Práctica 10 - Cálculo de Enunciados L.

1.- Dada la siguiente secuencia de fbfs de L:

a. $((\neg p) \to (\neg(q \to r))) \to ((q \to r) \to p)$
b. $((\neg p) \to (\neg(q \to r)))$
c. $((q \to r) \to p)$

Analizar si se trata de una demostración en L de la forma $\Gamma \vdash_L A$ para algún conjunto Γ de fbfs y alguna fbf A. En ese caso:

I. Describir al conjunto Γ y a la fbf A y explicar cada paso de la secuencia (axiomas y reglas de inferencia).
$\Gamma = \{((\neg p) \to (\neg(q \to r))) \to ((q \to r) \to p), ((\neg p) \to (\neg(q \to r)))\}$
$A = ((q \to r) \to p)$
Demostración sintáctica:

1	$((\neg p) \to (\neg(q \to r)))$	Hipótesis
2	$((\neg p) \to (\neg(q \to r))) \to ((q \to r) \to p)$	Hipótesis
3	$((q \to r) \to p)$	MP entre 1 y 2

Llegamos a A a partir del conjunto Γ.

II. Decir si A es teorema de L
Γ es un conjunto vacío
$A = ((q \to r) \to p)$
Por las propiedades de Corrección y Completitud, sabemos qué si A es teorema de L también A es una tautología (viceversa también). Se puede hacer la tabla de verdad para ver si A es una tautología y, si lo es, entonces también es un teorema (además hago los dos incisos de una, el menos vago)

p	**q**	**r**	**$(q \to r)$**	**$((q \to r) \to p)$**
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V

F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

Construimos la tabla de verdad y comprobamos que la fbf A no es una tautología, entonces por la propiedad de Corrección, tampoco es un teorema de L.

III. Decir si A es tautología
Ver inciso anterior.

2.- Sean A, B y C tres fbfs de L. Dar una demostración sintáctica en L de los siguientes teoremas. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas. Intente resolverlos sin usar el metateorema de la deducción y luego usándolo.

i.- $\vdash_L ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$

Sin metateorema:

1	$((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow (((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A))$	L2 $A = (\neg A \rightarrow A)$ $B = \neg A$ $C = A$
2		L1 A B

Con metateorema:

$\Gamma \cup \{(\neg A \rightarrow A)\} \vdash_L A$

1	$(\neg A \rightarrow A)$	Hipótesis
2	$(\neg A \rightarrow (\neg\neg(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A))$	L1 $A = \neg A$ $B = \neg\neg(\neg A \rightarrow A)$

3	$(\neg\neg(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$	L3 $A = \neg\neg(\neg A \rightarrow A)$ $B = A$
4	$(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$	SH entre 3 y 4
5	$(\neg A \rightarrow (A \ \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)))$	L2 $A = \neg A$ $B = A$ $C = \neg(\neg A \rightarrow A)$
6	$((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)))$	MP entre 4 y 5
7	$(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A))$	MP entre 1 y 6
8	$(\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A))$	L3 $A = A$ $B = \neg A \rightarrow B$
9	$((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A))$	MP entre 7 y 8
10	A	MP entre 1 y 9

Se probó que $|\!-_L ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ es un teorema

ii.- $|\!-_L ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$

Sin metateorema:

Con metateorema:

$\Gamma \cup \{(A \rightarrow B)\} \,|\!-_L (\neg B \rightarrow \neg A)$

1	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	L3 $A = \neg A$ $B = \neg B$
2	$(A \rightarrow B)$	Hipótesis
3	$(\neg B \rightarrow \neg A)$	MP entre 1 y 2

3.- Sean A, B y C tres fbfs del sistema formal L. Dar una demostración sintáctica en L de las siguientes deducciones. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

i.- $\{((A \rightarrow B) \rightarrow C), B\} \vdash_L (A \rightarrow C)$

1	$(B \rightarrow (A \rightarrow B))$	L1 A = B B = A
2	B	Hipótesis
3	$(A \rightarrow B)$	MP entre 1 y 2
4	$((A \rightarrow B) \rightarrow C)$	Hipótesis
5	C	MP entre 3 y 4
6	$(C \rightarrow (A \rightarrow C))$	L1 A = C B = A
7	$A \rightarrow C$	MP entre 5 y 6

Se llegó a que $(A \rightarrow C)$ es una demostración de L válida a partir de las premisas Γ.

4.- Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe $\Gamma \vdash_L A$. ¿Es cierto que para todo Γ_i, tal que $\Gamma_i \subset \Gamma$, $\Gamma_i \vdash_L A$?. Fundamentar.

Sea $\Gamma = \{q, \neg r\}$ y $A = p \rightarrow q$

- A se deduce a partir de Γ

1	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$	L1 A = q B = p
2	q	Hipótesis
3	$p \rightarrow q$	MP entre 1 y 2

- Ahora queremos probar que Γ_i = {¬r}
  - Siendo Γ_i subconjunto de Γ
- No hay forma que se cumpla que {¬r} $|-_L$ (p → q)

Por lo tanto, no es cierto que para todo Γ_i, tal que $\Gamma_i \subset \Gamma$, Γi $|-_L$ A

5.- Sean Γ y Γ_0 conjuntos de fbfs del C. de Enunciados ¿Es cierto que para todo Γ existe algún $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que si Γ $|-_L$ A entonces Γ_0 $|-_L$ A?- Fundamentar.

El enunciado nos pregunta sí existe al menos un conjunto Γ_0, tal que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ y:

- Γ $|-_L$ A.
- Γ_0 $|-_L$ A.

La respuesta es que si, ya que Γ_0 puede ser igual que Γ.

- Si Γ_0 = Γ y Γ $|-_L$ A, entonces Γ_0 $|-_L$ A.

6.- Sean *A, B y C* fbfs del C. de Enunciados. Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que Γ U {*A, B*} $|-_L$ *C* y también se sabe que Γ $|-_L$ *A*

i.- ¿Es cierto que Γ $|-_L$ (*C* → *B*)?. Fundamentar.

Sean:

- Γ = { q }
- A = (p → q)
- B = { s }
- C = { r → s }

Γ $|-_L$ *A*:

1	q → (p → q)	L1 A = q B = p
2	q	Hipótesis
3	p → q	MP entre 1 y 2

Γ U {A, B} $|-_L$ C ⇒ q U { (p → q), s } $|-_L$ (r → s):

1	s → (r → s)	L1 A = s B = r

2	s	Hipótesis
3	r → s	MP entre 1 y 2

¿Γ $|\!-_L$ (C → B) ⇒ q $|\!-_L$ ((r → s) → s)?

- Con este Γ y estos B y C, no es posible que C → B se deduzca a partir de Γ
- Por lo tanto, la argumentación es inválida y la afirmación falsa.

ii.- ¿Es cierto que $|\!-_L$ (*A*)?. Fundamentar.

Sean:

- Γ = { q }
- A = (p → q)
- B = { s }
- C = { r → s }

Si A fuera teorema de L, también debería ser una tautología (Sensatez).
¿A es una tautología?

p	**q**	**p → q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Se construyó la tabla de verdad de A y se comprobó que A no es tautología, por lo tanto, A tampoco es teorema de L.