Práctica 9 - Tautologías, Contradicciones, equivalencias lógicas, conectivas.

1.- Retome el Ejercicio 1 de la Práctica 1:

a.- Seleccione un par de enunciados que sean lógicamente equivalentes (que tengan el mismo significado). Demuéstrelo mediante tablas de verdad.

- i: "Si Juan contrata un informático entonces el proyecto tendrá éxito"
- ii: "Si el proyecto no tiene éxito entonces Juan no ha contratado un informático"
    - p: Juan contrata un informático
    - q: El proyecto es exitoso
- Tabla de verdad i:

p	**q**	**p → q**
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

- Tabla de verdad ii:

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**¬q → ¬p**
v	v	f	f	v
v	f	f	v	f
f	v	v	f	f
f	f	v	v	f

- Como los valores de verdad de la última columna de cada tabla son iguales, se puede concluir que ambos enunciados son lógicamente equivalentes.

b.- Para cada ítem construya un enunciado que sea lógicamente equivalente.

i.- "Juan necesita un matemático o un informático."

- "Juan no necesita un matemático y no necesita un informático"

ii.- "Si Juan necesita un informático entonces necesita un matemático."

- "Si Juan no necesita un matemático, entonces no necesita un informático"

iii.- "Si Juan no necesita un matemático entonces necesita un informático."

- "Si Juan no necesita un informático, entonces necesita un matemático"

2.- Sean A, B fbfs que cumplen que (¬A ∨ B) es tautología. Sea C una fbf cualquiera. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs son tautologías y cuáles contradicciones. Justificar las respuestas.

- Para que la fórmula (¬A ∨ B) sea una tautología, se tienen que dejar de tener en cuenta los casos en que A=V y B=F, ya que en esos casos toma el valor de verdad F.

i. ((¬(A → B)) → C)

A	**B**	**C**	**¬(A → B)**	**((¬(A → B)) → C)**
V	V	V	F	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

- Quitando los casos en que V(A)=V y V(B)=F, armando la tabla de verdad, llegamos a que ((¬(A → B)) → C) es una tautología.

ii. (C → ((¬A) ∨ B))

A	**B**	**C**	**¬A**	**(¬A) ∨ B**	**(C → ((¬A) ∨ B))**
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	-	-
V	F	F	F	-	-
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

- Quitando los casos en que V(A)=V y V(B)=F, armando la tabla de verdad, llegamos a que (C → ((¬A) ∨ B)) es tautología.

iii. ((¬A) → B)

A	**B**	**¬A**	**((¬A) → B)**
V	V	F	V
V	F	F	-
F	V	V	V
F	F	V	F

- Quitando los casos en que V(A)=V y V(B)=F, armando la tabla de verdad, llegamos a que ((¬A) → B) no es tautología ni contradicción.

3.- ¿Es cierto que dadas A y B fbfs cualesquiera, siempre ocurre que si A y A → B son tautologías entonces B también lo es? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.

Se puede demostrar por el absurdo. Asumimos que las hipótesis son verdaderas y la conclusión falsa:

a. A es una tautología
b. A → B es una tautología
c. B no es una tautología

Por (c), sabemos que existe un valor de verdad tal que v(B)=F

- Teniendo en cuenta a, para todo valor v(A)=V
- Teniendo en cuenta b, para todo valor v(A → B) = V
- Por definición de valoración, por (a) y (b), sabemos que v(B) = V, ya que si tomara el valor F, (b) no se cumpliría.

Ejemplo en lenguaje natural:

- “Si la pelota es redonda, entonces la pelota al empujarla gira”
- A: “La pelota es redonda” ⇒ Tautología
- B: “La pelota al empujarla gira” ⇒ Tautología
- A → B ⇒ Tautología

4.- Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos ∧, ∨, ¬ . Sea A’ la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada ∧ por ∨ y cada ∨ por ∧. ¿Si A es una tautología, A’ también lo es? Justificar. Ejemplificar con algunos ejemplos escritos en lenguaje natural.

Se puede demostrar que esto no se cumple a través de un contraejemplo.

- Sea A = (p ∨ (¬p)), siendo A una tautología
- El enunciado dice que A’ es cómo A pero con las conectivas invertidas, en ese caso A’ = (p ∨ (¬p))

p	**¬p**	**A = (p ∨ (¬p))**	**A’ = (p ∨ (¬p))**
V	F	V	F
F	V	V	F

- A es una tautología y A' una contradicción, por lo tanto, si A es una tautología con sólo conectivos ∧, ∨, ¬, entonces A' no es tautología.

5.- Demostrar que cualquier tautología proposicional que esté escrita usando los conectivos ¬, ∨, ∧,→ contiene alguna ocurrencia ya sea del símbolo ”¬” o del símbolo ”→”. Idea: Demostrar que cualquier fórmula que contenga sólo la conjunción y disyunción puede tomar el valor F.

Se puede demostrar que esto se cumple usando inducción.

- Sea A una fbf tal que sólo cuenta con las conectivas {∨, ∧}
- Sea v una valuación, que asigna el valor (F) a todas las letras, es decir, v(pi)=F para todo pi. En esa valuación, A también va a tomar el valor falso, v(A)=F
- Sea N un número natural que representa la cantidad de conectivos de la fbf
- Caso Base (N=0)
    - No hay conectivos, por lo tanto A es atómica
    - A=p1, v(p1)=F, por lo tanto, v(A)=F
- Hipótesis Inductiva (HI): Asumimos que para toda fbf A que sólo contiene {∨, ∧}, con N o menos conectivos, v(A)=F
- Caso N+1
    - A puede ser de dos formas:
        - A = (B ∨ C)
        - A = (B ∧ C)
    - Tanto B como C tienen N o menos conectivos, por lo tanto, para B y C vale (HI), o sea, v(B)=F y v(C)=F. Y por definición semántica de ∧ y ∨, v(A)=F para ambos casos.
- v(A)=F para cualquier fbf con conectivas {∨, ∧}. A no es una Tautología

p1	**p2**	**A (fbf con conectivas ∨, ∧)**
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	F	F

Las conectivas ∨, ∧ no alcanzan para escribir tautologías, se tienen que usar otros conectivos además de esos.

6.- ¿Es cierto que en el Cálculo de Enunciados pueden escribirse dos fbfs que tengan diferentes letras de proposición y aún así ambas fbfs sean lógicamente equivalentes?. Fundamentar.

Lo que dice el enunciado es cierto, supongamos que tengo (p → q) y (r → s), al probar que sean lógicamente equivalentes, ((p → q) ↔ (r → s)), la prueba es verdadera:

(p → q)	**(r → s)**	**((p → q) ↔ (r → s))**
V V V	V V V	V
V F F	V F F	V
F V V	F V V	V
F F V	F F V	V

7.- Para las tablas dadas a continuación, encontrar al menos dos fbf del Cálculo de Enunciados que las tenga por tablas de verdad. Ayuda: alcanza con usar p, q, ¬, ∧, ∨.

Tabla 1:

p	**q**	**f?**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

- ((p ∨ (¬p) ∨ (q ∨ (¬q))
- ((p ∨ q) ∨ (¬q))

Tabla 2:

p	q	f?
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

- (q ∧ (p ∨ q))
- ((p ∨ (¬p)) ∧ q)

Tabla 3:

p	q	f?
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

- (p ∧ (p ∨ q))
- (p ∧ (p ∨ (¬p)))

8.- Determinar cuáles de las siguientes fbfs son lógicamente implicadas por la fbf (A ∧ B). Fundamentar. Def. de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.

Tabla de verdad de A ∧ B

A	B	A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

i.- A

A	**B**	**A ∧ B**	**(A ∧ B) → A**
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

- A ∧ B implica lógicamente a A porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología.

ii.- B

A	**B**	**A ∧ B**	**(A ∧ B) → B**
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

- A ∧ B implica lógicamente a B porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

iii.- A ∨ B

A	**B**	**A ∧ B**	**A ∨ B**	**(A ∧ B) → (A ∨ B)**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

- A ∧ B implica lógicamente a A ∨ B porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

iv.- $\neg A \lor B$

A	B	$A \land B$	$\neg A \lor B$	$(A \land B) \to (\neg A \lor B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

- $A \land B$ implica lógicamente a $\neg A \lor B$ porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

v.- $\neg B \to A$

A	B	$A \land B$	$\neg B \to A$	$(A \land B) \to (\neg B \to A)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

- $A \land B$ implica lógicamente a $\neg B \to A$ porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

vi.- $A \longleftrightarrow B$

A	B	$A \land B$	A <-> B	(A $\land$ B) $\to$ (A <-> B)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

- $A \land B$ implica lógicamente a $A \longleftrightarrow B$ porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

vii.- A → B

A	B	A ∧ B	A → B	(A ∧ B) → (A → B)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

- A ∧ B implica lógicamente a A → B porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

viii.- ¬B → ¬A

A	B	A ∧ B	¬B → ¬A	(A ∧ B) → (¬B → ¬A)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

- A ∧ B implica lógicamente a ¬B → ¬A porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología
- El resultado es el mismo que el del inciso (vii), ya que (A → B) ⇔ (¬B → ¬A)

ix.- B → ¬A

A	B	A ∧ B	B → ¬A	(A ∧ B) → (B → ¬A)
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

- A ∧ B no implica lógicamente a B → ¬A porque construimos la tabla de verdad y la implicación no es una tautología (es contingencia)

9.- Sea la relación ≤ tal que dadas fbfs A , B se cumple que A ≤ B si A → B es una tautología. Dadas las fbfs: p, p → q, ¬p, p ∧ ¬p, r ∨ ¬r, organizarlas bajo la relación ≤. Representar gráficamente.

La idea del ejercicio es ir haciendo las tablas con cada combinación, por ejemplo:

p	**q**	**(p → (p → q))**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- (p → (p → q)) no es una tautología, por lo tanto, no se cumple que p ≤ (p → q)

Y así siguiendo con el resto de las fbfs.

10.- Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos ∧, ¬. Sea A’ la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada ∧ por ∨ y cada letra de proposición por su negación (o sea, cada p por ¬p, cada q por ¬q, etc.). ¿Es cierto que A’ es <u>lógicamente equivalente</u> a ¬A ? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.

Demostración por inducción:

- Sea n el número de conectivos que aparecen en A
- Caso base (n = 0)
  - Sea A = p; A’ = ¬p; y ¬A = ¬p
  - En este caso, A’ es trivialmente equivalente a ¬A
  - Paso de inducción: Supongamos que n > 0, A tiene n conectivos y que toda forma enunciativa con menos de n conectivas posee la propiedad requerida.

Hay 2 formas de construir las formas enunciativas.

- Caso 1: A es de la forma (¬B)

    - B tiene n-1 conectivas, así que por hipótesis de inducción B' es lógicamente equivalente a ¬B
    - Pero A' es ¬B'. Por lo tanto, A' es lógicamente equivalente a ¬(¬B). Partiendo de la definición del caso, A es de la forma ¬B, entonces reemplazamos y nos queda que A' lógicamente equivalente a ¬A
- Caso 2: A es de la forma (B ∧ C)
    - B y C contiene cada una menos de n conectivas, así que B' y C' son lógicamente equivalentes a ¬B y ¬C respectivamente
    - Entonces tenemos que A' es (B' ∨ C'). Invertimos el símbolo siguiendo la definición de la proposición que se quiere probar

    - (B' ∨ C') ⇔ (¬B ∨ ¬C)
    - (¬B ∨ ¬C) se puede escribir como ¬(B ∧ C)
- Por la definición del caso tenemos que A es de la forma (B ∧ C), entonces reemplazamos
- Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que A' ⇔ ¬(A)

Queda demostrado bajo inducción que A' ⇔ ¬A

11.- Sea # el operador binario definido como p#q =def (p ∧ ¬q) ∨ (¬p ∧ q). Def. de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.

i.- Probar que # es asociativo, es decir, x#(y#z) es lógicamente equivalente a (x#y)#z.

X	**Y**	**Z**	**Y#Z=(Y ∧ ¬Z) ∨ (¬Y ∧ Z)**	**X#(Y#Z)= (X ∧ (¬(Y#Z)) ∨ (¬X ∧ (Y#Z))**	**⇔**	**X#Y=(X ∧ ¬Y) ∨ (¬X ∧ Y)**	**(X#Y)#Z= ((X#Y) ∧ (¬Z)) ∨ ((¬(X#Y)) ∧ Z)**
V	V	V	F	V	V	F	V
V	V	F	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	F	F

- # es asociativo porque doble implicación entre x#(y#z) y (x#y)#z es una tautología.

ii.- Probar que # es conmutativo, es decir, y#z es lógicamente equivalente a z#y.

Y	**Z**	**Y#Z=(Y ∧ ¬Z) ∨ (¬Y ∧ Z)**	**⇔**	**Z#Y=(Z ∧ ¬Y) ∨ (¬Z ∧ Y)**
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

- # es conmutativo, ya que la doble implicación entre Y#Z y Z#Y es una tautología

12.- Demostrar que las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes.

//Lo dejo de repaso =)

i- (p → q) es lógicamente equivalente a (¬p ∨ q)

(p	**→**	**q)**	**←→**	**(¬p**	**∨**	**q)**
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F

- La doble implicación entre ambas fbfs no es una tautología, por lo tanto no son lógicamente equivalentes.

ii- (p ↔ q) es lógicamente equivalente a ((p → q) ∧ (q → p))

(p	⟷	q)	⟷	((p	→	q)	∧	(q	→	p))
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

- Dado que la doble implicación entre ambas fbfs es una tautología, ambas fbfs son lógicamente equivalentes.

iii- (¬(p ∧ q)) es lógicamente equivalente a (¬p ∨ ¬q)

iv- (¬(p ∨ q)) es lógicamente equivalente a (¬p ∧ ¬q)

Tanto (iii) como (iv) son lógicamente equivalentes por de De Morgan.