SIMULACION ESTOCASTICA 2022-1
Taller 3: Modelos estocásticos 2

Indicaciones: Subir al link en AVATA un archivo *pdf* con el procedimiento analítico y análisis, y un archivo en `R` con los códigos de los puntos que lo requieran.

Fecha de entrega: Domingo 5 de Junio de 2022

1. **Cadenas de Markov de Tiempo Discreto, CMTD:**

   Se realizan varios ensayos de una actividad consecutivamente. Si los dos últimos ensayos fueron exitosos, entonces el siguiente ensayo es exitoso con probabilidad 0.8; en cualquier otro caso, el siguiente ensayo es exitoso con probabilidad 0.5.

   a) Explique cómo se puede modelar esta situación como una CMTD. Defina apropiadamente el estado de la cadena X_n, los valores que puede tomar (el espacio de estados S), la matriz de probabilidad de transición $\mathbb{P}$ y la representación gráfica de la cadena (*Pista:* Tenga en cuenta que la propiedad markoviana no se cumple tomando los estados como el éxito o fracaso en un sólo intento).

   b) Encuentre el vector de probabilidad estacionaria π. Lo puede hacer analíticamente (resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente), numéricamente (con el código en AVATA: *Probabilidad límite y simulacion de CMTD.R*), o con el paquete `markovchain`. En este caso tiene dos opciones: (i) con el comando `steadyStates` o (ii) computando la matriz de transición de probabilidad $\mathbb{P}^{(n)}$ del paso n para valores grandes y consecutivos de n.

   c) En el largo plazo ¿cuál es la proporción de ensayos que son exitosos?

2. **Ruido blanco con distribución t-student y caminata aleatoria**

   Sea X distribuida *t-student* con $\nu > 1$ grados de libertad. Su media es $E[X] = 0$ y su varianza es $Var(X) = \frac{\nu}{\nu-2}$, para $\nu > 2$, e igual a ∞ para $1 < \nu \leq 2$. Su función de densidad se caracteriza por ser simétrica alrededor de 0 y tener colas pesadas para valores pequeños de ν. Es decir, hay una probabilidad no despreciable de que X pueda tener valores grandes (negativos o positivos).

   Suponga que modela un ruido blanco e_t a partir de X de la siguiente forma:

   $$e_t = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} X,$$

   con $\nu > 2$. A partir de éste puede modelar una caminata aleatoria definida por:

   $$Y_t = e_1 + e_2 + \cdots + e_t$$

a) Demuestre que $E[e_t] = 0$ y $\sigma_{e_t} = 1$.

b) Utilice el código `RandomWalk` en AVATA, para obtener 10^4 realizaciones del ruido blanco *t-student* previamente definido con $\nu = 3$. Determine los valores mínimo y máximo de su simulación y compárelos con los obtenidos a partir de una simulación de un ruido blanco normal estándar del mismo tamaño.

c) Complete el código `RandomWalk` en AVATA para que simule $Nsim = 200$ caminatas aleatorias con el ruido blanco *t-student* previamente definido, hasta un tiempo $T = 100$. Presente las gráficas de las caminatas aleatorias. Presente también las gráficas de las caminatas aleatorias a partir de un ruido blanco normal estándar. Compare ambos resultados.

3. **Time series:**

Solve exercise 3.5 from the book *Time series analysis: with applications in R*. Install the package *TSA* and run the following lines to upload and view the data:

```
library(TSA)
data(wages)
View(wages)
```