Simulación Estocástica - Taller 1

Jesid Mauricio Mejía Castro

15 de marzo de 2022

1. Eventos y probabilidad

a. Supongamos que A representa la canica azul; R, la roja y V, la verde. Entonces, dado que hay reemplazo, el espacio muestral para el experimento de sacar una canica y después la siguiente es:

$$\Omega = \{(A,A),(A,R),(A,V),(R,A),(R,R),(R,V),(V,A),(V,R),(V,V)\}.$$

Si cada canica tiene la misma posibilidad de ser seleccionada, entonces la probabilidad de cada punto en el espacio muestral es $1/9$.

b. Si se realiza el mismo experimento sin reemplazo, el espacio muestral sería:

$$\Omega = \{(A,R),(A,V),(R,A),(R,V),(V,A),(V,R)\}.$$

Es decir, se descarta la posibilidad de volver a sacar la misma canica.

2. Valor esperado y varianza de una variable aleatoria discreta

Si Ω es el espacio muestral para el experimento de lanzar dos dados justos, se tiene que $|\Omega| = 36$. A continuación se muestra el espacio muestral. La función de masa de probablidad p_M puede definirse con la auda de la siguiente tabla:

x	Ω						$p_M(x)$
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$11/36$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$	$9/36$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$	$7/36$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$	$5/36$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$	$3/36$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$	$1/36$
							$\sum_{x=1}^{6} p_M(x) = 1$

A partir de la tabla podemos observar que

$$P(M \geq 3) = 1 - P(M < 3) = \frac{11}{36} + \frac{9}{36} = 0.\bar{5}.$$

Para obtener el valor esperado, calculamos

$$E(X) = \mu = \sum_{x=1}^{6} x\, p_M(x) \approx 2{,}527.$$

Para obtener la varianza, calculamos

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{6} (x_i - \mu)^2 \approx 0{,}644.$$

3. Generadores congruentes

Los generadores de números aleatorios dados por la congruencia:

$$X_{n+1} = (8X_n + 3) \mod 11$$

generan los siguientes 11 ciclos variando la semilla X_0:

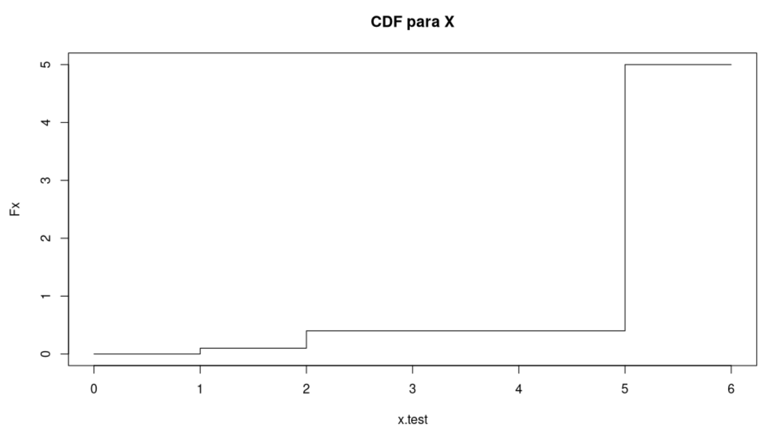
```
[x0=0]    3  5 10  6  7  4  2  8  1  0
[x0=1]    0  3  5 10  6  7  4  2  8  1
[x0=2]    8  1  0  3  5 10  6  7  4  2
[x0=3]    5 10  6  7  4  2  8  1  0  3
[x0=4]    2  8  1  0  3  5 10  6  7  4
[x0=5]   10  6  7  4  2  8  1  0  3  5
[x0=6]    7  4  2  8  1  0  3  5 10  6
[x0=7]    4  2  8  1  0  3  5 10  6  7
[x0=8]    1  0  3  5 10  6  7  4  2  8
[x0=9]    9  9  9  9  9  9  9  9  9  9
[x0=10]   6  7  4  2  8  1  0  3  5 10.
```

4. Método de la inversa para variables aleatorias discretas

a. La función de distribución acumulada (CDF) para X es:

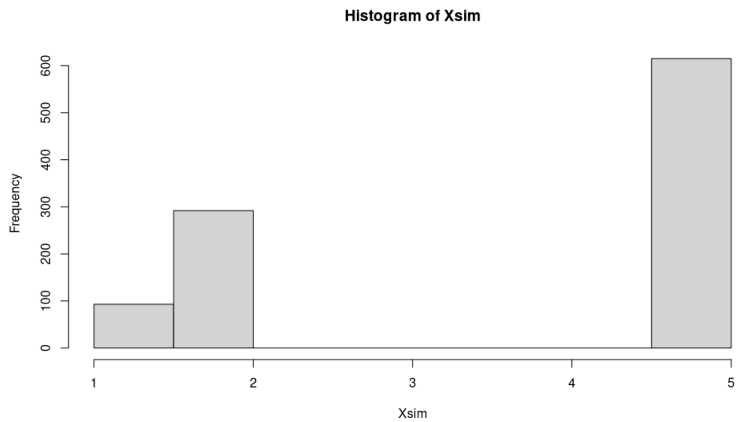
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 1 \\ 0{,}1, & \text{si} \quad 1 \leq x < 1 \\ 0{,}4, & \text{si} \quad 2 \leq x < 5 \\ 1, & \text{si} \quad 5 \leq x. \end{cases}$$

Su gráfica es la siguiente:

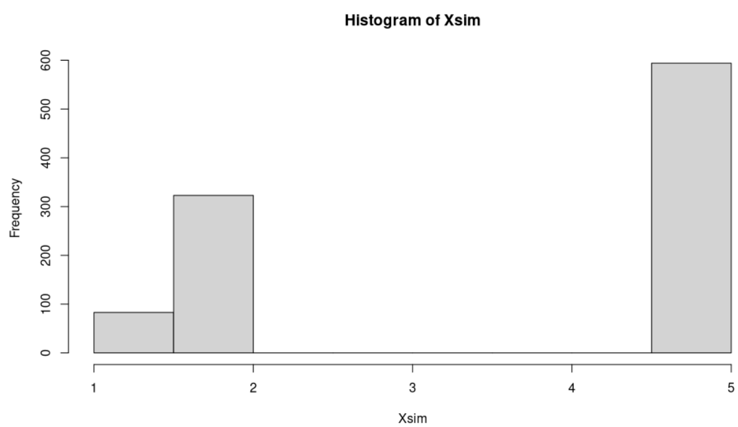


b. Consultar el archivo `p4.R` adjunto.

Para $n = 10^3$ se obtiene la siguiente gráfica:



Para $n = 10^5$ se obtiene la siguiente gráfica:



5. Método de la inversa y método de rechazo para variable aleatoria contínua

Se nos da una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a. Cálculo de probabilidades:

$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\, dx = 0$$

$$P(1 \leq X \leq 1{,}5) = \int_{1}^{1{,}5} f_X(x)\, dx = 0{,}125$$

$$P(1{,}5 \leq X) = \int_{1{,}5}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{1{,}5}^{2} 3(x-1)^2\, dx = 0{,}875.$$

b. La función de distribución acumulada (CDF) $F_X(x)$ se obtiene calculando:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du = \int_{1}^{x} 3(u-1)^2\, du = (x-1)^3.$$

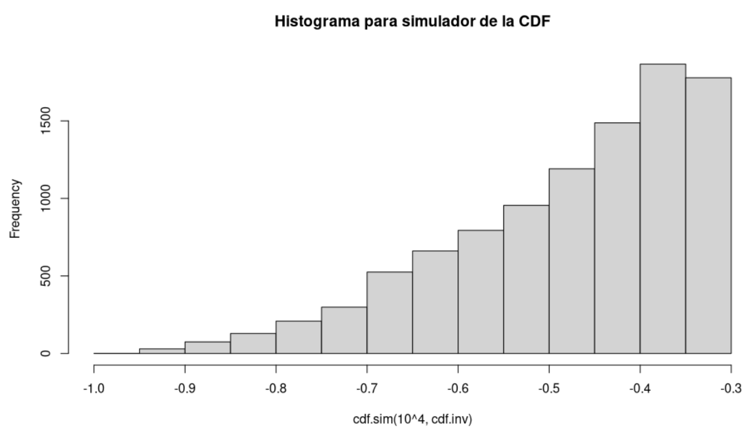
c. Para simular núemeros aleatorios utilizando el método de inversión, debemos calcular F_X^{-1} así:

$$F_X^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{3}} - 1.$$

Posteriormente, generamos un número aleatorio con distribución uniforme entre 0 y 1. Este número será el argumento de F_X^{-1}.

d. Consultar `p5.R`.

e. El histograma generado por el simulador es el siguiente:



6. Estimación de π

Sean X y Y variables aleatorios *i.i.d.* $U(0,1)$.

a.
$$P((X,Y) \in [a,b] \times [c,d]) = (b-c)(d-c).$$

b. Basado en la respuesta anterior, si A es subconjunto arbitrario del conjunto $[0,1] \times [0,1]$ La probabilidad $P((X,Y) \in A)$ puede interpretarse geométricamente como el área de la región A.

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A dA$$

c. Si $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x^2 + y^2 \leq 1\}$, entonces A es un cuarto de circulo de radio 1 inscrito en el primer cuadrante. El área de A es por tanto $\frac{\pi}{4}$.

d. Consultar programa `p6.R`

7. Integración de Monte Carlo

a. La integral

$$\int_{-2}^{2} x^2 \, dx = \frac{16}{3} \approx 5{,}3$$

Para la aproximación utilizando el método de Monte Carlo, consulte le programa `p7.R`

b La integral

$$\int_0^1 \int_0^2 e^{(x+y)^2} \, dx \, dy \approx 275{,}884$$

Para la aproximación utilizando el método de Monte Carlo, consulte le programa `p7.R`