



# Analiza omrežij

## 5. Zgradba omrežij povezanosti

Vladimir Batagelj

Magistrski program Uporabna statistika  
Ljubljana, april 2024



# Kazalo

Analiza  
omrežij

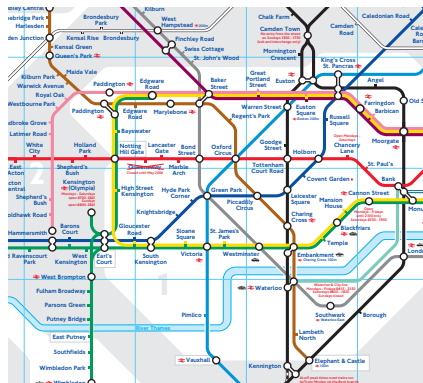
V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

- 1 Sprehodi
- 2 Povezanosti
- 3 Pomembna vozlišča



London Tube

prof. Vladimir Batagelj: [vladimir.batagelj@fmf.uni-lj.si](mailto:vladimir.batagelj@fmf.uni-lj.si)  
prosojnice (PDF)

28. april 2024 ob 23:22/ april 2013



# Sprehodi

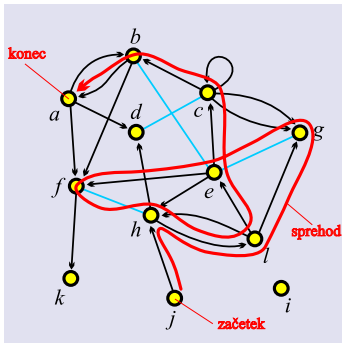
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



**dolžina**  $|s|$  sprehoda  $s$  je število povezav, ki ga sestavljajo.

$s = (j, h, l, g, e, f, h, l, e, c, b, a)$

$|s| = 11$

Sprehod je **sklenjen** ali **obhod** ntk. njegov začetek in konec sovpadata.

Če ne upoštevamo smeri povezav v 'sprehodu', dobimo **polsprehod** ali **verigo**.

**sled** – sprehod z različnimi povezavami

**pot** – sprehod z različnimi vozlišči

**cikel** – sklenjen sprehod z različnimi notranjimi vozlišči.

Graf je **acikličen**, ntk. ne vsebuje nobenega cikla.



# Najkrajše poti

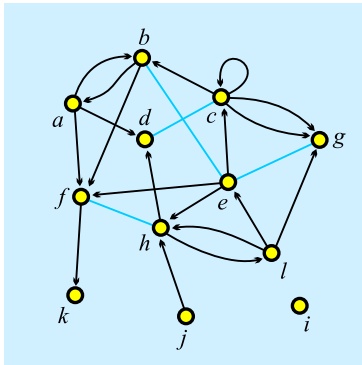
## Analiza omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna vozlišča



Dolžino najkrajše poti iz  $u$  v  $v$  označimo z  $d(u, v)$ .

Če ne obstaja sprehod iz  $u$  v  $v$ , postavimo  $d(u, v) = \infty$ .

$$d(j, a) = |(j, h, d, c, b, a)| = 5$$

$$d(a, j) = \infty$$

$$\hat{d}(u, v) = \max(d(u, v), d(v, u))$$

je **razdalja**:

$$\hat{d}(v, v) = 0, \hat{d}(u, v) = \hat{d}(v, u),$$

$$\hat{d}(u, v) \leq \hat{d}(u, t) + \hat{d}(t, v).$$

**Premier** grafa je enak razdalji med, glede na  $d(u, v)$ , najoddaljenejšima vozliščema:  $D = \max_{u, v \in V} d(u, v)$ .

Network/Create New Network/Subnetwork with Paths/



# Najkrajše poti

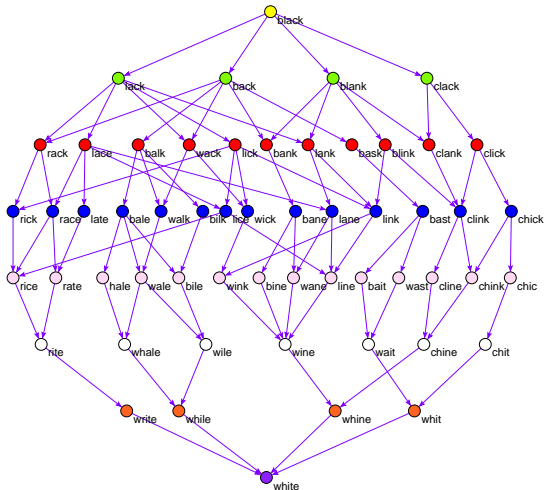
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



DICT28.



# Enakovrednosti in razbitja

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Relacija  $R$  na  $\mathcal{V}$  je **enakovrednost** (ekvivalenčna) ntk. je **refleksivna**  $\forall v \in \mathcal{V} : vRv$ , **simetrična**  $\forall u, v \in \mathcal{V} : (uRv \Rightarrow vRu)$  in **tranzitivna**  $\forall u, v, z \in \mathcal{V} : uRz \wedge zRv \Rightarrow uRv$ .

Vsaka enakovrednost  $R$  določa neko razbitje v **razrede**  $[v] = \{u : vRu\}$ .

Vsako razbitje  $\mathbf{C}$  določa neko enakovrednost  $uRv \Leftrightarrow \exists C \in \mathbf{C} : u \in C \wedge v \in C$ .

**$k$ -sosed** vozlišča  $v$  je množica vozlišč, ki so za  $k$  oddaljena od  $v$ ,  $N^k(v) = \{u \in \mathcal{V} : d(v, u) = k\}$ .

Množica vseh množic  $k$ -sosedov,  $k = 0, 1, \dots$  vozlišča  $v$  je razbitje množice  $\mathcal{V}$ .

**$k$ -soseščina** vozlišča  $v$ ,  $N^{(k)}(v) = \{u \in \mathcal{V} : d(v, u) \leq k\}$ .

Network/Create Partition/k-Neighbors/



# Soseščina Motorole

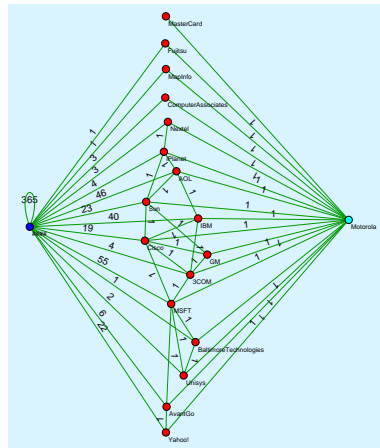
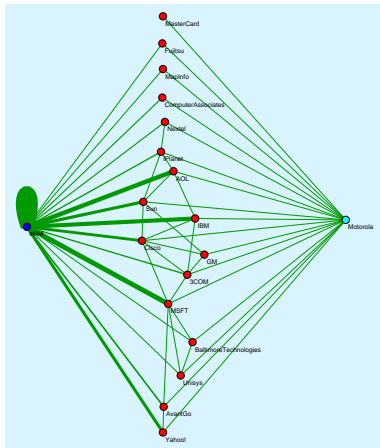
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



Debelina povezav je koren iz vrednosti.



# Povezanosti

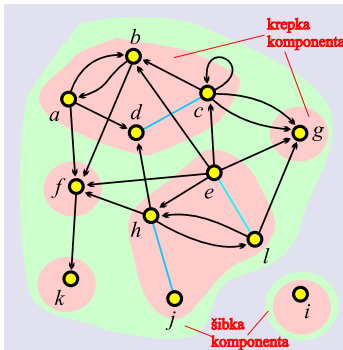
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



Vozlišče  $u$  je *dosegljivo* iz vozlišča  $v$  ntk. obstaja sprehod z začetkom  $v$  in koncem  $u$ .

Vozlišče  $v$  je *šibko povezano* z vozliščem  $u$  ntk. obstaja veriga s krajiščema  $v$  in  $u$ .

Vozlišče  $v$  je *krepko povezano* z vozliščem  $u$  ntk. sta vzajemno dosegljivi.

Šibka in krepka povezanost sta enakovrednosti.

[graphCon.net](http://graphcon.net)

Razredi porajajo šibke/krepke *komponente* ali *kose* grafa.

Network/Create Partition/Components/





# Šibke komponente

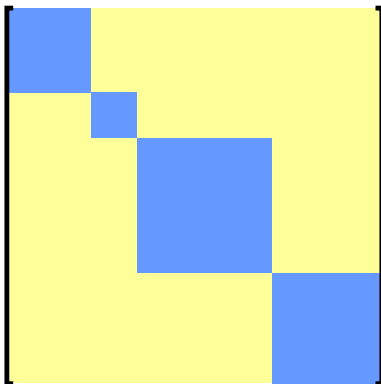
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



Če preuredimo vozlišča omrežja, tako da vozlišča iz iste skupine šibkega razbitja postavimo skupaj, dobimo matrični prikaz sestavljen iz diagonalnih blokov – šibkih komponent.

Za večino problemov velja, da jih lahko ločeno rešimo za vsako šibko komponento posebej in nato dobljene rešitve združimo v rešitev za celotno omrežje.



# Posebni grafi – dvodelni, drevo

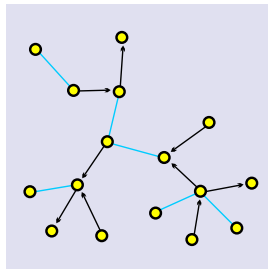
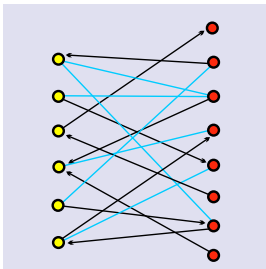
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



Graf  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$  je **dvodelen** ntk. lahko množico vozlišč  $\mathcal{V}$  razbijemo na podmnožici  $V_1$  in  $V_2$ , tako da ima vsaka povezava iz  $\mathcal{L}$  eno krajišče v  $V_1$  drugo pa v  $V_2$ .

Šibko povezan graf  $G$  je **drevo** ntk. ne vsebuje (zank in) polciklov dolžine vsaj 3.



# Krepka skrčitev grafa (kondenzacija)

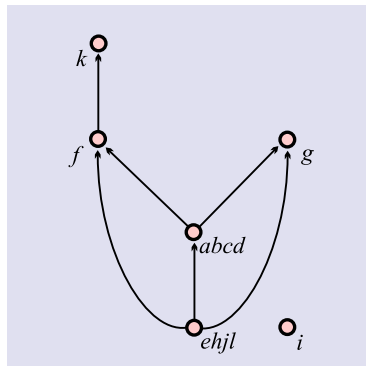
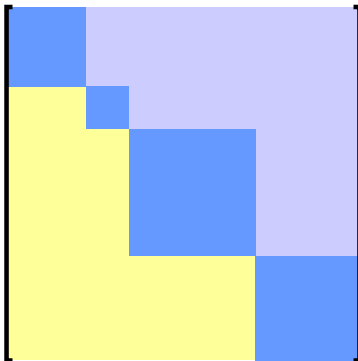
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



Če v danem grafu skrčimo vsako krepko komponento v ustrezno vozlišče, odstranimo zanke in združimo vzporedne povezave, je tako dobljeni **skrčeni** graf acikličen. Za vsak aciklični graf obstaja **urejenost / oštevilčenje**  $i : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{N}$ , tako da velja  $(u, v) \in \mathcal{A} \Rightarrow i(u) < i(v)$ .



# Skrčitev grafa – primer

Analiza  
omrežij

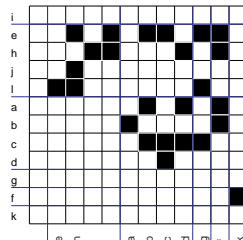
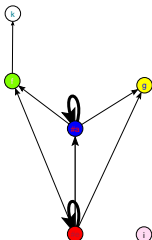
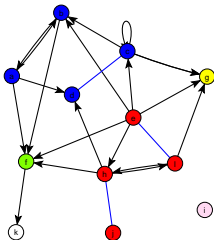
V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

```
Network/Create Partition/Components/Strong [1]
Operations/Network+Partition/Shrink Network [1][0]
Network/Create New Network/Transform/Remove/Loops [yes]
Network/Acyclic Network/Depth Partition/Acyclic
Partition/Make Permutation
Permutation/Inverse Permutation
select partition [Strong Components]
Operations/Partition+Permutation/Functional Composition/Partition*Permutation
Partition/Make Permutation
select [original network]
File/Network/Export Matrix to EPS/Using Permutation
```





# Zgradba krepkih komponent

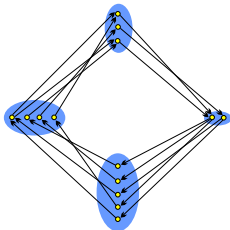
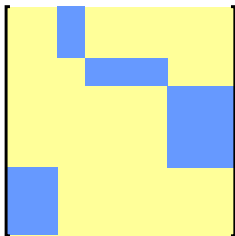
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



Notranja zgradba krepke komponente – naj bo  $d$  največji skupni delitelj dolžin obhodov v krepki komponenti.

Komponenta je *enostavna*, če je  $d = 1$ ; sicer je *periodična* s periodo  $d$ .

Množico vozlišč  $\mathcal{V}$  krepko povezanega usmerjenega grafa  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, R)$  je mogoče razbiti na  $d$  skupin  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_d$ , tako da za vsako povezavo  $(u, v) \in R$  velja  $u \in \mathcal{V}_i \Rightarrow v \in \mathcal{V}_{(i \bmod d)+1}$ .

Network/Create Partition/  
Components/Strong-Periodic



# ... Zgradba krepkih komponent

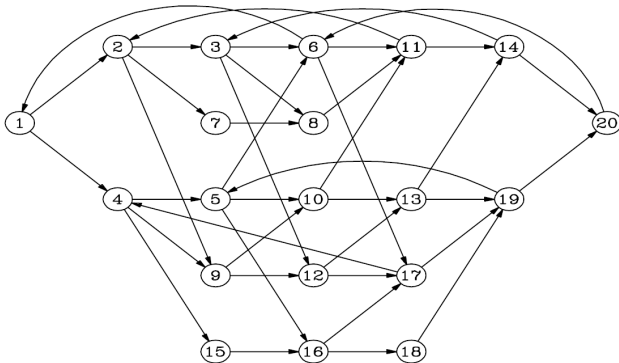
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



Bonhourejev periodični graf. **Pajek – matrike**



# Spletni metuljček (Bow-tie)

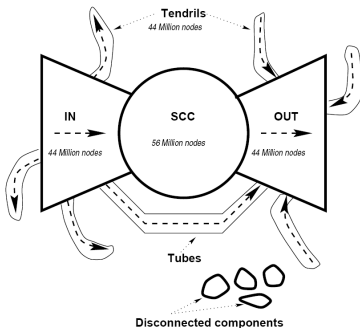
Analiza omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna vozlišča



Naj bo  $\mathcal{S}$  **največja kreпка komponenta** v omrežju  $\mathcal{N}$ ;  $\mathcal{W}$  šibka komponenta, ki vsebuje  $\mathcal{S}$ ;  $\mathcal{I}$  množica vozlišč, iz katerih je  $\mathcal{S}$  dosegljiva;  $\mathcal{O}$  množica vozlišč dosegljivih iz  $\mathcal{S}$ ;  $\mathcal{T}$  (cevi) vozlišča (niso v  $\mathcal{S}$ ) na poteh iz  $\mathcal{I}$  v  $\mathcal{O}$ ;  $\mathcal{R} = \mathcal{W} \setminus (\mathcal{I} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{T})$  (lovke); in  $\mathcal{D} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{W}$ . Razbitje

$$\{\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{D}\}$$

Kumar &: The Web as a graph

imenujemo **metuljčno** razbitje  $\mathcal{V}$ .

Opomba: za splošna usmerjena omrežja slika ne prikazuje vseh možnosti – v množici  $\mathcal{R}$  so lahko tudi verige.

Network/Create Partition/Bow-Tie



# Dvopovezanost

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Vozlišči  $u$  in  $v$  sta ***dvopovezani*** ntk. sta povezani (v obe smeri) s po dvema neodvisnima (brez skupnih notranjih vozlišč) potema.

Dvopovezanost določa razbitje množice **povezav**.

Vozlišče je ***stično*** vozlišče ali ***stičišče*** ntk. njegova odstranitev poveča število šibkih komponent grafa.

Povezava je ***most*** ntk. njena odstranitev poveča število šibkih komponent grafa.

Network/Create New Network/with Bi-Connected Components





# $k$ -povezanost

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

**Vozliščna povezanost**  $\kappa$  grafa  $G$  je enaka najmanjšemu številu vozlišč, ki jih je potrebno odvzeti iz grafa, tako da je graf porojen s prestalimi vozlišči nepovezan ali trivialen (enak  $K_1$ ).

**Povezavna povezanost**  $\lambda$  grafa  $G$  je enaka najmanjšemu številu povezav, ki jih je potrebno odvzeti iz grafa, tako da je graf porojen s prestalimi povezavami nepovezan ali trivialen.

Velja Whitneyeva neenakost:  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ .

Graf  $G$  je (*po vozliščih*)  $k$ –povezan, če je  $\kappa(G) \geq k$  in je *po povezavah*  $k$ –povezan, če je  $\lambda(G) \geq k$ .

Velja Whitneyeva različica Mengerjevega izreka: Graf  $G$  je po vozliščih/povezavah  $k$ –povezan ntk. vsak par vozlišč povezuje vsaj  $k$  po vozliščih/povezavah ločenih sprehodov.



# Trikotniška povezanost – neusmerjeni grafi

## Analiza omrežij

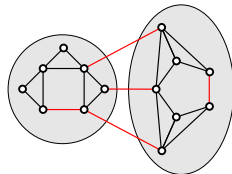
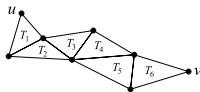
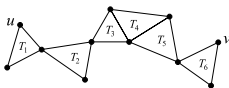
V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna vozlišča

V neusmerjenem grafu imenujemo **trikotnik** podgraf izomorfen  $K_3$ . Zaporedje trikotnikov  $(T_1, T_2, \dots, T_s)$  grafa  $G$  (**vozliščno**) **trikotniško povezuje** vozlišči  $u, v \in \mathcal{V}$  ntk.  $u \in T_1$  in  $v \in T_s$  ali  $u \in T_s$  in  $v \in T_1$  ter  $\mathcal{V}(T_{i-1}) \cap \mathcal{V}(T_i) \neq \emptyset$ ,  $i = 2, \dots, s$ ; in **povezavno trikotniško povezuje** vozlišči  $u, v \in \mathcal{V}$  ntk zadošča še strožji različici zadnjega pogoja  $\mathcal{E}(T_{i-1}) \cap \mathcal{E}(T_i) \neq \emptyset$ ,  $i = 2, \dots, s$ .



Vozliščna trikotniška povezanost je enakovrednost na vozliščih; povezavna pa na povezavah. **Članek.**



# Trikotniško omrežje

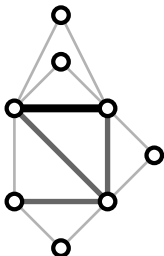
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



Naj bo  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  enostaven neusmerjen graf. Prirejeno **trikotniško omrežje**  $\mathcal{N}_T(\mathcal{G}) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_T, w)$  določeno z  $\mathcal{G}$  je podgraf  $\mathcal{G}_T = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_T)$  grafa  $\mathcal{G}$ , kjer je  $\mathcal{E}_T$  množica tistih povezav iz  $\mathcal{E}$ , ki leže na vsaj enem trikotniku. Utež  $w(e)$  povezave  $e \in \mathcal{E}_T$  je enaka številu različnih trikotnikov, ki jim povezava  $e$  pripada.

Trikotniška omrežja omogočajo učinkovito razkrivanje gostih delov omrežja. Če povezava  $e$  pripada ***k*-klici** (podgrafu izomorfnemu  $K_k$ ) v  $\mathcal{G}$ , je  $w(e) \geq k - 2$ .

Network/Create New Network/with Ring Counts/3-Rings/Undirected



# Povezavni izrez na ravni 16 trikotniškega omrežja Erdős-ovega grafa sodelovanj

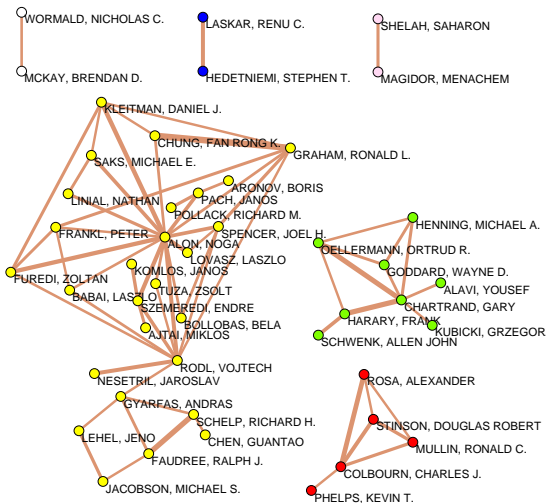
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



brez Erdős,  $n = 6926$ ,  $m = 11343$



# Trikotniška povezanost – usmerjeni grafi

Analiza  
omrežij

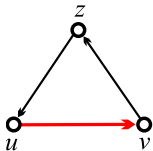
V. Batagelj

Sprehodi

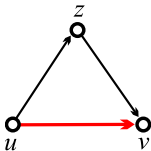
Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

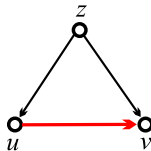
Če je graf  $\mathcal{G}$  mešan, zamenjamo neusmerjene povezave s pari nasprotno usmerjenih. Naj bo  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  enostaven usmerjen graf brez zank. Za izbrano usmerjeno povezavo  $(u, v) \in \mathcal{A}$  obstajajo štiri vrste *usmerjenih trikotnikov*: **cyclic**, **transitive**, **input** in **output**.



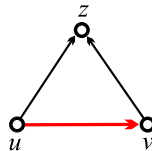
cyc



tra



in



out



# ... Trikotniška povezanost – usmerjeni grafi

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

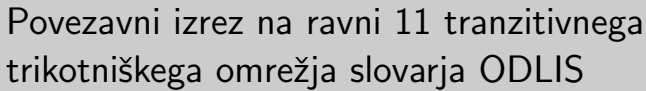
Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Če pozabimo na vlogo izbrane povezave, imamo le dve vrsti trikotnikov, ki jim povezava lahko pripada: ciklične (**cyc**) in tranzitivne (**tra**, **in**, **out**). V programu Pajek ukaz

Network/Create New Network/with Ring Counts/3-Rings/Directed omogoča določiti ustrezna omrežja ( $\mathcal{N}_{cyc}$  – ciklične uteži,  $\mathcal{N}_{tra}$  – tranzitivnostne uteži,  $\mathcal{N}_{sc}$  – tranzitivne bližnjice).

Pojem trikotniške povezanosti lahko posplošimo na *povezanost s kratkimi (pol)cikli – obroči* in ustrezna omrežja; lahko pa tudi na povezanost z majhnimi podgrafi (npr. "klikami", glejte *Palla*).





# Pomembna vozlišča v omrežju

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Za določitev pomembnih/zanimivih elementov (vozlišč/povezav) v omrežju ponavadi poskusimo izraziti naša pričakovanja z mero (indeks, utež), ki zadošča zahtevi

*večja je za dani element vrednost mere, pomembnejši/  
zanimivejši je ta element*

V analizi omrežij raziskovalci prepogosto nekritično kar uporabijo mere iz literature/programov.

Za formalni pristop glej **Roberts**.





# Pomembna vozlišča v omrežju

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Pri izgradnji *mer pomembnosti* moramo najprej upoštevati ali je omrežje usmerjeno ali neusmerjeno. Meram pomembnosti na neusmerjenih omrežjih pravimo mere *središčnosti*; na usmerjenih omrežjih pa mere *veljave*. Slednje se naprej delijo na mere *ugleda* ali *podpore* (upoštevamo vstopajoče povezave) in mere *vpliva* (upoštevamo izstopajoče povezave).

Če zamenjamo dano usmerjeno omrežje z njemu nasprotnim (obrnemo smeri povezav) preidejo mere ugleda v mere vpliva, in obratno.

Dejanski pomen mere pomembnosti je odvisen od relacije (omrežja). Tako npr. je 'najuglednejša' oseba glede na relacijo '\_\_\_ ne mara sodelovati z \_\_\_' dejansko najmanj priljubljena oseba.

Odstranitev pomembnega vozlišča iz omrežja povzroči občutno spremembo v zgradbi/delovanju omrežja.



# Normalizacija

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Naj bo  $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  neka mera pomembnosti vozlišč omrežja  $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ . Če želimo vrednosti mere  $p$  primerjati med različnimi omrežji, moramo poskrbeti za primerljivost. Pogosto jo poskušamo zagotoviti tako, da mero  $p$  *normaliziramo*.

Naj bo  $\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})$ , kjer je  $\mathbf{N}(\mathcal{V})$  izbrana množica omrežij nad isto množico  $\mathcal{V}$ ,

$$p_{\max} = \max_{\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})} \max_{v \in \mathcal{V}} p_{\mathcal{N}}(v) \quad \text{in} \quad p_{\min} = \min_{\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})} \min_{v \in \mathcal{V}} p_{\mathcal{N}}(v)$$

Tedaj je normalizirana mera enaka

$$p'(v) = \frac{p(v) - p_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}} \in [0, 1]$$



# Stopnje

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Najpreprostejšo mero pomembnosti predstavljajo stopnje vozlišč. Ker sta za enostavna omrežja  $\deg_{min} = 0$  in  $\deg_{max} = n - 1$ , je ustrezna normalizirana mera

*rediščnost*  $\deg'(v) = \frac{\deg(v)}{n - 1}$

in podobno

*ugled*  $\text{indeg}'(v) = \frac{\text{indeg}(v)}{n}$

*vpliv*  $\text{outdeg}'(v) = \frac{\text{outdeg}(v)}{n}$

Namesto stopenj glede na osnovno omrežje lahko vzamemo tudi stopnje glede na relacijo dosegljivosti (tranzitivna ovojnica).

Network/Create Partition/Degree

Network/Create Vector/Centrality/Degree

Network/Create Vector/Centrality/Proximity Prestige



# Dostopnost

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Če upoštevamo razdalje  $d(u, v)$  med vozlišči v omrežju  $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$  lahko vpeljemo

*polmer*  $r(v) = \max_{u \in \mathcal{V}} d(v, u)$

Količino  $D = \max_{u, v \in \mathcal{V}} d(v, u)$  imenujemo *premer* omrežja.

*skupna dostopnost*  $S(v) = \sum_{u \in \mathcal{V}} d(v, u)$

Za usmerjeno omrežje sta vpeljeni meri meri vpliva. Meri ugleda dobimo, če v obrazcih  $d(u, v)$  zamenjamo z  $d(v, u)$ .

Če omrežje ni krepko povezano, sta  $r_{max}$  in  $S_{max}$  enaki  $\infty$ . Sabidussi (1966) je zato kot mero dostopnosti vpeljal  $1/S(v)$  oziroma v normalizirani obliki

*dostopnost*  $cl(v) = \frac{n - 1}{\sum_{u \in \mathcal{V}} d(v, u)}$

Network/Create Vector/Centrality/Closeness

Network/Create New Network/Subnetwork with Paths/Info  
on Diameter



# Vmesnost

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Pomembna so tudi vozlišča, ki lahko nadzirajo pretok podatkov po omrežju. Če privzamemo, da so za prenos pomembne le najkrajše poti, dobimo kot mero *vmesnosti* (Anthonisse 1971, Freeman 1977)

$$b(v) = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{\substack{u, t \in \mathcal{V}: g_{u,t} > 0 \\ u \neq v, t \neq v, u \neq t}} \frac{g_{u,t}(v)}{g_{u,t}}$$

kjer je  $g_{u,t}$  število najkrajših poti iz  $u$  v  $t$ ; in  $g_{u,t}(v)$  število takih med njimi, ki gredo skozi vozlišče  $v$ .

Hiter postopek za izračun vmesnosti je razvil Brandes.

Network/Create Vector/Centrality/Betweenness



# Padgett-ove floretinske rodbine

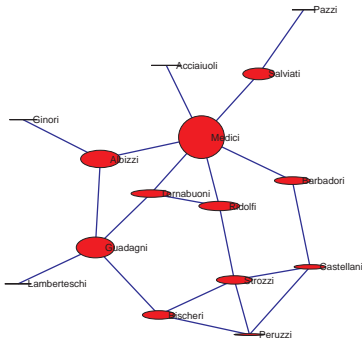
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



	close	between
1. Acciaiuoli	0.368421	0.000000
2. Albizzi	0.482759	0.212454
3. Barbadori	0.437500	0.093407
4. Bischeri	0.400000	0.104396
5. Castellani	0.388889	0.054945
6. Ginori	0.333333	0.000000
7. Guadagni	0.466667	0.254579
8. Lamberteschi	0.325581	0.000000
9. Medici	0.560000	0.521978
10. Pazzi	0.285714	0.000000
11. Peruzzi	0.368421	0.021978
12. Ridolfi	0.500000	0.113553
13. Salviati	0.388889	0.142857
14. Strozzi	0.437500	0.102564
15. Tornabuoni	0.482759	0.091575



# Kazala in viri

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Vozliščem povezanega usmerjenega omrežja  $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$  priredimo dve vrednosti: kakovost vira (vsebine)  $x_v$  in kakovost kazala  $y_v$  (Kleinberg, 1998). Na dober vir kažejo dobra kazala in dobro kazalo kaže na dobre vire

$$x_v = \sum_{u: (u,v) \in \mathcal{L}} y_u \quad \text{in} \quad y_v = \sum_{u: (v,u) \in \mathcal{L}} x_u$$

Naj bo  $\mathbf{W}$  matrika omrežja  $\mathcal{N}$  in  $\mathbf{x}$  ter  $\mathbf{y}$  vektorja obeh lastnosti. Tedaj lahko zvezi zapišemo  $\mathbf{x} = \mathbf{W}^T \mathbf{y}$  oziroma  $\mathbf{y} = \mathbf{W} \mathbf{x}$ .

Začnimo z  $\mathbf{y} = [1, 1, \dots, 1]$  in nato zaporedoma izračunamo po obeh zvezah nove približke za  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{y}$ . Oba vektorja po vsakem koraku normaliziramo. To ponavljamo dokler se vektorja ne ustalita. Pokazati je mogoče, da opisani postopek konvergira. Limitni vektor  $\mathbf{x}^*$  je glavni lastni vektor matrike  $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ ;  $\mathbf{y}^*$  pa matrike  $\mathbf{W} \mathbf{W}^T$ .



# ... Kazala in viri

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Podobni postopki se uporabljajo v spletnih iskalnikih za ocenjevanje pomembnosti posameznih strani.

PageRank, PageRank / Google, HITS / AltaVista, SALSA, teorija.

Network/Create Vector/Centrality/Hubs-Authorities

Na naslednji prosojnici: Na svetovnem nogometnem prvenstvu v Parizu leta 1998 je sodelovalo 22 nogometnih reprezentanc. V omrežju so vse države, iz katerih so nogometaši igrali v ligah teh 22 držav, in vse države, v katerih ligah so igrali nogometaši iz teh 22 držav. Relacija je *igralec iz države x igra v državi y*; utež je število takih igralcev. Podatke je zbral Lothar Krempel.  
[football.net](http://football.net)





# ...Kazala in viri: nogometaši

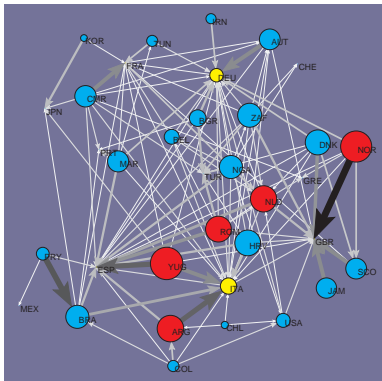
Analiza  
omrežij

V. Batagelj

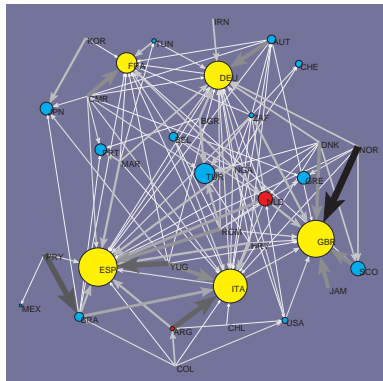
Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča



Izvozniki (kazala/hubs)



Uvozniki (viri/authorities)



# Nakopičenost

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

*Nakopičenost* v vozlišču  $v$  je določena kot razmerje med številom vseh povezav v podgrafu  $G^1(v)$  porojenim s sosesčino danega vozlišča in številom povezav v polnem grafu na teh vozliščih

$$C(v) = \frac{2|\mathcal{L}(G^1(v))|}{\deg(v)(\deg(v) - 1)}$$

za  $\deg(v) > 1$ ; in  $C(v) = 0$  sicer.

Vpliv velikosti sosesčine lahko zagotovimo z naslednjim popravkom

$$C_1(v) = \frac{\deg(v)}{\Delta} C(v)$$

kjer je  $\Delta$  največja stopnja v grafu  $G$ . Ta doseže največjo možno vrednost le na vozliščih, ki pripadajo osamljeni klikli reda  $\Delta$ .

Network/Create Vector/Clustering Coefficients/CC2

članek



# Izračun indeksov in uteži v Pajek-u

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Xingqin Qi et al. so v članku **Terrorist Networks, Network Energy and Node Removal** vpeljali mero **Laplaceova središčnost**

$$L(v) = \deg(v)(\deg(v) + 1) + 2 \sum_{u \in N(v)} \deg(u)$$

```
select the network
Network/Create Vector/Centrality/Degree/All
Operations/Network+Vector/Neighbours/Sum/All [False]
Vector/Transform/Multiply by [2]
select the degree vector as First
select the degree vector as Second
Vectors/Multiply (First*Second)
Vectors/Add (First+Second)
select the 2*sum on neighbors as Second
Vectors/Add (First+Second)
dispose auxiliary vectors
File/Vector/Change Label [Laplace All centrality]
```

Za določitev pomembnih podomrežij v **cestnem omrežju** lahko uporabimo utež  $w(u, v) = \deg(u) \deg(v)$ .

```
Network/Create vector/Centrality/Degree/All
Operations/Network+Vector/Transform/Vector(s)->Line Values/Multiply
```





# Usredinjenost omrežja

Analiza  
omrežij

V. Batagelj

Sprehodi

Povezanosti

Pomembna  
vozlišča

Mero pomembnosti  $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  lahko povzamemo na celotnem omrežju kot njegovo usredinjenost  $C(p)$ :

$$p^* = \max_{v \in \mathcal{V}} p(v)$$

$$D(p) = \sum_{v \in \mathcal{V}} (p^* - p(v))$$

$$D^* = \max_{\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})} D(p_{\mathcal{N}})$$

Tedaj je *usredinjenost* glede na  $p$

$$C(p) = \frac{D(p)}{D^*}$$

Za večino mer je najbolj usredinjena zvezda  $S_n$  in najmanj polni graf  $K_n$ .