Contents

Théorie des schémas à un pas

GAYE Alioune et KALY Bauvary
Encadrant:
PUJO-MENJOUET Laurent

3 mai 2021

1 Théorie

Nous considérons le problème de Cauchy d'ordre p suivant :

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} x'(t) = & f(t,x) \\ x(t_0) = & x_0 \end{cases}$$

Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, avec $T \in R_+^*$ et T fini, pour éviter de faire des simulations à un temps infini.
x :$t \in [t_0, t_0 + T] \to R^d$,avec $p \in N^*$
f :$t \in [t_0, t_0 + T] * R^d \to R^d$,avec f assez réguliére de classe C^p,globalement lipschitzienne par rapport à sa variable x.

1.1 Etude de la consistance d'ordre au moins p de schéma explicite à un pas

Trouver la solution explicite d'un système différentiel de Cauchy (C) n'étant pas toujours possible, on doit pouvoir trouver des méthodes de résolution numérique qui nous donnent de bonnes approximations numériques. La méthode générale consiste à découper l'intervalle sur lequel on souhaite résoudre le système de Cauchy, en découpant l'intervalle en plusieurs pas : on appelle ce procédé la discrétisation de l'intervalle.
Au lieu d'avoir la solution en toutes les valeurs de l'intervalle, on aura la solution sur certains points de l'intervalle. Cette discrétisassions nous donne ensuite des valeurs numériques par l'intermédiaire d'un schéma, défini par une fonction. On dit qu'un schéma est à un pas si pour trouver la valeur actuelle, on ne s'intéresse qu'à la valeur prise au point de discrétisation précédent ; on ne s'intéressera ici qu'à des schémas à un pas.

De plus, on considérera le pas entre deux points uniforme, i.e prenant toujours la même valeur. On supposera toujours que la fonction f définie dans le problème de Cauchy vérifie les conditions de Cauchy-Lipschitz.

Soit le schéma explicite à un pas approchant la solution du système $(\mathcal{C})$:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h * \phi(t_n, x_n, h), \text{ pour n=0,...,N-1} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ϕ dépend du schéma choisi.
$[t_0, t_0 + T]$ est discrétisé de longueur T de la facons suivante :
$t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N = t_0 + T$ où N le nombre de subdivision de l'espace de temps.
On définie l'erreur de consistance à l'instant t_n du schéma (S),la quantité :

$$\epsilon_{n+1}(h) = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h * \phi(t_n, x(t_n, x(t_n), h)$$

avec $h = 0, \ldots, N - 1$.
ϕ est une fonction de $R^+ * U * R^+$ avec U un ouvert de R^d.
On a consistance d'ordre p si il existe $C \geq 0$ telle que :
$\mid \epsilon(t, x, h) \mid \leq C * h^p$, avec

$$\epsilon(t, x, h) = \frac{x(t + h) - x(t)}{h} - \phi(t, x(t), h)$$

.
Posons $\phi(t, x, h) = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{h^j}{(j+1)!} * f^j(t, x)$, ϕ est obtenue en cherchant une approximation de f(t$^n, x(t^n)$).

1.1.1 Pour p=1

Pour démontrer la consistance nous vérifons que ϕ est continue et que

$$\phi(t, x, 0) = f(t, x)$$

. Puisque f est de classe C^p, alors la fonction ϕ qui contient les dérivées de f jusqu'à l'odre p de f est continue.En plus, pour p=1 et $h = 0$

$$\phi(t, x, 0) = \frac{0^0}{1!} * f^0(t, x) = f(t, x)$$

.Donc le schéma est consistant d'ordre au moins 1.

1.1.2 Donnons en justifiant une forme explicite de $D^2 f(t, x)$

:
On a f de classe C^p donc $D^2 f(t, x)$ existe et on a :

$$D^2 f(t, x) = D(Df(t, x))$$

or $Df(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + x' * \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ et par récurrence on a pour tout $m \leq p-1$, $x^{m+1}(t) = f^m(t, x(t))$ et $x' = x^1 = f^0(t,x) = f(t,x)$. Donc

$$Df(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + f(t,x) * \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$$

.

$$D^2 f(t,x) = D(\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + f(t,x) * \frac{\partial f(t,x)}{\partial x})$$

$=\frac{\partial(\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + f(t,x) * \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + f(t,x) * \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}}{\partial x}$ aprés calcule on touve $D^2 f(t,x) = \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} * \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + 2 * f(t,x) * \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t \partial x} + f(t,x) * (\frac{\partial f(t,x)}{\partial x})^2 + f^2(t,x) * \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$.

1.1.3 Montrons le resultat pour tout $p \in N$(par recurrence) :

— Pour p=2 :
on trouve $\phi(t,x,h) = f(t,x) + \frac{h}{2!} * f^1(t,x) = f(t,x) + \frac{h}{2} * (\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + f(t,x) * \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}) = f(t,x) + \frac{h}{2} * Df(t,x)$.si on passe à la dérivée partiel par rapport à h,on trouve :

$$\frac{\partial \phi(t,x,0)}{\partial h} = \frac{1}{2} * Df(t,x)$$

— Montrons la consistance au moins p=2 :
Calculons $\epsilon(t,x,h) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \phi(t, x(t), h)$,
$\phi(t, x(t), h)$=f(t,x) + $\frac{h}{2} * f^1(t,x)$,ou $x^{m+1}(t) = f^m(t, x(t))$ alors $\phi(t, x(t), h)$=x(t) + $\frac{h}{2} * x^2(t)$.
Par developpement de taylor de x à l'ordre 2 : $x(t+h) = x(t) + h * x(t) + \frac{h^2}{2} * x^2(t) + \frac{h^3}{3!} * x^3(\xi)$.D'ou $\epsilon(t,x,h) = \frac{h^2}{3!} * x^2(\xi)$.Supposons que x est bornée,alors il existe $C \geq 0$,tel que $|\frac{h^2}{3!} * x^2(\xi)| \leq C * h^2$,d'ou le shéma est consistant d'ordre au moins 2.

— Pour p=3
On a $\phi(t,x,h) = f(t,x) + \frac{h}{2!} * (\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + f(t,x) * \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + \frac{h^2}{3!} * D^2 f(t,x)$.Et,si on passe à la dérivée partiel seconde par rapport à h on obtient : $\frac{\partial^2 \phi(t,x,0)}{\partial h^2} = \frac{1}{3} * D^2 f(t,x)$.

— MONTRONS LA CONSISTANCE D'ORDRE AU MOINS 3 :
$\phi(t,x,t) = \frac{1}{h} * \sum_{j=0}^{2} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} * x^{j+1}(t)$ et donc $\epsilon(t,x,h) = \frac{1}{h} * (x(t+h) - x(t) - \sum_{j=0}^{2} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} * x^{j+1}(t))$ .Par un développement de taylor tronqué de x,nous savons que
$x(t+h) = x(t) + \sum_{j=0}^{2} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} * x^{j+1}(t) + \frac{h^3}{(3)!} * x^3(\xi)$, en remplaçant

dans l'expression de ϵ nous avons :
$\epsilon(t,x,h) = \frac{h^3}{(3)!} * x^3(\xi)$.
En supposant que x^3 est bornée,nous avons donc il existe une constante $C \geq 0$ telle que : $|\epsilon(t,x,h)| \leq C * h^3$.
Ainsi,le schéma est donc au moins d'ordre 3.
Par récurrence ,on peut en déduire que à l'ordre p on a donc :
$\frac{\partial^{(p-1)}\phi(t,x,0)}{\partial h^{(p-1)}} = \frac{1}{p} * D^{(p-1)}f(t,x)$ et qu'il existe $C \geq 0$ telle que $|\epsilon(t,x,h) \leq C * h^p$ d'où la consistance d'ordre p.

1.2 Montrons le résultat du cour sur les schéma de RUNGE-KUTTA à s-stage :

Forme générale d'une méthode de Runge-Kutta.Dans l'esprit des formules de quadrature de Gauss, on introduit des coefficients arbitraires b_i,a_{ij} et $c_i = \sum_j a_{ij}$.Ainsi,l'algorithme est :
u_1=y_0
u_2=$y_0 + h * a_{21} * f(u_1)$
u_3=$y_0 + h * (a_{31} * f(u_1) + a_{32} * f(u_2))$
$u_4 = y_0 + h * (a_{41} * f(u_1) + a_{42} * f(u_2) + a_{43} * f(u_3))$
$\vdots$
$y_1 = y_0 + h * (b_1 * f(u_1) + b_2 * f(u_2) + b_3 * f(u_3) + b_4 * f(u_4) + \ldots)$
on dis que la méthode est d'ordre p, si ,il s'assurer que l'erreur locale est de $C * h^{p+1}$.L'idée est simple : On calcule les dérivées successives de y_1,qui est définie par cet amalgame de formules, par rapport à h et s'assurer que ces dérivées sont les même que celles de la solution exacte.
Nous écrivons la méthode sous la forme $u_k = y_0 + h * \sum_i a_{ki} * f(u_i)$
$y_1 = y_0 + h * \sum_i * b_i * f(u_i)$.
Nous calculons les dérivées de u_k ; pour celles de y_1 il suffit ensuite de remplacer le a_{ki} par b_i.La fonction (de h) u_k est de la forme $h * g(h)$, dont les dérivées sont, par Leibniz,
$u_k^{'} = 1*g(h)+h*g^{'}(h), u_k^{''} = 2*g'(h)+h*g''(h), u_k^{'''} = 3*g^{''}(h)+h*g'''(h)$
Pour h= 0, seulement les premiers termes restent non nuls.Ainsi, $u_k^{'} = 1 * \sum_i a_{ki} * f$ et $y_1^{'} = 1 * \sum_i b_i * f$ ou $u_k^{'}$ est évalué en $h = 0$ et f en y_0.La deuxième dérivée devient $u_k^{''} = 2 * \sum_i a_{ki} * f(u_i)^{'} = 2 * \sum_i a_{ki} * f * u_i^{'}$.
Dans cette formule, nous devons insérer $u_i^{'}$, Cela donne :
$u_k^{''} = 2 * 1 * \sum_{i,j} a_{ki} * a_{ij} * f^{'} * f$ et $y_1^{''} = 2 * 1 * \sum_{i,j} b_i * a_{ij} * f^{'} * f$
Comme l'équation à approximée est de la forme :
$y^{'} = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Donc la dérivée seconde de la solution exacte est de la forme : $y^{''}(x) = f^{'}(y(x)) * y^{'}(x) = f^{'}(y(x)) * f(y(x))$.
Ainsi,pour avoir l'ordre au moins deux il faut que :
$y_1^{''} = y^{''}$ et $y_1^{'} = y^{'}$,ce qui implique que il faut et il suffit que $2 * 1 *$

$\sum_{i,j} b_i * a_{ij} = 1$ et $* \sum_i b_i = 1$,d'ou $\sum_{i,j} b_i * a_{ij} = \frac{1}{2}$ et $\sum_i b_i = 1$.
À cause de $c_i = \sum_j a_{ij}$, la première condition devient $\sum_i b_i * c_i = 1/2$.

1.2.1 Les conditions pour avoir au moins d'ordre trois :

Après calcule pour la dérivées troisième de y_1 , on a obtenue :
$y^{'''} = 3*1*1*\sum_{i,j,k} b_i*a_{ij}*a_{ik}*f^{''}*f^2+3*2*1*\sum_{i,j,k} b_i*a_{ij}*a_{jk}*f^{'2}*f$
or $y^{'''} = f*f^{'2}+f^2*f^{''}$, donc pour l'odre au moins trois il faut et suffit que $\sum_{i,j,k} b_i*a_{ij}*a_{ik} = \frac{1}{3}$ et $\sum_{i,j,k} b_i*a_{ij}*a_{jk} = \frac{1}{6}$ ou $\sum_{i,k} b_i*c_i*a_{ik} = \frac{1}{3}$ et $\sum_{i,j,k} b_i * a_{ij} * a_{jk} = \frac{1}{6}$ plus les deux autres conditions trouvées en haut.