Bausteine Computergestützter Datenanalyse

Lukas Arnold Simone Arnold Florian Bagemihl
Matthias Baitsch Marc Fehr Maik Poetzsch
Sebastian Seipel

2025-05-09

Inhaltsverzeichnis

Methodenbaustein Sensordatenanalyse

Zitiervorschlag

Arnold, Lukas, Simone Arnold, Florian Bagemihl, Matthias Baitsch, Marc Fehr, Maik Poetzsch, und Sebastian Seipel. 2025. „Bausteine Computergestützter Datenanalyse. Methodenbaustein Sensordatenanalyse. https://github.com/bausteine-der-datenanalyse/m-sensordatenanalyse.

BibTeX-Vorlage

```
@misc{BCD-m-sensordatenanalyse-2025,
 title={Bausteine Computergestützter Datenanalyse. Methodenbaustein Sensordatenanalyse},
 author={Arnold, Lukas and Arnold, Simone and Bagemihl, Florian and Baitsch, Matthias and Fe
 year={2025},
 url={https://github.com/bausteine-der-datenanalyse/m-sensordatenanalyse}}
```

Voraussetzungen

Die Bearbeitungszeit dieses Bausteins beträgt circa **Platzhalter**. Für die Bearbeitung dieses Bausteins werden folgende Bausteine vorausgesetzt und die genannten Bibliotheken verwendet:

- numpy
  - numpy.polynomial
- pandas
- matplotlib

Querverweis auf:

- …

Im Baustein werden folgende Daten verwendet:

Lernziele

In diesen Baustein lernen Sie …

- Statistische Grundbegriffe
- Sensorkennlinien
- Kennlinienfehler und deren Korrektur

1 Das Prinzip von Messungen

In der Physik existiert nur das, was gemessen worden ist“ (Merz 1968, 14).
Merz, Ludwig.1968. “Grundkurs der Messtechnik. Teil I: Das Messen elektrischer Größen.” 2. Auflage. München;Wien. R. Oldenbourg Verlag.

In diesem Baustein werden die folgenden Module verwendet:

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Physikalische Größen werden mit der Hilfe von Messgeräten bestimmt. Diese ordnen der tatsächlichen Merkmalsausprägung eine numerische Entsprechung relativ zu einem Bezugssystem zu. Ein Beispiel:

“Johanna ist am Messbrett 173 Zentimeter groß.”

- Die tatsächliche Merkmalsausprägung ist Johannas Größe.
- Das Messgerät ist das Messbrett.
- Die numerische Entsprechung ist 173.
- Das Bezugssystem ist das metrische System.

Messwerte sind aus verschiedenen Gründen Annäherungen an den wahren Wert der zugrundeliegenden physikalischen Größe. Zum einen variiert die Größe eines Menschen im Tagesverlauf. Zum anderen ist das Messergebnis auch ein Ergebnis der verwendeten Skala. Wäre die Messung im imperialen Messsystem erfolgt, wäre Johannas Größe mit 68 Zoll bestimmt worden, was 172,72 Zentimetern entspricht.

Ein bekanntes Beispiel für die mit dem Messvorgang verbundene Unsicherheit ist das Küstenlinienparadox: Das Ergebnis der Vermessung unregelmäßiger Küstenlinien wird umso größer, je kleiner die Messabschnitte gewählt werden.

Britain-fractal-coastline-200km, Britain-fractal-coastline-100km und Britain-fractal-coastline-50km von Maksim stehen unter der Lizenz CC BY-SA 3.0 und sind abrufbar auf Wikipedia (200km, 100km, 50km). 2006

(a) Gerade Messabschnitte von 200 km Länge, Gesamtlänge ungefähr 2350 km

(b) Gerade Messabschnitte von 100 km Länge, Gesamtlänge ungefähr 2775 km

(c) Gerade Messabschnitte von 50 km Länge, Gesamtlänge ungefähr 3425 km

Abbildung 1.1: Küstenlinienparadox

! Wichtig 2: Definition Messung

"Eine Messung ist der experimentelle Vorgang, durch den ein spezieller Wert einer physikalischen Größe als Vielfaches einer Einheit oder eines Bezugswertes ermittelt wird.
Die Messung ergibt zunächst einen Messwert. Dieser stimmt aber aufgrund störender Einflüsse mit dem wahren Wert der Messgröße praktisch nie überein, sondern weist eine gewisse Messabweichung auf. Zum *vollständigen Messergebnis* wird der Messwert, wenn er mit quantitativen Aussagen über die zu erwartende Größe der Messabweichung ergänzt wird. Dies wird in der Messtechnik als Teil der Messaufgabe und damit der Messung verstanden."
Messung. von verschiedenen Autor:innen steht unter der Lizenz CC BY-SA 4.0 ist abrufbar auf Wikipedia https://de.wikipedia.org/wiki/Messung. 2025

1.1 Messreihen

Um die Unsicherheit einer Messung zu verringern, kann man einen Messwert in Form einer Messreihe wiederholt aufnehmen. Die (**erste**) beste Schätzung der Messgröße bietet der arithmetische Mittelwert der Messreihe.

Der arithmetische Mittelwert einer Messreihe $\bar{x}$ ist die Summe aller Einzelmesswerte dividiert durch die Anzahl der Messwerte N.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Mit Hilfe des arithmetischen Mittelwerts kann eine Aussage über die Streuung der Messwerte getroffen werden. Dazu werden die Varianz und die Standardabweichung der Messreihe berechnet.

1.2 Varianz

Die Varianz ist der Mittelwert der quadrierten Abweichungen vom Mittelwert.

$$\mathrm{Var}(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

Hier könnte statt $\mathbf{Var}(x_i)$ auch s^2 geschrieben werden.

1.3 Standardabweichung

Die Quadratwurzel der Varianz wird als Standardabweichung bezeichnet. Diese hat den Vorteil, dass sie in der Einheit der Messwerte vorliegt und dadurch leichter zu interpretieren ist. Die Standardabweichung s wird folglich so berechnet:

$$s_N = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Für Stichproben wird die Stichprobenvarianz verwendet. Für die Standardabweichung einer Stichprobe gilt:

$$s_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Mit Hilfe der Standardabweichung kann der Standardfehler der Messung bestimmt werden. Der *Standardfehler* ist ein Maß dafür, wie genau sich der arithmetische Mittelwert der Stichprobe an den tatsächlichen Mittelwert der Grundgesamtheit, den Erwartungswert, annähert (hierzu gleich mehr) und wird auch *Stichprobenfehler* genannt. Der Standardfehler wird aus der Standardabweichung einer Messung und der Wurzel der Stichprobengröße berechnet.

$$\sigma\bar{x} \;=\; \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Der Standardfehler wird umso kleiner (die Messung umso genauer), je kleiner die Varianz in der Grundgesamtheit und je größer der Stichprobenumfang ist. Da die Varianz in der Grundgesamtheit in der Regel unbekannt ist, wird der Standardfehler mit der Stichprobenvarianz geschätzt.

Der Schätzung des Standardfehlers liegt die Beobachtung zugrunde, dass Stichprobenmittelwerte normalverteilt sind und mit zunehmender Stichprobengröße immer genauer werden.

1.3.1 Die Normalverteilung

Wenn eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit gezogen wird, dann streut der Stichprobenmittelwert um den Mittelwert der Grundgesamtheit, also den Erwartungswert. Der Erwartungswert eines sechsseitigen Würfels ist:

$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=6}(x_i) \;=\; 3,5$$

Erwartungsverteilung für n = 1 und für n = 2 ist illustrativ. Für einen Würfel gibt es 6 mögliche Ergebnisse, für 2 Würfel 6 * 6 mögliche Ergebnisse. Es gibt eine Kombination für den Wert 2, 2 Kombinationen für den Wert 3, usw.

Dies lässt sich mit einem mit Python simulierten Würfelexperiment verdeutlichen. In dem simulierten Experiment würfeln 10 Personen jeweils 5, 10 und 20 Mal und bilden anschließend den Mittelwert der Augen.

to do: Dichtekurve der Normalverteilung mit den Parametern plotten
Der Erwartungswert ist der höchste Punkt der Kurve. Die Wendepunkte der Kurve liegen jeweils eine Standardabweichung vom Mittelwert entfernt.

Formel bei MB im Skript S. 52 ist anders gestellt als die unten

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

The normal distribution function, also known as the Gaussian distribution, is a continuous probability distribution characterized by its bell-shaped curve. It's defined by two parameters: the mean ( ) and the standard deviation ( ). The probability density function (PDF) for a normal distribution is given by f(x) = (1/√(2 ²)) * e^(-(x-)² / (2 ²))

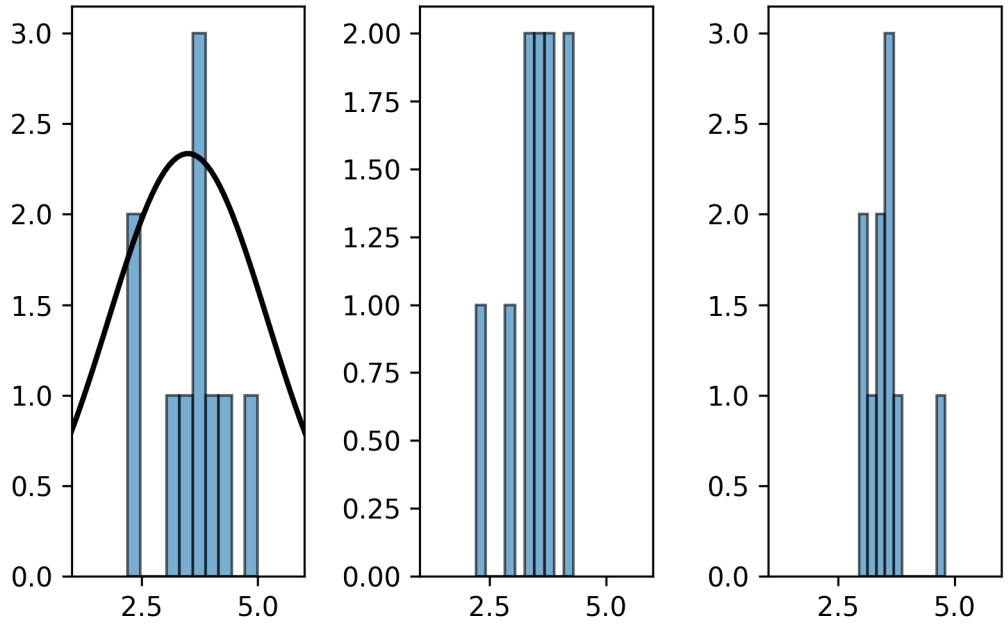
Erwartungswert und Standardabweichung sind für die Grundgesamtheit bekannt. **in eigener Zelle ausrechnen**

```
personen = 10

# 5 Würfe
würfe = 5

augen = np.random.default_rng().integers(low = 1, high = 6, endpoint = True, size = (würfe, p

print(f"N: {augen.mean(axis = 0).shape[0]}",
      f"kleinster Mittelwert: {augen.mean(axis = 0).min():.2f}",
      f"größter Mittelwert: {augen.mean(axis = 0).max():.2f}",
      f"Stichprobenmittelwert: {augen.mean(axis = 0).mean():.2f}\n")

# plotten
plt.subplot(1, 3, 1)
count, bins, ignored = plt.hist(augen.mean(axis = 0), bins = 10, alpha = 0.6, edgecolor = 'bl
```

```
plt.xlim(1, 6)

## Normalverteilungskurve
erwartungswert = pd.Series([1, 2, 3, 4, 5, 6]).mean() # 3.5
standardabweichung = pd.Series([1, 2, 3, 4, 5, 6]).std(ddof = 0) # ~ 1.708

x = np.linspace(0, 9, 100)
y = 10 / (standardabweichung * np.sqrt(2 * np.pi)) * np.exp(- (x - erwartungswert) ** 2 / (2
plt.plot(x, y, 'k', linewidth=2)

# 10 Würfe
würfe = 10

augen = np.random.default_rng().integers(low = 1, high = 6, endpoint = True, size = (würfe, p

print(f"N: {augen.mean(axis = 0).shape[0]}",
      f"kleinster Mittelwert: {augen.mean(axis = 0).min():.2f}",
      f"größter Mittelwert: {augen.mean(axis = 0).max():.2f}",
      f"Stichprobenmittelwert: {augen.mean(axis = 0).mean():.2f}\n")

plt.subplot(1, 3, 2)
plt.hist(augen.mean(axis = 0), bins = 10, alpha = 0.6, edgecolor = 'black')
plt.xlim(1, 6)

# 20 Würfe
würfe = 20

augen = np.random.default_rng().integers(low = 1, high = 6, endpoint = True, size = (würfe, p

print(f"N: {augen.mean(axis = 0).shape[0]}",
      f"kleinster Mittelwert: {augen.mean(axis = 0).min():.2f}",
      f"größter Mittelwert: {augen.mean(axis = 0).max():.2f}",
      f"Stichprobenmittelwert: {augen.mean(axis = 0).mean():.2f}\n")

plt.subplot(1, 3, 3)
plt.hist(augen.mean(axis = 0), bins = 10, alpha = 0.6, edgecolor = 'black')
plt.xlim(1, 6)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
N: 10 kleinster Mittelwert: 2.20 größter Mittelwert: 5.00 Stichprobenmittelwert: 3.52
```

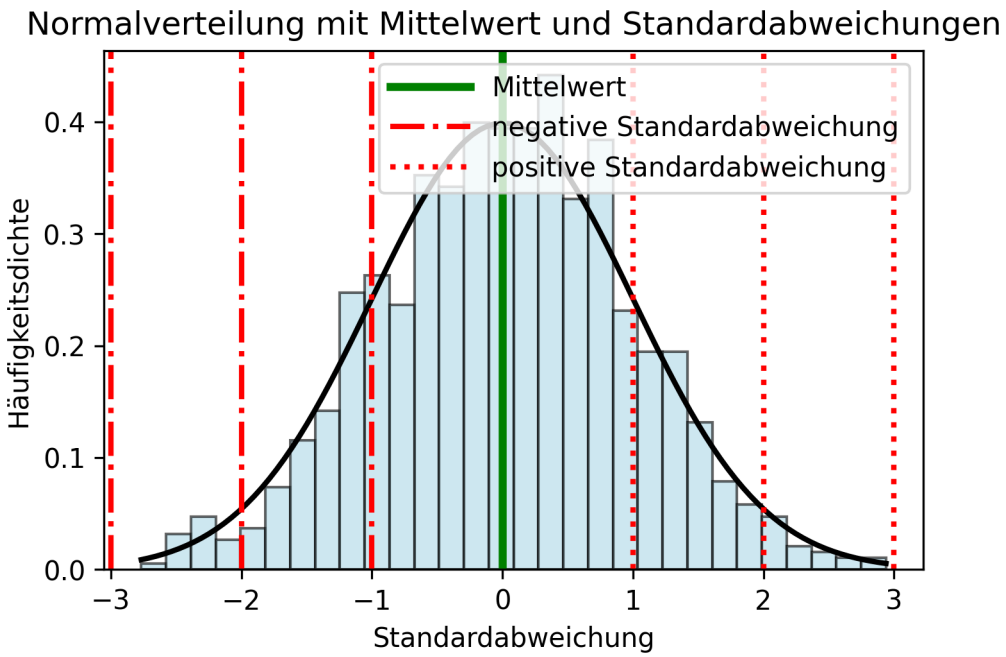
```
N: 10 kleinster Mittelwert: 2.20 größter Mittelwert: 4.30 Stichprobenmittelwert: 3.51

N: 10 kleinster Mittelwert: 2.95 größter Mittelwert: 4.80 Stichprobenmittelwert: 3.56
```



1. Normalverteilung erklären

Mit ChatGPT klappt das nicht so toll. :D Würfeln lassen

- xlim anpassen



Prompt: Schreibe mir python code (basispython, numpy oder pandas) um Daten für eine Normalverteilung zu erstellen und diese in Form eines Balkendiagramm darzustellen. Zusätzlich sollen der Mittelwert und die Standardabweichung 1s, 2s und 3s in beide Richtungen eingezeichnet sein.

Prompt: Bitte ohne das Modul seaborn.

Der Code wurde anschließend modifiziert: Anpassung der Linientypen.

2. Idee: Wenn eine Stichprobe aus einer Grundgesamtheit gezogen wird, dann streut der Stichprobenmittelwert um den Mittelwert der Grundgesamtheit.

3. Umgekehrte Idee: Mit der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt der Mittelwert der Grundgesamtheit um den Stichprobenmittelwert.

⚠ Warning 1: Standardabweichung und Varianz in der Grundgesamtheit

In der Stochastik werden Formeln häufig auch mit griechischen Buchstaben geschrieben, wenn Sie sich statt auf eine Stichprobe auf die Grundgesamtheit beziehen.
Der Mittelwert in der Grundgesamtheit wird auch Erwartungswert genannt und mit dem griechischen Buchstaben μ (My) dargestellt. Die Standardabweichung des Erwartungswerts wird mit σ (Sigma) gekennzeichnet.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

1.3.2 Aufgabe Verteilungskenngrößen

Die Varianz und die Standardabweichung einer Messreihe können mit vielen Computerprogrammen berechnet werden. Bevor wir auf die in Python verfügbaren Methoden eingehen, sollen die Kenngrößen arithmetischer Mittelwert, Varianz, Standardabweichung und Stichprobenfehler zunächst selbst berechnet werden.

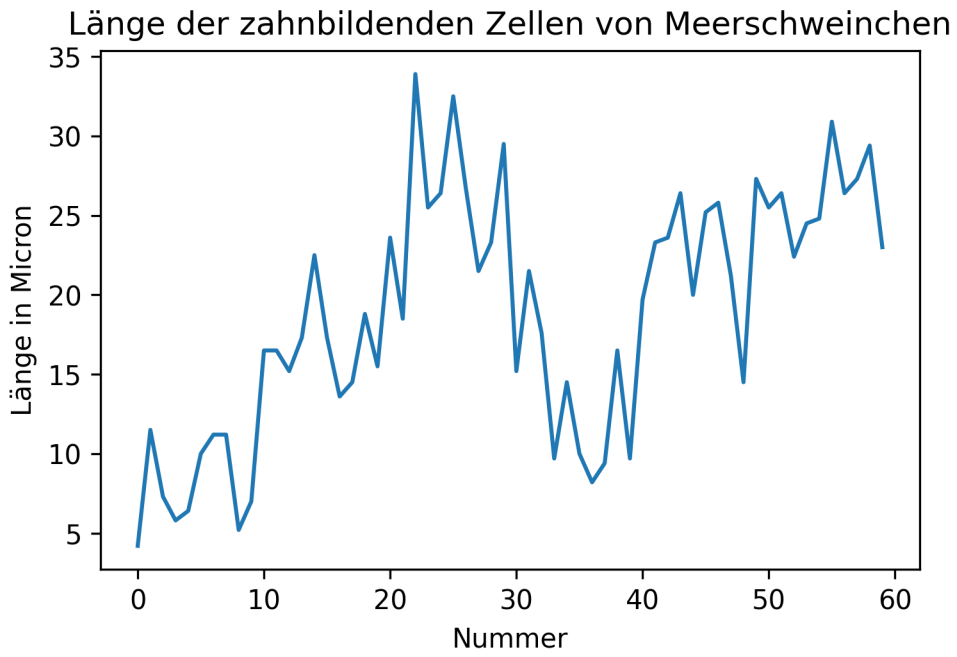
Dazu verwenden wir die Messreihe zur Länge zahnbildender Zellen bei Meerschweinchen, die Vitamin C direkt (VC) oder in Form von Orangensaft (OJ) in unterschiedlichen Dosen erhielten.

Code-Block 1.1

```
dateipfad = "01-daten/ToothGrowth.csv"
meerschweinchen = pd.read_csv(filepath_or_buffer = dateipfad, sep = ',', header = 0, \
  names = ['ID', 'len', 'supp', 'dose'], dtype = {'ID': 'int', 'len': 'float', 'dose': 'floa
```

Crampton, E. W. 1947. „THE GROWTH OF THE ODONTOBLASTS OF THE INCISOR TOOTH AS A CRITERION OF THE VITAMIN C INTAKE OF THE GUINEA PIG“. The Journal of Nutrition 33 (5): 491–504. https://doi.org/10.1093/jn/33.5.491

Der Datensatz kann in R mit dem Befehl “ToothGrowth” aufgerufen werden.



Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert, die Varianz, die Standardabweichung und den Stichprobenfehler der Messreihe zur Zahnlänge (len). Verwenden Sie dazu die vorgestellten Formeln.

Das Ergebnis könnte so aussehen:

```
N: 60
arithmetisches Mittel: 18.81
Stichprobenfehler: 0.99
Stichprobenvarianz: 58.51
Standardabweichung: 7.65
```

Tipp 1: Musterlösung Verteilungskenngrößen

```
def verteilungskennwerte(x, output = True):

  # Anzahl Messwerte bestimmen
  N = len(x)

  # arithmetisches Mittel bestimmen
  mittelwert = sum(x) / N

  # Stichprobenvarianz bestimmen
  stichprobenvarianz = sum((x - mittelwert) ** 2) / (N - 1)

  # Standardabweichung bestimmen
  standardabweichung = stichprobenvarianz ** (1/2)

  # Ausgabe
  if output: # output = True
    print(f"N: {N}\n",
          f"arithmetisches Mittel: {mittelwert:.2f}\n",
          f"Stichprobenvarianz: {stichprobenvarianz:.2f}\n",
          f"Standardabweichung: {standardabweichung:.2f}",
          sep = '')

  else: # output = False
    return N, mittelwert, stichprobenvarianz, standardabweichung

tooth_length = meerschweinchen['len']
verteilungskennwerte(tooth_length)
```

Die Module NumPy und Pandas verfügen über eigene Funktionen zur Berechnung der Varianz und der Standardabweichung (siehe folgendes Beispiel).

Hinweis 1: Varianz und Standardabweichung mit NumPy und Pandas

Die Varianz und Standardabweichung werden mit den Funktion `np.var()` und `np.std()` bzw. den Methoden `pd.var()` und `pd.std()` berechnet. Der Parameter `ddof` (delta degrees of freedom) steuert, welcher Nenner zur Berechnung der Varianz verwendet wird in der Form N - ddof. Während der Standardwert in NumPy 0 ist, berechnet Pandas mit dem Standardwert `ddof=1` die Stichprobenvarianz.

```python
print("Varianz:")
print(f"NumPy:\t{np.var(tooth_length):.2f}")
print(f"Pandas:\t{tooth_length.var():.2f}")

print("\nStandardabweichung:")
print(f"NumPy:\t{np.std(tooth_length):.2f}")
print(f"Pandas:\t{tooth_length.std():.2f}")
```

```
Varianz:
NumPy:  57.54
Pandas: 58.51

Standardabweichung:
NumPy:  7.59
Pandas: 7.65
```

1.4 Die ideale Messung

! Wichtig 2: ideale Messung

- Die ideale Messung ist eine direkte Messung oder der gesuchte Wert hängt linear (**direkt?!**) vom gemessenen Wert ab.
- Die ideale Messung ist *genau* und *präzise*.

1.4.1 Direkte und indirekte Messung

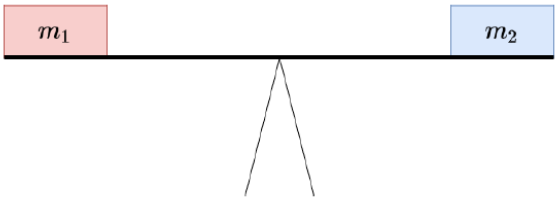
Bei einer direkten Messung wird die Messgröße durch den unmittelbaren Vergleich mit einem Normal oder einem genormten Bezugssystem gewonnen.

Gliedermaßstäbe von Fst76 ist lizensiert unter CC-BY-SA 3.0 und ist abrufbar auf Wikimedia. 2014

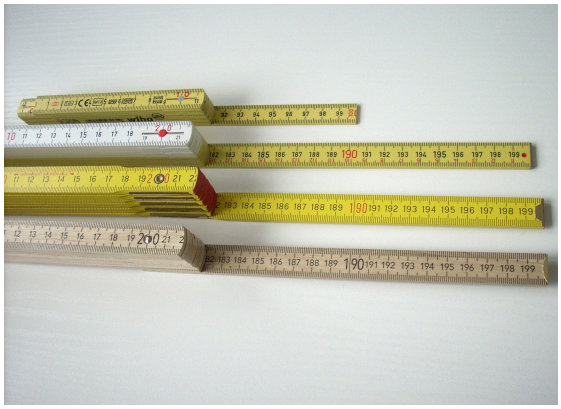
Bei einer indirekten Messung wird die Messgröße auf eine andere pyhsikalische Größe zurückgeführt.

Spring scale von Amada44 steht unter der Lizenz CC-BY-SA-3.0 unported und ist abrufbar auf Wikimedia. 2016

Observe the Moon wurde von der NASA veröffentlicht und ist abrufbar unter nasa.gov. 2010



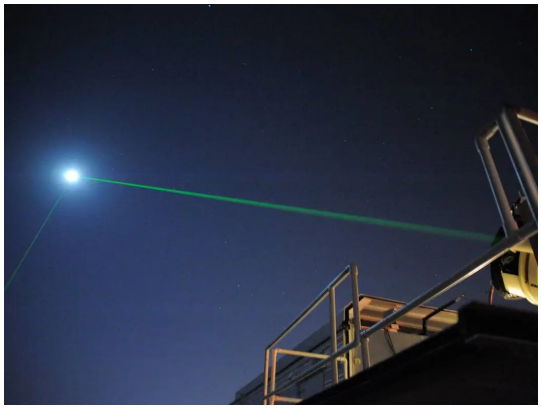
(a) Balkenwaage



(b) Zollstock

Abbildung 1.2: Direkte Messung

(a) Federwaage



(b) Laserentfernungsmessung

Abbildung 1.3: Indirekte Messung

1.4.2 Genauigkeit und Präzision (gehört zu linearer Regression)

Die Genauigkeit

Verzerrung (Bias): https://de.wikipedia.org/wiki/Verzerrung_einer_Sch%C3%A4tzfunktion quantifiziert das systematische Über- oder Unterschätzen der Schätzfunktion

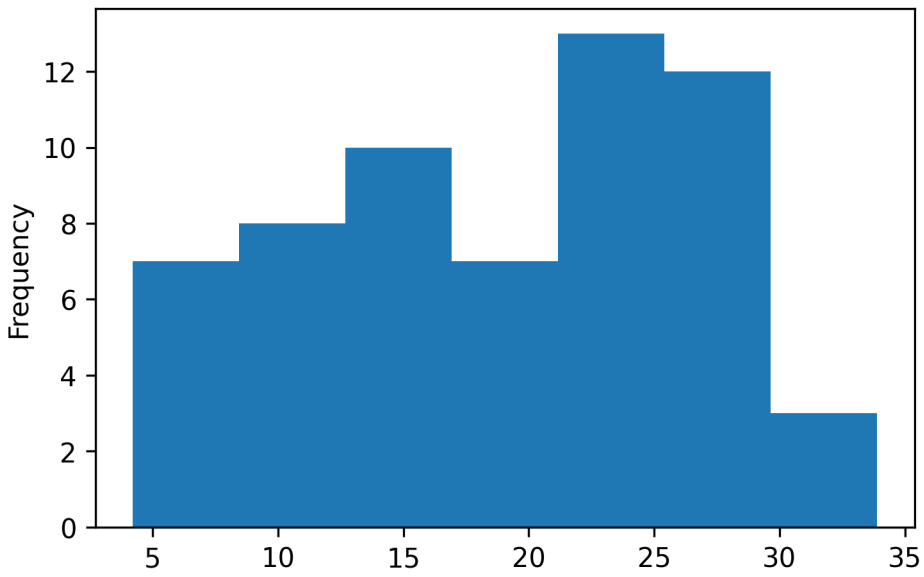
Streuung und Normalverteilung... Stichprobenfehler.
Stichprobenfehler der Meerschweinchenmessung bestimmen Alternativ: mit Würfeldaten simulieren. Erwartungswert eines W6 = 3,5

1.5 Normalverteilung

Histogramm und Standardabweichung

Der Meerschweinchen-Datensatz ist nicht gleichverteilt (die Gruppengrößen sind gleich und die Länge nähert sich einem natürlichen Maximum an.)

```
meerschweinchen['len'].plot(kind = 'hist', bins = 7)
```



2 Messreihe Hooke'sches Gesetz

Das Hooke'sche Gesetz, benannt nach dem englischen Wissenschaftler Robert Hooke, beschreibt die Beziehung zwischen der Kraft F und der Längenänderung Δx einer Feder durch die Gleichung $F = k \times \Delta x$, wobei k die Federkonstante ist. Die Federkonstante ist eine grundlegende Eigenschaft elastischer Materialien und gibt an, wie viel Kraft erforderlich ist, um eine Feder um eine bestimmte Läange zu dehnen oder zu komprimieren. Das Hooke'sche Gesetz besagt, dass die Deformation eines elastischen Körpers proportional zur aufgebrachten Kraft ist, solange die Feder nicht über den elastischen Bereich hinaus gedehnt oder gestaucht wird.

In einem Experiment wurde das Hooke'sche Gesetz experimentell überprüft.

Hinweis 2: Der Versuchsaufbau

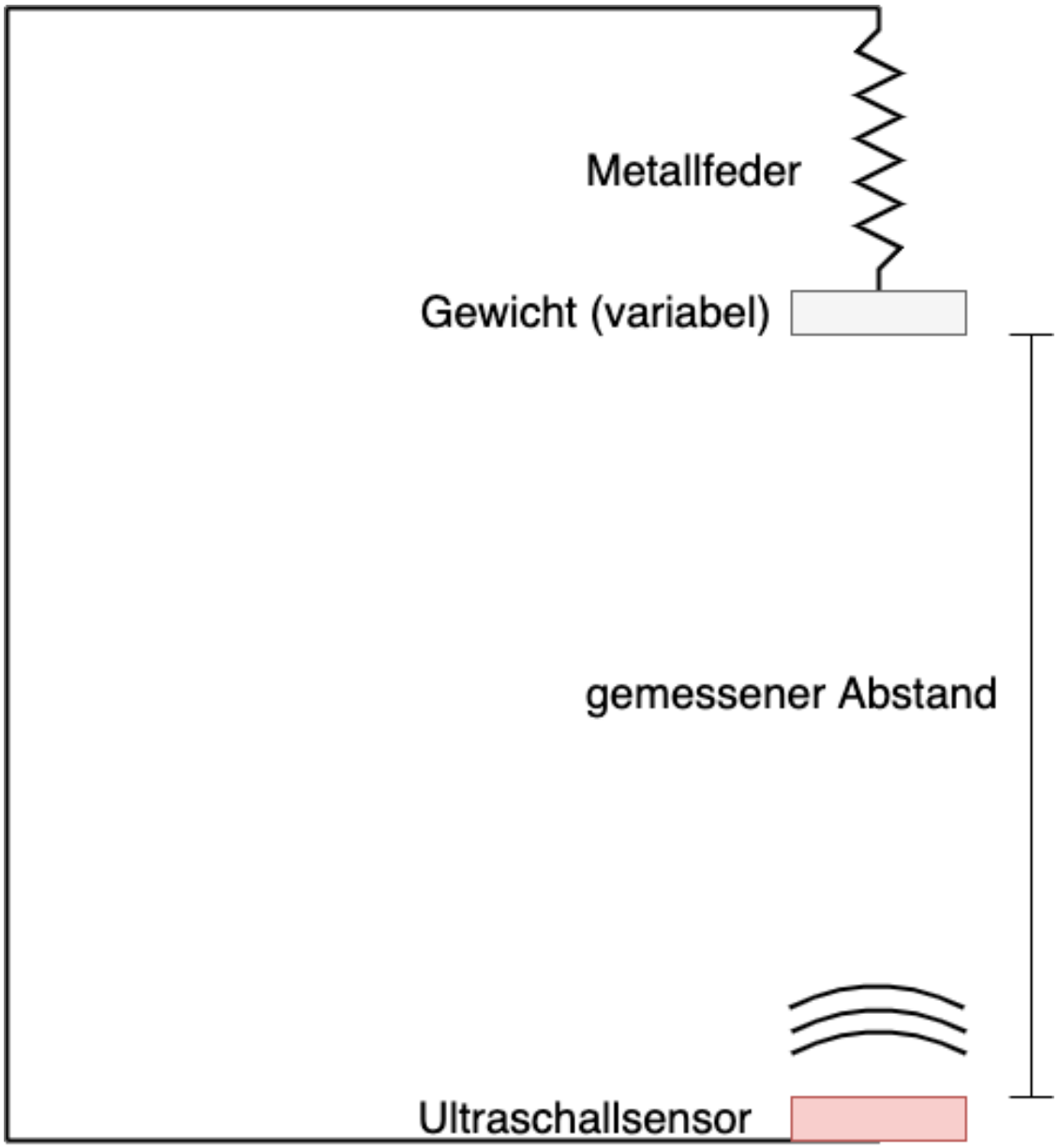


Abbildung 2.1: Versuchsaufbau

Die Messreihe liegt in Form einer CSV-Datei unter dem Pfad “01-daten/hooke_data.csv” vor. Die Datei kann direkt mit Python oder mit den Modulen NumPy und Pandas eingelesen werden.

```
dateipfad = "01-daten/hooke_data.csv"
```

2.1 Python

```
# Datei einlesen
dateiobjekt = open(file = dateipfad, mode = "r")
hooke = dateiobjekt.read() # liefert einen string zurück
dateiobjekt.close()

# Daten betrachten
print(hooke[0:30])
```

```
no;mass;distance
0;705;153.29
```

Die Einträge in der Datei liegen zeilenweise, d. h. durch das Zeichen `\n` getrennt vor. Die Werte in jeder Zeile sind mit Semikolon separiert. Mit der Methode `str.split()` können die Einträge in Listen eingelesen werden. Dabei stört eine leere Zeile, die von der Methode, `dateiobjekt.read()` am Dateiende zurückgegeben wird, die deshalb übersprungen wird.

```
liste_hooke_zeilenweise = hooke.split("\n")
print(liste_hooke_zeilenweise[0:3], "\n")

# leere listen anlegen
number = []
mass = []
distance = []

for zeile in liste_hooke_zeilenweise:
  zwischenspeicher = zeile.split(';')
  if zeile == '':
    print("leere Zeile:", list(zeile))
    continue
  else:
    number.append(zwischenspeicher[0])
    mass.append(zwischenspeicher[1])
    distance.append(zwischenspeicher[2])

print("\n")
```

```
print("Liste number:", number[0:10], "\n")
print("Liste mass:", mass[0:10], "\n")
print("Liste distance:", distance[0:10])
```

```
['no;mass;distance', '0;705;153.29', '1;705;152.74']

leere Zeile: []


Liste number: ['no', '0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8']

Liste mass: ['mass', '705', '705', '705', '705', '705', '705', '705', '705', '705']

Liste distance: ['distance', '153.29', '152.74', '153.27', '152.81', '152.77', '152.82', '153
```

Zuletzt können die ursprünglichen Spaltenbeschriftungen entfernt und die Datentypen angepasst werden.

```
# ersten Eintrag entfernen
number = number[1:]
mass = mass[1:]
distance = distance[1:]

# Datentyp ändern
i = 0
for element in number:
  number[i] = int(element)
  i += 1

i = 0
for element in mass:
  mass[i] = int(element)
  i += 1

i = 0
for element in distance:
  distance[i] = float(element)
  i += 1

print("Liste number:", number[0:10], "\n")
print("Liste mass:", mass[0:10], "\n")
print("Liste distance:", distance[0:10])
```

```
Liste number: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

Liste mass: [705, 705, 705, 705, 705, 705, 705, 705, 705, 655]

Liste distance: [153.29, 152.74, 153.27, 152.81, 152.77, 152.82, 153.2, 152.91, 153.27, 153.8
```

2.2 NumPy

Der Aufbau der Datei ist aus dem Einlesen mit der Pythonbasis bekannt. Da NumPy-Arrays nur einen Datentyp haben können, müssen die Spaltenbeschriftungen in ein extra Objekt eingelesen werden.

```
import numpy as np
hooke_nparray = np.loadtxt(fname = dateipfad, skiprows = 1, delimiter = ';')
hooke_colnames = np.loadtxt(fname = dateipfad, max_rows = 1, delimiter = ';', dtype = 'str')

print(hooke_colnames)
print(hooke_nparray[0:5])
```

```
['no' 'mass' 'distance']
[[  0.   705.   153.29]
 [  1.   705.   152.74]
 [  2.   705.   153.27]
 [  3.   705.   152.81]
 [  4.   705.   152.77]]
```

2.3 Pandas

Mit Pandas ist das Einlesen der Datei leicht.

```
import pandas as pd
hooke = pd.read_csv(filepath_or_buffer = dateipfad, sep = ';')

print(hooke.head(), "\n")
print(hooke.info())
```

```
   no  mass  distance
0   0   705    153.29
1   1   705    152.74
```

```
2   2   705    153.27
3   3   705    152.81
4   4   705    152.77

<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 114 entries, 0 to 113
Data columns (total 3 columns):
 #   Column    Non-Null Count  Dtype
---  ------    --------------  -----
 0   no        114 non-null    int64
 1   mass      114 non-null    int64
 2   distance  114 non-null    float64
dtypes: float64(1), int64(2)
memory usage: 2.8 KB
None
```

2.3.1 Deskriptive Statistik

Nach dem Einlesen sollte man sich einen Überblick über die Daten verschaffen. Dafür eignet sich besonders das Modul Pandas. Mit den Methoden `pd.DataFrame.head()` und `pd.DataFrame.tail()` kann schnell ein Ausschnitt der Daten betrachtet werden.

```
print(hooke.head(), "\n")
print(hooke.tail())
```

```
   no  mass  distance
0   0   705    153.29
1   1   705    152.74
2   2   705    153.27
3   3   705    152.81
4   4   705    152.77

      no  mass  distance
109  109     0    173.70
110  110     0    173.44
111  111     0    173.75
112  112     0    173.30
113  113     0    200.00
```

Die Methode `pd.DataFrame.describe()` erstellt die deskriptive Statistik für den Datensatz. Diese ist in diesem Fall jedoch noch nicht sonderlich nützlich. Die Spalte 'no' enthält lediglich eine laufende Versuchsnummer, die Spalte 'mass' enhält verschiedene Gewichte.

```
hooke.describe()
```

	no	mass	distance
count	114.000000	114.000000	114.000000
mean	56.561404	394.921053	162.301754
std	33.131552	226.237605	7.483767
min	0.000000	0.000000	152.740000
25%	28.250000	201.000000	156.622500
50%	56.500000	452.000000	160.720000
75%	84.750000	605.000000	167.767500
max	113.000000	705.000000	200.000000

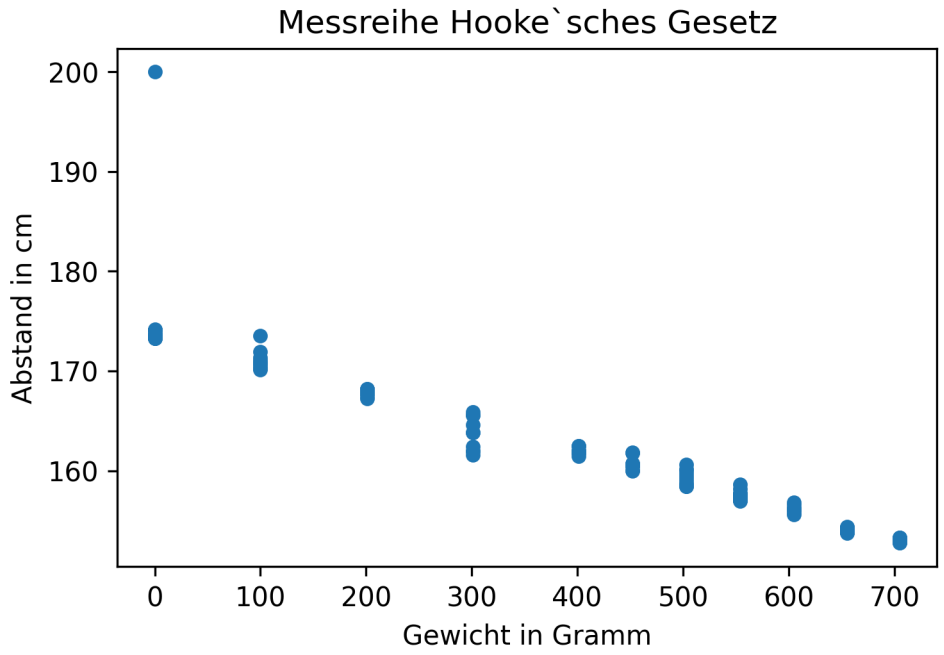
Sinnvoller ist eine nach dem verwendeten Gewicht aufgeteilte beschreibende Statistik der gemessenen Ausdehnung. Dafür kann die Pandas-Methode `pd.DataFrame.groupby()` verwendet werden. So kann für jedes der gemessenen Gewichte der arithmethische Mittelwert und die Standardabweichung abgelesen werden.

```
hooke.groupby(by = 'mass')['distance'].describe()
```

mass	count	mean	std	min	25%	50%	75%	max
0	12.0	175.828333	7.620157	173.27	173.3150	173.570	174.1125	200.00
100	11.0	171.044545	0.985833	170.15	170.3650	170.800	171.2400	173.56
201	11.0	167.791818	0.296305	167.26	167.7200	167.780	167.9750	168.19
301	10.0	163.710000	1.660977	161.60	162.0575	163.825	165.3250	165.86
401	10.0	161.967000	0.313229	161.42	161.8450	161.915	162.0250	162.48
452	10.0	160.713000	0.627854	159.98	160.4575	160.555	160.7400	161.83
503	10.0	159.314000	0.781099	158.43	158.6400	159.220	159.9650	160.61
554	10.0	157.547000	0.523791	156.92	157.2075	157.435	157.7100	158.60
605	10.0	156.142000	0.354206	155.62	156.0700	156.080	156.2075	156.84
655	11.0	154.022727	0.224414	153.72	153.8800	153.920	154.2400	154.35
705	9.0	153.008889	0.241425	152.74	152.8100	152.910	153.2700	153.29

Bereits an dieser Stelle könnte die hohe Standardabweichung in der Messreihe mit 0 Gramm auffallen. Leichter ist es jedoch in der grafischen Betrachtung.

```
hooke.plot(x = 'mass', y = 'distance', kind = 'scatter', title = "Messreihe Hooke`sches Gese
```



Grafisch fällt der Messwert von 200 cm für das Gewicht 0 Gramm als stark von den übrigen Messwerten abweichend auf.

Die Messwerte für das Gewicht 0 Gramm sollen näher betrachtet werden. Dafür werden die Messwerte sowohl absolut, als auch standardisiert in Einheiten der Standardabweichung (z-Werten) ausgedrückt ausgegeben.

```
gewicht = 0

z_values = hooke[hooke['mass'] == gewicht].loc[: , 'distance'].apply(lambda x: (x - hooke[hoo
z_values.name = 'z-values'

print(pd.concat([hooke[hooke['mass'] == gewicht], z_values], axis = 1))
```

```
      no  mass  distance  z-values
102  102     0    173.32 -0.329171
```

```
103  103     0    174.11 -0.225498
104  104     0    173.42 -0.316048
105  105     0    174.12 -0.224186
106  106     0    173.30 -0.331795
107  107     0    174.21 -0.212375
108  108     0    173.27 -0.335732
109  109     0    173.70 -0.279303
110  110     0    173.44 -0.313423
111  111     0    173.75 -0.272742
112  112     0    173.30 -0.331795
113  113     0    200.00  3.172069
```

Der Wert 200 cm in Zeile 113 scheint fehlerhaft zu sein. Eine Eigendehnung der Feder um zusätzliche 16 Zentimeter ist nicht plausibel. Auch der z-Wert > 3 kennzeichnet den Messwert als Ausreißer. Die Zeile wird deshalb aus dem Datensatz entfernt.

hier Aufklapper Normalverteilung

```
hooke.drop(index = 113, inplace = True)

hooke.groupby(by = 'mass')['distance'].describe()
```

mass	count	mean	std	min	25%	50%	75%	max
0	11.0	173.630909	0.367409	173.27	173.3100	173.440	173.9300	174.21
100	11.0	171.044545	0.985833	170.15	170.3650	170.800	171.2400	173.56
201	11.0	167.791818	0.296305	167.26	167.7200	167.780	167.9750	168.19
301	10.0	163.710000	1.660977	161.60	162.0575	163.825	165.3250	165.86
401	10.0	161.967000	0.313229	161.42	161.8450	161.915	162.0250	162.48
452	10.0	160.713000	0.627854	159.98	160.4575	160.555	160.7400	161.83
503	10.0	159.314000	0.781099	158.43	158.6400	159.220	159.9650	160.61
554	10.0	157.547000	0.523791	156.92	157.2075	157.435	157.7100	158.60
605	10.0	156.142000	0.354206	155.62	156.0700	156.080	156.2075	156.84
655	11.0	154.022727	0.224414	153.72	153.8800	153.920	154.2400	154.35
705	9.0	153.008889	0.241425	152.74	152.8100	152.910	153.2700	153.29

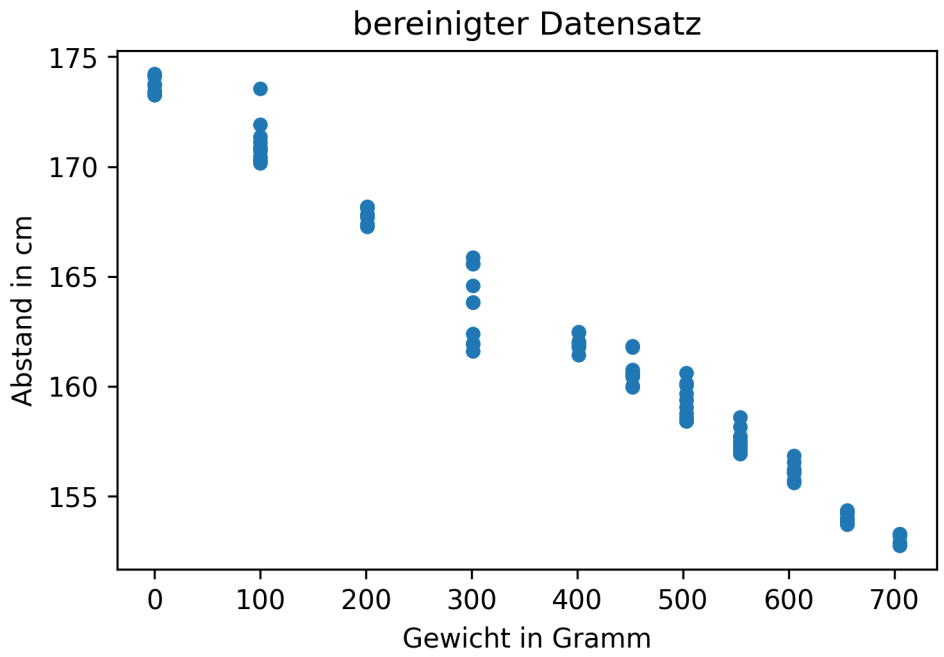
Hiernach ist die höchste Standardabweichung für die Messreihe mit 301 Gramm zu verzeichnen. Die gemessenen Werte sind jedoch unauffällig.

```
gewicht = 301

z_values = hooke[hooke['mass'] == gewicht].loc[: , 'distance'].apply(lambda x: (x - hooke[hoo
z_values.name = 'z-values'

print(pd.concat([hooke[hooke['mass'] == gewicht], z_values], axis = 1))
```

```
    no  mass  distance  z-values
70  70   301    162.38 -0.800734
71  71   301    161.93 -1.071658
72  72   301    161.95 -1.059617
73  73   301    161.60 -1.270337
74  74   301    164.59  0.529809
75  75   301    165.86  1.294419
76  76   301    163.82  0.066226
77  77   301    163.83  0.072247
78  78   301    165.57  1.119823
79  79   301    165.57  1.119823
```

Die Grafik des bereinigten Datensatzes legt einen linearen Zusammenhang nahe. Darüber hinaus sticht der mit zunehmendem Gewicht abfallende Trend der Datenpunkte ins Auge.

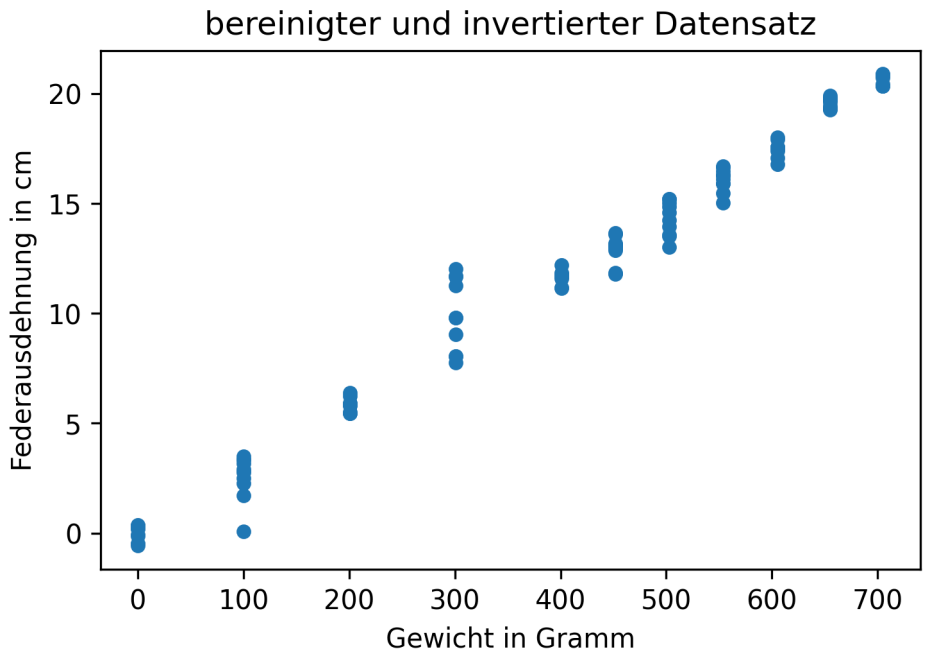
```
hooke.plot(x = 'mass', y = 'distance', kind = 'scatter', title = 'bereinigter Datensatz', yla
```



Entsprechend des Versuchsaufbaus nimmt mit zunehmender Dehnung der Feder der Abstand zum Abstandssensor ab. Da die Federausdehnung gemessen werden soll, bietet es sich an, die Daten entsprechend zu transformieren. Dazu wird der gemessene Abstand bei 0 Gramm Gewicht als Nullpunkt aufgefasst, von dem aus die Federdehnung gemessen wird. Das bedeutet, dass von allen Datenpunkten das arithmetische Mittel der für 0 Gramm Gewicht gemessen Ausdehnung abgezogen und das Ergebnis mit -1 multipliziert wird.

```
nullpunkt = hooke[hooke['mass'] == 0].loc[: , 'distance'].mean()
print(f"Nullpunkt: {nullpunkt:.2f} cm")

hooke['distance'] = hooke['distance'].sub(nullpunkt).mul(-1)

hooke.plot(x = 'mass', y = 'distance', kind = 'scatter', title = 'bereinigter und invertierte
```

```
Nullpunkt: 173.63 cm
```



2.4 Federkonstante bestimmen

Die Beziehung zwischen der Kraft F und der Längenänderung Δx einer Feder mit Federkonstante k wird durch die Gleichung $F = k \times \Delta x$ beschrieben. Dabei entspricht die Kraft F dem mit der Fallbeschleunigung g multiplizierten Gewicht in Kilogramm m. Die Fallbeschleunigung beträgt auf der Erde $9,81 \frac{m}{s^2}$.

Deshalb wird im Datensatz das in der Spalte ‘mass’ eingetragene Gewicht in Gramm in die wirkende Kraft umgerechnet. Ebenso wird die gemessene Abstandsänderung in der Spalte ‘distance’ von Zentimeter in Meter umgerechnet.

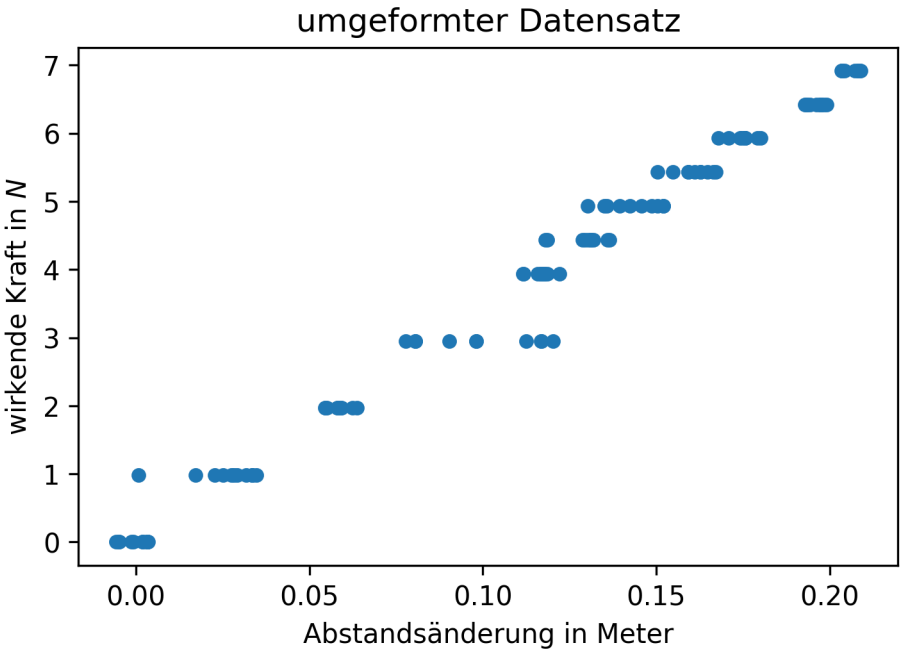
```
hooke['mass'] = hooke['mass'].div(1000).mul(9.81)
hooke.rename(columns = {'mass': 'force'}, inplace = True)

hooke['distance'] = hooke['distance'].div(100)

print(hooke.head())
```

```
   no    force  distance
0   0  6.91605  0.203409
1   1  6.91605  0.208909
```

```
2   2  6.91605  0.203609
3   3  6.91605  0.208209
4   4  6.91605  0.208609
```

Für die grafische Darstellung des Zusammenhangs $F = k \times \Delta x$ ist es zweckmäßiger, die Abstandsänderung auf der x-Achse und die wirkende Kraft auf der y-Achse darzustellen.

```
hooke.plot(x = 'distance', y = 'force', kind = 'scatter', title = 'umgeformter Datensatz', yl
```



2.4.1 Lineare Ausgleichsrechnung

Die Ausgleichsrechnung (oder auch Parameterschätzung) ist eine Methode, um für eine Messreihe die unbekannten Parameter des zugrundeliegenden physikalischen Modells zu schätzen. Das Ziel besteht darin, eine (in diesem Fall lineare) Funktion zu bestimmen, die bestmöglich an die Messdaten angepasst ist. (Wikipedia)

Eine lineare Funktion wird durch die Konstante β_0, den Schnittpunkt mit der y-Achse, und den Steigungskoeffizienten β_1 bestimmt.

$$y = \beta_0 + \beta_1 \times x$$

Zur Bestimmung der Parameter einer linearen Funktion wird die Methode der linearen Regression verwendet. Die Funktionen dafür stellt das Paket `numpy.polynomial` bzw. für Polynomfunktionen dessen Modul `numpy.polynomial.polynomial` bereit.

```
import numpy.polynomial.polynomial as poly
```

polyfit und polyeval

Zur Schätzung von Funktionsparametern nach der Methode der kleinsten Quadrate wird die Funktion `poly.polyfit(x, y, deg)` verwendet. `x` sind die Werte der unabhängigen Variablen, `y` die Werte der abhängigen Variablen und `deg` spezifiziert den Grad der gesuchten Polynomfunktion. `deg = 1` spezifiziert eine lineare Funktion.

Hinweis 3: polyfit und polyeval erklärt

```
# Beispieldaten erzeugen
x = np.array(list(range(0, 100)))
y = x ** 2

print(np.polynomial.polynomial.polyfit(x, y, 1))
```

```
[-1617.    99.]
```

Die Funktion gibt die geschätzten Regressionsparameter als NumPy-Array zurück. Die Terme sind aufsteigend angeordnet, d. h. der Achsabschnitt steht an Indexposition 0, der Steigungskoeffizient an Indexposition 1. Die Ausgabe für ein Polynom zweiten Grades würde beispielsweise so aussehen:

```
print(np.polynomial.polynomial.polyfit(x, y, 2))
```

```
[ 1.62413205e-12 -5.07904010e-14  1.00000000e+00]
```

Mit den Regressionskoeffizienten können die Vorhersagewerte der linearen Funktion berechnet werden. Dafür kann die Funktion `poly.polyeval(x, c)` verwendet werden. Diese berechnet die Funktionswerte für in `x` übergebene Wert(e) mit den Funktionsparametern `c`.

```
# 'manuelle' Berechnung
regressions_koeffizienten = np.polynomial.polynomial.polyfit(x, y, 1)
vorhersagewerte = regressions_koeffizienten[0] + x * regressions_koeffizienten[1]

# Berechnung mit polyeval
lm = np.polynomial.polynomial.polyfit(x, y, 1)
vorhersagewerte_polyval = np.polynomial.polynomial.polyval(x, lm)

print("Die Ergebnisse stimmen überein:", np.equal(vorhersagewerte, vorhersagewerte_polyval)
print("\nAusschnitt der Vorhersagewerte:", vorhersagewerte[:10])
```

```
Die Ergebnisse stimmen überein: True

Ausschnitt der Vorhersagewerte: [-1617. -1518. -1419. -1320. -1221. -1122. -1023.  -924.  -
```

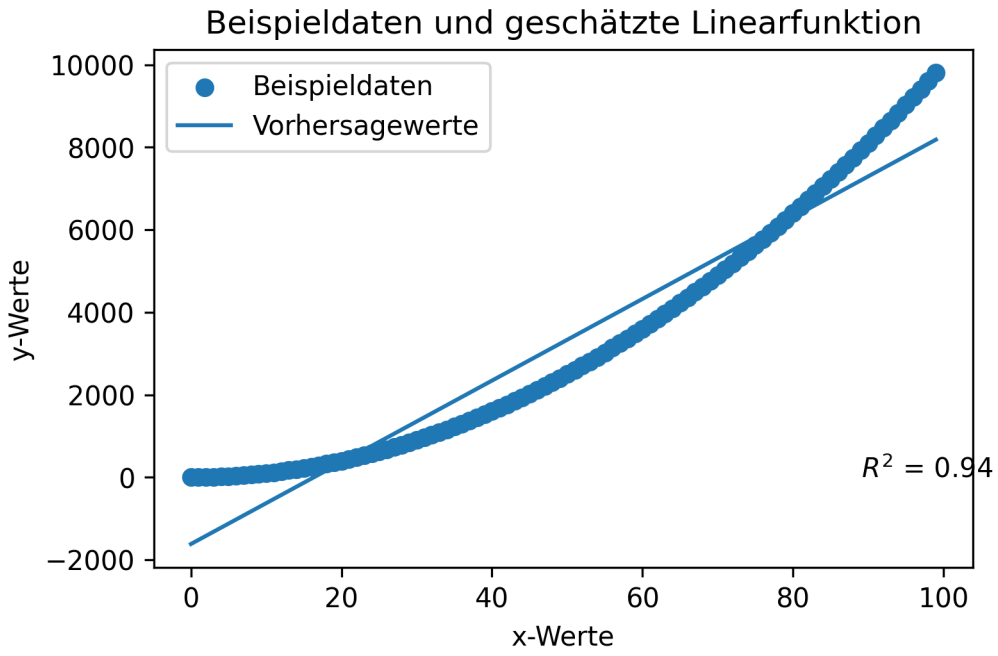
Das Bestimmtheitsmaß R^2 gibt an, wie gut die Schätzfunktion an die Daten angepasst ist. Der Wertebereich reicht von 0 bis 1. Ein Wert von 1 bedeutet eine vollständige Anpassung. Für eine einfache lineare Regression mit nur einer erklärenden Variable kann das Bestimmtheitsmaß als Quadrat des Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizienten r berechnet werden. Dieser wird mit der Funktion `np.corrcoef(x, y)` ermittelt (die eine Matrix der Korrelationskoeffizienten ausgibt).

```
print(f"r = {np.corrcoef(x, y)[0, 1]:.2f}")
print(f"R\u00b2 = {np.corrcoef(x, y)[0, 1] ** 2:.2f}")
```

```
r = 0.97
R² = 0.94
```

Die Daten und die geschätzte Gerade können grafisch dargestellt werden.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.scatter(x, y, label = 'Beispieldaten')
plt.plot(x, vorhersagewerte, label = 'Vorhersagewerte')
plt.annotate("$R^2$ = {:.2f}".format(np.corrcoef(x, y)[0, 1] ** 2), (max(x) * 0.9, 1))

plt.title(label = 'Beispieldaten und geschätzte Linearfunktion')
plt.xlabel('x-Werte')
plt.ylabel('y-Werte')
plt.legend()

plt.show()
```



Hinweis 4: to do: numpy.polyfit & numpy.polyval

in den Aufklapper verschieben legacy - wichtigster Unterschied: Ausgabe der Koeffizienten in umgekehrter Reihenfolge!
Warnung / ein Hinweis, dass man es nicht mehr benutzen soll. https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.polyfit.html
Hier auch noch mal deutlicher: https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.polynomials.html
"As noted above, the poly1d class and associated functions defined in numpy.lib.polynomial, such as numpy.polyfit and numpy.poly, are considered legacy and should not be used in new code. Since NumPy version 1.4, the numpy.polynomial package is preferred for working with polynomials."
polyfit https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.polyfit.html
polyval numpy.polyval(p, x) … evaluiere Wert(e) p mit Modellkoeffizienten x.
https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.polyval.html

Federkonstante bestimmen

Die Parameter der an die Messwerte angepassten linearen Funktion und das Bestimmtheitsmaß lauten:

```
print(np.polynomial.polynomial.polyfit(hooke['distance'], hooke['force'], 1))
```

```
print(f"r = {np.corrcoef(hooke['distance'], hooke['force'])[0, 1]:.2f}")
print(f"R\u00b2 = {np.corrcoef(hooke['distance'], hooke['force'])[0, 1] ** 2:.2f}")
```

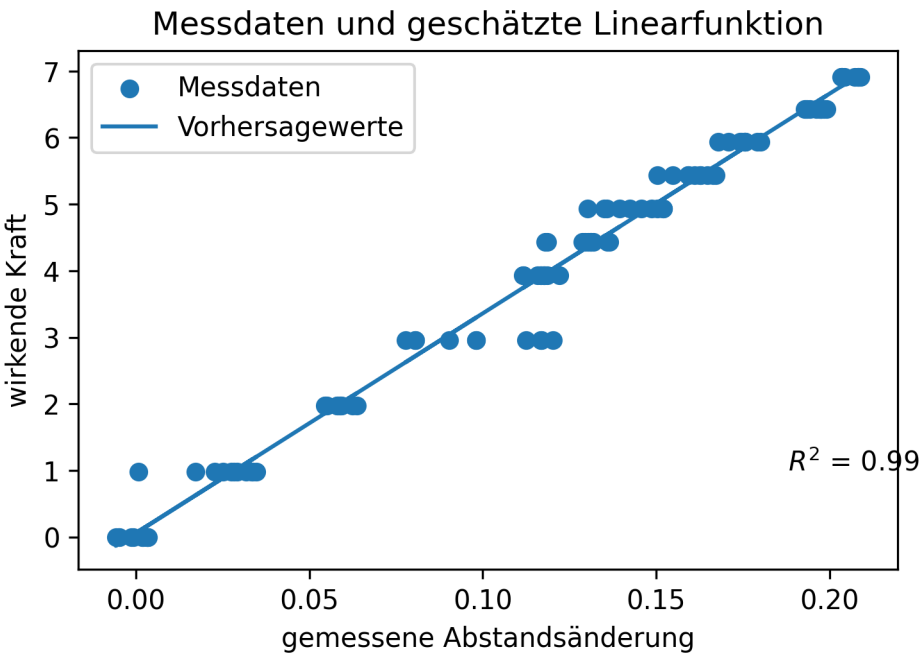
```
[ 0.05753159 33.01899551]
r = 0.99
R² = 0.99
```

Mit den Regressionskoeffizienten können die Vorhersagewerte der linearen Funktion berechnet werden.

```
# Berechnung mit polyeval
lm = np.polynomial.polynomial.polyfit(hooke['distance'], hooke['force'], 1)
vorhersagewerte_hooke = np.polynomial.polynomial.polyval(hooke['distance'], lm)
```

Die Messreihe und die darauf angepasste lineare Funktion können grafisch dargestellt werden.

```
# Platzhalter
x = hooke['distance']
y = hooke['force']

# Plot erstellen
plt.scatter(x, y, label = 'Messdaten')
plt.plot(x, vorhersagewerte_hooke, label = 'Vorhersagewerte')
plt.annotate("$R^2$ = {:.2f}".format(np.corrcoef(x, y)[0, 1] ** 2), (max(x) * 0.9, 1))

plt.title(label = 'Messdaten und geschätzte Linearfunktion')
plt.xlabel('gemessene Abstandsänderung')
plt.ylabel('wirkende Kraft')
plt.legend()

plt.show()
```



2.4.2 Messabweichung quantifizieren

Konfidenzintervall des Regressionskoeffizienten berechnen:

https://mountain-hydrology-research-group.github.io/data-analysis/modules/module4/lab4-3.html
(benötigt aber stats für die t-Verteilung)

to do: plt.errorbar (capsize = 3 macht kleine Linien an den Enden der Kerze)

wann / wozu braucht man das: Durch Umstellen nach der Federkonstante k kann diese wie folgt ermittelt werden:

$$k = \frac{m \times g}{\Delta x}$$