Práctica 12 - Semántica de la Lógica de Predicados.

---

1. Señalar las ocurrencias libres o ligadas de x_1, x_2, x_3 en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde C = {c}, F = {f, g}, y P = {A_2^1}, con g de aridad 1; f de aridad 2, A_2^1 de aridad 2.

i.- $\forall x_1(\exists x_2 A_2^1(x_1, f(x_2, x_3)) \rightarrow \forall x_3 A_2^1(g(c), x_1) \vee A_2^1(x_1, x_3))$.

ii.- $\forall x_1(\exists x_2 A_2^1(x_1, f(x_2, x_3))) \rightarrow \forall x_3 A_2^1(g(c), x_1) \vee A_2^1(x_1, x_3)$.

2.- Sean A y B fbfs escritas en un lenguaje de primer orden. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de fbfs (usar noción de i-equivalencia o contraejemplos según corresponda):

Recordar que para que dos fbfs sean lógicamente equivalentes, deben ser verdaderas o falsas al mismo tiempo cualquiera sea su interpretación.

i.- $(\forall x)$ A - $\exists x$ A.

No son lógicamente equivalentes. Sea la interpretación:

- U: Números Naturales
- I(P(x)) = “x es par”.
- Para la fbf $(\forall x)$ A, se afirma que todos los números naturales son pares, lo cuál lógicamente sabemos que es falso.
- Para la fbf $\exists x$ A, se nos dice que existen números naturales que son pares, lógicamente esto es algo verdadero.
- Por lo tanto, podemos concluir que estas fbfs no son lógicamente equivalentes.

ii.- $\exists x \exists y A$ - $\exists y \exists x A$

Son lógicamente equivalentes:

- Si $\exists x \exists y$ A vale, entonces existe una valoración w (para x) i-equivalente donde $\exists y$ A vale (definición de $\exists$).
- Si $\exists y$ A vale, entonces existe una valoración w' (para y) i-equivalente donde A vale (definición de $\exists$).
- Sabiendo que existen valoraciones w y w' (con x e y) donde A vale, entonces vale $\exists y$ A y también $\exists y \exists x$ A

iii.- $\exists x \forall y A$ - $\forall y \exists x A$

Son lógicamente equivalentes:

- Si $\exists x \forall y A$ vale, entonces existe una valoración w para (x) i-equivalente donde $\forall y A$ vale (definición de $\exists$).
- Si $\forall y A$ vale, entonces para toda valoración w' para (y) i-equivalente, A vale (definición de $\forall$)
- Sabiendo que existen valoraciones w (con x) y para todas las valoraciones w' (con y) donde A vale, entonces vale también $\forall y \exists x$ A.

iv.- $\exists x(A \land B)$ - $\exists xA \land \exists xB$

Son lógicamente equivalentes:

- Si $\exists x(A \land B)$ vale, entonces existe una valoración w para (x) i-equivalente donde A vale y B vale.
- Sabiendo que existen valoraciones w (con x) que hacen valer a A y que hacen valer a B, entonces vale también $\exists xA \land \exists xB$

v.- $\exists x(A \lor B)$ - $\exists xA \lor \exists xB$

Son lógicamente equivalentes:

- Si $\exists x(A \lor B)$ vale, entonces existe una valoración w para (x) i-equivalente donde A vale, B vale o ambas valen.
- Sabiendo que existe al menos una valoración w (con x) que hacen valer a A, hacen valer a B o hacen valer a ambas al mismo tiempo, entonces también vale $\exists xA \lor \exists xB$

vi.- $\forall x(A \lor B)$ - $\forall xA \lor \forall xB$

No son lógicamente equivalentes. Sea la interpretación:

- U = Números Naturales.
- I(A(x)) = {(x): “x es par”}
- I(A(x)) = {(x): “x es impar”}
- $\forall x(A \lor B) \Rightarrow$ “Para todo x, x es par o x es impar”
    - Esta afirmación es verdadera.

- $\forall x A \lor \forall x B \Rightarrow$ "Para todo x, x es par, o, para todo x, x es impar"
    - Esta afirmación es falsa.
- Cómo la fbf de la izquierda es verdadera y la fbf de la derecha es falsa, podemos concluir que no son lógicamente equivalentes.

3. Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

- **Conjunto de constantes: C = {c, u}.**
- **Sin símbolos de función: F = ∅.**
- **Conjunto de símbolos de predicado: P = $\{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.**

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(c) = 0$
- $I(u) = 1$
- $I(A_1^2 (x, y)) = \{(x, y) \in N \times N; x \leq y\}$
  Donde I es una función de interpretación semántica.

Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Fundamentar las respuestas.

i.- A_1^2 (c, x) es satisfacible en I.

Para que esta fbf sea satisfacible, tiene que existir al menos una interpretación I y una valoración v que $|=_{I,v}$ A "A se satisface a v". Sea:

- $v(x) = 2$
- $v(c) = I(c) = 0$
- $|=_{I,v}$ sí y sólo si $(v(c), v(x)) \in I(A_1^2 (x, y))$
- Cómo $0 \leq 2$ y $(0, 2) \in I(A_1^2 (x, y))$
- La afirmación es verdadera

ii.- A_1^2 (u, x) es satisfacible en I.

Similar al caso anterior, tenemos que encontrar una valoración v tal que $|=_{I,v}$ A (La I ya la tenemos)

- $v(u) = I(u) = 1$
- $v(x) = 1$
- |=I,v sí y sólo si $(v(u), v(x)) \in I(A_1^2 (x, y))$
- Cómo $1 \leq 1$ y $(1, 1) \in I(A_1^2 (x, y))$
- La afirmación es verdadera.

iii.- $\forall x\, A_1^2\,(c, x)$ es satisfacible en I.

La fbf es satisfacible, debemos hallar una valoración v tal que $\models_{I,v} \forall x\, A_1^2\,(c, x)$

- $v(x) = 3$
- $v(c) = I(c) = 0$
- $\models_{I,v} \forall x\, A_1^2\,(c, x)$ sí y sólo si, para toda valoración w, que sea i-equivalente a v, se da que $\models_{I,w} A_1^2\,(c, x)$
    - Sea la valoración w:
        - $w(x) = 0$
        - $w(c) = I(c) = 0$
    - Si:
        - $x_1 = x$
        - $x_2 = c$
    - w es 1-equivalente a v sí y sólo si $(w(c), w(x)) \in I(A_1^2)$
        - Sí y sólo si $(0, 0) \in I(<=)$
        - Sí y sólo si $0 <= 0$
- Lógicamente, no existe una valoración verdadera de $0 > x$, en el dominio de los Naturales. Por lo tanto, toda valoración w i-equivalente a v hacen satisfacible a $A_1^2\,(c, x)$.
- La afirmación es verdadera

iv.- $\forall x A_1^2\,(u, x)$ es satisfacible en I.

Debemos hallar una valoración v tal que |=I,v $\forall x A_1^2\,(u, x)$

- $v(x) = 4$
- $v(u) = I(u) = 1$
- |=I,v $\forall x A_1^2\,(u, x)$ sí y sólo si para toda valoración w, i-equivalente a v, se da que |=I,w $A_1^2\,(u, x)$
    - Sea la valoración w:
        - $w(x) = 0$
        - $w(u) = I(u) = 1$
    - Si:
        - $x_1 = x$
        - $x_2 = u$
    - w es 1-equivalente a v sí y sólo si $(w(u), w(x)) \in I(A_1^2)$
        - sí y sólo si $(1, 0) \in I(<=)$
        - sí y sólo si $1 <= 0$
- Lógicamente, sabemos que hay al menos un número natural que es menor estricto que 1. Formalmente: existe al menos una valoración w i-equivalente a v donde no se da que |=I,w $A_1^2\,(u, x)$.
- La afirmación es falsa.

v.- A_1^2 (c, x) es verdadera en I.

Para que la fbf sea verdadera debe ser satisfacible para toda valoración de I, es decir, |=I A_1^2(c, x).

- v(c) = I(c) = 0
- v(x) = 0
- $|=_{I,v}$ A_1^2(c, x) sí y sólo si (v(c), v(x)) ∈ I(A_1^2)
    - sí y sólo si (0, 0) ∈ I(A_1^2)
    - sí y sólo si 0 <= 0
- No existe número natural que sea menor estricto que 0, no va a existir una valoración que cumpla eso.
- Para toda valoración de I, se cumple $|=_I$ A_1^2(c, x)

vi.- ∀xA_1^2 (c, x) es lógicamente válida.

Para que una fbf sea lógicamente válida debe ser verdadera para toda interpretación.
Sea el dominio:

- U = Z
- v(c) = I(c) = 0
- v(x) = -1
- $|=_{I,v}$ ∀xA_1^2 (c, x) sí y sólo si, para toda valoración w i-equivalente a v, se de que $|=_{I,w}$ A_1^2 (c, x)
    - w(c) = I(c) = 0
    - w(x) = -5
    - Si x_1 = x y x^2 = c, w es 1-equivalente a v.
        - Sí y sólo si (w(c), w(x)) ∈ I(A_1^2)
        - Sí y sólo si (0, -5) ∈ I(<=)
        - Sí y sólo si 0 <= -5
    - Existe al menos una valoración w i-equivalente a v, donde no se da |=I,w A_1^2(c, x)
- Encontramos una valoración donde 0 <= x es falsa. Sabemos que hay al menos un número entero que es menor estricto que 0.
- No para toda interpretación, se da que $|=_I$ A_1^2(c, x)

vii.- A_1^2 (u, c) ∧ ¬A_1^2 (u, c) es contradictoria.

Para que la fórmula sea una contradicción, debe ser falsa para todas las interpretaciones posibles.

- La estructura de esta fbf se corresponde con una contradicción de la lógica de enunciados (lo contrario a una tautología). Específicamente p ∧ ¬p.
- Por lo tanto, también es una contradicción de la lógica de predicados.

4. Ofrecer una interpretación para los siguientes lenguajes de primer orden donde las fórmulas sean verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

i.- $C = F = \varnothing$, $P = \{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.

Verdadero:

- U = { R }
- $I(A_1^2)$ = "x es igual que y"

$\forall x \forall y(A_1^2 (x, y) \rightarrow A_1^2 (y, x))$.

- "Para todo x, y para todo y, x es igual a y, entonces, y es igual que x"

$\forall x(A_1^2 (x, x))$.

- "Para todo x, x es igual que sí mismo"

$\forall x \forall y \forall z((A_1^2 (x, y) \wedge A_1^2 (y, z)) \rightarrow A_1^2 (x, z))$.

- "Para todo x, para todo y, para todo z, si x es igual a y, e y es igual que z, entonces z es igual que z"

Falso:

- U = { Equipos de fútbol }
- I(A12) = "x eliminó a y"

$\forall x \forall y(A_1^2 (x, y) \rightarrow A_1^2 (y, x))$.}

- "Para todo x, para todo y, si x eliminó a y, entonces y eliminó a x"

$\forall x(A_1^2 (x, x))$.

- "Para todo x, x eliminó a x"

$\forall x \forall y \forall z((A_1^2 (x, y) \wedge A_1^2 (y, z)) \rightarrow A_1^2 (x, z))$.

- "Para todo x, para todo y, para todo z. Si x eliminó a y, e y eliminó a z, entonces x eliminó a z"

ii.- $C = \{c\}$, $F = \{f\}$, $P = \{A_1^2\}$, con f y A_1^2 de aridad 2.

Verdadero:

- U = { N }
- I(c) : Constante cualquiera
- $I(A_1^2)$: “x > y”
- I(f12): Sin importar el input, retorna c

$\forall x(A_1^2 (x, c) \rightarrow A_1^2 (x, f(y)))$.

- Para todo x, x es mayor que c, entonces x es mayor que cualquier resultado de f aplicado a y.

$\forall x(\neg A_1^2 (x, x))$

- Para todo x, x no es mayor que si mismo.

$\neg\forall x\forall y(A_1^2 (x, y))$.

- No para todo x, para todo y, x es mayor que y.

Falso:

$\forall x(A_1^2 (x, c) \rightarrow A_1^2 (x, f(y)))$.

$\forall x(\neg A_1^2 (x, x))$.

$\neg\forall x\forall y(A_1^2 (x, y))$.

5.- Determinar si las siguientes fbfs escritas en algún lenguaje de primer orden son contradictorias, satisfacibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación y lógicamente válidas. Fundamentar.

i.- $(\exists x)(\neg A (x)) \vee (\forall x)(A (x) \vee B(x))$.

Esta fbf es lógicamente válida:

-

ii.- $\exists y \exists x\, P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y\, P(x, y)$.

Esta fbf es lógicamente válida

- Si se cumple $\exists y \exists x\, P(x, y)$
- Existe algún x y algún y tal que P(x, y) es verdadera.
- Cómo la fórmula es igual de ambos lados, toda la fórmula es verdadera.
- Si no existe algún valor x y valor y para que P(x, y) sea verdadera, la fórmula es falsa de ambos lados. Pero como la fbf está conectada con una implicación, por su tabla de verdad, si ambos elementos son falsos, la fbf es verdadera.

6.-

i.- Si la fbf A (x) es satisfacible, ¿entonces la fbf $\exists x A(x)$ es lógicamente válida?. Fundamentar.

No necesariamente.

- Sabemos que A(x) es una fbf satisfacible, eso significa que hay una interpretación y una valoración para las cuales $\models_{I,v} A(x)$. En esa interpretación, $\exists x A(x)$ es verdadera.
- Para otras interpretaciones, esa fbf puede ser falsa. Por ejemplo, sea el dominio:
  - U = { Z }
  - I(A(x)) = “x es racional”
  - I(x) = 3
  - Con esta interpretación, sabemos que $\exists x A(x)$ es falsa.
- Por lo tanto, la afirmación es falsa.

ii.- La fbf abierta $\forall y\, P(x, y) \rightarrow \forall y \forall x\, P(x, y)$ ¿es lógicamente válida?. Fundamentar.

No lo es. Para que sea lógicamente verdadera, debe ser verdadera para toda interpretación. Por ejemplo, sea el dominio:

- U = { N }
- I(P(x, y)): “x mayor o igual que y”
- v(x) = 0
- v(y) = 0
- $\forall y\, P(x, y) \rightarrow \forall y \forall x\, P(x, y)$
  - La primera parte $\forall y\, P(x, y)$: “Para todo y, x es mayor que y”, sabiendo que x es 0, todo número natural y es mayor o igual que 0
  - La segunda parte $\forall y \forall x\, P(x, y)$: “Para todo y, para todo x, x es mayor que y” no necesariamente, recordemos que estamos en el dominio de los Naturales, podría ser que mi x sea “10” e y sea “9”

- Por lo tanto, la afirmación es falsa.

iii.- Sea un lenguaje de primer orden con la letra de constante c y las letras de predicado P y Q, ambas de aridad 1. Sea la fbf : (P(c) ∧ ∀x(P(x) → Q(x))) → Q(c) ¿Es lógicamente válida? Fundamentar.

No lo es. Sea el dominio:

- U = Números
- I(P(x)): “Es natural”
- I(Q(x)): “Es mayor que 0”
- c = 0
- (P(c) ∧ ∀x(P(x) → Q(x))) → Q(c)
  - La primera parte (P(c) ∧ ∀x(P(x) → Q(x))) “El 0 es natural, y para todo x, si x es natural, entonces x es mayor que 0”. Esta parte es verdadera.
  - La segunda parte Q(c) “El 0 es mayor que 0” no es verdadera.
- Cómo la fbf tiene estructura de implicación, y la premisa es verdadera y la conclusión falsa, podemos ver que la fbf no es verdadera para esta interpretación, por lo tanto no es lógicamente válida.

iv.- Sean A y B dos fbf escritas en un lenguaje de primer orden. La fbf: ∀x(A(x) ∨ B(x)) → ((∀xA (x)) ∨ (∀xB(x))) es lógicamente válida? Fundamentar.

7.- Sea A una fbf de un lenguaje de primer orden, I una interpretación para tal lenguaje. Demostrar que A es verdadera en I si y sólo si ¬A es falsa en I.

Si ¬A es falsa en I, no hay una valoración en I que la pueda satisfacer.

- Sí y sólo si en ningúna valoración v de I se da $|=_{I,v}$ (¬A)
- Sí y sólo si para toda valoración v de I, no se da $|=_{I,v}$ (¬A)
- Sí y sólo si para toda valoración v de I, no se da $|=_{I,v}$ ¬(¬A)
- Sí y sólo si para toda valoración v de I, se da $|=_{I,v}$ A
- Sí y sólo si, $|=_{I}$ A

8.- Sea A una fbf que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje. ¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de A en I? Fundamentar.

Mediante las valoraciones de I, podemos determinar el valor de verdad de A.

- Si para alguna valoración se llega al escenario de |=I,v A, A es satisfactible.
- Si para todas las valoraciones se llega al escenario |=I A, A es verdadera.
- Si ninguna valoración satisface a A, A es falsa.

9.- Retomar la práctica anterior y para cada ítem (por separado) del ejercicio 4, encontrar alguna interpretación donde todas las sentencias dadas sean verdaderas y además:

- Pipo es un dragón que vive en un zoológico.
- Sebastián es bueno y también es malo al mismo tiempo.
- Pedro es un peluquero.

En algún caso la interpretación podría no existir (justificar porque)