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} p > 0} \operatorname{Res}(f, p) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(x) e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} p > 0} \operatorname{Res}(f, p)$. Γ_R in der positiven oder negativen imaginären Ebene wählen, so dass $|\int_{\Gamma_R} f(x) e^{ikx} dx| \leq \pi R \sup_{|x|=R} |f(x) e^{ikx}| \rightarrow 0$, wobei $e^{ikx} = e^{ik(a+ib)} = e^{k(ia-b)}$ mit $|a+ib| = R$. Für Γ_R in der positiven imaginären Ebene ist $b > 0$, also muss $k > 0$, für Γ_R in der negativen imaginären Ebene ist $b < 0$, also muss $k < 0$. Ist Γ_R negativ orientiert (Uhrzeigersinn, negative imaginäre Halbebene), hat $\operatorname{Res}(f, p)$ ein zusätzliches Minus.

Lemma (Berechnung von Residuen)

- (i) $\operatorname{ord}(f, p) \geq -1$, dann $\operatorname{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p) f(z)$,
- (ii) $\operatorname{ord}(f, p) = -k$, dann $\operatorname{Res}(f, p) = \frac{1}{(k-1)!} \partial_z^{k-1} ((z - p)^k f(z))|_{z=p}$,
- (iii) f holomorph an p , g hat eine einfache Nullstelle in p , dann ist $\operatorname{Res}(f, p) = \frac{f(p)}{g'(p)}$, insbesondere für $f \equiv 1$,
- (iv) $\operatorname{ord}(f, p) = -1$, g holomorph auf $B_\varepsilon(p)$, dann ist $\operatorname{Res}(f, p) = g(p) \operatorname{Res}(f, p)$.

PDE mit Fouriertransformation Gesucht wird eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$. Nehmen wir an, dass $u \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ folgt mit $\hat{u}(k, t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-ik \cdot x} dx$ bzw. über die Fouriertransformation der PDE die DGL $\frac{1}{2} \partial_t^2 \hat{u}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t)$ mit allgemeiner Lösung $\hat{u}(k, t) = A(k) \cos(|k|t) + B(k) \sin(|k|t)$ bei festem k . Aus den Anfangsbedingungen folgt $\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) \cos(|k|t) + \frac{\hat{g}(k)}{|k|c} \sin(|k|t)$. Die Rücktransformation liefert $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\hat{f}(k) \cos(|k|t) + \frac{\hat{g}(k)}{|k|c} \sin(|k|t) \right) e^{ik \cdot x} dk$. Für $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f}(k), \hat{g}(k) \leq C(1 + |k|)^{-s}$ und für s gross genug (z.B. $\geq n + 2$) kann man unter dem Integral ableiten, also ist u eine C^2 -Lösung.

Für $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ kann ein **konvergenzerzeugender Faktor** eingeführt werden, d.h. $K_\delta(x) = f(x) e^{-\delta|x|^2/2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sodass z.B. $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta \rightarrow 0} K_\delta(x) e^{-ikx} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(x) e^{-ikx} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{K}_\delta(k)$.

Beispiel (Konvergenzerzeugender Faktor) Für $\hat{\psi}(t, k) = \hat{\phi}(k) \hat{K}_\delta(k, t)$, $K_0 \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{K}_\delta(k, t) \hat{\phi}(k) e^{ikx} dk = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{K}_\delta(k, t) \hat{\phi}(k) e^{ikx} dk = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} (K_\delta(\cdot, t) * \varphi)^\wedge(k) e^{ikx} dk = \lim_{\delta \rightarrow 0} (K_\delta(\cdot, t) * \varphi)^\wedge \vee(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(y, t) \varphi(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta \rightarrow 0} K_\delta(y, t) \varphi(x - y) dy = (K_0(\cdot, t) * \varphi)(x)$.

Integrale von **Fouriertransformationen** mit cos und sin kann man zu neuen Funktionen umschreiben und erhält mit **partieller Integration** eine algebraische Gleichung für das Integral.

Beispiel (FT p.I) Für $f(x) = e^{-|x|} \cos(x) : \hat{f}(k) = \int_0^\infty e^{-x} \cos(x) e^{-ikx} dx + \int_{-\infty}^0 e^x \cos(x) e^{-ikx} dx = g(k) + g(-k)$ und $g(k) \stackrel{p.I}{=} \dots \stackrel{p.I}{=} \frac{1}{1+ik} - \frac{1}{(1+ik)^2} g(k)$

3 Orthogonale Funktionalsysteme, Hilbertraum

3.1 Die schwingende Saite

ist das lineare Problem $\frac{1}{2} \partial_t^2 u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t)$, $x \in [0, L], t \geq 0, u(t, 0) = u(t, L) = 0$ mit Anfangsbedingungen $u(x, 0) = v(x), \partial_t u(x, 0) = w(x)$.

PDE über Separation Wir suchen Lösungen der Form $u(x, t) = f(t)g(x)$. Einsetzen und Separieren nach x, t ergibt $\frac{1}{2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \lambda$.

- $\partial_x^2 g(x) = \lambda g(x)$, $x \in [0, L], g(0) = g(L) = 0$ wird gelöst durch $g_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{L} x)$, $\lambda_n = -(\frac{\pi n}{L})^2, n = 1, 2, 3, \dots$,
- $f'' = \lambda c^2 f$ durch $f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ mit $\omega = \sqrt{-c^2 \lambda}$.

Allgemein also $u(x, t) = (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin(\frac{\omega_n}{c} x)$, wobei $\omega_n = \frac{\pi n c}{L}, n = 1, 2, \dots$. Da das Problem linear ist, ist auch jede Superposition $\sum_{n=1}^\infty (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin(\frac{\omega_n}{c} x)$ eine Lösung (falls a_n, b_n schnell genug abfallen für $n \rightarrow \infty$). Die Koeffizienten werden aus den Anfangsbedingungen $\sum_{n=1}^\infty a_n \sin(\frac{\omega_n}{c} x) = v(x)$ und $\sum_{n=1}^\infty \omega_n a_n \sin(\frac{\omega_n}{c} x) = w(x)$ als $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L v(x) \sin(\frac{\omega_n}{L} x) dx, b_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L w(x) \sin(\frac{\omega_n}{L} x) dx$. Die Eigenfrequenzen sind gegeben durch $v_n = \omega_n / 2\pi$.

Bei linearen DGLs ist die Superposition zweier Lösungen wieder eine Lösung. Insbesondere kann man dann bei einem EW-Problem mit mehreren λ_i s ansetzen.

3.2 Orthogonale Systeme, Hilberträume

l^2 -Raum $l^2 = \{\text{Folgen } (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{C} \text{ mit } \sum_i |\xi_i|^2 < \infty\}, \langle \xi, \nu \rangle = \sum_i \bar{\xi}_i \nu_i$.

Lemma 2.1 (Schwarzsche Ungleichung) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $f, g \in V$. Dann gilt $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$ mit Gleichheit genau dann, wenn f und g linear unabhängig sind.

Definition 2.1 (Konvergenz) Eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ in einem VR mit Skalarprodukt V konvergiert gegen $f \in V$, falls $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Lemma 2.2 (Stetigkeit von Norm und Skalarprodukt) Sei $(f_n)_{n=1}^\infty \subset V$ eine Folge, welche gegen $f \in V$ konvergiert. Dann gilt für alle $g \in V \langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle g, f_n \rangle \rightarrow \langle g, f \rangle$ und $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$.

Definition 2.2 Eine (endliche oder unendliche) Familie $(\varphi_j)_{j \in I}$ von nicht-verschwindenden Vektoren in V heisst **orthogonal** (oder **orthogonales System**), falls $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 0$ für alle $j \neq k$, **orthonormiert**, falls zusätzlich $\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = 1$ für alle $j \in I$. Ein orthogonales System $(\varphi_j)_{j \in I}$ heisst **vollständig** (oder **maximal**), falls $\langle \varphi_j, f \rangle = 0 \forall j \implies f = 0$ für alle $f \in V$. Bei uns ist I meist $\{1, \dots, n\}, \{(0), 1, 2, 3, \dots\}$ oder \mathbb{Z} .

Beispiel (i) $V = L^2([0, 1]), \varphi_j = e^{2\pi i j x}, \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \int_0^1 \overline{\varphi_j} \varphi_k dx = \delta_{jk}$

- (ii) $V = \mathbb{C}^n, \varphi_j = (\delta_{1j}, \dots, \delta_{nj})$
- (iii) $V = l^2, \varphi_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$

Satz 2.3 Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ ein orthogonales System.

- (i) (**Pythagoras**) $\|\varphi_1 + \dots + \varphi_n\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2 \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) (**Bessel Ungleichung**) Ist (φ_j) orthonormiert, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Besselsche Ungleichung $\sum_{j=1}^n |\langle \varphi, \varphi_j \rangle|^2 \leq \|\varphi\|^2$ mit Gleichheit genau dann, wenn φ im vom $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ aufgespannten Unterraum liegt.
- (iii) (**Funktionsapproximation**) Sei (φ_j) orthonormiert, $\varphi \in V, n \in \mathbb{N}$. Die Funktion von $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \|\varphi - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j\|^2$ nimmt ihr Minimum für $\lambda_j = \langle \varphi, \varphi_j \rangle$ für $j = 1, \dots, n$ an.

Definition 2.3 (Hilbertraum) Ein \mathbb{C}, \mathbb{R} -Vektorraum H mit Skalarprodukt heisst **Hilbertraum**, wenn er bezüglich der Norm $f \mapsto \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ ein Banachraum ist, d.h. wenn alle Cauchy-Folgen bezüglich $\|\cdot\|$ in H konv.

Satz 2.4 (Vollständigkeit) Sei H ein Hilbertraum und $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ ein orthonormiertes System. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (i) $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ ist vollständig,
- (ii) $\varphi = \sum_{j=1}^\infty \langle \varphi_j, \varphi \rangle \varphi_j \quad \forall \varphi \in H$ (Konvergenz in H),
- (iii) $\|\varphi\|^2 = \sum_{j=1}^\infty |\langle \varphi_j, \varphi \rangle|^2 \quad \forall \varphi \in H$, (**Parseval Identität**).

Für $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ vollständig $\varphi = \sum_{n=1}^\infty \frac{\langle \varphi_n, \varphi \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \varphi_n, \quad \|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{|\langle \varphi_n, \varphi \rangle|^2}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}$.

Definition 2.5 Ein Hilbertraum heisst **separabel**, falls er eine abzählbare orthonormierte Basis hat.

Satz 2.5 Sei $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ eine orthonormierte Basis eines Hilbertraums H . Dann existiert ein linearer Isomorphismus $i : l^2 \rightarrow H, c = (c_j)_{j=1}^\infty \mapsto \sum_{j=1}^\infty c_j \varphi_j$ und es gilt $\langle i(c), i(d) \rangle = \langle c, d \rangle$ für alle $c, d \in l^2$.

Korollar 2.6 Sei $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ eine orthonormierte Basis eines HR H . Dann konv. $\sum_{j=1}^\infty c_j \varphi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$ in H genau dann, wenn $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty$.

3.3 L^2 -Theorie der Fourierreihen

Satz 3.1 (Parseval) Sei $f \in L^2([0, 1]), \varphi_j(x) = e^{2\pi i j x} (j \in \mathbb{Z})$ und $c_j = \langle \varphi_j, f \rangle$ der j -te Fourierkoeffizient von f . Dann gilt $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \varphi_j$ und $\int_0^1 |f|^2 dx = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j|^2$.

Für allgemeine Perioden L ist $c_j = \frac{\langle \varphi_j, f \rangle}{\|\varphi_j\|}$ und die Parseval-Identität $\frac{1}{L} \int_0^L |f|^2 dx = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j|^2$. Für $\varphi_j(x) = \exp(\frac{2\pi i j}{L} x)$ ist $c_j = f_j$ der j -te Fourierkoeffizient.

3.4 Hermite-Polynome und harmonischer Oszillator

Definition 4.1 (Hermite-Polynom) $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$. Die **Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren** sind definiert als $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{\partial}{\partial x})$ und $A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\partial}{\partial x})$.

Lemma 4.2 Sei $\varphi_n = 2^{-n/2} H_n(x) e^{-x^2/2}$. Dann gilt

- (i) $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \langle A^* \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A \psi \rangle$,
- (ii) $AA^* - A^*A = 1$
- (iii) $A \varphi_0 = 0$
- (iv) $A^* \varphi_n = \varphi_{n+1}$.

Satz 4.1 (H_n -Basis) $\Psi_n(x) = \pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2}, n = 0, 1, 2, \dots$, bilden ein vollständiges orthonormiertes System in $L^2(\mathbb{R})$.

Der Hermitesche-Operator ist $H = A^*A + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2$. Die zeitunabhängige Schrödingergleichung $H\psi_n = E_n \psi_n$ wird mit Ψ_n wie oben zum Eigenwert $E_n = n + \frac{1}{2}$ gelöst.

Korollar 4.3 (\mathcal{S} dicht in L^2) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ und $f \in L^2(\mathbb{R})$ existiert ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\|f - \varphi\|_2 < \varepsilon$.

3.5 Orthogonale Polynome, Legendre Polynome

Sei $E \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\rho(x) \geq 0$ für fast alle $x \in E$ und $\int_E |x|^n \rho(x) dx < \infty$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$. Dann definiert $\langle f, g \rangle = \int_E \bar{f}(x) g(x) \rho(x) dx, f, g \in \mathbb{C}[x]$ ein Skalarprodukt auf dem VR $\mathbb{C}[x]$ der Polynome in einer Variable mit komplexen Koeffizienten. Zum Paar (E, ρ) gehört eine Familie eindeutiger orthogon. Polynome.

Definition 5.1 (Legendre Polynom) $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^2 - 1)^l, l \in \mathbb{N}_0$.

Lemma 5.1 P_l hat Grad $l, \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$ und $P_l(1) = 1$.

Lemma Der Differentialoperator L mit $u \mapsto L = \frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} \right) u$ ist ein Hermitescher Operator, d.h. $\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$.

Satz 5.2 Die Legendre Polynome P_l sind Eigenvektoren von L zu den Eigenwerten $l(l + 1)$, d.h. sie erfüllen die (spezielle) Legendre-DGL $\frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} \right) P_l(x) = l(l + 1) P_l(x)$. Die orthonormierten Polynome $\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l$ bilden ein vollständiges orthonormiertes System in $L^2([-1, 1])$.

$(\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l)_l^N$ ist eine vollständige orthonormierte Basis für den Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq N$. Nach 2.3 ist $P = \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{2} \langle P_l, u \rangle P_l(x)$ die beste Approximation von u in $L^2([-1, 1])$.

Hermite-Polynome H_n $H_{n+2}(x) - 2xH_{n+1}(x) + 2(n+1)H_n(x) = 0, \quad H'_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Legendre-Polynome P_l $P_l(t)z^l = (1 - 2tz + z^2)^{-1/2}$ für $t \in [-1, 1], z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \frac{1}{|x-y|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|x|^l}{|y|^{l+1}} P_l\left(\frac{x \cdot y}{|x||y|}\right)$ für $x, y \in \mathbb{R}^3, |x| < |y|, P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (i \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta)^l d\varphi. P_{2l}$ sind gerade, P_{2l+1} ungerade.

Laguerre-Polynome L_n $L_n = \frac{e^x}{n!} \partial_x^n (e^{-x} x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$

Tschebychev-Polynome T_l $T_{l+1}(x) = 2xT_l(x) - T_{l-1}(x), T_1(x) = x, l \in \mathbb{N}, T_0(x) = 1, T_l$ Grad l und Leitkoeffizient $2^{l-1}, T_l(\cos \theta) = \cos(l\theta).$

Polynom	E, ρ	Leitk	Differentialgleichung
Hermite	H_n	\mathbb{R} e^{-x^2}	$y'' - xy' = 2ny$ $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$
Legendre	P_l	$[-1, 1]$ 1	$((x^2 - 1)y')' = l(l+1)y$ $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^2 - 1)^l$
	$P_{l,m}$	$[-1, 1]$ 1	$((x^2 - 1)y')' = (l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2})y$ $(1 - x^2)^{m/2} \partial_x^m P_l(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \partial_x^{l+m} (x^2 - 1)^l$
	Laguerre	L_n	$[0, \infty)$ e^{-x} $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ $L_n = \frac{e^x}{n!} \partial_x^n (e^{-x} x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$
Bessel	J_α		$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\alpha^2}{x^2})y = 0$ $J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\frac{j+\alpha+1}{2})} (\frac{z}{2})^{\alpha+2k}$
Chebychev	T_l	$[-1, 1]$ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	2^{l-1}
Jacobi		$[-1, 1]$ $\frac{(1-x)^a}{(1-x)^{-b}}$	

3.6 Kugelfunktionen

Der Laplace-Operator in 3D lautet $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}$, wobei $\Delta_{S^2} u = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. Der Gradient in Kugelkoordinaten ist $\text{grad} = \partial_r \hat{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \hat{e}_\varphi$

Definition (Kugelfunktion) ist eine auf der Einheitssphäre definierte glatte Funktion $Y(\theta, \varphi)$, welche ein Eigenvektor zum Laplace Operator Δ_{S^2} ist, d.h. $\Delta_{S^2} Y = -\lambda Y$.

Lösungen der Form $\Delta u(x) = 0$ für $|x| \leq R$ und $u(x) = f(x)$ für $|x| = R$ können durch die Separation $u(x) = U(r)Y(\theta, \varphi)$ und $Y(\theta, \varphi) = P(\cos \theta)V(\varphi)$ mit $U(r) = ar^l$ und $V(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$ gelöst werden. Die DGL für P führt auf die zugeordneten Legendre-Polynome. Dann sind $P_{l,m}(\cos \theta) e^{\pm im\varphi}$ mit $l = 0, 1, \dots, m = 0, \dots, l$ Eigenvektoren von Δ_{S^2} zum Eigenwert $-l(l+1)$.

Definition Die zugeordneten (oder assoziierten) Legendre-Funktionen sind $P_{l,m}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \partial_x^m P_l(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \partial_x^{l+m} (x^2 - 1)^l$.

Satz 7.1 (i) (**Legendresche DGL**) Die zugeordneten Legendre-Funktionen $P_{l,m}$ erfüllen $\frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} P_{l,m}(x) \right) + \left(l(l+1) + \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_{l,m}(x) = 0$.

(ii) (**Orthogonalität**) Für alle $m = 0, 1, 2, \dots, m \leq l, l' \in \mathbb{Z}$ gilt $\int_{-1}^1 P_{l,m}(x) P_{l',m}(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}$.

(iii) (**Basis**) $\left((1 - x^2)^{-m/2} P_{l,m} \right)_{l=m, m+1, \dots, m+N}$ ist für alle $m, N \in \{0, 1, 2, \dots\}$ eine Basis des Raums der Polynome vom Grad $\leq N$.

Satz 7.2 (Kugelfunktionen) Die Kugelfunktionen $Y_{l,m}(\theta, \varphi) = c_{l,m} P_{l,|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}$ mit $l = 0, 1, 2, \dots, m = -l, \dots, l-1, l$, wobei $c_{l,m} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$ für $m \geq 0, c_{l,-m} = (-1)^m c_{l,m}$ bilden eine orthonormierte Basis des Hilbertraums $L^2(S^2)$, die aus EV von Δ_{S^2} besteht. Es gilt $(Y_{l,m}, Y_{l',m'}) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$

Laplace Gegeben eine Laplacegleichung und Hinweise auf Kugelfunktionen, mache den Ansatz $u(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=-l}^l (a_{l,m} r^l + b_{l,m} r^{-l-1}) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ bzw. $u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{l,m} r^l Y(\theta, \varphi)$, schreibe die Randbedingungen als Linearkombination der Kugelfunktionen und erhalte $a_{k,m}, b_{k,m}$ durch das Skalarprodukt von v und $Y_{k,m}$.

Für $u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l a_{l,m} r^l Y(\theta, \varphi)$ gilt: $\Delta u = 0; \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 dx = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l |a_{l,m}|^2; a_{l,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{Y_{l,m}(\theta, \varphi)} u(1, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$; wenn $a_{l,m} = 0$ für $m \neq 0$, dann ist u invariant unter Rotationen um die z-Achse.

3.7 Schwingungen einer kreisförmigen Membran

Das Problem $\frac{1}{c^2} \partial_t^2 v(t, x) - \Delta v(t, x) = 0$ für $|x| < R$ und $v(t, x) = 0$ für $|x| = R$ wird mit $v(t, x) = e^{i\omega t} u(x)$ reduziert auf $\Delta u = -\frac{\omega^2}{c^2} u$ für $|x| < R$ und $u(x) = 0$ für $|x| = R$. In Polarkoordinaten $(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2) u(r, \varphi) = -\frac{\omega^2}{c^2} u(r, \varphi)$ für $r < R$. Reelle Lösungen sind von der Form $u = J_m(\omega r/c) (A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi)) = u - J_m(\omega r/c) A \cos(m(\varphi - \varphi_0))$, wobei $J_m(\omega R/c) = 0$.

4 Distributionen

4.1 Temperierte Distributionen

Definition 2.1 (Temperierte Distribution) ist eine stetige lineare Abbildung $\omega : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \omega[\varphi]$. Mit anderen Worten erfüllt ω die Eigenschaften $\omega[\lambda \varphi + \mu \psi] = \lambda \omega[\varphi] + \mu \omega[\psi]$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \implies \omega[\varphi_n] \rightarrow \omega[\varphi]$ bzw. $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \implies \omega[\varphi_n] \rightarrow 0$. Der Raum der temperierten Distributionen wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet und ist der topologische Dualraum zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst als Unterraum von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution ω_f durch $f[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$ (reguläre Distributionen). Schwächer reicht $f(x)(1 + |x|^2)^{-N} \in L^1$ für ein hinreichend grosses N .

Definition (Delta-Funktion) $\delta[\varphi] = \varphi(0), \delta_a[\varphi] = (T_a \delta)[\varphi] = \varphi(a)$.

4.2 Operationen auf Distributionen

Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ die Distribution von f . Die folgenden Operationen sind stetige lineare Abbildungen.

Definition (Translation) $(T_a \omega)[\varphi] = \omega[T_{-a} \varphi]$, wob. $(T_a f)(x) = f(x - a), a \in \mathbb{R}^n$.

Definition 3.1 (Lineare Koordinatentransf.) $U_A \omega[\varphi] = |\det A| \omega[U_{A^{-1}} \varphi]$, wobei $(U_A f)(x) = f(A^{-1}x), A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Definition 3.2 (Funktion-Multiplikation) $(g\omega)[\varphi] = \omega[g\varphi]$.

Definition 3.3 (Ableitung) $(\partial^a \omega)[\varphi] = (-1)^{|a|} \omega[\partial^a \varphi]$.

Definition 3.4 (FT) $\hat{\omega}[\varphi] = \omega[\hat{\varphi}], \check{\omega}[\varphi] = \omega[\check{\varphi}]$ für alle $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definition (Faltung) Für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir $(g * \omega)[\varphi] = \omega[\check{g} * \varphi]$ und analog $(\omega * g)[\varphi] = \omega[\check{g} * \varphi]$, wobei $\check{g}(x) = g(-x)$.

Definition (Heaviside-Funktion) $\theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\theta(x) = 0$ für $x < 0$.

Lemma 3.1 (θ und δ) $\frac{\partial}{\partial x} \theta = \delta$, wobei $\delta[\varphi] = \varphi(0)$.

Lemma 3.2 $U_A \delta = |\det A| \delta$ für $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), (\delta(A^{-1}x) = |\det A| \delta(x))$

Satz 3.3 Die FT und die inverse FT sind bijektive lineare Abbildungen $^\wedge, ^\vee : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und für alle $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $\omega^{\wedge \vee} = \omega^{\vee \wedge} = \omega$.

Lemma 3.4 (FT von 1, δ) $\hat{1} = (2\pi)^n \delta$ und $\delta = 1$.

Lemma 3.5 (Faltung mit δ) Für alle $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $g * \delta = g$.

Lemma 3.6 (Faltung und Ableitung) Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$

(i) $\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * \partial^\alpha g$,

(ii) $\partial^\alpha (\omega * g) = (\partial^\alpha \omega) * g = \omega * \partial^\alpha g = \partial^\alpha (g * \omega)$.

4.3 Rechnungen

Reihenfolge $x^2 \delta'(3x)[\varphi] = (U_{1/3} \delta')[x^2 \varphi(x)] = \delta[\partial_x U_{1/3}(x^2 \varphi(x))]$.

$\widehat{\sin}(k) = \frac{\pi}{i} (\delta(k-1) - \delta(k+1)), \quad \widehat{\cos}(k) = \frac{1}{2} (\delta(k-1) + \delta(k+1))$

$x\delta = x\delta[\varphi] = \delta[x\varphi] = 0, \quad \widehat{e^{iax}}[\varphi] = \int \hat{\varphi} e^{iax} dx = 2\pi \check{\varphi}(a) = 2\pi \varphi(a) = 2\pi \delta_a[\varphi]$

$\hat{x}[\varphi] = \int x \hat{\varphi}(x) dx = -i \int (\varphi')^\wedge(x) e^{i0x} dx = -2\pi i (\varphi')^\wedge(0) = -2\pi i \delta[\varphi'] = 2\pi i \delta'[\varphi]$

Ableitung Betragsfunktion $\partial_x |x| = \theta - U_{-1} \theta, \quad \partial_x^n |x| = 2\partial_x^{n-2} \delta, n \geq 2$

4.4 Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definition 4.1 (Konvergenz) Eine Folge $(\omega_j)_{j=1}^\infty$ in \mathcal{S}' konvergiert gegen $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, falls für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\omega_j[\varphi] \rightarrow \omega[\varphi]$ für $j \rightarrow \infty$.

Satz 4.1 (Folge gegen δ) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ und sei $f_j(x) = f(jx)^j$ für $j = 1, 2, 3, \dots$. Dann konvergiert die Folge f_j (als Folge von Distributionen) gegen δ .

$P(1/x)[\varphi] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon}^{-\epsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx$ und $\frac{1}{x \pm i0}[\varphi] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x \pm i\epsilon} \varphi(x) dx$.

Satz 4.2 $\frac{1}{x \pm i0} = P(1/x) \mp i\pi \delta$ ist eine temperierte Distribution.

4.5 Fundamentallösungen für den Laplace-Operator

$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$ (Poisson-Gleichung)

Gesucht ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$. Im Distributionensinne ist $(\Delta u)[\varphi] = u[\Delta \varphi] = f[\varphi]$.

Definition 5.1 (Fundamentallösung) für einen Differentialoperator $L = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$ mit konstanten Koeffizienten a_α ist eine Distribution $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, die die Gleichung $LE = \delta$ erfüllt. Eine Lösung des Problems $Lu(x) = f(x)$ ist dann gegeben durch $u = E * f$, weil $Lu = L(E * f) = (LE) * f = \delta * f = f$.

Lemma 5.1 (Green'sche Identität) Sei D ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n mit glattem Rand ∂D und nach aussen weisendem Einheitsvektoren $n(x), x \in \partial D$. Für alle $u, v \in C^2(D \cup \partial D)$ gilt dann $\int_D (\Delta u v - u \Delta v) dx = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Omega(x)$, wobei $\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ die Ableitung in normaler Richtung bezeichnet und $d\Omega(x)$ das Oberflächenmass auf ∂D ist.

Satz 5.2 (Fundamentallösung für Δ) Sei $n \geq 2$. Die Funktion

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(2-n)} |x|^{-n+2} = \frac{1}{|S^{n-1}|} \frac{|x|^{2-n}}{2-n}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2 \end{cases}$$

ist Fundamentallösung für den n -dimensionalen Laplace-Operator, d.h. sie erfüllt (als Distribution) die Gleichung $\Delta E = \delta$. Eine Lösung der Poisson-Gleichung ist gegeben durch $u = E * f$.

Beispiel 5.1 $n = 3$: $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$, $n = 4$: $E(x) = -\frac{1}{4\pi^2|x|^2}$.

Definition (Glatte Distributionen) Eine Distribution $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heisst **glatt** auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, falls es eine glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $\omega[\varphi] = \int f \varphi dx$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, die ausserhalb U verschwinden. δ und E sind glatt auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definition Ein Differenzialoperator der Ordnung N heisst **elliptisch**, wenn $\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha p^\alpha \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Δ ist elliptisch, \square nicht.

Die elliptische Regularität besagt, dass jede Lösung $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ von $Lu = f$ für einen elliptischen Differentialoperator L und einer auf U glatten Funktion $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ebenfalls glatt ist.

4.6 Fundamentallösungen und Fouriertransformationen

Die Fouriertransformierte von $LE(x) = \delta(x)$ ergibt $P(k)\hat{E}(k) = 1$, wobei $P(k) = \sum_\alpha a_\alpha (ik)^\alpha$ ein Polynom in k_1, \dots, k_n ist. Hat $P(k)$ keine reellen Nullstellen (bzw. integrierbare Singularitäten), definiert $1/P(k)$ eine Distribution und $E = (1/P(k))^\vee$ Lösung des Problems. $P(k) = |k|^2$ für $L = -\Delta$.

Beispiel (Fundamentallösung) Für Distribution $E[\varphi(x_1, x_2)] = \int_0^\infty \varphi(t, t) e^{-t} dt$ und Operator $L = \partial_{x_1} + \partial_{x_2} + 1$ ist $\widehat{LE}[\varphi(x_1, x_2)] = (\partial_{x_1} + \partial_{x_2} + 1)E[\hat{\varphi}(k_1, k_2)] = E[(-\partial_{k_1} - \partial_{k_2} + 1) \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1, x_2) e^{-ik_1 x_1 - ik_2 x_2} dx] = E[\int_{\mathbb{R}^2} (-\partial_{k_1} - \partial_{k_2} + 1) \varphi(x_1, x_2) e^{-ik_1 x_1 - ik_2 x_2} dx] = E[\int_{\mathbb{R}^2} (ix_1 + ix_2 + 1) \varphi(x_1, x_2) e^{-ik_1 x_1 - ik_2 x_2} dx] = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (ix_1 + ix_2 + 1) \varphi(x_1, x_2) e^{-t(ix_1 + ix_2 + 1)} dx dt = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1, x_2) \int_0^\infty (ix_1 + ix_2 + 1) e^{-t(ix_1 + ix_2 + 1)} dt dx = - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1, x_2) [e^{-t(ix_1 + ix_2 + 1)}]_0^\infty dx = 1[\varphi(x_1, x_2)]$.

4.7 Retardierte Fundamentallösung für den d'Alembert-Operator

Lösungen zur inhomogenen Wellengleichung $\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta u = f$ führen auf den d'Alembert-Operator $L = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ mit $x_0 = ct$, also $(-k_0^2 + |k|^2) \hat{E}(k) = 1$.

Eine Lösung ist $u(x_0, \mathbf{x}) = (E * f)(x_0, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} f(x_0 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$.

5 Dirichletproblem

5.1 Dirichlet und Neumannrandbedingungen

Definition Für $u \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ lautet die **Laplace-Gleichung** $\Delta u(x) = 0$, $x \in D$, Lösungen heissen **harmonische Funktionen**. Ist D ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n mit glattem Rand ∂D . Typische Randwertprobleme sind

- (i) **Dirichletproblem (D)** (ii) **Neumannproblem (N)**

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in D \\ u(x) = f(x) & x \in \partial D \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

Satz 1.1 (Eindeutigkeit) Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (D). Dann ist $u_1 = u_2$. Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (N). Dann ist $u_1 = u_2 + \text{const}$.

5.2 Greensche Funktionen

Lemma 2.1 Sei $u \in C^2(\overline{D})$. Dann gilt für $x \in D$ $u(x) = \int_D E(x-y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial D} \left(E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) \right) d\Omega(y)$.

Definition 2.1 (Greensche-Funktion) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Eine stetige Funktion $G(x, y)$ auf $\{(x, y) \in \overline{D} \times D : x \neq y\}$ heisst **Greensche Funktion** des Gebiets D (für den Laplace-Operator), falls

- (i) $G(x, y) = E(x-y) + v(x, y)$, $v \in C^2(\overline{D} \times D)$ und $\Delta_x v(x, y) = 0$,
(ii) $G(x, y) = 0$, $x \in \partial D$, $y \in D$.

Insbesondere ist für $x \neq y$ $\Delta_x G(x, y) = 0$. Wir schreiben Δ_x für den Laplace-Operator $\sum \partial^2 / \partial x_i^2$ in den Variablen x .

Satz 2.2 (Form der Lösung) Falls u eine Lösung von (D) ist, hat man $u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_y}(y, x) f(y) d\Omega(y)$ für alle $x \in D$.

5.3 Methode der Spiegelbildladung, Poissonformel

Eine **Spiegelung** um die Sphäre vom Radius R ist die Abbildung $y \mapsto y^* = \frac{R^2}{|y|^2} y$. Sie erfüllt $y^{**} = y$, $|y^*| = \frac{R^2}{|y|}$ und $|y||x-y^*| = |x||y-x^*|$.

Greensche Funktionen sind gegeben durch

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|S^{n-1}|(2-n)} \left(|x-y|^{2-n} - \left(\frac{|y|}{R} \right)^{2-n} |x-y^*|^{2-n} \right) & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} (\log |x-y| - \log(|x-y^*| \frac{|y|}{R})) & n = 2. \end{cases}$$

Definition Der **Poisson-Kern** ist definiert durch $H(y, x) = \frac{\partial}{\partial n_y} G(y, x) = \langle \nabla_y G(y, x), n(y) \rangle = \frac{1}{|S^{n-1}|R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|y| = R$, $n = 2, 3, \dots$

Satz 3.1 (Poisson Formel, Lösung) Sei D die Kugel $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, f stetig auf ∂D .

$$u(x) = \int_{|y|=R} f(y) H(y, x) d\Omega(y) = \frac{R^2 - |x|^2}{|S^{n-1}|R} \int_{|y|=R} \frac{f(y)}{|x-y|^n} d\Omega(y), \quad x \in D$$

ist glatt auf $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, harmonisch und konvergiert gegen f , wenn $|x| \rightarrow R$.

Satz 3.2 (Mittelwertprinzip) Sei u harmonisch auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Für jede Kugel $B_R(x) \subset D$ gilt $u(x) = \frac{1}{|S_R(x)|} \int_{S_R(x)} u(y) d\Omega(y)$.

Satz 3.3 (Maximum-Prinzip) Ist u harmonisch auf einem Gebiet D und sei $x_0 \in D$ eine Maximalstelle, d.h. $u(x) \leq u(x_0)$ für alle $x \in D$. Dann ist u konstant.

Satz 3.4 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und u eine stetige Funktion auf dem Abschluss \overline{D} , die harmonisch auf D , sodass $u(x) = 0$ auf dem Rand ∂D . Dann ist $u(x) = 0$ für alle $x \in \overline{D}$.

Satz 3.5 Sei u harmonisch in $B_R(x)$. Dann ist $|\partial_{x_i} u(x)| \leq \frac{n}{R} \max_{|y-x|=R} |u(y)|$.

Korollar 3.6 Jede auf ganz \mathbb{R}^n beschränkte harmonische Funktion ist konstant.

6 Beweisideen

6.1 Fourierreihen

Satz 1.2 $|f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}| = |f_n| \Rightarrow$ absolute Konvergenz, $|f(x) - \sum_{|n| \leq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}| \leq \sum_{|n| \geq N} |f_n| \Rightarrow$ glm. Konv (nicht abh. von x), glm. Konvergenz stetiger Funktionen $\Rightarrow f$ ist stetig. Periodizität einfach durch Einsetzen in die Reihendarstellung. Wir setzen die Reihendarstellung von f in die Formel des Koeffizienten ein, tauschen Reihe und Integral (wegen glm. Konv.) und erhalten mit L1.1 genau den Fourierkoeffizienten.

Satz 2.1 Mit Verschiebung der Integrationsgrenzen und Variablensubst. erhalte $f_n = -\frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} f(x + \frac{x_n}{L}) dx$. Schreibe $f_n = \frac{1}{2} (f_n + f_n)$ mit der normalen und der verschobenen Darst. f ist stetig auf einem ausreichend grossen kompakten Intervall \Rightarrow glm. st. Also wird $\forall x \in [0, L] \forall \varepsilon : |f(x) - f(x + \frac{x_n}{L})| < \varepsilon$ und somit $|f_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

A Lebesgue-Integrationstheorie

A.1 Das Lebesguesche Integral

Lemma 2.5 Sei $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann ist $|f|$ messbar und f ist genau dann integrierbar, falls $|f|$ integrierbar ist, d.h. wenn $\int_E |f(x)| dx < \infty$.

Satz 2.6 Seien f, g integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt

- (i) $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und $\int_E \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_E f(x) dx + \beta \int_E g(x) dx$,
(ii) $f \leq g \Rightarrow \int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx$,
(iii) $f(x) = g(x)$ f.ü. $\Rightarrow \int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx$,
(iv) $\int_E |f(x)| dx = 0 \iff f(x) = 0$ f.ü.,
(v) $|\int_E f(x) dx| \leq \int_E |f(x)| dx$,
(vi) ist $F \subset E$ messbar, so ist die Einschränkung von f auf F ebenfalls integrierbar und es gilt $\int_E f(x) dx = \int_E f(x) \chi_F(x) dx$,
(vii) ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b] \Rightarrow f$ Lebesgue-integrierbar und das Lebesguesche Integral stimmt mit dem Riemannschen überein,
(viii) für alle affinen Transformationen $x \mapsto Ax + b$ von \mathbb{R}^n ist $x \mapsto f(Ax + b)$ integrierbar und es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b) dx$.

A.2 Konvergenzsätze

Satz 3.1 (MCT) Sei f_i eine Folge integrierbarer Funktionen $0 \leq f_i(x) \leq f_{i+1}(x) \rightarrow f(x)$ für $i \rightarrow \infty \forall x \in E$. Ist die Folge $\int_E f_i(x) dx$ beschränkt, so ist f integrierbar und es gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(x) dx = \int_E f(x) dx$.

Satz 3.2 (DCT) Sei f_i eine Folge integrierbarer Funktionen mit $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f$ und es existiert eine integrierbare Funktion g mit $|f_i(x)| \leq g(x) \forall i, x$. Dann ist f integrierbar und es gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(x) dx = \int_E f(x) dx$

A.3 Der Satz von Fubini

Satz 4.1 (Fubini) Seien $E \subset \mathbb{R}^n$ und $F \subset \mathbb{R}^m$ feste messbare Mengen. Sei $f : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Ist $f(x, \cdot)$ für alle $x \in E$ (bzw. $f(\cdot, y)$ für alle $y \in F$) integrierbar, so ist die Funktion $y \mapsto \int_E f(x, y) dx$ (bzw. $x \mapsto \int_F f(x, y) dy$) messbar. Existiert eins der Integrale $\int_{E \times F} |f(x)| dx$, $\int_F (\int_E |f(x, y)| dx) dy$ oder $\int_E (\int_F |f(x, y)| dy) dx$, so existieren sie alle drei und es gilt $\int_{E \times F} f(x) dx = \int_F (\int_E f(x, y) dx) dy = \int_E (\int_F f(x, y) dy) dx$.

A.4 L^p -Räume

Lemma 5.1 $L^p(E)$ ist ein Vektorraum über \mathbb{C} .

Satz 5.2 $L^p(E)$ mit Norm $\|f\|_p = (\int_E |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ ist ein normierter VR.

Definition 5.3 Eine $(f_i)_{i=1}^\infty$ in einem normierten Vektorraum V konvergiert gegen $f \in V$, falls $\lim_{i \in \infty} \|f_i - f\| = 0$. Eine Folge heisst **Cauchy-Folge**, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ mit $\|f_i - f_j\| < \varepsilon$ für alle $i, j > N$. Ein normierter Vektorraum V heisst **Banachraum**, falls alle Cauchy-Folgen in V konvergieren.

Satz 5.3 (Riesz-Fisher) Für alle $p \geq 1$ ist $L^p(E)$ ein Banachraum.

Definition 5.4 (Träger) von $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ ist $\text{supp } f = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$.

Satz 5.4 (C_0 dicht in L^p) Stetige Funktionen mit kompaktem Träger sind dicht in $L^p(E)$, d.h. $\forall f \in L^p(E) \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C_0(E)$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

B Misc

B.1 Konvergenz, Mittelwertsatz

Definition (Konvergenz) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $(f_n)_n$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls

- $\forall x \in D \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ist f_n punktweise konvergent,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ist f_n gleichmässig konvergent.

Anders ausgedrückt gilt $(f_n)_n$ gleichmässig konvergent $\Leftrightarrow \forall \epsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies (\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon))$.

Satz Falls $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen gleichmässig gegen f konvergiert, dann ist f stetig.

Satz (Mittelwertsatz) Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diffb. Falls $x_0 + th \in U \forall t \in [0, 1]$ und ein $h \in \mathbb{R}^n$, dann existiert ein $t_\zeta \in (0, 1)$, sodass $f(x_0 + h) - f(x_0) = \partial_h f(x_0 + t_\zeta h)$. Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, diffbar auf (a, b) , existiert ein $\zeta \in (a, b)$, sodass $f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

B.2 Vertauschungssätze

Es wird vorausgesetzt, dass alle Grenzwerte und Ableitungen existieren, Funktionen integrierbar sind und die zu integrierende Gebiet schön sind.

$\sum_n \partial_x f_n(x) < \infty$	$\implies \partial_x \sum_n f_n(x) = \sum_n \partial_x f_n(x)$
$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ glm.	$\implies \int \sum_n f_n(x) = \sum_n \int f_n(x)$
$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ glm.	$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx$
$\partial_t f(x, t)$ glm. stetig	$\implies \partial_t \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \partial_t f(x, t) dx$
$0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \int f_n(x) dx \leq c$	$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx$
$\exists g \in L^1 : f_n(t, x) < g(x)$	$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx$
$\exists g \in L^1 : \partial_t f(t, x) < g(x)$	$\implies \partial_t \int f(t, x) dx = \int \partial_t f(t, x) dx$
$f \in C_0, \mathcal{S}$	$\implies \partial_t \int f(t, x) dx = \int \partial_t f(t, x) dx$
$\int_F (\int_E f(x, y) dx) dy < \infty$	$\implies \int_F (\int_E f dx) dy = \int_E (\int_F f dy) dx$

B.3 Trigonometrie

$$\sin(ax) = \begin{cases} |\cdot| \max & ax = (2n+1)\frac{\pi}{2} & 0 \\ ax = (2n+0)\frac{\pi}{2} & n\pi & |\cdot| \max \end{cases} = \cos(ax)$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$A \cos x + B \sin x = \frac{A-iB}{2} e^{ix} + \frac{A+iB}{2} e^{-ix}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \sin x + \cos x = \frac{1}{1+i} e^{ix} + \frac{1}{1-i} e^{-ix} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y), \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y), \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)), \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)), \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \langle x, y \rangle = \cos(\gamma) |x| |y|$$

B.4 Ungleichungen, Abschätzungen und other

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad 2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2, \quad ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$
$$|\int_E f(x) dx| \leq \int_E |f(x)| dx, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx, x \geq -1, n \in \mathbb{N}$$
$$\text{Faktorisierung } ax^2 + bx = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}$$
$$\mathcal{S}, C_0^0 \text{ (und somit auch } C_0, C^\infty, C^n \forall n, C^0) \text{ sind dicht in } L^p.$$

B.5 Integrale und Reihen

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}, \quad \sum_{k=0}^\infty q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$$
$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}, \quad \log(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n \quad |x| < 1$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad \cos x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$
$$\int \sin(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)} + C & n \neq \pm m \\ -\frac{1}{4n} \cos(2nx) + C & n = m \end{cases}$$
$$\int \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} - \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + C & n \neq \pm m \\ \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{3n} \sin(2nx) + C & n = \pm m \end{cases}$$
$$\int \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} + C & n \neq \pm m \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2nx) + C & n = \pm m \end{cases}$$
$$\int_a^{a+2\pi l/n} \sin(nx) dx = \int_a^{a+(2l+1)\pi/n} \cos(nx) dx = 0, \quad a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}$$
$$\int_0^{l\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = C \delta_{nm}, \quad l \in \mathbb{N}$$
$$\int_{-\pi}^\pi \sin(nx) \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/a} dx = \sqrt{a\pi} \quad \int_0^\infty e^{-x^2/a} dx = \frac{1}{2} \sqrt{a\pi}$$

B.6 Koordinatensysteme

Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan(y/x)$ für $x > 0, 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi. \Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2$.

Kugelkoordinaten $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos(\frac{z}{r}), \varphi = \arg(x, y), 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$
 $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2$

B.7 Ansätze

Integral HDI: Zu zeigen $f(x) = \int g(x) dx$, zeige $\frac{d}{dx} f(x) = g(x)$; definiere Integral als neue Funktion, forme um und finde Gleichung fürs Integral; Integral ableiten und mit PI DGL herleiten $\partial I = \int g \partial_x f \stackrel{PI}{=} a \int fg = aI \implies I = I_0 e^{ax}; f \notin L^1 \implies$ konvergenzerzeugender Faktor $e^{-|x|^\delta}, e^{-\delta x^2}$; Fubini; Integrand zu Ableitung einer Funktion umformen (z.B. $\cos x \sin x = -\frac{1}{2} \partial_x \cos^2 x$); partielle Integration.

Fourierreihen Reihenansatz gleiches Format wie Reihe der Randbedingung; \sin, \cos in exp-Darstellungen zerlegen; Reihendarstellung der Randbedingung einsetzen; PZB, Geometrische Reihe; Residuensatz; beachte $n = 0$.

Fouriertransformation Gaussfunktionen; Hermitefunktionen als EV der FT, $(P(x)e^{-x^2/2})^\wedge(k) = P(x)$ als Linearkombination von Hermitepolynomen schreiben; Residuensatz; Formel für rotationsinvariante Funktionen (beachte $k = 0$); gegeben f , zu zeigen $\hat{f} = g$: zeige alternativ $g^\vee = f$; beachte $k = 0$.

Fundamentallösungen Gleichung Fouriertransformieren, für Rücktransformation Residuensatz

PDE Periodische Funktion \rightarrow FR; Separation probieren; Fouriertransformation in der Variable, in der die Anfangsbedingungen gegeben sind.

B.8 PDEs

Schroedinger equation Falls ψ_0 die TISE $\hat{H}\psi_0 = E\psi$ mit Eigenwert E löst, so ist $\psi = e^{-iEt/\hbar} \psi_0$ eine Lösung der TDSE $\hat{H}\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$.

Heat equation Ring (periodisch): Fourierreihenansatz, sonst allgemein \mathbb{R} : Lösung durch Faltung Wärmeleitungskern und Anfangsbedingung.

Wave equation Fouriertransformation der PDE, um eine DGL für \hat{f} zu bekommen. Rücktransformieren.

Saite Separation der Variablen, Lösung als Superposition schreiben.

Membran Separation der Variablen, Koordinatentransformation zu Polarkoordinaten, Separation der Variablen, Bessel-DGL erkennen, Randbedingungen durch Nullstellen der Besselfunktionen festsetzen.

Elektrostatik Transformation zu Kugelkoordinaten, Separation der Variablen, Kugelfunktionen verwenden.

Dirichlet, Neumann Greensche Funktion aus Kapitel 5.3, Satz 3.1.

B.9 Multiple Choice

$g(x) = \sin^{2017}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Richtig: 1) $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} n^{2018} |c_n| \rightarrow 0$, da $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. 2) $c_n = 0$ für n gerade. 3) $c_{2017} = -2^{-2017} i$, da $\sin^{2017}(x) = (\frac{-i}{2} (e^{ix} - e^{-ix}))^{2017}$. Falsch: 4) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n = 1$, da $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n = \sin^{2017}(0) = 0$.

Richtig: 1) \hat{f} ist stetig für alle $f \in L^1$. 2) Ist f gerade, so ist auch \hat{f} gerade, da $e^{i(2017-n)x} e^{-inx} = e^{i(2017-2n)x}$. 3) Wenn $f(x) = 0$ für $|x| > 1$, dann ist $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Falsch: 4) \hat{f} ist 2π -periodisch für alle $f \in L^1$.

$\Delta u = 0$ auf $B_1(\mathbb{R}^3)$ mit $u(x) = x_3^2$ für $|x| = 1$. Richtig: 1) $0 \leq u(x) \leq 1$ für alle $x \in B_1$. 2) $\max\{u(x), x \in B_1\} = 1$. Falsch: 3) $u(0) = 0$ 4) $\int_{B_1} u(x) dx = 0$.

$\partial_x^2 u = \partial_t u, u(0, x) = 1/(1+x^2)^2$. Richtig: 1) $\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$ ist konstant in $t \geq 0$. 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{u}(k, t) = 0$ für alle $k \neq 0$. Falsch: 3) $u(x, t) = 0$ für alle (x, t) , sodass $|x| > 1/\sqrt{t}$. 4) $\hat{u}(-k, t) = -\hat{u}(k, t)$ für alle $t > 0, k \in \mathbb{R}$.

Sind zwei jeweilige Lösungen eindeutig? Richtig: 1) $\Delta u(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, u rot.inv., $u(1, 0, 1) = 1, u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$. 2) $\Delta u(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1, u(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1$. Falsch: 3) $\Delta u(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n$. 4) $\Delta u(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1, x \nabla u(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1$.

$f(x) = \sin(x) e^{-x^4}$. Richtig: 1) $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} \partial_k^n \hat{f}(k) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 2) $\hat{f} \in L^2$, da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Falsch: 3) $\hat{f}(k) \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{R}$, da f ungerade. 4) \hat{f} ist glatt mit kompaktem Träger, da $\int_{\mathbb{R}} \cos(kx) e^{-x^4} dx > 0 \forall k \in \mathbb{R}$.

$f(x) = e^{-x^4}$. Richtig: 1) $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} k^n \hat{f}(k) = 0$. 2) $\hat{f} \in C^\infty$. 3) Es gibt eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $\hat{f}(k) = F(k) \forall k \in \mathbb{R}$. Falsch: 4) $\hat{f}(0) = 0$.

$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l a_{l,m} r^l Y_l(\theta, \varphi)$. Richtig: 1) $\Delta u = 0$. 2) $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 dx = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l |a_{l,m}|^2$. 3) $a_{l,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{Y_{l,m}}(\theta, \varphi) u(1, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$. 4) Wenn $a_{l,m} = 0$ für $m \neq 0$, dann ist u invariant unter Rotationen um die z-Achse.

Welche Reihe konvergiert? Richtig: 1) $\sum_{l=0}^\infty l^2 2^{-l} P_l(x)$. 2) $\sum_{l=0}^\infty P_{n^2}(x)$. 3) $\sum_{l=0}^\infty \frac{(-1)^l}{\sqrt{l}} P_l(x)$. Falsch: 4) $\sum_{l=0}^\infty (-1)^l P_l(x)$.

Richtig: 1) $\int_{-1}^1 P_{23}(x) dx = 0$, da $\langle P_0, P_{23} \rangle = 0$. 2) $\langle P_l, P_{l'} \rangle = 0$. Fal.: 3) $\langle P_l, P_l \rangle = 1$.

Was definiert temperierte Distribution? Richtig: 1,2) $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$ für $f \in L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})$. Falsch: 3) $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} \varphi(x) dx$. 4) $\varphi \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x)$, da nicht linear.

Richtig: 1) $x \delta'(x) = -\delta(x)$. 2) $\int_{\mathbb{R}} \delta'(x) \varphi(x+a) dx = -\delta'(a)$. 3) $\partial_x^3 |x| = 2\delta'(x)$. 4) $x^2 \delta' = 0$. Falsch: 5) $\delta'(2x) = 2\delta'(x)$. 6) $x \delta' = 0$, da z.B. $x \delta'[e^{-x^2}] = \delta[(xe^{-x^2})'] = -1$. 7) $\delta(3x) = 3\delta(x)$, da $\delta(3x) = \frac{1}{3} \delta(x)$. 8) $\hat{\delta}(k) = \sum_{n=-\infty}^\infty k^n$, da $\hat{\delta}(k) = 1$.