TP 6 - Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

▼ 1. Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio

Para que un conjunto sea un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar usuales deben cumplir:

1. Cerradura para la suma.
2. Asociatividad para la suma.
3. Existencia del neutro para la suma.
4. Existencia del opuesto para la suma.
5. Conmutatividad para la suma.
6. Cerradura para el producto por escalar.
7. Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma por escalares.
8. Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma por vectores.
9. Asociatividad para el producto por escalar.
10. Existencia del neutro para el producto por escalar.

(a) $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ es el conjunto de los vectores tipo (x, y, z), siendo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- Suma de vectores: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
- Producto por escalar: Para un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$

¿Es $\mathbb{R}^3$ un espacio vectorial?

1. La suma de dos vectores (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) $\mathbb{R}^3$ da como resultado otro vector $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ en $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto es cerrado para la suma.
2. Sean tres vectores $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$:
   - Se puede ver que:
   $$((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) + (x_3, y_3, z_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, z_1 + z_2 + z_3)$$
   - Es igual que:
   $$(x_1, y_1, z_1) + ((x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, z_1 + z_2 + z_3)$$
   - Por lo tanto, la suma es asociativa para el conjunto $\mathbb{R}^3$.
3. El elemento neutro para la suma en $\mathbb{R}^3$ es el vector $(0, 0, 0)$, ya que para cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
   $$(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z)$$
4. Para cada vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, existe un vector opuesto $(-x, -y, -z)$ tal que la suma entre ambos nos da el vector neutro:
   $$(x, y, z) + (-x, -y, -z) = (0, 0, 0)$$

5. Sean dos vectores (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) en $\mathbb{R}^3$, podemos ver que:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

   - Como la suma usual entre números reales en conmutativa:

$$(x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1) = (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1)$$

   - Por lo tanto, la suma es conmutativa para el conjunto $\mathbb{R}^3$.

6. El producto de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ con un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es otro vector $(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$ en $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto es cerrado para el producto por escalar.
7. Sean dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$$

   - Se puede ver que el producto se distribuye con respecto a la suma de escalares.

8. Sea un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$:

$$\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2 = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1) + (\alpha \cdot x_2, \alpha \cdot y_2, \alpha \cdot z_2)$$

   - Se puede ver que el producto se distribuye con respecto a la suma de vectores.

9. Sean dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y un vector $v \in \mathbb{R}^3$:
   - Se puede ver que:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$$

   - Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{R}^3$ es asociativo para el producto de escalares.

10. Existe un elemento neutro para el producto escalar que es el $1 \in \mathbb{R}$, ya que para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$1 \cdot v = v$$

Se puede observar que los axiomas se cumplen, por lo tanto, $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial para la suma y producto por escalar.

(b) Las matrices reales de $2x2$

$M_{2x2}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices $2x2$ con componentes reales.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Suma de matrices: Sean dos matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, la suma entre ambas matrices es $A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$.
- Producto por escalar: Sea un escalar $\alpha \in K$ y una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, el producto entre ambos es $\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \end{pmatrix}$.

¿Es $M_{2x2}(\mathbb{R})$ un espacio vectorial?

1. Sean dos matrices A y $B \in M_{2x2}(\mathbb{R})$, la suma entre ellas nos da como resultado otra matriz $M_{2x2}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, la suma está bien definida para el conjunto.
2. Para tres matrices A, B y C en $M_{2x2}(\mathbb{R})$:
   - Podemos ver que:

$$(A+B)+C = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} + C = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & d_1+d_2+d_3 \end{pmatrix}$$

- Es igual a:

$$A+(B+C) = A + \begin{pmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ c_2+c_3 & d_2+d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & d_1+d_2+d_3 \end{pmatrix}$$

- Por lo tanto, la suma es asociativa para $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

3. El elemento neutro para la suma en $M_{2x2}(\mathbb{R})$ es la matriz neutra $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ya que para cualquier matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A = A$$

4. Para cada matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ existe un elemento/matriz inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ tal que la suma entre ambas nos da la matriz neutra:

$$A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Sean dos matrices A y B en $M_{2x2}(\mathbb{R})$:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$$

- Como la suma de reales es conmutativa:

$$\begin{pmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ c_2+c_1 & d_2+d_1 \end{pmatrix} = B + A$$

- Por lo tanto, la suma de matrices es conmutativa para el conjunto $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

6. Sea un escalar $\alpha \in K$ y una matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$, el producto por escalar es:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \end{pmatrix}$$

- Otra matriz que también pertenece a $M_{2x2}(\mathbb{R})$. Por lo tanto el producto por escalar es cerrado para el conjunto.

7. Sean dos escalares $\alpha, \beta \in K$ y una matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$:

$$(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

- Se puede ver que el producto se distribuye con respecto a la suma por escalares.

8. Sea un escalar $\alpha \in K$ y dos matrices A y $B \in M_{2x2}(\mathbb{R})$:

$$\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

- Se puede ver que el producto se distribuye con respecto a la suma de "vectores".

9. Sean dos escalares $\alpha, \beta \in K$ y una matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$:

- Se puede ver que:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$$

- Por lo tanto, el producto por escalares es asociativa para el conjunto $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

10. Existe un elemento neutro para el producto por escalar que es el escalar 1, ya que para cualquier matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(c) Los polinomios de grado menor o igual a 3 (P_3). ¿El conjunto de los polinomios de grado 3, también es un espacio vectorial?

P_3 es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales menores o iguales a 3, son de la forma:

$$a + bx + cx^2 + dx^3$$

- Siendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- Suma de polinomios: Sean $p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$ y $q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3$, la suma entre ambos polinomios es $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 + (d_1 + d_2)x^3$.
- Producto por escalar: Sea un escalar $\alpha \in K$ y un polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, el producto por escalar es $\alpha \cdot p(x) = p(x) = (\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot b)x + (\alpha \cdot c)x^2 + (\alpha \cdot d)x^3$.

¿Es P_3 un espacio vectorial?

1. Sean $p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$ y $q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3$, la suma entre ambos polinomios es $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 + (d_1 + d_2)x^3$, que también es un polinomio P_3, por lo tanto la suma está bien definida para el conjunto.
2. Sean tres polinomios P_3 $p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3$, $q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3$ y $r(x) = a_3 + b_3x + c_3x^2 + d_3x^3$:
   - Podemos ver que:

   $$((a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3) + (a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3)) + (a_3 + b_3x + c_3x^2 + d_3x^3) = ((a_1 + a_2) + (b_1$$

   - Es igual que:

   $$(a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3) + ((a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3) + (a_3 + b_3x + c_3x^2 + d_3x^3)) = (a_1 + b_1x + c_1x^2$$

   - Por lo tanto, la suma es asociativa para el conjunto P_3.
3. El elemento neutro para la suma en P_3 es $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$, ya que para cualquier polinomio P_3:

   $$(0 + 0x + 0x^2 + 0x^3) + (a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

4. Para cada polinomio P_3 existe un polinomio inverso $(-a - bx - cx^2 - dx^3)$, tal que la suma entre ambos nos da el polinomio neutro.

   $$(a + bx + cx^2 + dx^3) + (a - bx - cx^2 - dx^3) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

5. Sean dos polinomios P_3 $p(x)$ y $q(x)$:

   $$p(x) + q(x) = (a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3) + (a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3) = ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$$

   - Dado que la suma entre reales es conmutativa:

   $$((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 + (d_1 + d_2)x^3) = ((a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)x + (c_2 + c_1)x^2 + (d_2 + d_1)x$$

   - Por lo tanto, la suma en P_3 es conmutativa.
6. Para un escalar $\alpha \in K$ y un polinomio P_3 $p(x)$, el producto por escalar es:

   $$\alpha \cdot (a + bx + cx^2 + dx^3) = ((\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot b)x + (\alpha \cdot c)x^2 + (\alpha \cdot d)x^3)$$

   - Obtenemos otro polinomio P_3, por lo tanto el producto por escalar es cerrado para dicho conjunto.

7. Sean dos escalares $\alpha, \beta \in K$ y un polinomio P_3 $p(x)$:

$$(\alpha + \beta) \cdot p(x) = \alpha \cdot p(x) + \beta \cdot p(x)$$

   - Se puede observar que el producto por escalar se distribuye con respecto a la suma de escalares.

8. Sea un escalar $\alpha \in K$ y dos polinomios P_3 $p(x)$ y $q(x)$:

$$\alpha \cdot (p(x) + q(x)) = \alpha \cdot p(x) + \alpha \cdot q(x)$$

   - Se puede ver que el producto por escalar se distribuye con respecto a la suma de "vectores".

9. Sean dos escalares $\alpha, \beta \in K$ y un polinomio P_3 $p(x)$:
   - Se puede ver que:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot p(x)) = (\alpha \cdot \beta) \cdot p(x)$$

   - Por lo tanto, el producto por escalar es asociativo para el conjunto P_3

10. El elemento neutro para el producto por escalar es el escalar 1, ya que para cualquier polinomio P_3:

$$1 \cdot p(x) = p(x)$$

▼ 2. Sea V un Espacio Vectorial, demostrar que si $\alpha . v = 0_V$ entonces $\alpha = 0$ o $v = 0_v$ (o ambos son nulos)

- Si $\alpha = 0$, para cualquier $v \in V$, el producto por escalar de α con v será el vector cero.

$$0.v = 0_v$$

  - Entonces, si $\alpha = 0$, la igualdad $\alpha . v = 0_v$ se cumple, más allá del valor de v.

- Si $\alpha \neq 0$, ese escalar tiene un inverso para el producto, sea α^{-1} tal que:

$$\alpha . \alpha^{-1} = 1$$

  - Teniendo $a.v = 0_v$, se multiplica a^{-1} en ambos lados de la igualdad:

$$\alpha^{-1} . (\alpha . v) = \alpha^{-1} . 0_v$$

  - Asociatividad:

$$(\alpha^{-1} . \alpha) . v = 0_v$$

  - Se sabe que $\alpha . \alpha^{-1} = 1$, y como 1 es el neutro para el producto por escalares:

$$v = 0_v$$

- Por lo tanto, se demostró que si $\alpha \cdot v = 0_v$, entonces $\alpha = 0$ y/o $v = 0_v$.

▼ 3. Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios (justificar)

Para que un conjunto sea un sub-espacio debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. El conjunto debe ser NO vacío (con demostrar que tiene neutro está bien).
2. Debe ser cerrado para la suma de vectores.
3. Debe ser cerrado para el producto de escalares.

(a) $S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

S es subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

1. El elemento neutro es el vector nulo en $\mathbb{R}^2$, es decir, el vector $(0, 0)$.
   - Si se toma $x = 0$ en S, se obtiene dicho vector. Por lo tanto S tiene al elemento neutro y es no vacío.
2. Sean dos vectores cualquiera de S, $v_1 = (x_1, 0)$ y $v_2 = (x_2, 0)$, siendo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$v_1 + v_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

   - Como $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$, el vector resultante pertenece a S.
   - Por lo tanto, S es cerrado para la suma.
3. Sea un vector $v = (x, 0)$ y un escalar $\alpha \in K$:

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot (x, 0) = (\alpha x, 0)$$

   - Como $\alpha x \in \mathbb{R}$, el vector resultante pertenece a S.
   - Por lo tanto, S es cerrado para el producto por escalar.

Se pudo demostrar que S satisface las 3 condiciones, por lo tanto es válido decir que S es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$

S es un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

1. El elemento neutro es el vector cero, es decir, el vector $(0, 0)$.
   - Podemos ver que, sin importar el valor de y en S, nunca se llega al vector nulo debido a que $x = 1$.
   - Por lo tanto, el subconjunto S no posee el elemento neutro de $\mathbb{R}^2$.

Como S no tiene al elemento neutro, entonces no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

(c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$

S es un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

- A $x + y = 0$ lo podemos despejar como $x = -y$, esto significa que $(x, y) = (-y, y)$
  - Si $y = 1$, entonces $(x, y) = (-1, 1)$ que pertenece a S ya que cumple su definición.

1. El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es el vector nulo $(0, 0)$, en S este vector se representa con $y = 0$, ya que $(x, y) = (-y, y) = (0, 0)$.
   - Esto es válido, ya que $0 + 0 = 0$ (cumple la condición), por lo tanto $(0, 0) \in S$, entonces S contiene al elemento neutro y es no vacío.
2. Sean dos vectores cualquieras de S:
   - $v_1 = (x_1, y_2)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$, al ser vectores de S cumplen la condición $-y = y$
   - Entonces, la suma entre ambos vectores:

$$v_1 + v_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

   - Para que $v_1 + v_2 \in S$, debe cumplirse que:

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$$

   - Se puede ver que $v_1 + v_2$ también cumple la definición de S, por lo tanto $v_1 + v_2 \in S$, por lo tanto la suma de vectores es cerrada en S.
3. Sea un escalar $\alpha \in K$ y un vector $v = (x, y) \in S$
   - Al ser un vector de S, cumple su condición.
   - El producto entre ambos es:

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$$

- Para que $\alpha \cdot v \in S$:

$$(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + \alpha y) = \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot 0 = 0$$

- Se puede ver que $\alpha \cdot v$ cumple la definición de S, por lo tanto $\alpha \cdot v \in S$ (es cerrada para el producto por escalares).

Al satisfacer las 3 condiciones, se considera a S subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

(d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$

S es un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

1. El elemento neutro en $\mathbb{R}^2$ es el vector nulo $(0, 0)$, en S este vector no puede ser representado, ya que

$$(0, 0) = 0 + 0 \neq 1$$

- No cumple la definición de S, entonces como S no tiene el elemento neutro de $\mathbb{R}^2$, no es un subespacio.

(e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y\}$

S es un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

1. El elemento neutro en $\mathbb{R}^3$ es el vector nulo, es decir el vector $(0, 0, 0)$, que en S se representa como:

$$z = x - y \to 0 = 0 - 0$$

   - Se puede ver que $(0, 0, 0)$ cumple la definición de S, por lo tanto dicho elemento está en S, entonces S posee al elemento neutro y es no vacío.

2. Sean dos vectores en S:
   - $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$
   - Como ambos pertenecen a S, ambos cumplen su definición, es decir:
     - $z_1 = x_1 - y_1$ y $z_2 = x_2 - y_2$
   - La suma entre los dos vectores es:

$$v_1 + v_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$$

   - Para que el resultado de la suma pertenezca a S, se tiene que cumplir:

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \to z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$$

   - Entonces, $v_1 + v_2$ puede satisfacer la definición de S, por lo tanto $v_1 + v_2 \in S$, demostrando que la suma de vectores es cerrada para el subconjunto.

3. Sea un escalar $\alpha \in K$ y un vector $v = (x, y, z) \in S$
   - Como v pertenece a S, cumple su definición.
   - El producto entre ellos es:

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

   - Para que el resultado del producto por escalares pertenezca a S, se tiene que dar:

$$(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \to \alpha z = (\alpha x) - (\alpha y) = \alpha(x - y)$$

   - Entonces, $\alpha \cdot v$ puede satisfacer la definición de S, por lo tanto $\alpha \cdot v \in S$, demostrando así que el producto por escalar es cerrado en el subconjunto.

- Se demostró que S satisface las 3 condiciones, por lo tanto es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(f) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = 1\}$

Se quiere demostrar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

1. El elemento neutro en $\mathbb{R}^4$ es el vector nulo $(0, 0, 0, 0)$, dicho vector NO pertenece a S

$$(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0) \to 0 + 0 + 0 \neq 1$$

   - Se puede ver que ese vector no satisface la definición de S, por lo tanto ese subconjunto no posee el elemento neutro y no es subespacio.

(g) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - w = 0, z + 3y = 0\}$

Se quiere demostrar que S es subespacio de $\mathbb{R}^4$.

1. El elemento neutro en $\mathbb{R}^4$ es el vector nulo $(0, 0, 0, 0)$, se puede ver que dicho vector pertenece a S:

$$(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$$
$$x + y - w = 0 \to 0 + 0 - 0 = 0 \quad \& \quad z + 3y = 0 \to 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

   - El vector nulo cumple la definición de S, por lo tanto el elemento neutro pertenece a S y es no nulo.

2. Sean dos vectores de S, $v_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$
   - Ambos cumplen la definición de S.
   - La suma entre ambos vectores es:

$$v_1 + v_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$$

   - Para que $v_1 + v_2$ pertenezca a S, se debe cumplir:

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (w_1 + w_2) = 0 \\ (z_1 + z_2) + 3(y_1 + y_2) = 0 \end{cases}$$

   - Por lo tanto, $v_1 + v_2 \in S$ (si satisface su definición), demostrando que la suma de vectores es cerrada para S.

3. Sea un escalar $\alpha \in K$ y un vector $v = (x, y, z, w) \in S$ (cumple su definición).
   - El producto entre ambos es:

$$\alpha \cdot v = \alpha \cdot (x, y, z, w) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w)$$

   - Para que $\alpha \cdot v$ pertenezca a S:

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha y - \alpha y = \alpha(x + y - w) = 0 \\ \alpha z + 3\alpha y = \alpha(z + 3y) = 0 \end{cases}$$

   - Por lo tanto, $\alpha \cdot v \in S$ (si cumple su definición), demostrando que el producto por escalares es cerrado para S.

(h) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} \right\} : a, b, c \in \mathbb{R}$

Se quiere demostrar que S es subespacio de $M_{2x2}(\mathbb{R})$

1. El elemento neutro de $M_{2x2}(\mathbb{R})$ es la matriz neutra $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la cuál pertenece a S, ya que si $a = 0, b = 0, c = 0$ se forma la matriz neutra. Por lo tanto, S posee el elemento neutro y es no vacío.
2. Sean dos matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix} a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ y $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ de S. La suma entre ambas es:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

   - Se puede ver que $A + B \in S$, por lo tanto, la suma de "vectores" es cerrada para S.
3. Sea un escalar $\alpha \in K$ y una matriz $A \in S$, el producto entre ambos es:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 & \alpha \cdot b_1 \\ \alpha \cdot a_1 & \alpha \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

   - Se puede ver que $\alpha \cdot A \in S$, por lo tanto, el producto por escalares es cerrado para S.

- S satisface las 3 condiciones, por lo tanto S es un subespacio de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

▼ 4. Decidir si los siguientes subconjuntos son generadores de $\mathbb{R}^3$

La base canónica de R³ es (1,0,0);(0,1,0);(0,0,1) porque:

- Genera todos los vectores de R³ mediante su combinación lineal.
- Es linealmente independiente (igualación de la combinación lineal con el vector nulo).

La dimensión de una base es la cantidad de componentes que tiene.

- En el caso de R³, serían 3 vectores.
- Si son 2 o 4 hay problemas.
  - Si son 4 puede que sean generador pero no base (debido a que posiblemente no sean linealmente independientes).

(a) $S = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (1,2,3)\}$

Hay que ver si se puede escribir cualquier vector $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores de S.

- Sean los escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$

  $(x,y,z) = v = \alpha \cdot (1,0,0) + \beta \cdot (0,1,0) + \gamma \cdot (0,0,1) + \delta \cdot (1,2,3) = (\alpha,0,0) + (0,\beta,0) + (0,0,\gamma) + (\delta, 2$

- Tenemos que:

$$\begin{cases} x = \alpha + \delta \rightarrow \alpha = x - \delta \\ y = \beta + 2\delta \rightarrow \beta = y - 2\delta \\ z = \gamma + 3\delta \rightarrow \gamma = z - 3\delta \end{cases}$$

- Para cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de S, por lo tanto es un generador de $\mathbb{R}^3$.

(b) $S = \{(1,0,1); (1,1,1); (0,0,1)\}$

Hay que ver si se puede escribir a cualquier vector $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores de S.

- Sean los escalares $\alpha, \beta . \gamma \in K$:

$(x,y,z) = v = \alpha \cdot (1,0,1) + \beta \cdot (1,1,1) + \gamma \cdot (0,0,1) = (\alpha,0,\alpha) + (\beta,\beta,\beta) + (0,0,\gamma) = (\alpha+\beta, \beta, \alpha+\beta+\gamma$

- Nos queda un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

- Segunda ecuación:

$$y = \beta \rightarrow \beta = y$$

- Se reemplaza $\beta = y$ en la primera ecuación:

$$x = \alpha + y \rightarrow \alpha = x - y$$

- Se reemplaza $\alpha = x - y$ y $\beta = y$ en la tercera ecuación:

$$z = (x - y) + y + \gamma \rightarrow z = x + \gamma \rightarrow \gamma = z - x$$

- Esto nos quedaría como:

$$\begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y \\ \gamma = z - x \end{cases}$$

- Para cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S, por lo tanto es un generador de $\mathbb{R}^3$

(c) $S = \{(1, 0, 1); (0, 1, 0)\}$

Hay que ver si se puede escribir cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores de S.

- Sean unos escalares α y $\beta \in K$:

$$(x, y, z) = v = \alpha \cdot (1, 0, 1) + \beta \cdot (0, 1, 0) = (\alpha, 0, \alpha) + (0, \beta, 0) = (\alpha, \beta\, \alpha)$$

- Nos queda un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \alpha \rightarrow \alpha = x \\ y = \beta \rightarrow \beta = y \\ z = \alpha = x \end{cases}$$

- Según el sistema, z debe ser igual a x, pero por esto no se puede expresar todos los vectores en $\mathbb{R}^3$ usando los los vectores de S.
  - Es decir, solo se van a poder generar los vectores del tipo (x, y, x).
- Por lo tanto, el conjunto S no es un generador para $\mathbb{R}^3$.

▼ 5. Analizar si el siguiente conjunto puede generar el subespacio de las matrices simétricas de $2x2$ $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

> Una matriz simétrica es aquella donde la diagonal se mantiene tanto en la matriz original como en la matriz transpuesta (solo se reemplazan las filas con las columnas).

Hay que ver si se puede escribir a cualquier matriz simétrica 2×2 como combinación lineal de las matrices de S.

- Sean unos escalares α, β y $\gamma \in K$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = v = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

- Nos queda un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha = a \to a = \alpha \\ \beta = b \to b = \beta \\ \gamma = c \to c = \gamma \end{cases}$$

- Podemos ver que cualquier matriz simétrica 2×2 se puede expresar como combinación lineal de las matrices de S, por lo tanto es un generador de las matrices simétricas 2×2.

▼ 6. Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1,0,1);(1,1,0)\}$

Forma de un vector genérico de ese subespacio:

- Sean unos escalares $\alpha, \beta \in K$:

$$(x, y, z) = v = \alpha \cdot (1,0,1) + \beta \cdot (1,1,0) = (\alpha, 0, \alpha) + (\beta, \beta, 0) = (\alpha + \beta, \beta, \alpha)$$

- Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$$

- Igual que en el **ejemplo 1.11**, $x = y + z$
  - La primera ecuación es la suma de las otras.
- Entonces, la forma de los vectores del subespacio es $(z + y, y, z)$

El subespacio generado por los vectores es el conjunto de los vectores $\mathbb{R}^3$ tales que:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + z\}$$

▼ 7. Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1,1,1);(1,-1,0)\}$

Forma de un vector genérico de ese subespacio:

- Sean unos escalares $\alpha, \beta \in K$:

$$(x, y, z) = v = \alpha \cdot (1,1,1) + \beta \cdot (1,-1,0) = (\alpha, \alpha, \alpha) + (\beta, -\beta, 0) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha)$$

- Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = \alpha \end{cases}$$

- De la tercera ecuación:

$$z = \alpha \to \alpha = z$$

- De la primera ecuación:

$$x = z + \beta \to \beta = x - z$$

- De la segunda ecuación:

$$y = z - \beta \to y = z - (x - z) = 2z - x$$

- Entonces, el subespacio generado por los vectores es el conjunto de vectores $\mathbb{R}^3$ tales que:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z - x\}$$

▼ 8. Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

Dato: Si el conjunto tiene más vectores, es decir, más dimensión que el espacio vectorial, entonces hay una dependencia lineal.

- Esto sale del **teorema 1.20.** que se puede usar en el parcial. Yo no lo use porque soy un dobolu.

> Si n es la dimensión del espacio vectorial (si fuera $\mathbb{R}^2$ sería 2, si fuera $\mathbb{R}^3$ 3, etc.) y m la dimensión de mi conjunto:
> Si
> $m > n \to$ DEPENDENCIA
> Si
> $m = n \to$ PUEDE SER INDEPENDIENTE (hacer la cuenta)
> Si
> $m < n \to$ NO PUEDE GENERAR A TODOS LOS VECTORES

(a) $S = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)\}$

Para ver si los vectores de S son linealmente independientes se igualan como combinación lineal con el vector nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in K$:

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) + \alpha_4(1,2,3) = 0_v$$
$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) + (\alpha_4, 2\alpha_4, 3\alpha_4) = 0_v$$
$$(\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_3 + 3\alpha_4) = 0_v$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \to \alpha_1 = -\alpha_4 \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \to \alpha_2 = -2\alpha_4 \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \to \alpha_3 = -3\alpha_4 \end{cases}$$

- Se puede ver que los escalares están relacionados, se puede encontrar combinaciones lineales de los vectores que den como resultado al vector nulo sin que todos los coeficientes sean cero. Por lo tanto, existe una dependencia lineal entre los vectores del conjunto S.

(b) $S = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$

Para ver si los vectores de S son linealmente independientes se igualan como combinación lineal con el vector nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$:

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = 0_v$$
$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = 0_v$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0_v$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

- Se puede ver que los escalares son todos nulos, es decir, necesariamente los escalares son 0 en la combinación lineal para obtener el vector nulo. Por lo tanto, existe una independencia lineal entre los vectores del conjunto S.

(c) $S = \{(1,0); (0,1); (2,3)\}$

Para ver si los vectores de S son linealmente independientes se igualan como combinación lineal con el vector nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$:

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) + \alpha_3(2,3) = 0_v$$
$$(\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3) = 0_v$$
$$(\alpha_1 + 2\alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3) = 0_v$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \to \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \to \alpha_2 = -3\alpha_3 \end{cases}$$

- Se puede ver que los escalares están relacionados, se puede encontrar combinaciones lineales de los vectores que den como resultado al vector nulo sin que todos los coeficientes sean cero. Por lo tanto, existe una dependencia lineal entre los vectores del conjunto S.

(d) $S = \{(1,-3); (1,-1)\}$

Para ver si los vectores de S son linealmente independientes se igualan como combinación lineal con el vector nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in K$:

$$\alpha_1(1,-3) + \alpha_2(1,-1) = 0_v$$
$$(\alpha_1, -3\alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2) = 0_v$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2, -3\alpha_1 - \alpha_2) = 0_v$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = -\alpha_2 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \to -3(-\alpha_2) - \alpha_2 = 0 \to 3\alpha_2 + \alpha_2 = 0 \to 2\alpha_2 = 0 \to \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

- ~~Se puede ver que los escalares están relacionados, es decir, hay combinaciones lineales de los vectores que den como resultado al vector nulo sin que todos los coeficientes sean cero. Por lo tanto, existe una dependencia lineal entre los vectores del conjunto S.~~
- Se puede ver que los escalares son todos nulos, es decir, necesariamente los escalares son 0 en la combinación lineal para obtener el vector nulo. Por lo tanto, existe una independencia lineal entre los vectores del conjunto S.

(e) $S = \{(0,2,-1); (1,7,1); (1,3,-1); (0,0,0)\}$

Para ver si los vectores de S son linealmente independientes se igualan como combinación lineal con el vector nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in K$:

$$\alpha_1(0,2,-a) + \alpha_2(1,7,1) + \alpha_3(1,3,-1) + \alpha_4(0,0,0) = 0_v$$
$$(0, 2\alpha_1, -\alpha_1) + (\alpha_2, 7\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, 3\alpha_3, -\alpha_3) + (0,0,0) = 0_v$$
$$(\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0_v$$

- Igualando a cero cada componente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \to \alpha_2 = -\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \to \alpha_1 = \frac{-7\alpha_2 - 3\alpha_2}{2} \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \to \ \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

- Se puede ver que los escalares están relacionados entre sí, es decir, hay combinaciones lineales de los vectores que dan como resultado al vector nulo sin que todos los coeficientes sean cero. Por lo tanto, existe una dependencia lineal entre los vectores del conjunto S.
- Ver inciso 9.

(f) $S = \{(4,1,0,0); (-3,0,1,0); (1,0,0,1)\}$

Para ver si los vectores de S son linealmente independientes se igualan como combinaciones lineales con el vector nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$:

$$\alpha_1(4,1,0,0) + \alpha_2(-3,0,1,0) + \alpha_3(1,0,0,1) = 0_v$$
$$(4\alpha_1, \alpha_1, 0, 0) + (-3\alpha_2, 0, \alpha_2, 0) + (\alpha_3, 0, 0, \alpha_3) = 0_v$$
$$(4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0_v$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

- Se puede ver que los escalares son nulos, es decir, necesariamente los coeficientes son 0 en la combinación lineal para obtener el vector nulo. Por lo tanto, hay independencia lineal en los vectores del conjunto S.

(g) $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

Para ver si los "vectores" de S son linealmente independientes se igualan como combinaciones lineales con el "vector" nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in K$:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_v$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = 0_v$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = 0_v$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \to \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

- De las dos primeras ecuaciones se obtiene que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$, entonces la tercera se cumple.
- Se puede ver que los escalares son nulos, es decir, necesariamente los coeficientes son 0 en la combinación lineal para obtener el "vector" nulo. Por lo tanto hay independencia lineal en los "vectores" del conjunto S.

(h) $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

Para ver si los "vectores" de S son linealmente independientes se igualan como combinaciones lineales con el "vector" nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_v$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = 0_v$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix} = 0_v$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \to \alpha_2 = -\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \to \alpha_3 = -\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

- Se puede ver que los escalares son nulos, es decir, necesariamente los coeficientes son 0 en la combinación lineal para obtener el "vector" nulo. Por lo tanto hay independencia lineal en los "vectores" del conjunto S.

▼ 9. Analizar si un conjunto de vectores que contiene al vector nulo puede ser linealmente independiente. Justificar.

Un conjunto de vectores es linealmente independiente si la única combinación lineal que da como resultado el vector nulo es aquella donde todos sus escalares son cero.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0_v$$
$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n = 0$$

- Si el conjunto contiene al vector nulo $v_k = 0_v$, entonces cualquier escalar satisface que:

$$a_k v_k = 0$$

- Pero, esto no significa que ese escalar a_k sea igual a cero, ya que podría no serlo e igualmente dar 0 (lo que no respeta la definición de independencia lineal).

Por lo tanto, cualquier conjunto de vectores que incluya al vector nulo es linealmente dependiente, ya que el vector nulo no ayuda a que se cumpla la independencia lineal.

▼ 10. Si el conjunto de vectores $M = \{u, v, w\}$ de V es linealmente independiente, mostrar que el conjunto $\{u, u + 2v, u + 2v + 3w\}$ es linealmente independiente

> Ojo, no dice qué dimensión tiene.
> En estos ejercicios, si igualamos la combinación a (0,0,0)
> está mal. Se tiene que igualar a 0_v ya que se desconoce la dimensión.
> Lo mismo en el eventual sistema de ecuación, cada componente se iguala a 0 (es algo que se hace siempre en ejercicios de LI, así que nevermind).

Para ver si los vectores del segundo conjunto son linealmente independientes, igualamos su combinación lineal con el vector nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$:

$$\alpha_1 u + \alpha_2(u + 2v) + \alpha_3(u + 2v + 3w) = 0_v$$
$$\alpha_1 u + \alpha_2 u + 2\alpha_2 v + \alpha_3 u + 2\alpha_3 v + 3\alpha_3 w = 0_v$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u + (2\alpha_2 + 2\alpha_3)v + 3\alpha_3 w = 0_v$$

- Sabiendo que los vectores u, v, w son linealmente independientes (es decir, sus coeficientes son cero cuando se igualan al vector nulo), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \to \alpha_1 + 0 + 0 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \to \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \to \alpha_2 + 0 = 0 \\ 3\alpha_3 = 0 \to \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

- Se puede ver que los escalares son nulos, es decir, necesariamente los coeficientes son cero en la combinación lineal para obtener al vector nulo. Por lo tanto, el conjunto dado es linealmente independiente (sabiendo que los vectores de M también lo son).

▼ 11. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores pueden ser base de $\mathbb{R}^2$.

Los conjuntos deben tener 2 vectores, por lo tanto en el (b) se puede plantear que no puede ser base por tener dimensión 3 y no dimensión 2.

- Se puede demostrar que son linealmente independientes, o ...
  - Según Guille la más fácil.
- ... demostrar que generan cualquier vector.

(a) $\{(2, -1); (1, 3)\}$

Para ver si los vectores son base de $\mathbb{R}^2$, se prueba que los vectores son linealmente independientes haciendo la combinación lineal con el vector nulo:

- Sean unos coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$:

$$\alpha_1(2, -1) + \alpha_2(1, 3) = 0_v$$
$$(2\alpha_1, -\alpha_1) + (\alpha_2, 3\alpha_2) = 0_v$$
$$(2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + 3\alpha_2) = 0_v$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

- Primera ecuación:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \to \alpha_2 = -2\alpha_1$$

- Segunda ecuación reemplazando $\alpha_1 = -\alpha_2$:

$$-\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \to -\alpha_1 + 3(-2\alpha_1) = 0 \to -\alpha_1 - 6\alpha_1 = 0 \to -7\alpha_1 = 0 \to \alpha_1 = 0$$

- Volviendo a la primera ecuación:

$$\alpha_2 = -2\alpha_1 \to \alpha_2 = -2 \cdot 0 \to \alpha_2 = 0$$

- Se puede ver que los escalares son nulos, es decir, necesariamente los coeficientes son cero cuando se plantea la combinación lineal nula. Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes.

Al ser LI, por teorema, son base de $\mathbb{R}^2$.

(b) $\{(2,1);(1,1);(3,2)\}$

Se sabe que la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es 2. El conjunto de vectores planteado tiene dimensión 3.

- Siendo:
  - n ⇒ Dimensión de $\mathbb{R}^2$.
  - m ⇒ Dimensión del conjunto de vectores.
- Como $n = 2 \wedge m = 3 \to m > n$, $\therefore$, por teorema, el conjunto no puede ser base de $\mathbb{R}^2$.

(c) $\{(1,-1);(1,0)\}$

Para ver si los vectores son base de $\mathbb{R}^2$, se prueba que los vectores son linealmente independientes haciendo la combinación lineal e igualándola con el vector nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in K$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(1,-1) + \alpha_2(1,0) = 0_v \\ (\alpha_1, -\alpha_1) + (\alpha_2, 0) = 0_v \\ (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1) = 0_v \end{gathered}$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \to 0 + \alpha_2 = 0 \to \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 = 0 \to \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

- Se puede ver que los escalares son nulos, es decir, necesariamente los coeficientes son cero cuando se plantea la combinación lineal nula. Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes.

Al ser LI, por teorema, son base de $\mathbb{R}^2$.

(d) $\{(1,2);(2,4)\}$

Para ver si los vectores son base de $\mathbb{R}^2$, se prueba que los vectores son linealmente independientes haciendo la combinación lineal e igualándola con el vector nulo:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in K$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,4) = 0_v \\ (\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, 4\alpha_2) = 0_v \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2) = 0_v \end{gathered}$$

- Igualando cada componente a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

- Primera ecuación:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = -2\alpha_2$$

- Segunda ecuación (reemplazando $\alpha_1 = -\alpha_2$) :

$$2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \to 2(-2\alpha_2) + 4\alpha_2 = 0 \to -4\alpha_2 + 4\alpha_2 = 0$$

- La segunda ecuación se cumple para cualquier valor de α_2, por lo tanto, los vectores no son linealmente independientes y no son base de $\mathbb{R}^2$.

▼ 12. Dar las coordenadas de $v = (1,2)$ en los conjuntos que en el ejercicio anterior resultaron ser bases

El vector $(1,2)$, a través de la combinación lineal de la base canónica de $\mathbb{R}^2$, se representa como:

$$1(1,0) + 2(0,1) = (1,0) + (0,2) = (1,2)$$

(a):

Se plantea una combinación lineal tomando en cuenta los coeficientes obtenidos con la base canónica:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in K$

$$\begin{gathered}(1,2) = \alpha_1(2,-1) + \alpha_2(1,3) \\ (1,2) = (2\alpha_1, -\alpha_1) + (\alpha_2, 3\alpha_2) \\ (1,2) = (2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + 3\alpha_2)\end{gathered}$$

- Igualando cada componente con los escalares obtenidos:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \end{cases}$$

- En la primera ecuación:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \to \alpha_2 = 1 - 2\alpha_1$$

- En la segunda ecuación (reemplazando $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$):

$$-\alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \to -\alpha_1 + 3(1 - 2\alpha_1) = 2 \to -\alpha_1 + 3 - 6\alpha_1 = 2 \to -7\alpha_1 = -1 \to \alpha_1 = \frac{1}{7}$$

- Sustituyendo $\alpha_1 = \frac{1}{7}$ en la primera ecuación:

$$\alpha_2 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{7} \to \alpha_2 = 1 - \frac{2}{7} \to \alpha_2 = \frac{5}{7}$$

- Las coordenadas de v en esta base es $(\frac{1}{7}, \frac{5}{7})$.

(c):

Se plantea la combinación lineal tomando en cuenta los coeficientes obtenidos con la base canónica:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in K$:

$$\begin{gathered}(1,2) = \alpha_1(1,-1) + \alpha_2(1,0) \\ (1,2) = (\alpha_1, -\alpha_1) + (\alpha_2, 0) \\ (1,2) = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1)\end{gathered}$$

- Igualando cada componente con los escalares obtenidos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\alpha_2 = 2 \end{cases}$$

- De la segunda ecuación:

$$-\alpha_2 = 2 \to \alpha_2 = -2$$

- Sustituyendo $\alpha_2 = -2$ en la primera ecuación:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \to \alpha_1 - 2 = 1 \to \alpha_1 = 3$$

- Las coordenadas de v en esta base es $(3, -2)$.

▼ 13. Hallar una base para cada conjunto del ejercicio 3 que sea un subespacios

(a) $S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

Para este subconjunto, la coordenada y esta fija ($y = 0$).

- A través de la base canónica podemos reescribir cualquier vector de S:

$$(x, 0) = x(1, 0)$$

- La base es $(1, 0)$ ya que es el único vector necesario para generar todos los elementos de S.

(c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$

Tenemos que despejarle una de las variables, sería:

$$\begin{cases} x = -y = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

- Con alpha real
- Entonces esto sería

$$(-\alpha, \alpha) = \alpha(-1, 1)$$

- La base es:

$$B_s = \{(-1, 1)\}$$

(e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y\}$

CONSULTAR

Se puede representar a los vectores de S como la siguiente combinación lineal

$$(x, y, x - y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1) = (x, 0, x) + (0, y, -y) = (x, y, x - y)$$

Ahora, hay que ver si esos vectores son linealmente independientes planteando la combinación lineal e igualándola con el vector nulo.

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in K$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(0, 1, -1) = 0_v \\ (\alpha_1, 0, \alpha_1) + (0, \alpha_2, -\alpha_2) = 0_v \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) = 0_v \end{gathered}$$

- Igualando a cero cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \rightarrow 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

- Se puede ver que los coeficientes son necesariamente nulos cuando se plantea la igualdad entre la combinación lineal de los vectores y el vector nulo, por lo tanto los vectores son linealmente independientes.

Por lo tanto, la base para el conjunto S es $\{(1, 0, 1); (0, 1, -1)\}$

(g) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - w = 0, z + 3y = 0\}$

Para la definición de S se pueden despejar:

$$\begin{cases} x + y - w = 0 \to x = w - y \\ z + 3y = 0 \to z = -3y \end{cases}$$

- Las variables y y w quedan libres. Entonces un vector de S tiene la forma:

$$(x, y, z, w) = (w - y, y, -3y, w)$$

- Planteando una combinación lineal, esto se puede representar como:

$$(x, y, z, w) = (w - y, y, -3y, w) = w(1, 0, 0, 1) + y(-1, 1, -3, 0)$$

Hay que ver si esos vectores son linealmente independientes planteando la combinación lineal e igualándola con el vector nulo.

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in K$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(1, 0, 0, 1) + \alpha_2(-1, 1, -3, 0) = 0_v \\ (\alpha_1, 0, 0, \alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, -3\alpha_2, 0) = 0_v \\ (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, -3\alpha_2, \alpha_1) = 0_v \end{gathered}$$

- Igualando cada componente a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \to 0 + 0 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_2 = 0 \to -3 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

- Se puede ver que los coeficientes son necesariamente nulos cuando se plantea la igualdad entre la combinación lineal de los vectores y el vector nulo, por lo tanto los vectores son linealmente independientes.

Por lo tanto, la base para el conjunto S es $\{(1, 0, 0, 1); (-1, 1, -3, 0)\}$

(h) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} \right\} : a, b, c \in \mathbb{R}$

Se puede representar a las matrices de S a través de la siguiente combinación lineal:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que ver si esas matrices son linealmente independientes planteando la combinación lineal e igualándola con la matriz nula:

- Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$:

$$\begin{gathered} \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_v \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = 0_v \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} = 0_v \end{gathered}$$

- Igualando cada componente a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

- Se puede ver que los coeficientes necesariamente son cero cuando se plantea la igualdad entre la combinación lineal de las matrices y la matriz nula, por lo tanto las matrices son linealmente independientes.

Por lo tanto, la base para el conjunto S es $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

▼ 14. Analizar si las siguiente aplicaciones entre espacios vectoriales son transformaciones lineales.

Una TL debe cumplir:

1. $V_1 \in \mathbb{R}^2, V_2 \in \mathbb{R}^2 \rightarrow T(V_1 + V_2) = T(V_1) + T(V_2)$
2. $\alpha \in \mathbb{R}, V_1 \in \mathbb{R}^2 \rightarrow T(\alpha \cdot V_1) = \alpha \cdot T(V_1)$

Básicamente hay que probar esas dos propiedades en cada ejercicio :)

(a) $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$

1. Sean unos vectores de $\mathbb{R}^2$ $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$:
   - $L(v_1 + v_2)$:
   $$L(v_1 + v_2) = L(x_1 + x_1, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$$
   - $L(v_1) + L(v_2)$:
   $$L(v_1) + L(v_2) = L(x_1, y_1) + L(x_2, y_2) = (x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + y$$
   - Se puede ver que se cumple la primera propiedad, es decir $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
2. Sea un escalar $\alpha \in K$ y un vector $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:
   - $L(\alpha \cdot v)$:
   $$L(\alpha \cdot v) = L(\alpha \cdot (x, y)) = (\alpha x, \alpha y, \alpha(x + y)) = (\alpha x, \alpha y, \alpha x + \alpha y)$$
   - $\alpha \cdot L(v)$
   $$\alpha \cdot L(v) = \alpha \cdot (x, y, x + y) = (\alpha x, \alpha y, \alpha(x + y)) = (\alpha x, \alpha y, \alpha x + \alpha y)$$
   - Se puede ver que se cumple la segunda propiedad, es decir $L(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot L(v)$.

Como la aplicación entre los espacios vectoriales satisface las 2 condiciones, es una transformación lineal.

(b) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (x + z, y + z)$

1. Sean unos vectores en $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$:
   - $L(v_1 + v_2)$:
   $$L(v_1 + v_2) = L(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2 + z_1 + z_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$$
   - $L(v_1) + L(v_2)$:
   $$L(v_1) + L(v_2) = L(x_1, y_1, z_1) + L(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + z_1, y_1 + z_1) + (x_2 + z_2, y_2 + z_2) = (x_1 + z_1 + x_2$$

- Se puede ver que se cumple la primera propiedad, es decir $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$

2. Sea un escalar $\alpha \in K$ y un vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
   - $L(\alpha \cdot v)$:

$$L(\alpha \cdot v) = L(\alpha \cdot (x, y, z)) = (\alpha(x + z), \alpha(y + z)) = (\alpha x + \alpha z, \alpha y + \alpha z)$$

   - $\alpha \cdot L(v)$:

$$\alpha \cdot L(v) = \alpha \cdot L(x, y, z) = \alpha \cdot (x + z, y + z) = (\alpha(x + z), \alpha(y + z)) = (\alpha x + \alpha z, \alpha y + \alpha z)$$

   - Se puede ver que se cumple la segunda propiedad, es decir $L(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot L(v)$

Como la aplicación entre los espacios vectoriales satisface las 2 condiciones, es una transformación lineal.

(c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y, z) = (x - 2, y + 3x, 1)$

1. Sean unos vectores de $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$:
   - $L(v_1 + v_2)$:

$$L(v_1 + v_2) = L(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2 - 2, y_1 + y_2 + 3(x_1 + x_2), 1) = (x_1 + x_2 - 2, y_1$$

   - $L(v_1) + L(v_2)$:

$$L(v_1) + L(v_2) = L(x_1, y_1, z_1) + L(x_2, y_2, z_2) = (x_1 - 2, y_1 + 3x_1, 1) + (x_2 - 2, y_2 + 3x_2, 1) = (x_1 + x_2$$

   - Se puede ver que no se cumple la propiedad debido a que $L(v_1 + v_2) \neq L(v_1) + L(v_2)$

Como la aplicación entre los espacios vectoriales no satisface una de las 2 condiciones, no es una transformación lineal.

(d) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$

1. Sean unas matrices de $\mathbb{R}^{2x2}$ $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$:
   - $L(A + B)$:

$$A + B = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$
$$L(A + B) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & -(x_1 + x_2) \\ y_1 + y_2 & -(w_1 + w_2) \end{pmatrix}$$

   - $L(A) + L(B)$:

$$L(A) = \begin{pmatrix} z_1 & -x_1 \\ y_1 & -w_1 \end{pmatrix} \quad L(B) = \begin{pmatrix} z_2 & -x_2 \\ y_2 & -w_2 \end{pmatrix}$$
$$L(A) + L(B) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & -x_1 - x_2 \\ y_1 + y_2 & -w_1 - w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & -(x_1 + x_2) \\ y_1 + y_2 & -(w_1 + w_2) \end{pmatrix}$$

   - Se puede ver que se cumple la primera propiedad, es decir, $L(A + B) = L(A) + L(B)$.

2. Sea un escalar $\alpha \in K$ y una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$:
   - $\alpha \cdot L(A)$:

$$\alpha \cdot L(A) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z & -\alpha x \\ \alpha y & -\alpha w \end{pmatrix}$$

   - $L(\alpha \cdot A)$:

$$L(\alpha \cdot A) = L\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z & -\alpha x \\ \alpha y & -\alpha w \end{pmatrix}$$

- Se puede ver que se cumple la segunda propiedad, es decir, $\alpha \cdot L(A) = L(\alpha \cdot A)$.

Como la aplicación entre los dos espacios vectoriales satisface ambas condiciones, es una transformación lineal.

(e) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ y & 1 \end{pmatrix}$

1. Sean unas matrices de $\mathbb{R}^{2x2}$ $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$:

- $L(A + B)$

$$A + B = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$
$$L(A + B) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(x_1 + x_2) \\ y_1 y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $L(A) + L(B)$

$$L(A) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \\ y_1 & 1 \end{pmatrix} \quad L(B) = \begin{pmatrix} x_2 & -x_2 \\ y_2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$L(A) + L(B) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(x_1 + x_2) \\ y_1 + y_2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Se puede ver que no se cumple la primera propiedad, es decir, $L(A + B) \neq L(A) + L(B)$.

Como la aplicación entre los dos espacios vectoriales no satisface una de las dos condiciones (la de la suma) no es una transformación lineal.

(f) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x + z, y + w)$

1. Sean unas matrices $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^{2x2}$:

- $L(A + B)$:

$$A + B = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$
$$L(A + B) = ((x_1 + x_2 + z_1 + z_2), (y_1 + y_2 + w_1 + w_2))$$

- $L(A) + L(B)$:

$$L(A) = (x_1 + z_1, y_1 + w_1) \quad L(B) = (x_2 + z_2, y_2 + w_2)$$
$$L(A) + L(B) = ((x_1 + z_1 + x_2 + z_2), (y_1 + w_1 + y_2 + w_2)) = ((x_1 + x_2 + z_1 + z_2), (y_1 + y_2 + w_1 + w_2))$$

- Se puede ver que se cumple la primera propiedad, es decir, $L(A + B) = L(A) + L(B)$

2. Sea un escalar $\alpha \in K$ y una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

- $\alpha \cdot L(A)$:

$$\alpha \cdot L(A) = \alpha \cdot (x + z, y + w) = (\alpha(x + z), \alpha(y + w))$$

- $L(\alpha \cdot A)$:

$$L(\alpha \cdot A) = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha w \end{pmatrix} = ((\alpha x + \alpha z), (\alpha y + \alpha w)) = (\alpha(x + z), \alpha(y + w))$$

- Se puede ver que se cumple la segunda propiedad, es decir, $\alpha \cdot L(A) = L(\alpha \cdot A)$

Como la aplicación entre los dos espacios vectoriales satisface ambas propiedades, es una transformación lineal.

(g) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (0, 0)$

1. Sean unos vectores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2(x_2, y_2, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$:
   - $L(v_1 + v_2)$:

$$L(v_1 + v_2) = L(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (0, 0)$$

   - $L(v_1) + L(v_2)$:

$$L(v_1) + L(v_2) = (0, 0) + (0, 0) = (0, 0)$$

   - Se puede ver que se cumple la primera propiedad, es decir, $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$.
2. Sea un escalar $\alpha \in K$ y un vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
   - $\alpha \cdot L(v_1)$:

$$\alpha \cdot L(v_1) = \alpha \cdot (0, 0) = (\alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0) = (0, 0)$$

   - $L(\alpha \cdot v_1)$:

$$L(\alpha \cdot v_1) = L(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (0, 0)$$

   - Se puede ver que se cumple la segunda propiedad, es decir, $\alpha \cdot L(v_1) = L(\alpha \cdot v_1)$.

Como la aplicación entre ambos espacios vectoriales satisface ambas propiedades, es una transformación lineal.

▼ 15. Hallar el núcleo e imagen de cada una de las transformaciones lineales del punto anterior y las dimensiones de cada uno de esos subespacios.

Sea una transformación lineal $L : V \to W$ cualquiera (siendo V y W espacios vectoriales):

1. El núcleo de una TI son los vectores de V que son transformados al vector nulo de W, o sea, al vector 0_W

$$Nu(L) = \{v \in V : L(v) = 0_w\}$$

2. La imagen de una TI son los vectores de W que son imagen de vectores de V (a través de la TI L)

$$Im(L) = \{w \in W : \exists v \in V \quad w = L(v)\}$$

(a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$

CONSULTAR

Núcleo de L:

- La forma general del núcleo de la L es:

$$Nu(L) = \{v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

- Operando sobre esa igualdad:

$$L(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$L(x, y) = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$(x, y, x + y) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

- Igualando cada componente a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

- Se puede ver que $x = 0$ y $y = 0$, por lo tanto:

$$Nu(L) = \{(0, 0)\}$$

- Al tener solo al vector nulo, la dimensión del núcleo es cero.

Imagen de L:

- La forma general de la imagen de L es:

$$Im(L) = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, x + y) = L(x, y)\}$$

- Sea un vector $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 : v_1 = L(x, y) = (x, y, x + y)$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \\ z_1 = x + y \end{cases}$$

- De esto se puede ver que la forma de la imagen es:

$$Im(L) = \{(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 : z_1 = x_1 + y_1\}$$

- Planteando la combinación lineal, se llega a la base de $Im(L)$:

$$(x_1, y_1, x_1 + y_1) = (x_1, 0, x_1) + (0, y_1, y_1) = x_1(1, 0, 1) + y_1(0, 1, 1) \to \{(1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$$

- Como esa base encontrada tiene dos vectores, la dimensión de la imagen es 2.

(b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (x + z, y + z)$

Núcleo de L:

- La forma general del núcleo de L es:

$$Nu(L) = \{v \in \mathbb{R}^3 : L(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

- Operando sobre esa igualdad:

$$\begin{gathered} L(v) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ L(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ (x + z, y + z) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{gathered}$$

- Igualando cada componente a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + z = 0 \to z = -x \\ y + z = 0 \to y - x = 0 \to y = x \end{cases}$$

- De esto, se puede ver que el núcleo de L está dado por:

$$Nu(L) = \{(x, x, -x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$$

- La base del núcleo sería:

$$(x, x, -x) = x(1, 1, -1) \to \{(1, 1, -1)\}$$

  - Como tiene un único vector, su dimensión es 1.

Imagen de L:

- La forma general de la imagen de L es:

$$Im(L) = \{(x+z, y+z) \in \mathbb{R}^2 : (x+z, y+z) = L(x,y,z)\}$$

- Un vector genérico de $Im(L)$ $v_1 = (a,b) : a = x+z \wedge b = y+z$. Entonces, la forma de la imagen es:

$$Im(L) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$$

- Planteando la combinación lineal, se llega a la base de $Im(L)$:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) \to \{(1,0);(0,1)\}$$

- Como esa base encontrada tiene dos vectores, entonces la dimensión de la imagen es 2.

(d) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$

Núcleo del L:

- La forma general del núcleo de L es:

$$Nu(L) = \{M \in \mathbb{R}^{2x2} : L(M) = 0_{\mathbb{R}^{2x2}}\}$$

- Operando sobre esa igualdad:

$$L(M) = 0_{\mathbb{R}^{2x2}}$$
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^{2x2}}$$

- Igualando cada componente a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

- Entonces, la forma del núcleo de L es:

$$Nu(L) = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

- Al tener solo a la matriz nula, el

Imagen de L:

- La forma general de la imagen de L es:

$$Im(L) = \{\begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix} = L(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix})\}$$

- Una matriz genérica de $Im(L)$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a = z; b = -x; c = y; d = -w$. Entonces, la forma de la imagen de L es:

$$Im(L) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}\}$$

- Planteando la combinación lineal se llega a la siguiente base:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

- Como dicha base posee 4 matrices, su dimensión es 4.

(f) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x+z, y+w)$

Núcleo de L:

- La forma general del núcleo de L es:

$$Nu(L) = \{M \in \mathbb{R}^{2x2} : L(M) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

- Operando sobre esa igualdad:

$$L(M) = 0_{\mathbb{R}^2}$$
$$(x+z, y+w) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

- Igualando cada componente a cero se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+z=0 \to x=-z \\ y+w=0 \to y=-w \end{cases}$$

- Entonces, la forma del núcleo de L es:

$$Nu(L) = \{(-z, -w) \in \mathbb{R}^2 : -z, -w \in \mathbb{R}\}$$

- Planteando la combinación lineal, se llega a la siguiente base:

$$(-z, -w) = (-z, 0) + (0, -w) = -z(1,0) + -w(0,1) \to \{(1,0); (0,1)\}$$

- Como esa base del núcleo posee dos vectores, entonces su dimensión es 2.

Imagen de L:

- La forma general de la imagen de L es:

$$Im(L) = \{(x+z, y+w) \in \mathbb{R}^2 : (x+z, y+w) = L(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix})\}$$

- Un vector genérico de $Im(L)$ sería $v = (a, b) : a = x+z \wedge b = y+w$. Entonces la forma de la imagen de L es:

$$Im(L) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$$

- Planteando la combinación lineal se llega a la siguiente base:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1,0) + b(0,1) \to \{(1,0); (0,1)\}$$

- Como esa base de la imagen posee dos vectores, entonces su dimensión es 2.

(g) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (0, 0)$

Núcleo de L:

- La forma general del núcleo de L es:

$$Nu(L) = \{v \in \mathbb{R}^3 : L(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

- Operando sobre esa igualdad:

$$L(v) = 0_{\mathbb{R}^2}$$
$$L((x, y, z)) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

- Como $L(v) = (0, 0)$, siendo que v es cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, entonces el núcleo de L es:

$$Nu(L) = \{\mathbb{R}^3\}$$

- Como $Nu(L) = \mathbb{R}^3$, una base para el núcleo podría ser la base canónica del espacio vectorial, es decir: $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$.
- Como dicha base posee tres vectores, entonces su dimensión es 3.

Imagen de L:

- La forma general de la imagen de L es:

$$Im(L) = \{(a, b) \in R^2 : (a, b) = L(x, y, z)\}$$

- Un vector genérico de $Im(L)$ sería $v = (a, b) : a = 0 \wedge b = 0$. Entonces, la imagen de L es:

$$Im(L) = \{(0, 0)\}$$

- Como solo posee al vector nulo, su dimensión es cero.

▼ 16. Mostrar que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

- Sean unos espacios vectoriales A, B, C cualquieras.
- Sean dos transformaciones lineales L_1 y L_2:
  - $L_1 : A \to B$
  - $L_2 : B \to C$
- Se va a demostrar que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal, es decir:
  - $L : A \to C$, donde $L(v) = L_2(L_1(v))$
    - Siendo v vector de A.
  - Para que L sea una transformación lineal, hay que demostrar las dos propiedades correspondientes.

1. Primera propiedad (suma) $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$:
   - Partiendo de la definición de L (composición de transformaciones lineales):

   $$L(v_1 + v_2) = L_2(L_1(v_1 + v_2))$$

   - Sabiendo que L_1 es una transformación lineal, se cumpla la propiedad aditiva, es decir:

   $$L_1(v_1 + v_2) = L_1(v_1) + L_1(v_2)$$

   - Entonces, aplicando dicha propiedad quedaría como:

   $$L_2(L_1(v_1 + v_2)) = L_2(L_1(v_1) + L_1(v_2))$$

   - Sabiendo que L_2 también es una transformación lineal, por lo que cumple la propiedad aditiva. Aplicando dicha propiedad quedaría como:

   $$L_2(L_1(v_1) + L_1(v_2)) = L_2(L_1(v_1)) + L_2(L_1(v_2))$$

   - Por la definición de L:

   $$L_2(L_1(v_1)) + L_2(L_1(v_2)) = L(v_1) + L(v_2)$$

- Se puede ver que L cumple la primera propiedad, es decir, $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$

2. Segunda propiedad (producto) $L(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot L(v)$:
    - Partiendo de que α es un escalar cualquier del cuerpo K y la definición de L (composición de transformaciones lineales):

$$L(\alpha \cdot v) = L_2(L_1(\alpha \cdot v))$$

    - Sabiendo que L_1 es una transformación lineal, es decir, que cumple la propiedad del producto por escalar:

$$L_1(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot L_1(v)$$

    - Entonces, aplicando dicha propiedad quedaría como:

$$L_2(L_1(\alpha \cdot v)) = L_2(\alpha \cdot L_1(v))$$

    - Sabiendo que L_2 también es una transformación lineal, y por lo tanto también cumple la propiedad del producto por escalar. Aplicando dicha propiedad quedaría como:

$$L_2(\alpha \cdot L_1(v)) = \alpha \cdot L_2(L_1(v))$$

    - Por la definición de L:

$$\alpha \cdot L_2(L_1(v)) = \alpha \cdot L(v)$$

    - Se puede ver que L cumple la segunda propiedad, es decir, $L(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot L(v)$.

Como L satisface ambas condiciones, es una transformación lineal. Y, como es composición de transformaciones lineales, se demostró que la composición de TIs también es TI.

▼ 17.

(a) Es la aplicación identidad una transformación lineal? En caso de serlo hallar núcleo e imagen.

Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo K. La aplicación identidad $I : V \to V$ se define como:

- Para todo $v \in V$:

$$I(v) = v$$

Para ver si la aplicación identidad es una transformación lineal hay que ver si satisface las dos propiedades:

1. Sean unos vectores $v_1, v_2 \in V$:

$$I(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = I(v_1) + I(v_2)$$

    - Se puede ver que se cumple la primera propiedad de la suma interna de vectores, es decir, $I(v_1 + v_2) = I(v_1) + I(v_2)$

2. Sea un vector cualquiera $v \in V$ y un escalar $\alpha \in K$:

$$I(\alpha \cdot v) = \alpha v = \alpha \cdot I(v)$$

    - Se puede ver que se cumple la segunda propiedad del producto externo con escalares, es decir, $I(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot I(v)$

La aplicación identidad satisface ambas condiciones, por lo tanto, es una transformación lineal.

Núcleo de la aplicación identidad:

- Se sabe que el núcleo de una transformación lineal son aquellos vectores del espacio de entrada que se transforman en el vector nulo del espacio de salida.

- La aplicación identidad simplemente retorna el argumento que recibe, por lo tanto, el núcleo de la aplicación identidad es:

$$Nu(I) = \{(0_v)\}$$

Imagen de la aplicación identidad:

- La imagen de una transformación lineal es el conjunto de vectores del espacio vectorial de salida que son imagen de los vectores del espacio vectorial de entrada a través de la transformación.
- En este caso, como siempre se retorna el argumento tal cuál, la imagen de la aplicación identidad sería:

$$Im(I) = \{V\}$$

(b) Es la aplicación nula una transformación lineal? En caso de serlo hallar núcleo e imagen.

Sea un espacio vectorial V y un cuerpo K. La aplicación nula $N : V \to V$ se define como:

- Sea $v \in V$:

$$N(v) = 0_v$$

Para ver si la aplicación nula es una transformación, hay que ver si satisface las dos propiedades:

1. Sean unos vectores $v_1, v_2 \in V$:

$$N(v_1 + v_2) = 0_v + 0_v = N(v_1) + N(v_2)$$

   - Se puede ver que se cumple la primera propiedad de la suma interna de vectores, es decir, $N(v_1 + v_2) = N(v_1) + N(v_2)$.

2. Sea un vector $v \in V$ y $\alpha \in K$:

$$N(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot 0_v = \alpha \cdot N(v)$$

   - Se puede ver que se cumple la segunda propiedad del producto externo por escalares, es decir, $N(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot N(v)$.

La aplicación nula satisface ambas condiciones, por lo tanto, es una transformación lineal.

Núcleo de la aplicación nula:

- Dado cualquier vector de V se sabe que la aplicación nula siempre retorna el vector nulo del espacio, y como el núcleo es el conjunto de vectores del espacio de entrada que se transforman al vector nulo del espacio de salida:

$$Nu(N) = \{V\}$$

Imagen de la aplicación nula:

- Sabiendo que para cualquier vector de V, la aplicación nula siempre retorna el vector nulo y la imagen es el conjunto de vectores del espacio de salida que son imagen de vectores del conjunto de entrada a través de la transformación:

$$Im(N) = \{0_v\}$$

▼ 18. Sean $C = C[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a, b]$ en R y $L : C \to R$ definida por $L(f) = \int_a^b f(x)dx$. Mostrar que L es una transformación lineal.

1. Sean unas funciones continuas $f, g \in C$:

$$L(f+g)=\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=L(f)+L(g)$$

- Se puede ver que se cumple la primera propiedad de la suma interna de funciones continuas, es decir, $L(f+g)=L(f)+L(g)$

2. Sea un escalar $\alpha \in K$ y una función continua $f \in C$:

$$L(\alpha \cdot f)=\int_a^b (\alpha \cdot f(x))dx=\alpha \cdot \int_a^b f(x)dx=\alpha \cdot L(f)$$

- Se puede ver que se cumple la segunda propiedad del producto externo por escalares, es decir, $L(\alpha \cdot f)=\alpha \cdot L(f)$

La aplicación L entre los espacios vectoriales satisface ambas propiedades, por lo tanto, es una transformación lineal.

▼ 19. Sean $C=C[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a,b]$ en R y sea $D:C\to C$ dado por $D(f)=f'$ (esto es, para cada función $f\in C$ el operador Derivación, D, devuelve la derivada f' de f). Mostrar que D es una transformación lineal.

1. Sean unas funciones continuas $f,g \in C$:

$$D(f+g)=(f+g)'=f'+g'=D(f)+D(g)$$

- Se puede ver que se cumple la primera propiedad de la suma interna de funciones continuas, es decir, $D(f+g)=D(f)+D(g)$

2. Sea un escalar $\alpha \in K$ y una función continua $f \in C$:

$$D(\alpha \cdot f)=(\alpha \cdot f)'=\alpha \cdot f'=\alpha \cdot D(f)$$

- Se puede ver que se cumple la segunda propiedad del producto externo por escalares, es decir, $D(\alpha \cdot f)=\alpha \cdot D(f)$

La aplicación D entre los espacios vectoriales satisface ambas condiciones, por lo tanto, es una transformación lineal.

▼ 20. Demostrar que dada cualquier transformación lineal $L: V\to W$ (con V,W espacios vectoriales), el núcleo y la imagen de L forman un subespacio de V y W respectivamente.

Sabiendo que $L:V\to W$ es una transformación lineal:

¿$Nu(L)$ es subespacio de V?

1. Se sabe que el núcleo de una transformación lineal es NO vacía, ya que siempre vale que:

$$L(0_V)=0_W$$

- Al menos el núcleo posee al vector nulo, por lo tanto es no vacío.

2. Sean unos vectores $v_1, v_2 \in Nu(L)$

- Como pertenecen al núcleo, se cumple que:

$$L(v_1) = 0_W \quad \& \quad L(v_2) = 0_W$$
$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W$$

- Como $L(v_1 + v_2) = 0_W$, se cumple que $v_1 + v_2 \in Nu(L)$, es cerrada para la suma de vectores.

3. Sea un vector $v \in Nu(L)$ y un escalar $\alpha \in K$:

$$L(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot L(v) = \alpha \cdot 0_W = 0_W$$

- Como $L(\alpha \cdot v) = 0_W$, se cumple que $\alpha \cdot v \in Nu(L)$, es cerrada para el producto por escalar.

Como el núcleo de L satisface las tres propiedades, es un subespacio de V.

¿$Im(L)$ es subespacio de W?

1. Se sabe que la imagen de una transformación lineal es NO vacía, ya que siempre vale que:

$$0_W = L(0_V)$$

- Al menos posee al vector nulo, por lo tanto es no vacío.

2. Sean unos vectores $w_1, w_2 \in Im(L)$:
   - Sean unos vectores $v_1, v_2 \in V : L(v_1) = w_1 \wedge L(v_2) = w_2$ y sea un vector $v \in V : v = v_1 + v_2$

$$w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2) = L(v)$$

   - Entonces, como $w_1 + w_2 = L(v)$, se cumple que $w_1 + w_2 \in Im(L)$, es cerrada para la suma de vectores.

3. Sea un escalar $\alpha \in K$ y $w \in Im(L)$:
   - Sean un vector $v \in V : w = L(v)$ y $\bar{v} = \alpha \cdot v$ en V.

$$\alpha \cdot w = \alpha \cdot L(v) = L(\alpha \cdot v) = L(\bar{v})$$

   - Como $\alpha \cdot w = L(\bar{v})$, se cumple que $\alpha \cdot w \in Im(L)$, es cerrada para el producto por escalar.

Como la imagen de L satisface las tres propiedades, es un subespacio de W.

▼ 21.

Cuando no se nos da el valor de la aplicación de la transformación sobre los vectores de la base canónica hay dos opciones:

1. Verificar que los vectores dados forman una base (aplicando el teorema de las dimensione y viendo si generan a cualquier vector del espacio o si son LI).
   a. Tomar un vector genérico del espacio vectorial y expresarlo como combinación lineal de los vectores de la base dada.
2. Tomar la base canónica y obtener el valor de la transformación para sus vectores.
   a. En este caso tomamos cada vector de la base, lo igualamos a la combinación lineal (tomando los vectores que nos de el enunciado), armamos el sistema de ecuaciones y resolvemos.
   b. Con el resultado de cada vector, aplicamos la transformación lineal sobre cada vector de la base canónica (de igual forma que en todos los ejercicios pero partiendo de los vectores de la base canónica y no de cualquier vector del espacio vectorial dado).

(a) Hallar $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que: $L(1,0) = (1,-2), L(0,1) = (1,-1)$

Sabiendo los valores que tiene la transformación lineal para la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

- Sea un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se aplica dicha transformación lineal sobre la base canónica (que se representa como combinación lineal del vector).

$L(x,y) = L(x(1,0) + y(0,1)) = xL(1,0) + yL(0,1) = x(1,-2) + y(1,-1) = (x,-2x) + (y,-y) = (x+y,-$

- Se puede ver que $L(x,y) = (x+y, -2x-y)$

(b) Hallar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que: $L(1,0,0) = (1,0), L(0,1,0) = (-1,-6), L(0,0,1) = (0,4)$

Sabiendo los valores que tiene la transformación lineal para la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

- Sea un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se aplica dicha transformación lineal sobre la base canónica (que se representa como combinación lineal del vector).

$L(x,y,z) = L(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = xL(1,0,0) + yL(0,1,0) + zL(0,0,1) = x(1,0) + y(-1,-$

- Se puede ver que $L(x,y,z) = (x-y, 4z-6y)$

(c) Hallar $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que: $L(1,1) = (4,2), L(0,3) = (1,0)$

Se va a ver si $\{(1,1);(0,3)\}$ es base:

- Podemos ver que la cantidad de vectores que tiene es dos, que es la misma dimensión que $\mathbb{R}^2$.
- ¿Es independientemente lineal?
  - Se igualan los vectores como combinación lineal al vector nulo. Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,3) = (0,0)$$
$$(\alpha_1, \alpha_1) + (0, 3\alpha_2) = (0,0)$$
$$(\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2) = (0,0)$$

  - Igualando cada componente a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \to 0 + 3\alpha_2 = 0 \to \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

  - Se puede ver que los coeficientes son nulos, por lo tanto los vectores son linealmente independientes.
- Los vectores son linealmente independientes, esto significa que también van a poder generar a todo vector de $\mathbb{R}^2$, por lo tanto es base.

Sea un vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y unos escalares $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, los expresamos como combinación lineal con los vectores de la base:

$$(x,y) = \beta_1(1,1) + \beta_2(0,3) = (\beta_1, \beta_1) + (0, 3\beta_2) = (\beta_1, \beta_1 + 3\beta_2)$$

- Igualando cada componente se tiene:

$$\begin{cases} x = \beta_1 \to \beta_1 = x \\ y = \beta_1 + 3\beta_2 \to y = x + 3\beta_2 \to \frac{y-x}{3} = \beta_2 \end{cases}$$

- La forma de un vector genérico de $\mathbb{R}^2$ con esa base es $x(1,1) + \frac{y-x}{3}(0,3)$.

Sabiendo los valores que tiene la transformación lineal para los vectores de la base, se aplica dicha transformación lineal sobre un vector genérico de $\mathbb{R}^2$ partiendo de la combinación lineal con los vectores dados:

$$L(x,y) = L(x(1,1) + \frac{y-x}{3}(0,3)) = xL(1,1) + \frac{y-x}{3}L(0,3) = x(4,2) + \frac{y-x}{3}(1,0) = (4x,2x) + (\frac{y-x}{3}, 0$$

- Se puede ver que $L(x,y) = (\frac{11x+y}{3}, 2)$.

(d) Hallar $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sabiendo que: $L(1,1,1) = (1,2,3), L(0,1,0) = (1,-1,0), L(-1,-1,1) = (5,4,3)$

El enunciado no da los valores de la transformación lineal para los vectores de la base canónica. Se va a encontrar el valor dado para cada uno de los vectores de la base, para eso, se expresa cada uno como combinación lineal de los vectores dados:

1. $(1,0,0)$
   - Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

   $$(1,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(-1,-1,1) = (\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1) + (0,\alpha_2,0) + (-\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_3) = (\alpha_1 - \alpha_3$$

   - Igualando cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 1 \to \alpha_1 + \alpha_1 = 1 \to 2\alpha_1 = 1 \to \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \to \frac{1}{2} + \alpha_2 + \frac{1}{2} = 0 \to \alpha_2 + 1 = 0 \to \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \to \alpha_3 = -\alpha_1 \end{cases}$$

   - El valor del vector $(1,0,0)$ expresado como combinación lineal de los vectores dados es $\frac{1}{2}(1,1,1) + -1(0,1,0) - \frac{1}{2}(-1,-1,1)$.
2. $(0,1,0)$
   - Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

   $$(0,1,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(-1,-1,1) = (\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1) + (0,\alpha_2,0) + (-\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_3) = (\alpha_1 -$$

   - Igualando cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \to \alpha_1 + \alpha_1 = 0 \to 2\alpha_1 = 0 \to \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \to 0 + \alpha_2 - 0 = 1 \to \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \to \alpha_3 = -\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

   - El valor del vector $(0,1,0)$ expresado como combinación lineal de los vectores dados es $0(1,1,1) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$.
3. $(0,0,1)$
   - Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

   $$(0,0,1) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(-1,-1,1) = (\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1) + (0,\alpha_2,0) + (-\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_3)$$

   - Igualando cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \to \alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \to \frac{1}{2} + \alpha_2 - \frac{1}{2} = 0 \to \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \to \alpha_3 + \alpha_3 = 1 \to 2\alpha_3 = 1 \to \alpha_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   - El valor del vector $(0,0,1)$ expresado como combinación lineal de los vectores dados es $\frac{1}{2}(1,1,1) + 0(0,1,0) + \frac{1}{2}(-1,-1,1)$

Ahora se va a obtener el valor de la transformación lineal de cada vector de la base canónica a través de la combinación lineal y la transformación lineal de los vectores dados (usando las combinaciones obtenidas):

1. $L(1,0,0)$

   $$L(1,0,0) = \frac{1}{2}L(1,1,1) + -1L(0,1,0) - \frac{1}{2}L(-1,-1,1) = \frac{1}{2}(1,2,3) - (1,-1,0) - \frac{1}{2}(5,4,3) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$$

2. $L(0,1,0)$

$$L(0,1,0) = 0L(1,1,1) + 1L(0,1,0) + 0L(0,0,1) = 0(1,2,3) + 1(1,-1,0) + 0(5,4,3) = (0,0,0) + (1,-1$$

3. $L(0,0,1)$

$$L(0,0,1) = \frac{1}{2}L(1,1,1) + 0L(0,1,0) + \frac{1}{2}L(-1,-1,1) = \frac{1}{2}(1,2,3) + 0(1,-1,0) + \frac{1}{2}(5,4,3) = (\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}) +$$

Sabiendo los valores de la transformación lineal para los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, sea un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se aplica la transformación lineal sobre dicho vector aplicando la combinación lineal y la transformación lineal sobre los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$L(x,y,z) = L(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = xL(1,0,0) + yL(0,1,0) + zL(0,0,1) = x(-3,0,0) + y(1,$$

- Se puede ver que $L(x,y,z) = (3z - x + y, 3z - y, 3z)$

▼ 22. Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

Hay que ver como actúa la transformación lineal sobre los vectores de la base canónica del conjunto de llegada y expresar los resultados como combinaciones lineales con la base canónica del conjunto de salida.

- La matriz se armaría con los coeficientes de esa combinación lineal, siendo cada columna los coordenadas/coeficientes para la combinación lineal de un vector resultante de la transformación.

(a) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x,y,z) = (z - y, z - x)$ con las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Resultado de la aplicación de la transformación lineal L sobre los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{gathered} L(1,0,0) = (0,-1) \\ L(0,1,0) = (-1,0) \\ L(0,0,1) = (1,1) \end{gathered}$$

- Escribiendo los resultados en la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{gathered} (0,1) = 0(1,0) - 1(0,1) \\ (-1,0) = -1(1,0) + 0(0,1) \\ (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) \end{gathered}$$

- Con las coordenadas se puede formar la matriz asociada a la transformación lineal:

$$[L]B_{\mathbb{R}^3}B_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x,y,z) = (3x + z, y - x, 2z + 2y)$ con la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Resultado de la aplicación de la transformación lineal L sobre los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{gathered} L(1,0,0) = (3,-1,0) \\ L(0,1,0) = (0,1,2) \\ L(0,0,1) = (1,0,2) \end{gathered}$$

- Escribiendo cada resultado en la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{gathered} (3,-1,0) = 3(1,0,0) - 1(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ (0,1,2) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1) \\ (1,0,2) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 2(0,0,1) \end{gathered}$$

- Con las coordenadas se puede formar la matriz asociada a la transformación lineal:

$$[L]B_{\mathbb{R}^3}B_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x+y, z+w)$ con B la base canónica de las matrices de R^{2x2} y $B_1 = (1,1); (-1,5)$ una base de $\mathbb{R}^2$

Resultado de la aplicación de L sobre los vectores de la base canónica de R^{2x2}

$$L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0)$$
$$L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0)$$
$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1)$$
$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,1)$$

- Escribiendo cada resultado en la base B_1:
  1. Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

     $$(1,0) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(-1,5) = (\alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, 5\alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 5\alpha_2)$$

     - Igualando cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

     $$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \to -5\alpha_2 - \alpha_2 = 1 \to -6\alpha_2 = 1 \to \alpha_2 = -\frac{1}{6} \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = -5\alpha_2 \to \alpha_1 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

  2. Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

     $$(1,0) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(-1,5) = (\alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, 5\alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 5\alpha_2)$$

     - Igualando cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

     $$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \to -5\alpha_2 - \alpha_2 = 1 \to -6\alpha_2 = 1 \to \alpha_2 = -\frac{1}{6} \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = -5\alpha_2 \to \alpha_1 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

  3. Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

     $$(0,1) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(-1,5) = (\alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, 5\alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 5\alpha_2)$$

     - Igualando cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

     $$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_1 = \frac{1}{6} \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 = 1 \to \alpha_2 + 5\alpha_2 = 1 \to 6\alpha_2 = 1 \to \alpha_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

  4. Sean unos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

     $$(0,1) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(-1,5) = (\alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, 5\alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 5\alpha_2)$$

     - Igualando cada componente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

     $$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_1 = \frac{1}{6} \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 = 1 \to \alpha_2 + 5\alpha_2 = 1 \to 6\alpha_2 = 1 \to \alpha_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

- Con las coordenadas se puede formar la matriz asociada a la transformación lineal:

$$[L]B_{\mathbb{R}^{2x2}}B_I = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$