Das Prinzip von Messungen

Inhaltsverzeichnis

"In der Physik existiert nur das, was gemessen worden ist" (Merz 1968, 14).
Merz, Ludwig.1968. "Grundkurs der Messtechnik. Teil I: Das Messen elektrischer Größen." 2. Auflage. München;Wien. R. Oldenbourg Verlag.

to do: Größtfehler ergänzen

In diesem Baustein werden die folgenden Module verwendet:

```
import numpy as np
import numpy.polynomial.polynomial as poly
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
import glob
```

Physikalische Größen werden mit der Hilfe von Messgeräten bestimmt. Diese ordnen der tatsächlichen Merkmalsausprägung eine numerische Entsprechung relativ zu einem Bezugssystem zu.

Ein Beispiel: “Johanna ist am Messbrett 173 Zentimeter groß.”

- Die tatsächliche Merkmalsausprägung ist Johannas Größe.
- Das Messgerät ist das Messbrett.
- Die numerische Entsprechung ist 173.
- Das Bezugssystem ist das metrische System.

Messwerte sind aus verschiedenen Gründen Annäherungen an den wahren Wert der zugrundeliegenden physikalischen Größe. Zum einen variiert die Größe eines Menschen im Tagesverlauf. Zum anderen ist das Messergebnis auch ein Ergebnis der verwendeten Skala. Wäre die Messung im imperialen Messsystem erfolgt, wäre Johannas Größe mit 68 Zoll bestimmt worden, was 172,72 Zentimetern entspricht.

Das Messergebnis ist also keine exakte Entsprechung der tatsächlichen Merkmalsausprägung. Ein bekanntes Beispiel für die mit dem Messvorgang verbundene Unsicherheit ist das Küstenlinienparadox: Das Ergebnis der Vermessung unregelmäßiger Küstenlinien wird umso größer, je kleiner die Messabschnitte gewählt werden.

(a) Gerade Messabschnitte von 200 km Länge, Gesamtlänge ungefähr 2350 km

(b) Gerade Messabschnitte von 100 km Länge, Gesamtlänge ungefähr 2775 km

(c) Gerade Messabschnitte von 50 km Länge, Gesamtlänge ungefähr 3425 km

Abbildung 1: Küstenlinienparadox

Britain-fractal-coastline-200km, Britain-fractal-coastline-100km und Britain-fractal-coastline-50km von Maksim stehen unter der Lizenz CC BY-SA 3.0 und sind abrufbar auf Wikipedia (200km, 100km, 50km). 2006

0.1 Messung

! Wichtig 1: Messung

“Eine Messung ist der experimentelle Vorgang, durch den ein spezieller Wert einer physikalischen Größe als Vielfaches einer Einheit oder eines Bezugswertes ermittelt wird.
Die Messung ergibt zunächst einen Messwert. Dieser stimmt aber aufgrund störender Einflüsse mit dem wahren Wert der Messgröße praktisch nie überein, sondern weist eine gewisse Messabweichung auf. Zum *vollständigen Messergebnis* wird der Messwert, wenn er mit quantitativen Aussagen über die zu erwartende Größe der Messabweichung ergänzt wird. Dies wird in der Messtechnik als Teil der Messaufgabe und damit der Messung verstanden.”
Messung. von verschiedenen Autor:innen steht unter der Lizenz CC BY-SA 4.0 ist abrufbar auf [Wikipedia] (https://de.wikipedia.org/wiki/Messung). 2025

- Die ideale Messung ist eine direkte Messung oder der gesuchte Wert hängt linear (**direkt?!**) vom gemessenen Wert ab.
- Die ideale Messung ist *genau* und *präzise*.

Direkte und indirekte Messung

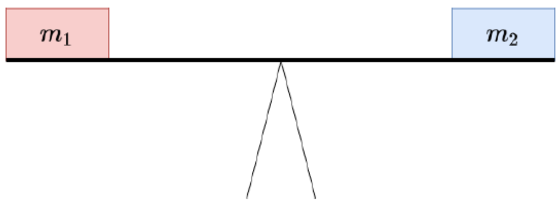
Bei einer direkten Messung wird die Messgröße durch den unmittelbaren Vergleich mit einem Normal oder einem genormten Bezugssystem gewonnen.

Gliedermaßstäbe von Fst76 ist lizensiert unter CC-BY-SA 3.0 und ist abrufbar auf Wikimedia. 2014

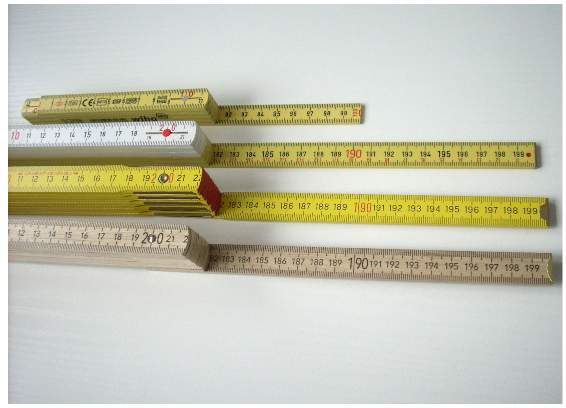
Bei einer indirekten Messung wird die Messgröße auf eine andere pyhsikalische Größe zurückgeführt.

Spring scale von Amada44 steht unter der Lizenz CC-BY-SA-3.0 unported und ist abrufbar auf Wikimedia. 2016

Observe the Moon wurde von der NASA veröffentlicht und ist abrufbar unter nasa.gov. 2010



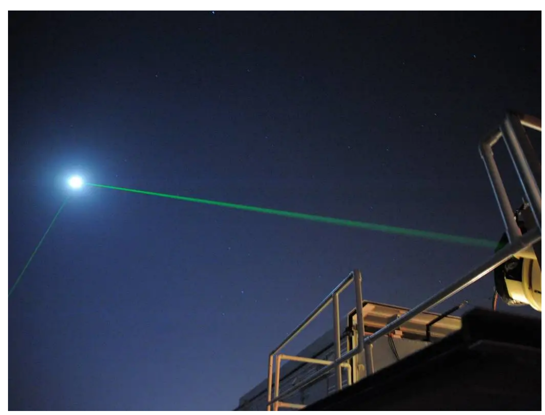
(a) Balkenwaage



(b) Zollstock

Abbildung 2: Direkte Messung

(a) Federwaage



(b) Laserentfernungsmessung

Abbildung 3: Indirekte Messung

Genauigkeit und Präzision

(a) Genauigkeit

Die Genauigkeit einer Messung ist ein Maß für die Abweichung der Messwerte vom realen Wert. Die Genauigkeit ist nur bestimmbar, wenn anerkannte Referenzwerte vorhanden sind.

(b) Präsizion

Die Präzision einer Messung beschreibt, wie gut die einzelnen Messwerte miteinander übereinstimmen. Die Präszision einer Messung wird über die Standardabweichung der Stichprobe bestimmt.

Abbildung 4: Genauigkeit und Präzision

0.2 Messreihen

Um die Unsicherheit einer Messung zu verringern, kann man einen Messwert in Form einer Messreihe wiederholt aufnehmen. Die (**erste**) beste Schätzung der Messgröße bietet der arithmetische Mittelwert der Messreihe.

Der arithmetische Mittelwert einer Messreihe $\bar{x}$ ist die Summe aller Einzelmesswerte dividiert durch die Anzahl der Messwerte N.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Mit Hilfe des arithmetischen Mittelwerts kann eine Aussage über die Streuung der Messwerte und die Präzision der Messung getroffen werden. Dazu werden die Varianz und die Standardabweichung der Messreihe berechnet.

0.3 Varianz

Die Varianz ist der Mittelwert der quadrierten Abweichungen vom Mittelwert.

$$\mathrm{Var}(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

0.4 Standardabweichung

Die Quadratwurzel der Varianz wird als Standardabweichung bezeichnet. Diese hat den Vorteil, dass sie in der Einheit der Messwerte vorliegt und dadurch leichter zu interpretieren ist. Die Standardabweichung s wird so berechnet:

$$s_N = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Für Stichproben wird die Stichprobenvarianz verwendet. Für die Standardabweichung einer Stichprobe gilt:

$$s_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Da die Varianz das Quadrat der Standardabweichung s ist, wird diese häufig mit s^2 gekennzeichnet.

> **Warning 1: Standardabweichung und Varianz in der Grundgesamtheit**
>
> In der Stochastik werden Formeln häufig auch mit griechischen Buchstaben geschrieben, wenn Sie sich statt auf eine Stichprobe auf die Grundgesamtheit beziehen.
> Der Mittelwert in der Grundgesamtheit wird auch Erwartungswert genannt und mit dem griechischen Buchstaben μ (My) dargestellt. Die Standardabweichung des Erwartungswerts wird mit σ (Sigma) gekennzeichnet.
>
> $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

Mit Hilfe der Standardabweichung kann der *Standardfehler* der Messung bestimmt werden. Der Standardfehler ist ein Maß dafür, wie genau sich der arithmetische Mittelwert der Stichprobe an den tatsächlichen Mittelwert der Grundgesamtheit, den Erwartungswert, annähert (dazu gleich mehr) und wird auch *Stichprobenfehler* genannt. Der Standardfehler wird aus der Standardabweichung einer Messung und der Wurzel der Stichprobengröße berechnet. Da die Varianz in der Grundgesamtheit in der Regel unbekannt ist, wird der Standardfehler mit der Stichprobenvarianz geschätzt.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Der Standardfehler wird umso kleiner (die Messung umso präziser), je kleiner die Varianz in der Grundgesamtheit und je größer der Stichprobenumfang ist.

Dies lässt sich mit einem simulierten Würfelexperiment verdeutlichen. Bei einem idealen, fairen Würfel kommt jede Augenzahl gleich oft vor. Der Erwartungswert eines sechsseitigen Würfels ist:

$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=6}(x_i) \; = \; 3,5$$

Die Standardabweichung eines fairen, sechsseitigen Würfels beträgt:

$$\sqrt{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{i=6}(x_i - 3,5)^2} \; \approx \; 1,71$$

Da die Varianz in der Grundgesamtheit bekannt ist, hängt der Standardfehler des Mittelwerts eines fairen Würfels allein von der Stichprobengröße ab.

Experiment Verteilungskenngrößen

In einem simulierten Experiment würfeln 100 Personen jeweils 3, 10 und 50 Mal und bilden den Mittelwert der Augen. Weil ein fairer Würfel simuliert wird, kann der Standardfehler mit der Standardabweichung der Grundgesamtheit berechnet werden.

0.5 Ergebnisse

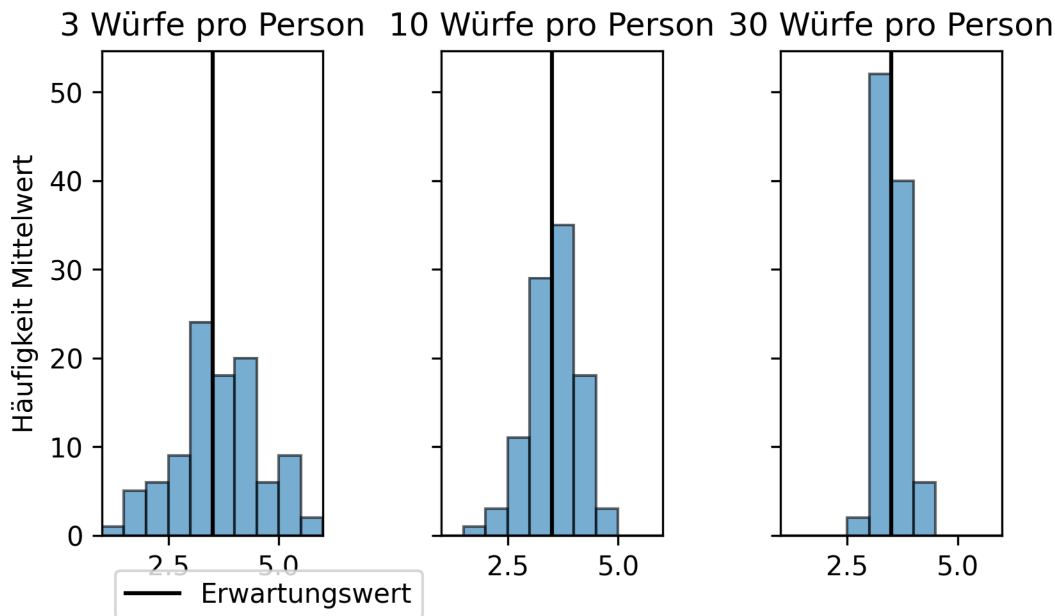
```
Würfe pro Person: 3             Stichprobengröße: 300
kleinster Mittelwert: 1.00      größter Mittelwert: 6.00
Stichprobenmittelwert: 3.57     Standardfehler: 0.10

Würfe pro Person: 10            Stichprobengröße: 1000
kleinster Mittelwert: 1.70      größter Mittelwert: 4.60
Stichprobenmittelwert: 3.49     Standardfehler: 0.05

Würfe pro Person: 50            Stichprobengröße: 5000
kleinster Mittelwert: 2.98      größter Mittelwert: 4.36
Stichprobenmittelwert: 3.50     Standardfehler: 0.02
```

Mit zunehmender Anzahl an Würfen nähern sich Minimum und Maximum der individuellen Durchschnittswerte sowie der Stichprobenmittelwert dem Erwartungswert an.

Hinweis: Da das Skript dynamisch generiert wird, wurden die Zufallszahlen von einem festgelegten Startwert aus erzeugt.

0.6 grafische Darstellung

Die Häufigkeit der individuellen Mittelwerte ist in den folgenden Histogrammen dargestellt.



0.7 Code

Berechnung

```
personen = 100
standardabweichung_grundgesamtheit = np.arange(1, 7).std(ddof = 0)
seed = 1

# 3 Würfe
würfe = 3

## Personen stehen in den Zeilen (axis = 0), Würfe in den Spalten (axis = 1)
augen3 = np.random.default_rng(seed = seed).integers(low = 1, high = 6, endpoint = True, size
```

```
## zeilenweise Mittelwert bilden mit np.array.mean(axis = 1)
print(f"Würfe pro Person: {würfe}\t\t\t\t",
      f"Stichprobengröße: {würfe * personen}\n",
      f"kleinster Mittelwert: {augen3.mean(axis = 1).min():.2f}\t\t",
      f"größter Mittelwert: {augen3.mean(axis = 1).max():.2f}\n",
      f"Stichprobenmittelwert: {augen3.mean():.2f}\t\t",
      f"Standardfehler: {standardabweichung_grundgesamtheit / ( augen3.size ** (1/2) ):.2f}\
      sep = "")

# 10 Würfe
würfe = 10

## Personen stehen in den Zeilen (axis = 0), Würfe in den Spalten (axis = 1)
augen10 = np.random.default_rng(seed = seed).integers(low = 1, high = 6, endpoint = True, si

## zeilenweise Mittelwert bilden mit np.array.mean(axis = 1)
print(f"Würfe pro Person: {würfe}\t\t\t",
      f"Stichprobengröße: {würfe * personen}\n",
      f"kleinster Mittelwert: {augen10.mean(axis = 1).min():.2f}\t\t",
      f"größter Mittelwert: {augen10.mean(axis = 1).max():.2f}\n",
      f"Stichprobenmittelwert: {augen10.mean():.2f}\t\t",
      f"Standardfehler: {standardabweichung_grundgesamtheit / ( augen10.size ** (1/2) ):.2f}
      sep = "")

# 50 Würfe
würfe = 50

## Personen stehen in den Zeilen (axis = 1), Würfe in den Spalten (axis = 1)
augen50 = np.random.default_rng(seed = seed).integers(low = 1, high = 6, endpoint = True, si

## zeilenweise Mittelwert bilden mit np.array.mean(axis = 1)
print(f"Würfe pro Person: {würfe}\t\t\t",
      f"Stichprobengröße: {würfe * personen}\n",
      f"kleinster Mittelwert: {augen50.mean(axis = 1).min():.2f}\t\t",
      f"größter Mittelwert: {augen50.mean(axis = 1).max():.2f}\n",
      f"Stichprobenmittelwert: {augen50.mean():.2f}\t\t",
      f"Standardfehler: {standardabweichung_grundgesamtheit / ( augen50.size ** (1/2) ):.2f}
      sep = "")
```

Darstellung

```
personen = 100
standardabweichung_grundgesamtheit = np.arange(1, 7).std(ddof = 0)
seed = 1

# 3 Würfe
würfe = 3
augen3 = np.random.default_rng(seed = seed).integers(low = 1, high = 6, endpoint = True, size

# 10 Würfe
würfe = 10
augen10 = np.random.default_rng(seed = seed).integers(low = 1, high = 6, endpoint = True, si

# 50 Würfe
würfe = 50
augen50 = np.random.default_rng(seed = seed).integers(low = 1, high = 6, endpoint = True, si

# plotten
bins = 10

# 3 Würfe
fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3, sharey = True)

ax1.hist(augen3.mean(axis = 1), bins = bins, alpha = 0.6, edgecolor = 'black', range = (1, 6)
ax1.set_xlim(1, 6)
ax1.axvline(x = 3.5, ymin = 0, ymax = 1, color = 'black', label = 'Erwartungswert')
ax1.set_ylabel('mittleres Würfelergebnis')
ax1.set_ylabel('Häufigkeit Mittelwert')
ax1.set_title("3 Würfe pro Person")
ax1.legend(loc = 'lower left', bbox_to_anchor = (0, -0.2))

# 10 Würfe
ax2.hist(augen10.mean(axis = 1), bins = bins, alpha = 0.6, edgecolor = 'black', range = (1, 
ax2.set_xlim(1, 6)
ax2.axvline(x = 3.5, ymin = 0, ymax = 1, color = 'black')
ax2.set_ylabel('mittleres Würfelergebnis')
ax2.set_title("10 Würfe pro Person")

# 30 Würfe
ax3.hist(augen50.mean(axis = 1), bins = bins, alpha = 0.6, edgecolor = 'black', range = (1, 
ax3.set_xlim(1, 6)
ax3.axvline(x = 3.5, ymin = 0, ymax = 1, color = 'black')
ax3.set_ylabel('mittleres Würfelergebnis')
```

```
ax3.set_title("30 Würfe pro Person")

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Aufgabe Verteilungskenngrößen

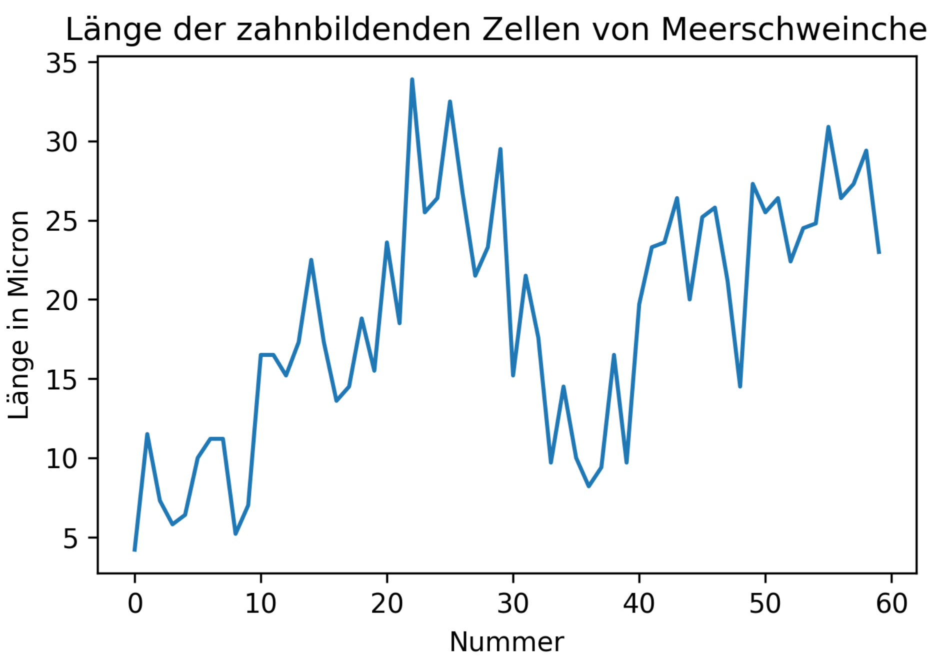
Im Datensatz ToothGrowth.csv ist eine Messreihe zur Länge zahnbildender Zellen bei Meerschweinchen gespeichert. Die Tiere erhielten Vitamin C direkt (VC) oder in Form von Orangensaft (OJ) in unterschiedlichen Dosen.

Code-Block 1

```
dateipfad = "01-daten/ToothGrowth.csv"
meerschweinchen = pd.read_csv(filepath_or_buffer = dateipfad, sep = ',', header = 0, \
  names = ['ID', 'len', 'supp', 'dose'], dtype = {'ID': 'int', 'len': 'float', 'dose': 'floa
```

Crampton, E. W. 1947. „THE GROWTH OF THE ODONTOBLASTS OF THE INCISOR TOOTH AS A CRITERION OF THE VITAMIN C INTAKE OF THE GUINEA PIG“. The Journal of Nutrition 33 (5): 491–504. https://doi.org/10.1093/jn/33.5.491

Der Datensatz kann in R mit dem Befehl “ToothGrowth” aufgerufen werden.



Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert, die Varianz, die Standardabweichung und den Stichprobenfehler der Messreihe zur Zahnlänge (len). Verwenden Sie dazu die vorgestellten Formeln.

Das Ergebnis könnte so aussehen:

```
N: 60
arithmetisches Mittel: 18.81
Stichprobenfehler: 0.99
Stichprobenvarianz: 58.51
Standardabweichung: 7.65
```

Tipp 1: Musterlösung Verteilungskenngrößen

```python
def verteilungskennwerte(x, output = True):

  # Anzahl Messwerte bestimmen
  N = len(x)

  # arithmetisches Mittel bestimmen
  stichprobenmittelwert = sum(x) / N

  # Stichprobenvarianz bestimmen
  stichprobenvarianz = sum((x - stichprobenmittelwert) ** 2) / (N - 1)

  # Standardabweichung bestimmen
  standardabweichung = stichprobenvarianz ** (1/2)

  # Stichprobenfehler bestimmen
  stichprobenfehler = standardabweichung / (N ** (1/2))

  # Ausgabe
  if output: # output = True
    print(f"N: {N}\n",
          f"arithmetisches Mittel: {stichprobenmittelwert:.2f}\n",
          f"Stichprobenfehler: {stichprobenfehler:.2f}\n",
          f"Stichprobenvarianz: {stichprobenvarianz:.2f}\n",
          f"Standardabweichung: {standardabweichung:.2f}",
          sep = '')

  else: # output = False
    return N, stichprobenmittelwert, stichprobenfehler, stichprobenvarianz, standardabweich

verteilungskennwerte(meerschweinchen['len'])
```

Die Module NumPy und Pandas verfügen über eigene Funktionen zur Berechnung der Varianz und der Standardabweichung (siehe folgendes Beispiel).

Varianz und Standardabweichung mit NumPy und Pandas

Die Varianz und Standardabweichung werden mit den Funktion `np.var()` und `np.std()` bzw. den Methoden `pd.var()` und `pd.std()` berechnet. Der Parameter `ddof` (delta degrees of freedom) steuert, welcher Nenner zur Berechnung der Varianz verwendet wird in der Form N

- ddof. Während der Standardwert in NumPy 0 ist, berechnet Pandas mit dem Standardwert `ddof=1` die Stichprobenvarianz.

```
print("Varianz:")
print(f"NumPy:\t{np.var(meerschweinchen['len']):.2f}")
print(f"Pandas:\t{meerschweinchen['len'].var():.2f}")

print("\nStandardabweichung:")
print(f"NumPy:\t{np.std(meerschweinchen['len']):.2f}")
print(f"Pandas:\t{meerschweinchen['len'].std():.2f}")
```

```
Varianz:
NumPy:  57.54
Pandas: 58.51

Standardabweichung:
NumPy:  7.59
Pandas: 7.65
```