Begründung der finanzmathematischen Formeln im oemof-Modul „economics" beziehungsweise „economics_BAUM"

M. Stöhr, B.A.U.M. Consult GmbH

Hintergrund

Die hier besprochenen finanzmathematischen Formeln finden sich in der Open Source Software oemof im Modul „economics" beziehungsweise „economics_BAUM". Dieses wurde aus jenem im Projekt „GridCon" im Rahmen des Forschungsprogramms „IKT für Elektromobilität" abgeleitet. Es wurde verwendet, um zu berechnen, bei welchem Stand der Nutzung der photovoltaischen Stromerzeugung im gleichen Ortsnetz eher eine Netzanschlusserweiterung oder die Installation eines stationären Energiespeichers oder eine Kombination von beidem zur Versorgung einer leitungsgeführten, elektrifizierten Landmaschine hoher Leistung geeignet ist. Die Formeln entsprechen denen, die üblicherweise bei der Berechnung der Wirtschaftlichkeit von Investitionen verwendet werden. Sie wurden im Rahmen des Projekts „GridCon" auf verschiedene Weise überprüft. Die folgenden Ausführungen geben die stringente mathematische Begründung wieder. Als Nebeneffekt wird dabei auch ein wenig beleuchtet, was der Begriff „wirtschaftlich" eigentlich bedeutet und welche Freiräume bestehen ihn zu deuten.

Die Sicht der Wirklichkeit hinter finanzmathematischen Formeln

Den besprochenen finanzmathematischen Formeln liegt eine bestimmte Sicht der Wirklichkeit, konkreter gesagt eine Wahl der Perspektive bei der Bewertung zukünftiger Zahlungsflüsse zugrunde. Sie besteht darin, den heutigen kalkulatorischen Wert eines zukünftigen Zahlungsflusses umso geringer anzusetzen, je weiter der Zahlungsfluss in der Zukunft liegt. Mathematisch gefasst entspricht dem die Beschreibung des kalkulatorischen Werts eines Zahlungsflusses durch eine streng monoton fallende Funktion der Zeit, zu der er stattfindet, beziehungsweise erwartet wird.

Diese Perspektive wird nun durch eine ebenfalls gewählte und keinesfalls zwingend erforderliche Einschränkung enger gefasst, nämlich die Festlegung, dass der heute anzusetzende kalkulatorische Wert eines Zahlungsflusses F(t), also einer Einnahme oder Ausgabe, die zum Zeitpunkt t in der Zukunft stattfindet, in gleichen Zeitintervallen immer um den gleichen Anteil seines Werts zu Beginn des Zeitintervalls sinken solle. Beispiel: Der kalkulatorische Wert sinke um 8 % pro Jahr.

Mathematisch gefasst heißt dies, dass der Wert eines Zahlungsflusses durch eine Funktion der Zeit zu beschreiben ist, die einer der einfachsten aller Differenzialgleichungen genügt:

$$\text{Gl. (1)} \quad \frac{d\,F(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot F(t)$$

Dabei ist τ eine positive reelle Zahl und hat die Bedeutung einer Zeit. Je größer τ, desto langsamer ist die kalkulatorische Wertabnahme des Zahlungsflusses.

Es gibt unendlich viele Lösungen dieser linearen Differenzialgleichung, aber alle sind Exponentialfunktionen und unterscheiden sich nur in einer Konstanten, die mit F_0 bezeichnet sei. Sie haben dann folgende Gestalt:

$$\text{Gl. (2)} \quad F(t) = F_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

F_0 ist der Wert welcher für den Zahlungsfluss anzusetzen wäre, wenn er heute stattfände, sprich sein nominaler Wert.

Freiheitsgrade innerhalb der gewählten Perspektive

Die Konstante τ ist der einzige Freiheitsgrad, der in der gewählten Perspektive zur Betrachtung wirtschaftlicher Vorgänge noch verbleibt. F_o ist der nominale Wert eines Zahlungsflusses in Euro beziehungsweise einer anderen Währung und damit nicht Gegenstand freier Wahl.

Grundsätzlich kann jeder auch eine ganz andere Perspektive wählen, um wirtschaftliche Entscheidungen zu treffen. Es kann subjektiv zum Beispiel viel wichtiger sein, dass eine bestimmte Einnahme bis zu einem bestimmten Zeitpunkt erfolgt, aber ziemlich unwichtig, wann genau davor. Dann muss der kalkulatorische Wert noch nicht einmal durch eine streng monoton fallende Funktion der Zeit, geschweige denn durch eine Exponentialfunktion wie in Gl. (2) beschrieben werden.

Die Wahl ist solange und in dem Maße frei, in dem keine Abstimmung mit anderen Menschen erforderlich ist. Dies gilt insbesondere für viele Investitionen im Privatbereich. Bei allen sonstigen wirtschaftlichen Betrachtungen wird jedoch die oben genannte und in den üblichen finanzmathematischen Formeln implementierte Perspektive eingenommen – in aller Regel wohl ohne sich dessen bewusst zu sein und spätestens beim Gespräch mit der finanzierenden Bank.

Das zentrale Charakteristikum dieser Perspektive liegt darin, dass zukünftige Finanzflüsse umso weniger berücksichtigt werden, je weiter sie in der Zukunft liegen. Dadurch werden wirtschaftliche Handlungen bevorzugt, bei denen die Einnahmen möglichst früh und die Ausgaben möglichst spät erfolgen.

Darstellung des kalkulatorischen Wertabnahme in finanzmathematischen Formeln

In Wirtschaftlichkeits- und finanzmathematischen Betrachtungen wird die kalkulatorische Wertabnahme in der Regel jedoch nicht mit der Konstante τ sondern mit einem kalkulatorischen Zinssatz z beschrieben.[1] Dabei wird die Wertabnahme innerhalb eines Jahres wie folgt dargestellt:

$$\text{Gl. (3)} \quad F_{i+1} = F_i \frac{1}{1+z}$$

Der Index i bezeichnet dabei die Nummer des Jahres. Kombination mit Gl. (2) zeigt:

$$\text{Gl. (4)} \quad \frac{\tau}{1\ Jahr} = \frac{1}{\ln(1+z)}$$

Bei einem kalkulatorischen Zinssatz von 8 % nimmt τ den Wert 13 Jahre an. Das heißt, dass ein Zahlungsfluss in 13 Jahren nur mit e^{-1}, also 36,8 % des im heute beigemessenen (nominalen) Werts veranschlagt wird. [2] Je größer der Zinssatz ist, desto kleiner τ und desto schneller die kalkulatorische Wertabnahme.

Man beachte, dass z hierbei nicht der Anteil ist, um den der kalkulatorische Wert je Jahr abnimmt. Dieser Anteil sei mit w bezeichnet. Dann kann man die jährliche kalkulatorische Wertabnahme durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\text{Gl. (5)} \quad F_{i+1} = F_i(1-w)$$

[1] Darstellungen wie in Gl. (2) sind dagegen in Naturwissenschaften und Technik sehr gebräuchlich und beschreiben Absorptionsprozesse, den radioaktiven Zerfall, etc., also Vorgänge, deren Gesetzmäßigkeiten nicht der Festlegung durch den Menschen anheimgestellt, sondern in ihrer Substanz vorgegeben sind.

[2] „e" bezeichnet hier die Eulersche Zahl, welche die Basis des natürlichen Logarithmus bildet und den Wert 2,718281828 hat. Ihr Kehrwert ist 0,367879441, also 36,8 %.

Bei einem kalkulatorischen Zinssatz von 8 % ist die jährliche kalkulatorische Wertabnahme 7,4 %. Je kleiner jedoch der kalkulatorische Zinssatz und die jährliche kalkulatorische Wertabnahme sind, desto näher liegen ihre Werte beieinander.[3]

Zuordnung zu Kalender- oder Geschäftsjahren

Der heute anzusetzende Wert W einer wirtschaftlichen Tätigkeit mit insgesamt m Einzeleinnahmen $E(t_i)$ jeweils zum Zeitpunkt t_i und p Einzelausgaben $A(t_k)$ jeweils zum Zeitpunkt t_k wird durch folgende allgemeine Gleichung beschrieben:

$$\text{Gl. (6)} \quad W = \sum_{i=1}^{m} E(t_i)\, e^{-\frac{t_i}{\tau}} - \sum_{k=1}^{p} A(t_k) e^{-\frac{t_k}{\tau}}$$

Bei vielen Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen werden unterjährige Finanzflüsse jedoch kalkulatorisch so bewertet, als erfolgten sie exakt zum Ende des jeweiligen Kalender- oder Geschäftsjahres, eine Anfangsinvestition I_0 so, als erfolge sie exakt zu Beginn des ersten Kalender- oder Geschäftsjahres. Damit kann der heute anzusetzende Wert W einer wirtschaftlichen Tätigkeit mit einer Anfangsinvestition I_0, einer Dauer von n Jahren und Jahreseinnahmen e_i und Jahresausgaben a_i jeweils im Jahr i mit Hilfe des kalkulatorischen Zinssatzes beschrieben werden:

$$\text{Gl. (7)} \quad W = -I_0 + \sum_{i=1}^{n} (e_i - a_i) \left(\frac{1}{1+z}\right)^i$$

Ist W positiv, ist die Tätigkeit rentabel, ansonsten nicht. Einen Freiheitsgrad bei der Bewertung der Wirtschaftlichkeit stellt dabei der kalkulatorische Zinssatz z da.

Allerdings ist ein wirtschaftlicher Akteur in der Wahl dieses Zinssatzes nur in dem Maße frei, in dem er seine Ausgaben, insbesondere Investitionen, mit Eigenkapital finanziert. Nimmt er Fremdkapital in Anspruch, ist für den kalkulatorischen Zinssatz ein gewichtetes Mittel aus selbstgewählter gewünschter Verzinsung des eingesetzten Eigenkapitals und vorgegebener Verzinsung des in Anspruch genommenen Fremdkapitals zu nehmen, um dem Fremdkapitalgeber die Rentabilität des Vorhabens nachzuweisen. Gegebenenfalls ist die Vergabe von Fremdkapital auch von einer hinreichend hohen, also dann auch nicht mehr ganz frei gewählten kalkulatorischen Verzinsung des Eigenkapitals abhängig.

Der entsprechende englische Begriff *weighted average costs of capital (wacc)* taucht in den oemof-Modulen „economics“ und „economics_BAUM“ als Variablenname auf.

Vergleich von Investitionen mit anderen Finanzflüssen: die Annuität

Um die meist sehr diskontinuierlichen Investitionen mit den sonstigen eher regelmäßigen Finanzflüssen vergleichbar zu machen, wird üblicherweise ein ihnen äquivalenter, jährlich in gleicher Höhe wiederkehrender Zahlungsfluss, die Annuität, ausgehend von folgender Formel berechnet:

$$\text{Gl. (8)} \quad I_0 + \sum_{i=1}^{n} I_i \left(\frac{1}{1+z}\right)^i = A \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+z}\right)^i$$

[3] In Begriffen der mathematischen Analysis ausgedrückt: Die Taylor-Reihenentwicklung der Funktion $\frac{1}{1+z}$ um den Punkt $z = 0$ bis zum linearen Term ist die Funktion $1 - z$. Beide Funktionen konvergieren gegen einander für $z \rightarrow 0$.

Äquivalent bedeutet: die diskontinuierlichen Investitionen wirken sich kalkulatorisch so aus, als ob im betrachteten Zeitraum regelmäßige jährliche Ausgaben in gleicher Höhe, nämlich der Annuität, anfielen.

Zur Ableitung weiterer Formeln ist es nun hilfreich, die Substitution $q = \frac{1}{1+z}$ vorzunehmen und die Summenformel der geometrischen Reihe zu verwenden:

Gl. (9) $\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q(1-q^n)}{1-q}$

Diese kann gegooglet oder anderweitig nachgeschlagen, aber auch leicht mathematisch in vollständiger Induktion wie folgt bewiesen werden:

Gl. (9) gilt für n =1: $\sum_{i=1}^{1} q^i = q = \frac{q(1-q^1)}{1-q}$

Nun gelte Gl. (9) für ein beliebiges n.

Dann folgt für n+1: $\sum_{i=1}^{n+1} q^i = \sum_{i=1}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{q(1-q^n)}{1-q} + q^{n+1} = \frac{q(1-q^n)+q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{q(1-q^{n+1})}{1-q}$

Da Gl. (9) für n = 1 gilt, gilt sie auch für n = 1+1 = 2, darum auch für n = 2+1 = 3, … Folglich gilt Gl. (9) für alle n ϵ |N

Finanzmathematische Formel im vorgefundenen oemof-Modul „economics“

Für den Spezialfall einer einzigen Anfangsinvestition, der im Betrachtungszeitraum keine weiteren folgen, geht Gl. (8) unter Verwendung von Gl. (9) über in:

Gl. (10) $$A = I_0 \frac{1-q}{q(1-q^n)} = I_0 z \frac{(1+z)^n}{(1+z)^n - 1}$$

Diese Formel ist im oemof-Modul „economics“ standardmäßig implementiert. Das Modul berechnet die Annuität A und gibt sie als Ergebnis zurück.

Finanzmathematische Formel im abgewandelten oemof-Modul „economics_BAUM“

Bei den von der B.A.U.M. Consult GmbH im GridCon-Projekt durchgeführten Berechnungen mussten die Kosten einer Erweiterung des elektrischen Netzes zur allgemeinen Versorgung mit den Kosten eines stationären Energiespeichers verglichen werden. Im Gegensatz zu einem elektrischen Netz haben die als Energiespeicher vor allem in Frage kommenden Lithium-Ionen-Batteriespeicher zum einen eine deutlich kürzere technische Lebensdauer, zum anderen sinken ihre Investitionskosten aktuell mit atemberaubender Geschwindigkeit. Es mussten also sowohl Folgeinvestitionen als auch deren Kostendegression berücksichtigt werden. Als finanzieller Betrachtungszeitraum wurde die technische Lebensdauer des elektrischen Netzes gewählt.

Allgemein führt dies auf das mathematische Problem der Berechnung der Annuität einer Serie von Investitionen mit exponentiell fallenden Kosten. Ausgangspunkt ist folgende Abwandlung von Gl. (8):

Gl. (11) $$I_0 + \sum_{j=1}^{m-1} I_0 (1-cd)^{ju} q^{ju} = A \sum_{i=1}^{n} q^i$$

Dabei ist u die technische Lebensdauer der Investition in Jahren, m-1 die Anzahl der Folgeinvestitionen und es sei n = m·u, was bedeutet, dass das Ende der technischen Lebenszeit der letzten Folgeinvestition mit dem Ende des finanziellen Betrachtungszeitraums zusammenfällt.

Auf der linken Seite von Gl. (11) bezeichnet I_0 die Kosten der ersten Investition und $cd = \frac{I_i - I_{i+1}}{I_i}$ die jährliche Kostendegression, welcher die Folge der betrachteten Investitionen unterliegt, und wobei i die Nummer des Jahres angibt. Die erste Folgeinvestition nach u Jahren kostet nominal nur noch $I_0 (1-cd)^u$, die j-te Folgeinvestition nach j·u Jahren nur noch $I_0 (1-cd)^{ju}$, wobei j die Nummer der Folgeinvestition angibt. Der Faktor q^{ju} wandelt den nominalen Wert in den kalkulatorischen Wert um. Die rechte Seite ist identisch zu der in Gl. (8).

Die Anwendung der Summenformel der geometrischen Reihe, Gl. (9), auf beiden Seiten von Gl. (11) führt zu:

Gl. (12) $$I_0 \left(1 + ((1-cd)\,q)^u \frac{1-((1-cd)q)^{(m-1)u}}{1-((1-cd)\,q)^u}\right) = A \frac{q(1-q^n)}{1-q}$$

Daraus folgt:

Gl. (13) $$A = I_0 \frac{1-q}{q(1-q^n)} \cdot \frac{1-((1-cd)\,q)^{mu}}{1-((1-cd)q)^u}$$

Resubstitution von q durch $\frac{1}{1+z}$ und Ersetzen von m·u durch n führt zu:

Gl. (14) $$A = I_0 z \frac{(1+z)^n}{(1+z)^n - 1} \cdot \frac{1-(\frac{1-cd}{1+z})^n}{1-(\frac{1-cd}{1+z})^u}$$

Gl. (14) geht in Gl. (10) über wenn u = n. Dann ist zugleich die Angabe von cd hinfällig, da nur eine Investition im Betrachtungszeitraum vorkommt.

Diese Formel ist im oemof-Modul „economics_BAUM“ mit folgenden Variablenumbenennungen implementiert: I_0= capex, z = wacc, cd = cost_decrease.

Hinzuaddiert werden die jährlichen fixen Kosten (fixed annual operational costs) mit der Variablen oc. Damit umfasst die Variable „epc“, die vom Modul „economics_BAUM“ zurückgegeben wird, alle fixen jährlichen Kosten einer wirtschaftlichen Tätigkeit. „epc“ steht für den entsprechenden englischen Begriff „equivalent periodical costs“.

Berücksichtigung regelmäßiger fixer Einnahmen

Mit dem Modul „economics_BAUM“ können auch regelmäßige Einnahmen erfasst werden. Dies wurde angewandt, um Einnahmen aus der Bereitstellung von Primärregelleistung (PRL) durch den stationären Energiespeicher zu berücksichtigen. Dazu wurde einfach die Differenz aus fixen jährlichen Kosten und prognostizierten jährlichen Einnahmen aus PRL-Bereitstellung mit der Variable oc bezeichnet und dem Modul übergeben. Diese spiegelt dann nicht mehr die jährlichen fixen Kosten, sondern diese Differenz, also quasi die jährlichen fixen „Nettokosten“ nach Abzug prognostizierter fixer Einnahmen wieder.

Modifiziertes oemof-Modul “economics_BAUM”

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""

Module to collect useful functions for economic calculations.
"""

def epc(capex, n, u, wacc, cost_decrease = 0, oc = 0):
    """
    function represents equivalent periodical costs of an economic activity


    parameters
    ----------
    capex: float
        capital expenditure for first investment per functional unit
        (e.g. 1 kWh or 1 kW)
    n : int
        number of years investigated; might be an integer multiple of technical
        lifetime (u) in case of repeated investments
    u : int
        number of years that a single investment is used, i.e. the technical
        lifetime of a single investment
    wacc : float
        weighted average cost of capital
    cost_decrease : float
        annual rate of cost decrease for repeated investments
        takes the value "0" if not set otherwise, that is in case of a single
        investment or in case of no cost decrease for repeated investments
    oc : float
        fixed annual operational costs per functional unit (e.g. 1 kWh or 1 kW)
        takes the value "0" if not set otherwise

    """
    annuity_factor = (wacc*(1+wacc)**n)/((1+wacc)**n-1)
    # the annuity factor is the ratio of the equivalent annual costs of investment
    # (annuity) and the costs of investment in case of a single initial investment

    return (annuity_factor*capex*((1-((1-cost_decrease)/(1+wacc))**n)
                           /(1-((1-cost_decrease)/(1+wacc))**u)))+oc
    # the value returned are the equivalent periodical (annual) costs of an
    # investment (annuity) plus the periodical fixed operational costs (oc);
    # the expression behind "capex" reflects the modification of the annuity
    # in case of repeated investments at fixed intervals u with decreasing costs;
```