Groupe 28 – Laurentin-Wilhelm AHREND et Bastien AVRILLON

JUSTIFICATIONS - Projets Numérique de Probabilités

UE 11 Maths 2

Question 1.a)

On utilise la définition des différents évènements introduits dans l'énoncé :

- Soit $i \in \mathbb{N}^*$, $\tau > 0$ et $\omega_0 \in \Omega$. On a les équivalences :

$\underline{\omega_0 \in \{E_i > \tau\}} \iff \omega_0 \in \{T_{-i+1} - \tau > T_{-i}\}$ car $E_i = T_{-i+1} - T_{-i}$

$\iff \omega_0 \in \{\omega \in \Omega \mid$ la $(i-1)^e$ dernière feuille est tombée sur le sol une durée strictement plus grande que τ après la i^e dernière feuille $\}$

$\iff \omega_0 \in \{\omega \in \Omega \mid$ aucune feuille n'est tombée sur le sol durant l'intervalle de temps $[T_{-i+1} - \tau, T_{-i+1}[\,\}$

$\iff \underline{\omega_0 \in \{N([T_{-(i-1)} - \tau, T_{-(i-1)}[) = 0\}}$

- Soit $i \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $t < 0$ et $\omega_0 \in \Omega$. On a les équivalences :

$\underline{\omega_0 \in \{T_{-(i-1)} = t\}} \iff \omega_0 \in \{\omega \in \Omega \mid$ la $(i-1)^e$ dernière feuille est tombée sur le sol à l'instant $t\}$

$\iff \omega_0 \in \{\omega \in \Omega \mid (i-2)$ feuilles sont tombées durant l'intervalle de temps $]t, 0[\,\} \cap \{\omega \in \Omega \mid (i-1)$ feuilles sont tombées durant l'intervalle de temps $[t, 0[\,\}$.

$\iff \underline{\omega_0 \in \{N(]t,0[) = i-2\} \cap \{N([t,0[) = i-1\}}$

Bilan :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall i \in \mathbb{N}^*, \forall \tau > 0, \quad \{E_i > \tau\} = \{N([T_{-(i-1)} - \tau, T_{-(i-1)}[) = 0\} \\ \forall i \in \mathbb{N}^* / \{1\}, \forall t < 0, \quad \{T_{-(i-1)} = t\} = \{N(]t,0[) = i-2\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cap \{N([t,0[) = i-1\} \end{array}}$$

Question 1.b)

Soit $i \in \mathbb{N}^*$

$$\cdot\ \underline{\mathbb{P}(N([T_{-(i-1)}-\tau, T_{-(i-1)}[)=0)} = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{0\}}(N([T_{-(i-1)}-\tau, T_{-(i-1)}[))\right)$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{0\}}(N([T_{-(i-1)}-\tau, T_{-(i-1)}[)) \mid T_{-(i-1)}=t\right)\right]$$ d'après le théorème de l'espérance totale

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{T_{-(i-1)}=t}\left(N([T_{-(i-1)}-\tau, T_{-(i-1)}[)=0\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{T_{-(i-1)}=t}\left(N(\overbrace{[t-\tau, t[}^{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^-),\ \text{borné et } |[t-\tau,t[| = \tau \geq 0})=0\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(N([t-\tau, t[)=0)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(-\theta\tau)\frac{(\theta\tau)^0}{0!}\right]$$ d'après le processus de Poisson

$$= \mathbb{E}\left[e^{-\theta\tau}\right] = \underline{e^{-\theta\tau}}$$

En utilisant ce dernier résultat, on établit la fonction de partition de E_i :

Soit $\tau \in \mathbb{R}$. Si $\tau < 0$, sachant $(T_{-i} \leq T_{-i+1}) \Rightarrow (E_i \geq 0)$,

on a $\mathbb{P}(E_i \leq \tau) = 0$

Si $\tau \geq 0$, $\mathbb{P}(E_i \leq \tau) = 1 - \mathbb{P}(E_i > \tau)$ d'après 1a

$$= 1 - \mathbb{P}(N([T_{-(i-1)}-\tau, T_{-(i-1)}[)=0)$$

$$= 1 - e^{-\theta\tau}$$ d'après ce qui précède

Ainsi, $F_{E_i}(\tau) = \mathbb{P}(E_i \leq \tau)$

$$\underline{F_{E_i}(\tau) = (1-e^{-\theta\tau}) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}}$$

Et sachant que la fonction de partition caractérise entièrement la loi d'une variable aléatoire :

$$\boxed{E_i \sim \mathcal{E}(\theta),\ \forall i \in \mathbb{N}^*}$$

Question 1.c)

· Posons : $\mathcal{H}_{n-1} = \{E_1 = e_1, \dots, E_{n-1} = e_{n-1}\}$

On a $\mathcal{H}_{n-1} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{E_i = e_i\} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{T_{-i+1} - T_{-i} = e_i\} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{T_{-i} = T_{-i+1} - e_i\}$

$$\mathcal{H}_{n-1} = \{T_{-1} = T_0 - e_1,\ T_{-2} = T_{-1} - e_2, \dots, T_{-n+1} = T_{-n+2} - e_{n-1}\}$$

$$\mathcal{H}_{n-1} = \{T_{-1} = T_0 - e_1,\ T_{-2} = -e_1 - e_2 + T_0, \dots, T_{-n+1} = -\sum_{i=1}^{n-1} e_i + T_0\}$$

$$\mathcal{H}_{n-1} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{T_{-i} = T_0 - \sum_{j=1}^{i} e_j\} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{T_{-i} = -\sum_{j=1}^{i} e_j\} \quad (\text{car } T_0 = 0)$$

↙ 1a

$$\mathcal{H}_{n-1} = \bigcap_{i=2}^{n} \left(\{N([-\sum_{j=1}^{i-1} e_j, 0[) = i-1\} \cap \{N(]-\sum_{j=1}^{i-1} e_j, 0[) = i-2\} \right)$$

$$\mathcal{H}_{n-1} = \bigcap_{i=2}^{n} \left(\{N([T_{-(i-1)}, 0[) = i-1\} \cap \{N(]T_{-(i-1)}, 0[) = i-2\} \right) \quad \underline{(i)}$$

Et d'autre part, $\{E_n > \tau\} = \{N([T_{-n+1} - \tau, T_{-n+1}[) = 0\}$ d'après 1a $\quad \underline{(ii)}$

. On remarque que les seuls intervalles intervenant dans l'écriture de $\underline{(i)}$ et faisant intervenir T_{-n+1} (comme dans $\underline{(ii)}$) sont $[T_{-n+1}, 0[$ et $]T_{-n+1}, 0[$, tous deux disjoints de $[T_{-n+1} - \tau, T_{-n+1}[$ intervenant dans (ii). De plus, sachant $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$ $e_j \geq 0$, tous les autres intervalles intervenant dans $\underline{(i)}$ sont disjoints de $[T_{-n+1} - \tau, T_{-n+1}[$.

Notons $V_i = [T_{-(i-1)}, 0[$ et $U_i =]T_{-(i-1)}, 0[$ pour $i \in [\![2, n]\!]$,

tel que $\mathcal{H}_{n-1} = \bigcap_{i=2}^{n} \left(\{N(V_i) = i-1\} \cap \{N(U_i) = i-2\} \right)$

$\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\begin{cases} V_i \cap [T_{-n+1} - \tau, T_{-n+1}[= \emptyset \\ U_i \cap [T_{-n+1} - \tau, T_{-n+1}[= \emptyset \end{cases}$, $\underline{\text{donc}}$ $\begin{cases} N(V_i) \text{ et } [T_{-n+1} - \tau, T_{-n+1}[\\ N(U_i) \text{ et } [T_{-n+1} - \tau, T_{-n+1}[\end{cases}$ sont $\underline{\text{indépendants}}$

(d'après le processus de poisson)

donc $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\left|\begin{array}{l} \{N(V_i) = i-1\} \text{ et } \{E_n > \tau\} \text{ sont indépendants.} \\ \{N(U_i) = i-2\} \text{ et } \{E_n > \tau\} \text{ sont indépendants.} \end{array}\right.$

donc $\underbrace{\mathcal{H}_{n-1}}$ et $\{E_n > \tau\}$ sont indépendants.

intersection d'évènements de type $\{N(V_i) = i-1\}$ et $\{N(U_i) = i-2\}$

on en déduit : $\mathbb{P}(E_n > \tau \mid \mathcal{H}_{n-1}) = \mathbb{P}(E_n > \tau)$

ie $\boxed{\mathbb{P}(E_n > \tau \mid E_1 = e_1, \dots, E_{n-1} = e_{n-1}) = \mathbb{P}(E_n)}$

Question 1.d)

· D'après 1b, $\forall i \in \mathbb{N}^* \; E_i \sim \mathcal{E}(\theta)$

Notons F_E la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre θ, qui est dérivable et telle que $F_E' = f_E$ est la densité de la loi.

· D'après 1c, on a $\mathbb{P}(E_n > \tau \mid E_1 = e_1, \dots, E_{n-1} = e_{n-1}) = \mathbb{P}(E_n > \tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \geq 2$

donc $1 - \mathbb{P}(E_n \leq \tau \mid E_1 = e_1, \dots, E_{n-1} = e_{n-1}) = 1 - \mathbb{P}(E_n \leq \tau)$

donc $1 - F_{E_n \mid E_1 = e_1, \dots, E_{n-1} = e_{n-1}}(\tau) = 1 - F_{E_n}(\tau)$ par définition de la fonction de répartition

donc $F_E(\tau) = F_{E_n \mid E_1 = e_1, \dots, E_{n-1} = e_{n-1}}(\tau)$ d'après le point précédent

donc $F_E'(\tau) = f_E(\tau) = f_{E_n}(\tau) = f_{E_n \mid E_1 = e_1, \dots, E_{n-1} = e_{n-1}}(\tau) = F'_{E_n \mid E_1 = e_1, \dots, E_{n-1} = e_{n-1}}(\tau)$

donc $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Bilan : $\boxed{(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi } \mathcal{E}(\theta)}$

<u>**Question 1.d-bis)**</u>

Soit $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$, qui est aussi une loi gamma $\Gamma(1,\theta)$, de densité f_E.

On pose la suite $(T_{-i})_{i\in\mathbb{N}^*}$, telle que $E_i = T_{-i+1} - T_{-i}$.

Mq cette suite définit un processus de Poisson sur $]-\infty, 0[$.

(1) Mq $N(A) = \mathrm{card}(i\in\mathbb{N}^* : T_{-i}\in A) \sim \mathcal{P}(\theta|A|)$ pour tout A de la forme $A =]t,0]$, $t\in\mathbb{R}_*^-$

Ceci suffira à mq ce premier point pour tout borélien de $\mathcal{B}(]-\infty,0])$, sachant que $]t,0]$, $t\in\mathbb{R}_*^-$ est un élément générateur de cette tribu.

Soit $t\in\mathbb{R}_*^-$.

On a $\forall i\in\mathbb{N}^*$, $T_{-i} = -\sum_{k=1}^{i} E_k + \overset{=0}{\widehat{T_0}}$

$$\underline{T_{-i} = -\underbrace{\sum_{k=1}^{i} E_k}} \ \underline{\leq 0}$$

Somme de i variables aléatoires indépendantes de loi gamma $\Gamma(1,\theta)$,

donc d'après le lemme A, $\underline{-T_{-i} \sim \Gamma(i,\theta),\ \forall i\in\mathbb{N}^*}$

On écrit donc pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(N(]t,0]) = n) = \mathbb{P}\Big(\{T_{-n}\in]t,0]\}\cap\{T_{-n-1}\notin]t,0]\}\Big)$$

Or $T_{-n-1} = T_{-n} - E_{n+1}$ et $T_{-n} = -\sum_{k=1}^{n} E_k \perp\!\!\!\perp E_{n+1}$, par indépendance de $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$

d'où
$$\mathbb{P}(t< T_{-n}\leq 0 ; T_{-n-1} < t) = \mathbb{P}(t < T_{-n}\leq 0 ;\ E_{n+1} > T_{-n} - t)$$
$$= \mathbb{P}(t<T_{-n}\leq 0)\times \mathbb{P}(E_{n+1} > T_{-n} - t \mid t < T_{-n}\leq 0)$$
$$= \mathbb{P}(t<T_{-n}\leq 0)\times \mathbb{P}(E_{n+1} > T_{-n} - t) \quad \swarrow \perp\!\!\!\perp$$

---

et donc $\underline{\mathbb{P}(N(]t,0])=n)} = \displaystyle\int_t^0 f_{T_{-n}}(x)\left(\int_{x-t}^{+\infty} f_E(u)\,du\right)dx$

$$= \int_0^{-t} f_{\Gamma(n,\theta)}(x)\left(\int_{-x-t}^{+\infty} f_E(u)\,du\right)dx$$

on sait que $-T_{-n} \sim \Gamma(n,\theta)$ $(t<0)$

$$= \int_0^{-t} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\theta x}\left(\int_{-x-t}^{+\infty} \theta e^{-\theta u}\,du\right)dx$$

$$= \int_0^{-t} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\theta x}\left[-e^{-\theta u}\right]_{-x-t}^{+\infty} dx$$

et $\Gamma(n)=(n-1)!$

$$= \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta(-t)} \int_0^{-t} x^{n-1}\, n\, dx = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta|t|} \times \left[x^n\right]_0^{-t}$$

$$= \boxed{\frac{(\theta|t|)^n}{n!} e^{-\theta|t|}}$$

et $|t| = |]t,0]|$ où $|]t,0]|$ est la mesure de Lebesgue de $|]t,0]|$

Ainsi, on a montré que

$$\forall t<0,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(N(]t,0])=n) = \frac{(\theta|]t,0]|)^n}{n!} e^{-\theta|]t,0]|}$$

donc $\underline{\forall t<0,\ N(]t,0]) \sim \mathcal{P}(\theta|]t,0]|)}$

donc d'après ce qui précède, $\boxed{\forall A \in \mathcal{B}(]-\infty,0]),\ N(A) \sim \mathcal{P}(\theta|A|)}$

② Mq $N(]t_1,0]) \perp\!\!\!\perp N(]t_2,t_1])$ où $t_2<t_1<0$:

Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}\left[N(]t_1,0])=n\,;N(]t_2,t_1])=m\right]$

$$= \mathbb{P}\left(t_1<T_{-n}\,;\,T_{-n-1}<t_1\,;\,t_2<T_{-n-m}\,;\,T_{-n-m-1}<t_2\right)$$

cf démo du ①

$$= \mathbb{P}\left(t_1<T_{-n}\,;\,E_{n+1}>T_{-n}-t_1\,;\,\sum_{k=n+2}^{n+m} E_k < T_{-n}-t_2-E_{n+1}\,;\,E_{n+m+1}>T_{-n}-t_2-\sum_{k=n+1}^{n+m}E_k\right)$$

par indépendance de $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$

$$= \int_0^{-t_1} f_{\Gamma(n,\theta)}(x)\int_{-x-t_1}^{-x-t_2} f_{\mathcal{E}}(u)\int_0^{-x-t_2-u} f_{\Gamma(m-1,\theta)}(y)\int_{-x-y-u-t_2}^{+\infty} f_{\mathcal{E}}(v)\,dv\,dy\,du\,dx$$

$$= \int_0^{-t_1} f_{\Gamma(n,\theta)}(x)\int_{-x-t_1}^{-x-t_2} f_{\mathcal{E}}(u)\int_0^{-x-t_2-n} \frac{\theta^{m-1}}{\Gamma(m)}\,y^{m-2}e^{-\theta y}e^{\theta(y+t_2+u+x)}\,dy\,du\,dx$$

$$= \int_0^{-t_1} f_{\Gamma(n,\theta)}(x)\int_{-x-t_1}^{-x-t_2} f_{\mathcal{E}}(u)\,\frac{(-\theta(x+t_2+u))^{m-1}}{(m-1)!}\,e^{\theta(t_2+u+x)}\,du\,dx$$

$$= \int_0^{-t_1} \frac{f_{\Gamma(n,\theta)}(x)}{(m-1)!}\,\theta^m e^{\theta(t_2+x)}\int_{-x-t_1}^{-x-t_2}(-x-u-t_2)^{m-1}\,du$$

$$= \frac{\theta^m(t_1-t_2)^m}{m!}\int_0^{-t_1}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\,x^{n-1}e^{\theta t_2}\,dx$$

$$= \frac{\theta^m(t_1-t_2)^m}{m!}\times\frac{\theta^n(-t_1)^n}{n!}\,e^{\theta t_2} = \frac{\theta^m(t_1-t_2)^m}{m!}e^{-\theta(t_1-t_2)}\times\frac{\theta^n(-t_1)^n}{n!}e^{-\theta(-t_1)}$$

$$= \frac{\theta^m}{m!}\,|]t_2-t_1]|^m e^{-\theta|]t_2-t_1]|}\times\frac{\theta^n}{n!}\,|]t_1,0]|^n e^{-\theta|]t_1,0]|}$$

$= \mathbb{P}\Big(N(]t_1,0]) = n\Big) \times \mathbb{P}\Big(N(]t_2,t_1]) = m\Big)$

Ainsi, $\mathbb{P}\Big[N(]t_1,0]) = n \,;\, N(]t_2,t_1]) = m\Big] = \mathbb{P}\Big(N(]t_1,0]) = n\Big) \times \mathbb{P}\Big(N(]t_2,t_1]) = m\Big)$

pour tout $t_2 < t_1 < 0$ et $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Donc $\underline{N(]t_1,0]) \perp\!\!\!\perp N(]t_2,t_1]),\ \forall t_2 < t_1 < 0}$

On mq de manière analogue :

> Pour toute suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ strictement décroissante à valeur dans $\mathbb{R}_*^-$,
> $N(]t_1,0]), N(]t_2,t_1]), \dots, N(]t_{k+1},t_k])$ sont mutuellement indépendantes

Cette propriété s'obtient donc pour tout intervalles disjoints de $]-\infty,0]$ de forme $]a,b]$.
Or, ces intervalles engendrent $\mathcal{B}(]-\infty,0])$. On obtient donc la généralisation attendue :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall p \geq 2, \text{ si } A_1, \dots, A_p \in \mathcal{B}(]-\infty,0]) \text{ sont disjoints 2-à-2,} \\ \qquad \text{alors } N(A_1), \dots, N(A_p) \text{ sont mutuellement indépendants} \end{array}}$$

<u>Bilan</u> : ① ② $\longrightarrow$ $\boxed{(T_{-i})_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ définit un processus de Poisson sur }]-\infty,0].}$.

Lemme A : Mq $\mathcal{H}_n$: " la somme de n VAR indépendantes de loi $\Gamma(1,\theta)$ suit une loi $\Gamma(n,\theta)$ " par récurrence sur $\mathbb{N}$.

↳ Initialisation : $n=1$ → trivialement vrai, d'où $\mathcal{H}_1$

($n=2$ → on utilise l'exercice "Loi bêta" du cours de PROBA II, en l'appliquant avec $\begin{cases} U \sim \Gamma(1,\theta) \\ V \sim \Gamma(1,\theta) \end{cases}$ deux VAR iid, ce qui assure que $(U+V) \sim \Gamma(2,\theta)$

d'où $\mathcal{H}_2$)

↳ Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Sq $\mathcal{H}_n$ est vrai, mq $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie :

Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ une suite de VAR idd de loi $\Gamma(1,\theta)$

Alors on pose $\begin{cases} U = X_{n+1} \sim \Gamma(1,\theta) \\ V = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\theta) \end{cases}$ d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$

qui sont 2 VAR indépendantes d'après le lemme des coalitions

D'après l'exercice "Loi bêta" cité pour $\mathcal{H}_2$: $\sum_{i=1}^{n+1} X_i = U+V \sim \Gamma(n+1,\theta)$

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$

↳ Conclusion : Par principe de récurrence, on a mq

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \text{ la somme de } n \text{ VAR iid de loi } \Gamma(1,\theta) \text{ suit une loi } \Gamma(n,\theta)}$$

Question 3.a)

D'après l'énoncé, $\forall i \in [\![0, N_c-1]\!]$ $\rho(F)_{|c(F)=i} \sim \mathcal{U}([a_i, b_i])$

Or, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\rho(F) \leq r) = \sum_{i=0}^{N_c-1} \underbrace{\mathbb{P}(c(F)=i)}_{p_i} \times \underbrace{\mathbb{P}(\rho(F) \leq r \mid c(F)=i)}_{\text{valeur en } r \text{ de la fonction de répartition d'une loi } \mathcal{U}([a_i,b_i]) :} \quad \text{pour } r \in \mathbb{R}^+$$

$$\mathbb{1}_{[a_i,b_i]}(r) \times \frac{r-a_i}{b_i-a_i} + \mathbb{1}_{]b_i,+\infty[}(r)$$

Donc $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $F_\rho(r) = \mathbb{P}(\rho(F) \leq r)$

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{R}^+, \quad F_\rho(r) = \sum_{i=0}^{N_c-1} p_i \left(\frac{r-a_i}{b_i-a_i} \mathbb{1}_{[a_i,b_i]}(r) + \mathbb{1}_{]b_i,+\infty[}(r) \right)}$$