INSTITUT AFRICAIN D'INFORMATIQUE
Représentation du Cameroun
Centre d'excellence technologique Paul BIYA
BP: 13719-Yaoundé Tel:24272995

AFRICAN INSTITUT OF COMPUTER SCIENCES
Cameroun Office
Paul BIYA Technological Center of Excellence
Email: contact@iaicameroun.com

Fiche de TD Statistiques deuxième année

Exercice 1 *Monter que:*

1. *La convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en probabilité.*
2. *Pour les* (X_n) *sont des variables aléatoires d'espérance et de variance finies, si* $E(X_n) \to \mu$ *et* $V(X_n) \to 0$ *alors* X_n *converge en moyenne quadratique vers* μ.

Exercice 2 *Soit* $X_1, \ldots, X_n$ *des v.a. indépendantes et de même loi que la v.a.* X *de loi normale* $N(0, \sigma)$, *où* σ *est un nombre réel positif donné. Montrer que la suite* T_n *définie par :* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ *converge en probabilité vers une limite que l'on déterminera.*

Exercice 3 *Soit* $X_1, \ldots, X_n$ *des v.a. indépendantes et de même loi que la v.a.* X, *de densité :* $f(x) = \frac{\theta}{2}e^{-\theta|x|}$ *où* θ *est un nombre réel positif donné. Étudier la convergence en probabilité de la suite de v.a. définie par :* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$

Exercice 4 *On considère l'échantillon statistique* $(1, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$.

1. *Calculer sa moyenne et sa variance empiriques.*
2. *En supposant que les données de cet échantillon sont des réalisations d'une variable de loi inconnue, donner une estimation non biaisée de l'espérance et de la variance de cette loi.*
3. *On choisit de modéliser les valeurs de cet échantillon par une loi binomiale* $B(2, p)$. *Utiliser la moyenne empirique pour proposer une estimation ponctuelle pour* p.
4. *Avec le même modèle, utiliser la variance empirique pour proposer une autre estimation de* p.
5. *On choisit de modéliser les valeurs de cet échantillon par une loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$, *qui a pour espérance* λ. *Quelle estimation ponctuelle proposez-vous pour* λ*?*

Exercice 5 *On considère l'échantillon statistique* $(1.2, 0.2, 1.6, 1.1, 0.9, 0.3, 0.7, 0.1, 0.4)$.

1. *On choisit de modéliser les valeurs de cet échantillon par une loi uniforme sur l'intervalle* $[0, \theta]$. *Quelle estimation ponctuelle proposez-vous pour* θ*?*
2. *On choisit de modéliser les valeurs de cet échantillon par une loi normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. *Quelle estimation ponctuelle proposez-vous pour* μ *et* σ^2*?*

Exercice 6 *La force de compression d'un type de béton est modélisée par une variable gaussienne d'espérance* μ *et de variance* σ^2. *Dans les questions de 1. à 4., on supposera la variance* σ^2 *connue et égale à* 1000. *Sur un échantillon de 12 mesures, on a observé une moyenne empirique de* 3250.

1. *Donner un intervalle de confiance de niveau* 0.95 *pour* μ.
2. *Donner un intervalle de confiance de niveau* 0.99 *pour* μ. *Comparer sa largeur avec celle de l'intervalle précédent.*
3. *Si avec le même échantillon on donnait un intervalle de confiance de largeur* 30, *quel serait son niveau de confiance ?*
4. *On souhaite maintenant estimer* μ *avec une précision de* ± 15, *avec un niveau de confiance de* 0.95. *Quelle taille minimum doit avoir l'échantillon ?*
5. *La variance théorique est désormais supposée inconnue. On dispose de la donnée suivante (sur le même échantillon de taille 12) :* $\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 126761700$. *Donnez pour* μ *un intervalle de confiance de niveau* 0.95 *et comparez-le avec celui de la question 1, puis un intervalle de confiance de niveau* 0.99 *et comparez-le avec celui de la question 2.*
6. *Donner un intervalle de confiance de niveau* 0.95 *pour la variance, et pour l'écart-type.*

Exercice 7 *On a mesuré le poids de raisin produit par pied sur 10 pieds pris au hasard dans une vigne. On a obtenu les résultats suivants exprimés en kilogrammes :* 2.43.43.64.14.34.75.45.96.56.9 .*On modélise le poids de raisin produit par une souche de cette vigne par une variable aléatoire de loi* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1) *Calculer la moyenne et la variance empiriques de l'échantillon.*
2) *Donner un intervalle de confiance de niveau* 0.95 *pour* μ.
3) *Donner un intervalle de confiance de niveau* 0.95 *pour* σ^2
4) *On suppose désormais que l'écart-type des productions par pied est connu et égal à 1.4. Donner un intervalle de confiance de niveau* 0.95 *pour* μ.

5) *Quel nombre de pieds au minimum devrait-on observer pour estimer μ au niveau de confiance 0.99 avec une précision de plus ou moins 500 grammes ?*

Exercice 8 *X est une variable aléatoire ayant une loi de paramètre $\theta = (\mu, \sigma^2)$ où μ représente sa moyenne et σ^2 sa variance Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon aléatoire de loi parente la loi de X.*

1) *proposer un estimateur de la moyenne μ puis calculer son espérance et sa variance qu'en déduisez vous.*

2) *proposer un estimateur de la variance σ^2 dans le cas où la moyenne μ est connue ainsi que dans le cas où elle est inconnue puis calculer son espérance et sa variance qu'en déduisez vous et comment l'améliorer.*

Exercice 9 *Soit T_1 et T_2 deux estimateurs sans biais et indépendants, d'un paramètre θ, de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2 deux nombres réels strictement positifs. Soit α un réel appartenant à [0,1]*

1) *Montrez que la variable aléatoire $T = \alpha T_1 + (1-\alpha)T_2$ est aussi un estimateur sans biais de θ.*

2) *Pour quelle valeur du paramètre α la variance de la variable aléatoire T est-elle minimale ?*

Exercice 10 *Un biologiste étudie un type d'algue qui attaque les plantes marines. La toxine contenue dans cette algue est obtenue sous forme d'une solution organique. Il mesure la quantité de toxine par gramme de solution. Il a obtenu les neuf mesures suivantes, exprimées en milligrammes : 1,2 ; 0,8 ; 0,6 ; 1,1 ; 1,2 ; 0,9 ; 1,5 ; 0,9 ; 1,0. Nous supposerons que ces mesures sont les réalisations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.*

1. *Donnez une estimation ponctuelle de l'espérance μ et de l'écart-type σ de la quantité de toxine par gramme de solution.*

2. *Déterminez un intervalle de confiance à 95 % pour l'espérance μ de la quantité de toxine par gramme de solution.*

3. *Le biochimiste trouve que l'intervalle obtenu n'est pas satisfaisant car trop étendu. Que doit-il faire pour obtenir une estimation plus précise ?*

Exercice 11 *On a effectué 90 mesures de concentration d'une solution de fluores-ceïne. On a observé une moyenne empirique de 4.38 mg/l et un écart-type empirique de 0.08 mg/l. Donner un intervalle de confiance pour la concentration réelle de la solution, au niveaux de confiance 0.95 et 0.99.*

Exercice 12 *Une clinique a proposé une nouvelle opération chirurgicale, et a connu 40 échecs, sur 200 tentatives. On note p le pourcentage de réussite de cette nouvelle opération.*

1. *Quelle estimation de p proposez-vous ?*

2. *En utilisant l'approximation normale, donner un intervalle de confiance pour p de niveau de confiance 0.95.*

3. *Combien d'opérations la clinique devrait-elle réaliser pour connaître le pourcentage de réussite avec une précision de plus ou moins 1%, au niveau de confiance* 0.95

Exercice 13 *La durée de vie d'un certain matériel est représentée par la v.a de densité:*

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

où θ est un paramètre inconnu strictement positif.

1. *Déterminer un estimateur par maximum de vraisemblance θ_n d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de la variable X et étudier ces propriétés.*

2. *Construire un intervalle de confiance pour θ de niveau* 0.95 *dans le cas où les observations ont conduit à* $\sum_{i=1}^{10} x_i = 11.5$

Exercice 14 *Pour estimer la précision d'un thermomètre, on réalise n = 100 mesures indépendantes de la température d'un liquide maintenu à une température constante de 20 degrés Celsius. Les observations x_i, $1 \leq i \leq 100$, ayant conduit à la valeur $\sum_{i=1}^{100} = 40011$, construire un intervalle de confiance de niveau 0,95 pour la précision de ce thermomètre, mesurée par la dispersion σ^2 des mesures.*

Exercice 15 *Le nombre de vente d'un certain produit est représentée par la v.a de densité:*

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

où $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

1. *Déterminer un estimateur par maximum de vraisemblance θ_n d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de la variable X et étudier ces propriétés.*

2. *Construire un intervalle de confiance pour θ de niveau* 0.95 *dans le cas où les observations ont conduit à* $\sum_{i=1}^{10} x_i = 11.5$

Exercice 16 *Soit X une v.a de densité:*

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & si \quad 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où θ est un paramètre inconnu strictement positif.

1. *Déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments, construit à partir de l'échantillon $(X_1, ...X_n)$ et étudier ses propriétés*

2. *Déterminer un estimateur par maximum de vraisemblance θ_n d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de la variable X et étudier ces propriétés.*

3. *Construire un intervalle de confiance pour θ de niveau* 0.95 *dans le cas où les observations ont conduit à* $\max\{x_1, ..., x_n\} = 5$

Exercice 17 *Un fabricant d'ampoules électriques annonce une durée de vie moyenne de ses ampoules de 170 heures. Afin de vérifier cette affirmation, un organisme de défense des consommateurs prélève au hasard 100 ampoules dans un lot de fabrication et, à l'issue de l'expérimentation, constate une moyenne de durée de vie de 158 heures, avec un écart type empirique de 30 heures. Si on admet que cette durée de vie suit une loi normale, peut-on déduire de cette enquête que l'affirmation du fabricant est mensongère?*