TARTU ÜLIKOOL
HARIDUSTEADUSKOND

Algebra ja funktsioonid

HTOS.02.245

Loengukonspekt

Koostaja: Evely Leetma

Tartu 2008

Sisukord

1 Algebralised avaldised 3

1.1 Algebraliste avaldiste mõiste ja klassifikatsioon 3

1.2 Üks- ja hulkliikmed 4

1.3 Algebralised murrud 8

2 Võrrandid ja võrrandisüsteemid 13

2.1 Võrrandid 13

2.2 Lineaarvõrrandid 17

2.3 Ruutvõrrandid 18

2.4 Murdvõrrandid 20

2.5 Võrrandisüsteemid 22

2.6 Võrrandite ja võrrandisüsteemide koostamine 24

3 Funktsioonid 30

3.1 Põhimõisted 30

3.2 Lineaarfunktsioonid 34

3.3 Murdlineaarsed funktsioonid 34

3.4 Astmefunktsioonid 35

3.5 Juurfunktsioonid 36

3.6 Eksponentfunktsioonid 37

3.7 Logaritmfunktsioonid 38

3.8 Trigonomeetrilised funktsioonid 38

3.9 Elementaarfunktsiooni mõiste 39

4 Võrratused 45

4.1 Võrratuste samaväärsus 45

4.2 Võrratuste lahendamine 46

4.3 Võrratussüsteemide lahendamine 48

Vastused 53

PEATÜKK 1

Algebralised avaldised

1.1. Algebraliste avaldiste mõiste ja klassifikatsioon

Matemaatiline **avaldis** on eeskiri, mis määrab teatava objekti väärtuse leidmiseks konstantide ja muutujatega sooritatavad operatsioonid ning operatsioonide järjekorra.

Algebraline avaldis on avaldis, milles on kasutatud vaid lõplikku hulka aritmeetilisi operatsioone (liitmist, lahutamist, korrutamist, jagamist), astendamisi ja/või juurimisi, kus astendajad ja juurijad on täisarvud. Näited:

a)	$a^3b^{-2}+az-\dfrac{x+a}{y^{10}}$	c)	$\dfrac{x+a}{4-b}$	e)	$\sqrt[5]{x}+a^{-4}z^7$	g)	$\dfrac{2x^2-x+\sqrt{3}}{x^3-1}$
b)	$x+\sqrt{x^2-4ay}$	d)	$\dfrac{\sqrt{4}-5^{-2}}{\sqrt[3]{7}}$	f)	$\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4}}+\sqrt[3]{c}$	h)	$4ax^2-5bx+6$

Algebraliste avaldiste põhiliigid.

Algebralist avaldist nimetatakse vaadeldava muutuja (vaadeldavate muutujate) suhtes **ratsionaalseks**, kui sellele muutujale (nendele muutujatele) ei tule rakendada juurimist. Vastasel juhul on tegemist **irratsionaalse avaldisega**. Eelnevas näidetena toodud avaldistest on a), c), g) ja h) ratsionaalsed muutuja x suhtes. Muutuja a suhtes on avaldised b) ja f) irratsionaalsed.

Ratsionaalset avaldist nimetatakse **täisratsionaalseks**, kui temas ei esine jagamist vaadeldava muutujaga (vaadeldavate muutujatega). Vastasel juhul kõneldakse **murdratsionaalsest avaldisest**. Avaldised a), c) ja h) on täisratsionaalsed avaldised muutuja x suhtes, avaldis g) on murdratsionaalne avaldis.

Üldjuhul räägitakse ratsionaalsest algebralisest avaldisest, kui avaldis ei sisalda juurimistehet ja irratsionaalsest avaldisest, kui sisaldab.

Kui algebralise avaldise väärtuse leidmiseks tuleb teostada tehteid vaid reaalarvudega (konstantidega), siis räägitakse **arvavaldisest**. Sellisteks on näiteks $5-(3+8\cdot 4)$ ja d). Iga muutujaid sisaldav avaldis muutub arvavaldiseks, kui kõikide muutujate asemele panna muutujate mingid konkreetsed reaalarvulised väärtused.

Avaldise määramispiirkond.

Muutujate väärtuste hulka, mille korral antud avaldisel leidub väärtus, nimetatakse antud avaldise **määramispiirkonnaks**. Koolimatemaatikas piirdutakse selliste avaldistega, milles muutujad omandavad vaid reaalarvulisi väärtusi ning kõigi tehete tulemus on reaalarv! Avaldise määramispiirkonna leidmisel tuleks arvestada järgmisi fakte: 1) nulliga ei saa jagada; 2) reaalarvude hulgas ei saa leida paarisarvulist juurt negatiivsest arvust. Näiteks puudub avaldisel $\sqrt{x-2}$ reaalarvuline väärtus, kui $x-2<0$ ehk $x<2$. Seega avaldise $\sqrt{x-2}$ määramispiirkond on $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2\}$. Mitme (algebralise) avaldise koos vaatlemisel tuleb kindlaks teha nende ühine määramispiirkond. Nii tuleb avaldiste $A = \dfrac{x}{x+1}$ ja $B = \dfrac{y}{x(y+2)}$ koos vaatlemisel eeldada, et $x \neq -1$, $x \neq 0$ ja $y \neq -2$.

Avaldise samasusteisendus.

Kahte avaldist nimetatakse **samaväärseks antud piirkonnas** D, kui piirkond D kuulub antud avaldiste ühisesse määramispiirkonda ning muutujate mistahes väärtuste korral piirkonnast D on antud avaldiste väärtused võrdsed. Näiteks on avaldised $(a-b)^2$ ja $a^2-2ab+b^2$ samaväärsed piirkonnas $D = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$. Avaldised $x+1$ ja $y(x+1)$ ei ole samaväärsed üheski piirkonnas, sest nad sisaldavad erineva arvu muutujaid. Avaldised $x+1$ ja $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ on samaväärsed ühises määramispiirkonnas $D = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \neq 1\}$, ei ole aga samaväärsed kogu reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$.

Üleminekut ühelt avaldiselt teisele, temaga samaväärsele avaldisele, nimetatakse avaldise **samasusteisenduseks**.

Võrdus, samasus ja võrrand.

Kui kahe avaldise A ja B vahele on kirjutatud võrdusmärk, siis kõneldakse **võrdusest**

$$A = B. \tag{1.1}$$

Näiteks on võrdus

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{x(y+2)}. \tag{1.2}$$

Andes võrduses kõigile muutujatele konkreetsed arvulised väärtused avaldiste A ja B ühisest määramispiirkonnast, saame arvvõrduse. Näiteks saame võrdusest (1.2) muutujate väärtustel $x=1$ ja $y=2$ tõese arvvõrduse $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Muutujate väärtustel $x=1$ ja $y=1$ saame aga väära arvvõrduse $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

Muutujaid sisaldavat võrdust (1.1), mis muutub tõeseks arvvõrduseks muutuja kõigi väärtuste korral avaldiste A ja B ühisest määramispiirkonnast, nimetatakse **samasuseks** $A \equiv B$. Lihtsaimad samasused on aritmeetiliste tehete omadusi väljendavad võrdused $a+b=b+a$, $(a+b)c=ac+bc$ jne. Samasuseks osutub ka võrdus $x+1=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ igal reaalarvude hulgal, millel $x \neq 1$.

Muutujaid sisaldavat võrdust (1.1), mis ei osutu samasuseks avaldiste A ja B ühises määramispiirkonnas, nimetatakse **võrrandiks** $A=B$. Avaldiste ühist määramispiirkonda nimetatakse võrrandi määramispiirkonnaks. Muutujate neid väärtusi võrrandi $A=B$ määramispiirkonnast, mis muudavad antud võrrandi tõeseks arvvõrduseks, nimetatakse võrrandi lahenditeks. Nii näiteks osutub võrdus (1.2) võrrandiks, mille üheks lahendiks on $x=1$, $y=2$.

1.2. Üks- ja hulkliikmed

Reaalarvulise teguri ja ühe või mitme muutuja naturaalarvulise astendajaga astme korrutist nimetatakse **üksliikmeks**. Näiteks avaldised xyz, $3z^4$, $-5b^2cz^3$, 2^4df^3, $0{,}3x^3$ ja $0{,}75$

on üksliikmed, avaldised $x+1$, a^2+b^2, $4y^2\frac{1}{z}$ ja $-6xz^{-4}$ aga mitte. Üksliikmena vaadeldakse ka igat arvu ja üksikut tähelist sümbolit. Üksliikmes esinevat reaalarvulist tegurit nimetatakse **üksliikme kordajaks**. Kui see võrdub ühega, siis jäetakse ta kirjutamata. Üksliikme kordaja märki (+ või −) nimetatakse **üksliikme märgiks**. **Üksliikme astmeks** nimetatakse temas olevate muutujate astendajate summat. Nii on $-7xyz^3$ 5-nda astme üksliige, sest $1+1+3=5$, ja $2a$ esimese astme üksliige. Üksliikme 5^3 aste on 0. Üksliikmeid nimetatakse **sarnasteks**, kui nad üksteisest üldse ei erine või kui nad erinevad ainult kordaja poolest. Nii on sarnased üksliikmed $5a^2bc^4$ ja $(-0{,}2)^7a^2bc^4$ ning xy ja xy, kuid sarnased ei ole $2xy^2$ ja $2x^2y$.
Üksliikmete liitmisel ja lahutamisel saadud avaldist nimetatakse üksliikmete algebraliseks summaks ehk **hulkliikmeks**. Nii on avaldis $2x^2+4xy-\frac{3}{4}xyz-12$ hulkliige.

Üks- ja hulkliikmete koondamine.
Üksliikmete koondamiseks nimetatakse sarnaste liikmete algebralise summa asendamist sellise liidetavatega sarnase üksliikmega, mille kordaja on võrdne liidetavate üksliikmete kordajate summaga. Seega koondades sarnased üksliikmed summas $2xy-5xy+6xy$ tuleb asendada see üksliikmega $(2-5+6)xy=3xy$. Hulkliikme koondamine tähendab antud hulkliikme esitamist kujul, milles kõik sarnased üksliikmed on koondatud. Näiteks $\underline{4x^2}\,\underline{\underline{-3x}}+7\,\underline{-8x^2}+\underline{\underline{x}}-2=-4x^2-2x+5$ ning $\underline{3xy^2}+5x\,\underline{-6xy^2}\,\underline{\underline{-2xy}}+\underline{2xy^2}\,\underline{\underline{-5xy}}-z=-xy^2-7xy+5x-z$.

Astendamise abivalemid

$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$ (negatiivne astendaja)

$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ tükki}}\cdot\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ tükki}}=a^{m+n}$ (sama arvu astmete korrutamine)

$a^m:a^n=a^{m-n}$ (sama arvu astmete jagamine)

$(a^m)^n=(\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ tükki}})^n=\underbrace{\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ tükki}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ tükki}}}_{n\text{ tükki}}=a^{m\cdot n}$ (astme astendamine)

Tehted üks- ja hulkliikmetega.

1. Hulkliikmete summa ja vahe.

$$(5x^2-4x+3)-(3x^2-x+2)=5x^2-4x+3-3x^2+x-2=2x^2-3x+1$$

2. Üksliikme korrutamine üksliikmega.

$$6x^3yz^2\cdot(-2xz^2)=6\cdot(-2)\cdot x^3\cdot x\cdot y\cdot z^2\cdot z^2=-12x^4yz^4$$

3. Hulkliikme korrutamine üksliikmega.

$$\begin{aligned}
(6x^2+2xy-3y^2)\cdot(-2x) &= (6x^2)\cdot(-2x)+(2xy)\cdot(-2x)+(-3y^2)\cdot(-2x)= \\
&= -12x^3+(-4x^2y)+6xy^2= \\
&= -12x^3-4x^2y+6xy^2
\end{aligned}$$

$$(-1)\cdot(x^7+2x-3) = -(x^7+2x-3)=-x^7-2x+3$$

4. Hulkliikme korrutamine hulkliikmega.

$$\begin{aligned}
(2x-y)(x^3+y^2-2xy) &= (2x)\cdot(x^3)+(2x)\cdot(y^2)+(2x)\cdot(-2xy)+ \\
&\quad +(-y)\cdot(x^3)+(-y)\cdot(y^2)+(-y)\cdot(-2xy)= \\
&= 2x^4+2xy^2+(-4x^2y)+(-x^3y)+(-y^3)+2xy^2= \\
&= 2x^4+4xy^2-4x^2y-x^3y-y^3
\end{aligned}$$

5. Üksliikme jagamine üksliikmega. (Tulemus ei ole alati üksliige.)

$$\begin{aligned}
6x^2y^4:(-2xy) &= -3xy^3, \quad \text{sest } -3xy^3\cdot(-2xy)=6x^2y^4 \\
4xy^2:(-2xy^3z) &= -2y^{-1}z^{-1}=-\frac{2}{yz} \quad \text{(ei ole üksliige)}
\end{aligned}$$

6. Hulkliikme jagamine üksliikmega. (Tulemus ei ole alati hulkliige.)

$$(5x^3-6x^2+7):x=(5x^3):x+(-6x^2):x+7:x=5x^2-6x+\frac{7}{x} \quad \text{(ei ole hulkliige)}$$

7. Hulkliikme jagamine hulkliikmega.

$$\begin{array}{l}
(2x^3+3x^2+x+6):(x+2)=2x^2-x+3 \\
\underline{2x^3+4x^2} \\
\quad -x^2+x+6 \\
\quad \underline{-x^2-2x} \\
\qquad\quad 3x+6 \\
\qquad\quad \underline{3x+6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(m^4-6m^2+1):(m^2+2m-1)=m^2-2m-1 \\
\underline{m^4+2m^3-m^2} \\
\quad -2m^3-5m^2+1 \\
\quad \underline{-2m^3-4m^2+2m} \\
\qquad\quad -m^2-2m+1 \\
\qquad\quad \underline{-m^2-2m+1} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

8. Üksliikme astendamine.

$$(-2x^2y^3z)^4=(-2)^4\cdot(x^2)^4\cdot(y^3)^4\cdot z^4=16x^8y^{12}z^4$$

9. Hulkliikme astendamine.

$$\begin{aligned}
(2a-5)^3 &= (2a-5)\cdot(2a-5)\cdot(2a-5)= \\
&= (4a^2-10a-10a+25)\cdot(2a-5)=(4a^2-20a+25)\cdot(2a-5)= \\
&= 8a^3-20a^2-40a^2+100a+50a-125=8a^3-60a^2+150a-125
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= (a+b+c)\cdot(a+b+c)= \\
&= a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2= \\
&= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc
\end{aligned}$$

Korrutamise abivalemid.

1. Summa ruudu valem $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. Vahe ruudu valem $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. Summa kuubi valem $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
4. Vahe kuubi valem $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
5. Ruutude vahe valem $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
6. Kuupide summa valem $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
7. Kuupide vahe valem $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Hulkliikme teguriteks lahutamine.

Hulkliikme teguriteks lahutamine tähendab hulkliikme esitamist selliste üks- või hulkliikmete korrutisena, millede korrutamisel saame esialgse hulkliikme.

1. Ühise teguri sulgude ette toomine.

$$\begin{aligned}
12ax^4 - 6a^7x^7 + 3ax^3 &= (3ax^3)\cdot(4x) + (3ax^3)\cdot(-2a^6x^4) + (3ax^3)\cdot 1 = \\
&= 3ax^3(4x - 2a^6x + 1) \\
6a(2c-d) + 3b(2c-d) &= (2c-d)(6a+3b) \\
3p(p-q) - 5(q-p)^2 &= 3p(p-q) - 5(p-q)^2 = (p-q)[3p - 5(p-q)] = \\
&= (p-q)(3p - 5p + 5q) = (p-q)(-2p+5q) \\
4x(x-y) - 8x^2y(y-x) + 8xy - 8x^2 &= 4x(x-y) + 8x^2y(x-y) - 8x(x-y) = \\
&= 4x(x-y)(1 + 2xy - 2) = 4x(x-y)(2xy-1)
\end{aligned}$$

2. Rühmitamine.

$$\begin{aligned}
ab + 2a - 3b - 6 &= (ab+2a) - (3b+6) = a(b+2) - 3(b+2) = (b+2)(a-3) \\
2x^2 + 3x + 1 &= 2x^2 + 2x + x + 1 = 2x(x+1) + (x+1) = (x+1)(2x+1)
\end{aligned}$$

3. Korrutamise abivalemite rakendamine.

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 + 2bc - c^2 &= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2 = \\
&= [a - (b-c)][a + (b-c)] = (a-b+c)(a+b-c) \\
a^{11} - 2a^{10} + a^9 - a^7 + 2a^6 - a^5 &= a^5(a^6 - 2a^5 + a^4 - a^2 + 2a - 1) = \\
&= a^5[(a^6 - 2a^5 + a^4) - (a^2 - 2a + 1)] = \\
&= a^5[a^4(a^2 - 2a + 1) - (a^2 - 2a + 1)] = \\
&= a^5(a^2 - 2a + 1)(a^4 - 1) = \\
&= a^5(a-1)^2(a^2-1)(a^2+1) = \\
&= a^5(a-1)^2(a-1)(a+1)(a^2+1) = \\
&= a^5(a-1)^3(a+1)(a^2+1)
\end{aligned}$$

4. Ruutkolmliikme teguriteks lahutamine.
a) Eraldame täisruudu ja kasutame ruutude vahe valemit.

$$\begin{aligned} x^2-8x+7 &= x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+7=(x-4)^2-16+7= \\ &= (x-4)^2-9=(x-4)^2-3^2= \\ &= (x-4-3)(x-4+3)=(x-7)(x-1) \end{aligned}$$

b) Lahendame ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ (vt 2.3. Ruutvõrrandid). Reaalarvuliste lahendite x_1 ja x_2 korral esitub ruutkolmliige kujul $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.
Lahutame teguriteks ruutkolmliikme x^2-5x-6.

$$x^2-5x-6=0$$
$$x=-\frac{-5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2-(-6)}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25+24}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}$$
$$x_1=6,\ x_2=-1$$
$$x^2-5x-6=1\cdot(x-6)(x-(-1))=(x-6)(x+1)$$

Lahutame teguriteks ruutkolmliikme $2x^2+5x-3$.

$$2x^2+5x-3=0$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4}$$
$$x_1=0{,}5,\ x_2=-3$$
$$2x^2+5x-3=2(x-0{,}5)(x-(-3))=(2x-1)(x+3)$$

1.3. Algebralised murrud

Algebralisi avaldisi, milles ei esine jagamistehet ega negatiivseid astendajaid, nimetatakse algebralisteks **täisavaldisteks**. Üks ja hulkliikmed on täisavaldised, kuid avaldised $4x^{-5}y$ ja $5:(a+b)$ mitte. Kahe algebralise täisavaldise A ja B jagatist $A:B$, mis ei osutu täisavaldiseks, nimetatakse **algebraliseks murruks** $\frac{A}{B}$. Näited:

a) $-\dfrac{10ab}{3a^3b^3}$ b) $\dfrac{6xy-3x^2z}{2x^2}$ c) $\dfrac{\sqrt{a^2}+a+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{a+b}-\sqrt{c}}$

Algebraline murd $\frac{A}{B}$ on määratud vaid muutujate selliste väärtuste korral, mis kuuluvad avaldiste A ja B ühisesse määramispiirkonda ning ei muuda nimetaja B väärtust nulliks.

Algebralise murru põhiomadus.
Hariliku murru põhiomadus laieneb ka algebralistele murdudele. Kui avaldiste A, B ja C ühisesse määramispiirkonda kuuluvate muutujate väärtuste korral $B\neq 0$ ja $C\neq 0$, siis kehtib samasus

$$\frac{A}{B}=\frac{C\cdot A}{C\cdot B}.$$

Näide 1. $\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}\equiv\dfrac{(x^2-2x+4)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$ piirkonnas, kus $x\neq 2$ ja $x\neq -2$.

Näide 2. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y} \equiv \dfrac{(x^2+xy+y^2)(x-y)}{(x+y)(x-y)} \equiv \dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$ piirkonnas, kus $x^2-y^2 \neq 0$.

Näide 3. $\dfrac{x^4-81}{x-3} \equiv \dfrac{(x^2-9)(x^2+9)}{x-3} \equiv \dfrac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{x-3} \equiv (x+3)(x^2+9) \equiv$

$\equiv x^3+3x^2+9x+27$ piirkonnas, kus $x \neq 3$.

Algebraliste murdude teisendamine ühenimelisteks.
Algebralise murru põhiomadust kasutades saab erinevate nimetajatega murde teisendada ühenimelisteks. Enne ühenimeliseks teisendamist tuleks murdude nimetajais olevad hulkliikmed lahutada tegureiks ning taandada kõiki murde niipalju, kui võimalik.

Näide 1. Teisendame ühenimeliseks murrud $\dfrac{x+1}{2x-5}$ ja $\dfrac{x^2+2x+3}{8x^3-125}$.

$8x^3-125=(2x)^3-5^3=(2x-5)(4x^2+10x+25)$

Murdude ühine nimetaja on $(2x-5)(4x^2+10x+25)$. Esimese murru laiendaja on $4x^2+10x+25$, teise murru laiendaja 1.

$$\left.\frac{x+1}{2x-5}\right.^{4x^2+10x+25} = \frac{(x+1)(4x^2+10x+25)}{(2x-5)(4x^2+10x+25)} =$$
$$= \frac{4x^3+10x^2+25x+4x^2+10x+25}{8x^3-125} = \frac{4x^3+14x^2+35x+25}{8x^3-125}$$

Näide 2. Teisendame ühenimeliseks murrud $\dfrac{2}{(x+1)(x-2)}$ ja $\dfrac{3}{(x-2)(x+3)}$.

Murdude ühine nimetaja on $(x+1)(x-2)(x+3)$.

$$\left.\frac{2}{(x+1)(x-2)}\right.^{x+3} = \frac{2x+6}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$
$$\left.\frac{3}{(x-2)(x+3)}\right.^{x+1} = \frac{3x+3}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

Tehted algebraliste murdudega.

Kõik tehted toimuvad analoogiliselt vastavatele tehetele harilike murdudega. Resultaat tuleb alati lihtsustada.

Näide 1.

$$\frac{x^3}{x-3}-\frac{3x^3+81}{x^2-9} = \left.\frac{x^3}{x-3}\right.^{x+3} - \left.\frac{3x^3+81}{(x-3)(x+3)}\right.^{1} = \frac{x^4+3x^3}{(x-3)(x+3)} - \frac{3x^3+81}{(x-3)(x+3)} =$$
$$= \frac{x^4+3x^3-3x^3-81}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^4-81}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x^2)^2-9^2}{(x-3)(x+3)} =$$
$$= \frac{(x^2-9)(x^2+9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{(x-3)(x+3)} = x^2+9$$

Näide 2.

$$\left(3+\frac{x^2}{3-2x}\right)\cdot\frac{6-4x}{9-x^2} = \frac{3(3-2x)+x^2}{3-2x}\cdot\frac{6-4x}{9-x^2} = \frac{x^2-6x+9}{3-2x}\cdot\frac{2(3-2x)}{(3-x)(3+x)} =$$

$$= \frac{(x-3)^2}{3-2x}\cdot\frac{2(3-2x)}{(3-x)(3+x)} = \frac{\overset{x-3}{\cancel{(x-3)^2}}\,2\,\overset{1}{\cancel{(3-2x)}}}{\underset{1}{\cancel{(3-2x)}}\,\underset{-1}{\cancel{(3-x)}}(3+x)} =$$

$$= \frac{2(x-3)}{-(3+x)} = \frac{2(x-3)\cdot(-1)}{-(3+x)\cdot(-1)} = \frac{2(3-x)}{3+x}$$

Näide 3.

$$\frac{15x^2y}{x^2-y^2} : \frac{5x}{x-y} = \frac{15x^2y}{x^2-y^2}\cdot\frac{x-y}{5x} = \frac{15x^2y(x-y)}{(x^2-y^2)5x} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}\,\overset{x}{\cancel{x^2}}\,y\,\overset{1}{\cancel{(x-y)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-y)}}\,(x+y)\,\underset{1}{\cancel{5}}\,\underset{1}{\cancel{x}}} = \frac{3xy}{x+y}$$

Näide 4.

$$\left(\frac{a^2-1}{ab+b}\right)^3 = \left(\frac{\cancel{(a+1)}\,(a-1)}{b\cancel{(a+1)}}\right)^3 = \left(\frac{a-1}{b}\right)^3\ \frac{(a-1)^3}{b^3}$$

Ülesanded [1]

1. Leia avaldise määramispiirkond.

1) $\dfrac{a^2-1}{a-1}$

2) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{x+y}}$

3) x^2+4x-2

4) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

5) $\sqrt{\dfrac{2x}{3}}$

6) $\dfrac{\sqrt[3]{ab+4}}{2a-1}$

7) $\sqrt{2x+4}-\dfrac{2x}{x^2+1}$

8) $\dfrac{3x^3}{x-2}+\dfrac{7}{2-x}$

2. Arvuta.

1) $(-1)^4+(-1)^3+1-(-1)^2-1^5-1^6$

2) $(-1)^5-(-2)^4-(-3)^3+(-4)^2$

3) $\left(-2a^2\right)^3+\left(-2a^3\right)^2-\left[(-a)^2\right]^3-\left[-(-2a)^2\right]^3$

4) $\left(-2a^5\right)^2-\left(-2a^2\right)^5+\left[-2(-a)^2\right]^5-\left[2(-a)^5\right]^2$

3. Lihtsusta avaldis ja arvutada tema väärtus.

1) $(a^2-ab+b^2)(a+b)$, kui $a=8$, $b=-5$

2) $(a^2-a+1)(a+1)+(a^2+a+1)(a-1)$, kui $a=6$

3) $(1+x-y)^2-(1-x+y)^2$, kui $x-y=7$

4) $(x^2+2xy+y^2)\cdot(1+x+y)(1-x-y)$, kui $x+y=-4$

[1]Lepmann, L., Lepmann T. Matemaatika ülesandeid ettevalmistusosakonnas õppijaile. Trt. 1988.
Allik, I., Jõgi, T., Kõiv, H. Vastustega matemaatika ülesannete kogu riigieksamiks valmistujale. Tln. 2002.

4. Lihtsusta avaldised.

1) $(a+b)^2-(a-b)^2$
2) $(a+b-c)(a-b+c)$
3) $(x+1)^3-x(x-1)^2-(x+1)(x-1)$
4) $(a-b)^3-(a+b)^3+2b(3a^2+b^2)$
5) $(4x-3)^3-x(3x-11)(3x+11)$
6) $(8-x^2)^2+(7-x^2)(7+x^2)$

5. Lahuta teguriteks.

1) $12ab-18bc+24bd$
2) $60x^2y^3+15xy^2-30x^2y^2$
3) $b(a+1)-c(a+1)$
4) $a(x-y)-b(y-x)$
5) $3x(4-a)+4x(a-4)$
6) $2+b-c(2+b)$
7) $3(x+y)-x-y$
8) $25-y^2$
9) $288-2y^2$
10) $4a^3m-am^3$
11) $5x-20a^2x$
12) $9a^2-(2x-1)^2$
13) $(a-2b)^2-(a+2b)^2$
14) a^2-4a+4
15) $25-10y+y^2$
16) a^2-2a+4
17) $2a^4+4a^3b+2a^2b^2$
18) x^3+3x^2+3x+1

6. Lahuta teguriteks.

1) a^3+125
2) $64-x^3$
3) $128a^3b^2-432b^2c^3$
4) $ax+ay+2x+2y$
5) $t^2-at-3t+3a$
6) x^3+x^2+x+1
7) x^3-2x^2-2x+4
8) x^3-3x^2+6x-8
9) a^2-b^2-a-b
10) $a^2-b^2+2bc-c^2$
11) $16a^4+8a^3-2a-1$
12) $x^2+14x+48$
13) $3u^2+5u-2$
14) x^3-3x^2-4x
15) $x^2+y^2-2x+2y-2xy+1$
16) u^3+u^2-4u-4
17) $4x^2-20xy+25y^2-36$
18) $2-18a^3+54a^6-54a^9$
19) $27x^6-27x^4y+9x^2y^2-y^3$
20) $x^2+2x+y^2+2y+2xy+1$

7. Taanda murrud.

1) $\dfrac{x^2+6x-91}{x^2+8x-105}$
2) $\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$
3) $\dfrac{2m^2+5m-3}{m^2-9}$
4) $\dfrac{n^3-64}{n^2-11n+28}$
5) $\dfrac{a^2+6ab-91b^2}{a^2+8ab-105b^2}$
6) $\dfrac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab-2b^2}$

8. Lihtsusta avaldised.

1) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{3-a}{b}$
2) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{3}{4}$
3) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}$
4) $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x-y}{2(x+y)}$
5) $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{a+b}$
6) $\dfrac{ab+a^2+b^2}{a^3-b^3}-\dfrac{1}{a-b}$
7) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{-x}$
8) $\dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{-y}$

9) $\dfrac{2a+3x}{2a-3x}-\dfrac{2a-3x}{3x-2a}$

10) $\dfrac{4a+x}{4a-x}+\dfrac{4a-x}{x-4a}$

11) $\dfrac{x}{a^3+1}+\dfrac{x}{a^3-1}$

12) $\dfrac{a^3}{2(a+1)^3}-\dfrac{a^2}{(a+1)^2}+\dfrac{a}{2(a+1)}$

13) $\dfrac{2}{2a+3}+\dfrac{3}{3-2a}+\dfrac{2a+15}{4a^2-9}$

14) $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2-b^2+2bc-c^2}+\dfrac{a-b-c}{a+b-c}-\dfrac{a+b+c}{a-b+c}$

9. Lihtsusta avaldised.

1) $\dfrac{a-b}{4b^3}\cdot\dfrac{8b^4}{a^2-ab}$

2) $\dfrac{n^2+2n+1}{18n^3}\cdot\dfrac{9n^4}{n^2-1}$

3) $\dfrac{a^2-3ax}{12x}:\dfrac{ax-3x^2}{36a}$

4) $\dfrac{a^4-64ab^3}{a^2-2ab+b^2}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2b-16b^3}:\dfrac{a^3+4a^2b+16ab^2}{ab+4b^2}$

5) $\dfrac{a^4-a^2-6a-9}{a^4+a^2}\cdot\dfrac{a^6+1}{a^4+2a^3+a^2-9}:\dfrac{a^4-a^2+1}{a^4+a^3-3a^2}$

6) $1:\left(\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{4a^2b-ab^2}{b^3-a^3}+\dfrac{b^2}{a^2+ab+b^2}\right)-\dfrac{3ab}{(a-b)^2}$

7) $\left(\dfrac{b^2+9}{27-3b^2}+\dfrac{b}{3b+9}-\dfrac{3}{b^2-3b}\right):\dfrac{(3b+9)^2}{3b^2-b^3}$

8) $\dfrac{x-2y}{x-y}:\left(\dfrac{20xy^2}{x^3-y^3}+\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}-\dfrac{x-8y}{y-x}\right)-\dfrac{3xy+y^2}{(2y-x)^2}$

9) $\left(3-\dfrac{9m-1}{m+3m^2}\right)\cdot\left(m+1+\dfrac{4}{9m-3}\right)$

10) $\left(\dfrac{5-3a}{4+2a}-1+a\right):\left(a-a^2+2a^3\right)$

11) $\dfrac{2a}{a^2-4b^2}+\dfrac{1}{2b^2+6b-ab-3a}\cdot\left(b+\dfrac{3b-6}{b-2}\right)$

12) $\dfrac{8a-4}{4-a^2}+(a-b)\dfrac{a+1}{a^2-ab-2a+2b}$

13) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$

14) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{b^3-a^3}{b^2-a^2}$

15) $\left(\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}+\dfrac{1}{1-x}\right):\dfrac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$

16) $\left(\dfrac{a^2-ax}{a^2x+x^3}-\dfrac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2x-a^3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x-1}{a}-\dfrac{x}{a^2}\right)$

17) $\dfrac{3abc}{bc+ac-ab}-\dfrac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$

PEATÜKK 2

Võrrandid ja võrrandisüsteemid

2.1. Võrrandid

Olgu A ja B algebralised avaldised. Muutujaid sisaldavat võrdust $A = B$ nimetatakse **võrrandiks**, kui ta ei osutu samasuseks avaldiste A ja B ühises määramispiirkonnas. Avaldiste ühist määramispiirkonda nimetatakse **võrrandi määramispiirkonnaks**. Muutujate neid väärtusi võrrandi määramispiirkonnast, mis muudavad antud võrrandi tõeseks arvvõrduseks, nimetatakse **võrrandi lahenditeks**. Võrrandi $A = 0$ lahendeid nimetatakse ka algebralise avaldise A **nullkohtadeks**.

Leidub võrrandeid, millel lahendid puuduvad, mõnel võrrandil on neid lõplik arv, teisel võib lahendeid olla kuitahes palju. Oluline on jälgida võrrandi määramispiirkonda võrrandi lahendite leidmisel. Näiteks puuduvad võrrandil $x - \frac{1}{2} = 0$ lahendid naturaalarvude hulgas, leidub aga üks lahend ratsionaalarvude hulgas. Võrrandil $x^2 = -4$ puuduvad reaalarvulised lahendid, kompleksarvude hulgas on aga lahendid olemas.

Ühe tundmatuga võrrandi võime esitada kujul $f(x) = g(x)$. Toome näiteid ühe tundmatuga võrrandi määramispiirkonna ja lahendite kohta.

Näide 1. Võrrandi $2x + 3 = x + 8$ määramispiirkonnaks on $(-\infty, \infty)$ ja lahend $x = 5$ kuulub määramispiirkonda.

Näide 2. Võrrandit

$$\frac{5x}{x+3} - \frac{7+x}{3-x} = \frac{12(x+2)}{x^2-9}$$

teisendades saame võrrandi

$$\frac{5x}{x+3} + \frac{7+x}{x-3} = \frac{12(x+2)}{(x-3)(x+3)},$$

mille määramispiirkonnaks on $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. Viimane murdvõrrand taandub ruutvõrrandiks $6x^2 - 17x - 3 = 0$ lahenditega $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{6}$. Kuna $x_1 = 3$ ei kuulu määramispiirkonda, siis lähtevõrrandi lahendiks on $x = -\frac{1}{6}$.

Näide 3. Võrrandi

$$x^2 + 6 + \frac{1}{x-2} = 5x + \frac{1}{x-2}$$

määramispiirkonda ei kuulu $x = 2$. Koondades sarnased liikmed saame võrrandi $x^2 - 5x + 6 = 0$, mille lahenditeks on $x_1 = 2$ ja $x_2 = 3$. Et $x = 2$ ei kuulu määramispiirkonda, on esialgse võrrandi lahendiks $x = 3$.

Võrrandite samaväärsus ja samasusteisendused.

Kaht võrrandit $f(x) = g(x)$ ja $f_1(x) = g_1(x)$ nimetatakse **samaväärseteks** (ekvivalentseteks) mingil hulgal M, kui neil on sellel hulgal ühed ja samad lahendid. Samaväärsete võrrandite vahele kirjutatakse märk $\Leftrightarrow$. Võrrandeid nimetatakse samaväärseteks ka juhul kui võrrandeil ei ole lahendeid.

Näide 1. Võrrandid $x^2 - x = 20$ ja $(x + 4)(x + 5) = 0$ on samaväärsed kogu reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$, sest mõlema lahenditeks on $x_1 = -4$ ja $x_2 = 5$.

Näide 2. Võrrandid $(x-3)(2x+5)(x^2-2) = 0$ ja $(x-3)(2x+5) = 0$ on samaväärsed ratsionaalarvude hulgal $\mathbb{Q}$, kuid ei ole samaväärsed reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$. Esimese võrrandi ratsionaalarvulised lahendid $x = 3$ ja $x = -2{,}5$ on ühtlasi teise võrrandi lahenditeks. Esimese võrrandi irratsionaalarvulised lahendid $x = \pm\sqrt{2}$ ei ole teise võrrandi lahenditeks.

Näide 3. Võrrandid $x = 0$ ja $x(x^2 + 1) = 0$ on samaväärsed reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$. Lahendiks on $x = 0$.

Näide 4. Võrrandid $x^2 = x$ ja $\frac{x^2+1}{x} = \frac{x+1}{x}$ ei ole samaväärsed reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$, sest esimese võrrandi lahend $x = 0$ ei kuulu teise võrrandi määramispiirkonda.

Näide 5. Võrrandid $x^2 + 5 = 0$ ja $2x^2 + 7 = 0$ on reaalarvude hulgal samaväärsed, kuna kummalgi võrrandil ei ole reaalarvulisi lahendeid.

Teisendusi, mis annavad esialgse võrrandiga samaväärse võrrandi, nimetatakse **samasusteisendusteks**.

1. Kui võrrandi $f(x) = g(x)$ pooled ära vahetada, saame esialgse võrrandiga samaväärse võrrandi $g(x) = f(x)$.

2. Kui võrrandi $f(x) = g(x)$ mõlemale poolele liita $h(x)$, mis omab mõtet võrrandi määramispiirkonnas, siis uus võrrand $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ on esialgse võrrandiga samaväärne.

   Järeldus. Võrrandi liikmeid võib viia võrduse ühelt poolelt teisele, muutes iga üleviidava liikme ees märgi vastupidiseks.

3. Kui võrrandi $f(x) = g(x)$ mõlemat poolt korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga, siis saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi.

   Märkus. Võrrandi mõlemat poolt ei või korrutada ega jagada muutujat sisaldava avaldisega. Selle tegevuse käigus võib lahendeid juurde tulla või kaotsi minna.

   Näide 1. Võrrandi $x^3 = x$ jagamisel x-ga saame $x^2 = 1$ ehk $x = \pm 1$. Kaotasime lahendi $x = 0$. Õige lahendusviis oleks

   $$x^3 - x = 0; \quad x(x^2 - 1) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1.$$

Näide 2. Võrrandi $x - 5 = 1$ mõlema poole korrutamisel avaldisega $x - 3$ saadav võrrand $(x - 5)(x - 3) = x - 3$ ei ole samaväärne lähtevõrrandiga, mille ainsaks lahendiks on $x = 6$. Uuel võrrandil on kaks lahendit $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ ning $x = 3$ ei ole lähtevõrrandi lahendiks.

Võrrandi lahendamine.

Võrrandi lahendamisel püütakse võrrandit teisendada nii, et iga uus võrrand oleks eelmisega samaväärne. Kui võrrandiga samaväärset võrrandit ei ole mingil põhjusel otstarbekas tuletada, siis asendatakse võrrand niisuguse võrrandiga (või võrranditega), mille lahenditeks on kõik antud võrrandi lahendid ja millel võib lisaks neile olla veel teisi lahendeid. Viimaseid nimetatakse esialgse võrrandi **võõrlahenditeks**. Tuletatud võrrandit nimetatakse esialgse võrrandi **järelduseks**. Esialgse võrrandi ja tema järelduse vahele pannakse märk $\Rightarrow$. Võõrlahendid eraldatakse antud võrrandi tõelistest lahenditest kontrollimise teel.

Näide. Lahendame võrrandi $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = \sqrt{6}$. Tõstes võrrandi mõlemad pooled ruutu, saame võrrandi $x(x-1) = 6$ ehk $x^2 - x - 6 = 0$, mille lahenditeks on $x_1 = 3$ ja $x_2 = -2$. Neist $x = 3$ on ka esialgse võrrandi lahend, sest $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3-1} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$, kuid $x = -2$ ei rahulda esialgset võrrandit.

Võõrlahendid võivad tekkida siis, kui võrrandi teisendamisel võrrandi määramispiirkond laieneb.

Näiteks võrrand $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = \sqrt{6}$ (lahend $x = 3$) on määratud piirkonnas $x \geqslant 1$, antud võrrandi järeldus $x^2 - x - 6 = 0$ (lahendid $x_1 = 3$, $x_2 = -2$) aga piirkonnas $-\infty < x < \infty$.

Teisendused, mille kasutamisel tekkinud uuel võrrandil võib olla rohkem lahendeid kui lähtevõrrandil:

1. Võrrandi mõlema poole korrutamine ühe ja sama täisratsionaalse avaldisega.

   Näide. Võrrandi $5x - 8 = 2$ lahendiks on $x = 2$, võrrandi $(5x - 8)(x - 1) = 2(x - 1)$ lahenditeks aga $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$.

2. Võrrandi mõlema poole astendamine positiivse paarisarvuga.

   Näide. Võrrandi $3x - 2 = 2 - x$ lahendiks on $x = 1$, võrrandi $(3x - 2)^2 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - x = 0$ lahendeiks aga $x_1 = 1$ ja $x_2 = 0$.

3. Võrrandi $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ asendamine võrranditega $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $\ldots$, $f_n(x) = 0$.

4. Võrrandi $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ asendamine võrrandiga $f(x) = 0$.

   Näide. Võrrandi $\dfrac{x^2 - x}{x - 1} = 0$ asendamisel võrrandiga $x^2 - x = 0$ saame lahenditeks $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, kuid $x = 1$ ei ole esialgse võrrandi lahend.

Kui võrrandi teisendamisel saadi võrrand, millel on lahendeid vähem kui esialgsel võrrandil, siis on tegemist **lahendite kaoga**. See võib tekkida näiteks võrrandi mõlema poole jagamisel ühe ja sama muutujat sisaldava avaldisega. **Võrrandi lahendamisel ei tohi kasutada teisendusi, millega kaasneb lahendi kadu.**

Kui ülesandes ei ole märgitud, millises arvuhulgas tuleb antud võrrand lahendada, eeldatakse, et otsitakse lahendeid hulgas $\mathbb{R}$.

Võrrandite liigitamine.

Võrrandis esinevate tundmatute arvu järgi liigitatakse võrrandeid ühe tundmatuga võrranditeks ja mitme tundmatuga võrranditeks.

Näiteks võrrand $x^2 - 4x + 4 = 0$ on ühe tundmatuga, $x + y = 4$ kahe tundmatuga ning $x^2 + y^2 = z^2$ on kolme tundmatuga võrrand.

Ühe tundmatuga võrrandid liigitatakse:
1) algebralisteks täisratsionaalseteks (algebralisteks);
2) algebralisteks murdratsionaalseteks (murdvõrranditeks);
3) algebralisteks irratsionaalseteks (juurvõrranditeks);
4) transtsendentseteks.

Algebraliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0,$$

kus $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ on reaalarvulised kordajad ning n on positiivne täisarvuline asendaja. Algebralise võrrandi vasakuks pooleks on n-astme polünoom, seetõttu võib algebralist võrrandit kirjutada ka kujul

$$P_n(x) = 0.$$

Polünoomi $P_n(x)$ aste n määrab **võrrandi astme**. Võrrand $P_n(x) = 0$ on n-astme algebraline võrrand. Liidetavat $a_n x^n$ nimetatakse algebralise võrrandi **pealiikmeks**, liiget a_0 aga **vabaliikmeks**. Kõik lineaar- ja ruutvõrrandid on algebralised võrrandid.

Transtsendentseks võrrandiks nimetatakse võrrandit, milles tundmatu esineb trigonometrilise funktsiooni, eksponentfunktsiooni, logaritmfunktsiooni, arkusfunktsiooni vmt. argumendis. Transtsendentsed võrrandid on näiteks eksponentvõrrandid, logaritmvõrrandid, trigonomeetrilised võrrandid.

Näiteks võrrandid $\sin x - 2\tan x = 2{,}5$; $2^x - 4 = 0$; $\log^2 x - 2\log x = 0$; $\arccos x + 0{,}8 = 1$ on transtsendentsed võrrandid. Võrrandid $x \log 2 + 4 = 0$; $x^3 \sin\frac{\pi}{2} - \pi x^2 = 0$ ei ole transtsendentsed võrrandid.

2.2. Lineaarvõrrandid

Võrrandit $ax + b = 0$, kus x on tundmatu ja $a \neq 0$, nimetatakse ühe tundmatuga **lineaarvõrrandiks** ehk esimese astme võrrandiks. Selle lahendiks on $x = -\frac{b}{a}$.

Lineaarvõrrandiga samaväärsel võrrandil võib olla palju keerulisem kuju. Võrrandi lahendamine toimub järgmise skeemi kohaselt:

1) avame sulud, koondame sarnased liikmed;
2) kui võrrandis esineb murde, siis vabaneme nendest, korrutades võrrandi pooli murdude ühise nimetajaga;
3) viime muutujat sisaldavad liikmed ühele ja vabaliikmed teisele poole võrdusmärki;
4) koondame sarnased liikmed;
5) jagame võrrandi mõlemat poolt muutuja kordajaga;
6) kontrollime saadud lahendi õigsust algvõrrandi kaudu.

Näide 1.

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{5} - \frac{1+x}{2} &= x + 7 \quad \Big| \cdot 10 \\ 4x - 2 - (5 + 5x) &= 10x + 70 \\ 4x - 2 - 5 - 5x &= 10x + 70 \\ 4x - 5x - 10x &= 70 + 2 + 5 \\ -11x &= 77 \quad | : (-11) \\ x &= -7 \end{aligned}$$

Kontroll: $V = \frac{2 \cdot (-7) - 1}{5} - \frac{1 + (-7)}{2} = \frac{-15}{5} - \frac{-6}{2} = -3 - (-3) = -3 + 3 = 0$

$P = -7 + 7 = 0$

Võrrandi teisendamisel temaga samaväärseks võrrandiks võime jõuda kujule $0 \cdot x = 0$. Selle võrrandi ja järelikult ka lähtevõrrandi lahendiks sobib mistahes arv ja võrrand osutub samasuseks.

Näide 2.

$$\begin{aligned} 2(2x - 3) &= 2x - 6 + 2x \\ 4x - 6 &= 4x - 6 \\ 4x - 4x &= -6 + 6 \\ 0 \cdot x &= 0 \quad (x \text{ on mistahes arv}) \end{aligned}$$

Vastus: $2(2x - 3) = 2x - 6 + 2x$ on samasus.

Võrrandi teisendamise tulemuseks võib olla ka võrrand $0 \cdot x = b$, kus $b \neq 0$. Sel juhul võrrandil puudub lahend, sest ei ole arvu, mis nulliga korrutamisel annaks tulemuseks nullist erineva arvu. Sellist võrrandit nimetatakse vastuoluliseks.

Näide 3.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 2x + 3 \\ 2x - 2x &= 3 - 1 \\ 0 \cdot x &= 2 \quad (\text{võrrandil puudub lahend}) \end{aligned}$$

Vastus: Võrrand on vastuoluline.

2.3. Ruutvõrrandid

Ruutkolmliikmeks ehk teise astme kolmliikmeks nimetatakse hulkliiget $ax^2 + bx + c$, mis sisaldab ruutliiget ax^2, lineaarliiget bx ja vabaliiget c. Ruutkolmliikme nullkohtadeks nimetatakse neid muutuja x väärtusi, mille korral ruutkolmliikme väärtus on null. Ühe tundmatuga **ruutvõrrandiks** nimetatakse võrrandit $ax^2 + bx + c = 0$, milles a, b ja c on mingid arvud ($a \neq 0$) ja x on muutuja. Ruutliikme nullkohtade leidmine on samaväärne vastava ruutvõrrandi lahendite leidmisega.

Ruutvõrrandit $ax^2+bx+c = 0$, kus ükski kordaja ei võrdu nulliga, nimetatakse **täielikuks ruutvõrrandiks**.

Tuletame täieliku ruutvõrrandi lahendivalemi. Esmalt korrutame võrrandi mõlemad pooled avaldisega $4a$, seejärel teisendame.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \mid \cdot 4a \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac - b^2 &= 0 \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \\
(2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \\
2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Täieliku ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendivalemiks on

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Juuremärgi alust avaldist $D = b^2 - 4ac$ nimetatakse ruutvõrrandi **diskriminandiks**. Sõltuvalt diskriminandist võib vaadeldaval ruutvõrrandil olla kas kaks erinevat reaalarvulist lahendit ($D > 0$), kaks võrdset reaalarvulist lahendit ($D = 0$) või reaalarvude hulgas lahend puududa ($D < 0$).

Näide 1. Võrrandi $2x^2 + 7x - 4 = 0$ korral $D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81 > 0$ ning võrrandil on kaks reaalarvulist lahendit $x_1 = -4$ ja $x_2 = \frac{1}{2}$.

Näide 2. Võrrandi $4x^2 - 4x + 1 = 0$ korral $D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$ ning võrrandil on kaks võrdset lahendit $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

Näide 3. Võrrandi $4x^2 - 7x + 6 = 0$ korral $D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 6 = 49 - 96 = -47 < 0$ ning võrrandil reaalarvulised lahendid puuduvad.

Kui täielikus ruutvõrrandis ruutliikme kordaja $a = 1$, nimetatakse võrrandit **taandatud ruutvõrrandiks**. Taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendivalem on

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Ruutvõrrandit, kus puudub lineaarliige või vabaliige või mõlemad, nimetatakse **mitte-täielikuks ruutvõrrandiks**.

1. Kui $b = 0$ ja $c \neq 0$, saame võrrandi $ax^2 + c = 0$, mille lahendiks on $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
2. Kui $c = 0$ ja $b \neq 0$, saame võrrandi $ax^2+bx = 0$, mida teisendades saame, et $x(ax+b) = 0$ ning $x_1 = 0$ ja $x_2 = -\frac{b}{a}$.
3. Kui $b = 0$ ja $c = 0$, saame võrrandi $ax^2 = 0$, mille lahendiks on $x_{1,2} = 0$.

Viète'i [*vje:ti*] **teoreem.** Taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub lineaarliikme kordaja vastandarvuga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega. Tähendab, võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite x_1 ja x_2 korral $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 \cdot x_2 = q$.

Põhjendus.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p \\
x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \\
&= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q
\end{aligned}$$

Näide. Koostame võrrandi, mille lahenditeks on $x_1 = 7$ ja $x_2 = -3$. Lahendite summa on $7 + (-3) = 4$, lahendite korrutis $7 \cdot (-3) = -21$ ning otsitav võrrand $x^2 - 4x - 21 = 0$.

Ruutkolmliikme teguriteks lahutamine.

Taandatud ruutkolmliige x^2+px+q lahutub tegureiks kujul $x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2)$, kus x_1 ja x_2 on selle ruutkolmliikme nullkohad. Ruutkolmliige $ax^2 + bx + c$ lahutub tegureiks kujul $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, kus x_1 ja x_2 on selle ruutkolmliikme nullkohad.

Näide 1. Lahutame tegureiks ruutkolmliikme $x^2 - 2x - 3$. Leiame nullkohad, lahendades võrrandi $x^2 - 2x - 3 = 0$. Saame, et $x_1 = -1$ ja $x_2 = 3$. Järelikult $x^2 - 2x - 3 = [x - (-1)](x - 3) = (x + 1)(x - 3)$.

Näide 2. Lahutame tegureiks ruutkolmliikme $3x^2 + 5x - 2$. Leiame nullkohad, lahendades võrrandi $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Saame, et $x_1 = -2$ ja $x_2 = \frac{1}{3}$. Järelikult $3x^2 + 5x - 2 = 3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x + 2)(3x - 1)$.

2.4. Murdvõrrandid

Murdvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis sisaldab muutujat murru nimetajas. Murdvõrrandi lahendamiseks viime kõik võrrandi liikmed ühele poole võrdusmärki ja leiame ühise nimetaja. Kuna murd võrdub nulliga siis ja ainult siis, kui lugeja on null ja nimetaja ei ole null, siis võtame murru lugeja võrdseks nulliga ning lahendame saadud võrrandi. Leitud lahendite hulgast kõrvaldame kontrolliga need, mis muudavad nimetaja nulliks.

Näide 1. Lahendame võrrandi

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = 0.$$

Võrrandi määramispiirkonnaks on $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$. Võrrandit teisendades saame

$$\frac{x+1}{x+2}^{\backslash x-1} - \frac{1}{x-1}^{\backslash x+2} + \frac{1}{x+2}^{\backslash x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-(x+2)+(x-1)}{(x+2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1-x-2+x-1}{(x+2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{(x+2)(x-1)} = 0 \Rightarrow x^2-4=0.$$

Ruutvõrrandi $x^2 - 4 = 0$ lahenditeks on $x_1 = -2$ ja $x_2 = 2$. Esimene neist ei sobi algvõrrandi lahendiks, sest ei kuulu võrrandi määramispiirkonda. Kontrollime lahendit $x = 2$

$$V = \frac{2+1}{2+2} - \frac{1}{2-1} + \frac{1}{2+2} = \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0.$$

Vastus: $x = 2$.

Näide 2. Lahendame võrrandi

$$1 - \frac{x-3}{x^2+x-2} = \frac{2x}{x^2+x-2}$$

Kuna võrrandi $x^2 + x - 2 = 0$ lahendid on $x_1 = -2$ ja $x_2 = 1$, leiame murdvõrrandi määramispiirkonna, milleks on $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$. Võrrandit teisendades saame

$$1^{\backslash x^2+x-2} - \frac{x-3}{x^2+x-2}^{\backslash 1} - \frac{2x}{x^2+x-2}^{\backslash 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2-x+3-2x}{x^2+x-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} = 0 \Rightarrow x^2-2x+1=0.$$

Ruutvõrrandi $x^2 - 2x + 1 = 0$ lahendeiks on $x_{1,2} = 1$, mis ei kuulu aga murdvõrrandi määramispiirkonda. Seega esialgsel võrrandil lahendid puuduvad.

Ülesanded

10. Lahenda võrrandid

1) $x + \frac{1+x}{3} = \frac{1}{2}$
2) $\frac{2-x}{3} - 2x = 3$
3) $\frac{x+1}{5} - 3 = 2x$
4) $3{,}6(x-4) - 4{,}2(3+x) = 4{,}2$
5) $5{,}3(x-1) - 2{,}3(x+4) = -26{,}2$
6) $x(6+x) = (x+5)(x-5)$
7) $(x+2)^2 = x^2 + 8$
8) $\frac{5x}{6} + \frac{x}{3} = 1{,}4$
9) $0{,}8 + \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4}$
10) $3x + \frac{1-\frac{x}{2}}{3} - \frac{2-\frac{x}{4}}{4} - 23 = 0$
11) $\frac{2x-5}{6} + \frac{x+2}{4} = \frac{5-2x}{3} - \frac{6-7x}{4} - x$
12) $3x = 2(x-3) + x + 6$
13) $3x = 2(x-3) + x + 4$
14) $2x(3x-2) - 3\left[1 - (2-x)(2x+3) - \frac{x-3}{2}\right] = 13$
15) $3\left\{x - \frac{3x-1}{4} - \left[1 - 2\left(x - \frac{3+x}{5}\right)\right]\right\} = 5x - 2$

11. Lahenda võrrandid

1) $4x^2 - 4x = 3$
2) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
3) $(2x-3)^2 = 8x$
4) $(2x+5)^2 = 2(2x+9)$
5) $4x = 2 - 4x^2 - 3x$
6) $9x - 3 = 10x - 4x^2$
7) $3x^2 + 7 = 2x$
8) $x^2 - 10x + 21 = 0$
9) $x^2 - 8x - 20 = 0$
10) $x^2 - 7x = 0$
11) $5x^2 + 4x = 11x^2 - 8x$
12) $(2x+5)^2 - (x-3)^2 = 16$
13) $9x^2 = 16$
14) $\frac{3x^2}{8} = \frac{2}{75}$
15) $2x^2 + 25 = 7$

12. Leia peast järgmiste võrrandite lahendid

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$
2) $x^2 - 2x - 35 = 0$
3) $x^2 - x - 56 = 0$
4) $x^2 + 7x + 10 = 0$
5) $x^2 - x - 12 = 0$
6) $x^2 - 4x - 60 = 0$
7) $x^2 - 17x + 72 = 0$
8) $x^2 + 4x - 5 = 0$
9) $x^2 - 2x + 1 = 0$

13. Lahenda võrrandid

1) $\frac{5}{x^2-9} + \frac{10}{x+3} = 1$
2) $\frac{2x+19}{5x^2-5} - \frac{17}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} = 0$
3) $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{(x+2)(x+3)}$
4) $\frac{7}{x^2-1} + \frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$
5) $\frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9} = \frac{3x-7}{3-4x} + \frac{6x+5}{4x+3}$
6) $5 + \frac{96}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x}$
7) $\frac{2x-7}{x^2-5x+4} - \frac{x+1}{x^2+x-2} + \frac{x-6}{x^2-2x-8} = 0$
8) $\frac{1}{x^2+5x-24} - \frac{11}{6x^2+27x-15} = \frac{1}{x^2+13x+40}$

2.5. Võrrandisüsteemid

Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine liitmisvõttega.

Võrrandite vastavaid pooli korrutatakse vajadusel selliste teguritega, et ühe muutuja kordajad oleksid teineteise vastandarvud. Seejärel liidetakse võrrandite vastavad pooled ning saadakse ühe muutujaga võrrand. Selle võrrandi lahendi asendamisel ühte antud võrrandeist saame arvutada teise muutuja väärtuse. Ühest muutujast vabanemist nimetatakse selle muutuja **elimineerimiseks**.

Näide.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 & | \cdot 2 \\ 2x + 5y = -1 & | \cdot (-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 4y = 16 \\ -10x - 25y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -21y &= 21 \quad | : (-21) \\ y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 2 \cdot (-1) &= 8 \\ 5x &= 10 \quad | : 5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vastus. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine asendusvõttega.

Avaldame ühest võrrandist ühe muutuja ja asendame saadud avaldise teise võrrandisse. Nüüd lahendame saadud ühe muutujaga võrrandi. Selle võrrandi lahendi asendamisel teise muutuja avaldisse saame arvutada teise muutuja väärtuse.

Näide.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$$

Avaldame esimesest võrrandist muutuja y.

$2y = 8 - 5x \; | : 2 \qquad y = \dfrac{8 - 5x}{2}$

Asendame saadud avaldise teise võrrandisse.

$2x + 5 \cdot \dfrac{8 - 5x}{2} = -1 \qquad 2x + \dfrac{40 - 25x}{2} = -1 \; | \cdot 2 \qquad 4x + 40 - 25x = -2$

$-21x = -42 \; | : (-21) \qquad x = 2$

$y = \dfrac{8 - 5 \cdot 2}{2} = \dfrac{8 - 10}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Vastus. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine graafiliselt.

Kahe muutujaga lineaarvõrrandile vastab tasandil mingi sirge. Süsteemi graafiline lahendamine tähendab võrranditele vastavate sirgete konstrueerimist ja jooniselt nende lõikepunkti koordinaatide leidmist. Sirgete lõikepunkti koordinaadid on antud võrrandisüsteemi lahendiks. Graafiliselt saadud lahend on reeglina ligikaudne.

Ülesanded

14. Lahenda võrrandisüsteemid graafiliselt

1) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 2y - 4x = 6 \end{cases}$

15. Milliste parameetri a väärtuste korral võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} (a-4)x + 2y = 4 \\ (a-4)^3 x + 4ay = 16 \end{cases}$$

1) on lõpmata palju lahendeid, 2) lahendid puuduvad, 3) on üks lahend?

16. Lahenda võrrandisüsteem

1) $\begin{cases} 4x - 2y = 2{,}8 \\ 7x + 4y = -2{,}6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} (y+2)^2 - y^2 = 2x - 26 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4(x+2) = 1 - 5y \\ 3(y+2) = 3 - 2x \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} - \dfrac{x-y}{6} = 2 \\ x + 4y = -4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x - 3y = 15 \\ 5x + 6y = 27 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x-1)^2 - y = x^2 + 14 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \dfrac{y}{3} - \dfrac{y-x}{8} = 0 \\ 5x + y = -22 \end{cases}$

17. Lahenda võrrandisüsteem

1) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 4y - 3z = 2 \\ 4y - 3x + 3z = 14 \\ 7y + 5z = 29 \end{cases}$

18. Lahenda võrrandisüsteem

1) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 24 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{7}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{19}{10} \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{9}{y} = 8 \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{6}{y} = -1 \end{cases}$

19*. Lahenda võrrandisüsteem

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y^2 = 7 \\ xy^2 = 12 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy = 2 \\ y - 3x = 7 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1 \\ 3xy + 7y^2 = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 27 \\ x^2 - xy + y^2 = 9 \end{cases}$

2.6. Võrrandite ja võrrandisüsteemide koostamine

Vaatleme näiteid võrrandite ja võrrandisüsteemide koostamise kohta.

Näide 1. Ajalugu on säilitanud meile vähe biograafilisi andmeid antiikaja kuulsa matemaatiku Diofantese kohta. Kõik, mis temast teada, on ammutatud tema hauasamba pealkirjast, mis on koostatud matemaatilise ülesande kujul.

Teekäija! Siia on maetud Diofantese põrm. Ning arvud võivad jutustada, kui pikk oli tema eluiga. Kuuendik sellest kujutas ilusat lapsepõlve. Möödus kaheteistkümnendik tema elust ja tema lõug kattus udemetega. Seitsmendiku oma elust oli Diofantes abielus lastetuna. Möödus viis aastat; teda õnnistati esimese poja sünniga, kellele saatus andis elu, ilusa ja helge, mis oli poole lühem kui ta isal. Ja sügavas mures lõppes vanakese maine saatus. Ta elas veel neli aastat pärast poja kaotamist. Ütle, kui vana oli Diofantes, kui ta suri?

Loomulikus keeles	Algebra keeles
Teekäija! Siia on maetud Diofantese põrm. Ning arvud võivad jutustada, kui pikk oli tema eluiga.	x
Kuuendik sellest kujutas ilusat lapsepõlve.	$\frac{x}{6}$
Möödus kaheteistkümnendik tema elust ja tema lõug kattus udemetega.	$\frac{x}{12}$
Seitsmendiku oma elust oli Diofantes abielus lastetuna.	$\frac{x}{7}$
Möödus viis aastat; teda õnnistati esimese poja sünniga,	5
kellele saatus andis elu, ilusa ja helge, mis oli poole lühem kui ta isal.	$\frac{x}{2}$
Ja sügavas mures lõppes vanakese maine saatus. Ta elas veel neli aastat pärast poja kaotamist.	4
Ütle, kui vana oli Diofantes, kui ta suri?	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

Näide 2. Rong läbib teatava vahemaa konstantse kiirusega. Kui ta läbiks tunnis 6 km rohkem, kuluks selle vahemaa läbimiseks 4 tundi vähem. Kui aga rong läbiks tunnis 6 km vähem, siis kuluks selle vahemaa läbimiseks 6 tundi rohkem. Leidke vahemaa, mille rong pidi läbima.

Loomulikus keeles	Algebra keeles
Rong läbib teatava vahemaa	x (km)
konstantse kiirusega.	y (km/h)
(Vahemaa läbimiseks kuluv aeg)	$\frac{x}{y}$ (h)
Kui ta läbiks tunnis 6 km rohkem,	$y+6$ (km/h)
kuluks selle vahemaa läbimiseks	$\frac{x}{y+6}$ (h)
4 tundi vähem.	$\frac{x}{y+6}=\frac{x}{y}-4$
Kui aga rong läbiks tunnis 6 km vähem,	$y-6$ (km/h)
siis kuluks selle vahemaa läbimiseks	$\frac{x}{y-6}$ (h)
6 tundi rohkem.	$\frac{x}{y-6}=\frac{x}{y}+6$
Leidke vahemaa, mille rong pidi läbima.	$x=?$

Näide 3. Newtoni ülesanne.

Kaupmehel oli teatav summa raha. Esimesel aastal kulutas ta 100 naela. Järelejäänud summale lisandas ta kolmandiku sellest summast. Järgneval aastal kulutas ta uuesti 100 naela ja suurendas ülejäänud summat kolmandiku võrra. Kolmandal aastal kulutas ta jällegi 100 naela. Pärast seda kui ta liitis jäägile kolmandiku, oli tema kapital kaks korda suurem esialgsest.

Loomulikus keeles	Algebra keeles
Kaupmehel oli teatav summa raha.	
Esimesel aastal kulutas ta 100 naela.	
Järelejäänud summale lisandas ta kolmandiku sellest summast.	
Järgneval aastal kulutas ta uuesti 100 naela	
ja suurendas ülejäänud summat kolmandiku võrra.	
Kolmandal aastal kulutas ta jällegi 100 naela.	
Pärast seda kui ta liitis jäägile kolmandiku,	
oli tema kapital kaks korda suurem esialgsest.	

Ülesanded

20. Kui Pythagoraselt küsiti tema õpilaste arvu, olevat ta vastanud: „Pool minu õpilastest uurib matemaatikat, neljandik looduslugu, seitsmes osa õpib vaikimist ning peale nende on mul veel 3 päris väikest poissi.“ Mitu õpilast tal oli?

21. Lahendades ülesannet pidi õpilane teatud arvu korrutama $0{,}5$-ga ja tulemusele liitma kolm. Hajameelsusest jagas õpilane selle arvu $0{,}5$-ga ja lahutas tulemusest 3. Juhuslikult sai ta sama tulemuse, mis pidigi tulema. Leidke esialgne arv.

22. Kahekohalise arvu kümneliste number on üheliste numbrist kaks korda suurem. Kui numbrite kohad vahetada, saadakse esialgsest arvust 36 võrra väiksem arv. Leidke esialgne arv.

23. Kahekohalise arvu numbrite summa on 12. Kui sellest arvust lahutada 18, siis saadakse arv, mis on kirjutatud samade numbritega vastupidises järjekorras. Leidke see arv.

24. Kui esimesele arvule liita teise arvu kahekordne, saadakse 10, kui aga esimese arvu kahekordsele liita teine arv, saadakse 11.

25. Leidke arv, mille jagamisel 5-ga saadakse jääk 2 ja jagamisel 8-ga jääk 5, kusjuures esimene jagatis on teisest 3 võrra suurem.

26. Isa on 40-aastane ja poeg 12-aastane. Mitme aasta eest oli isa pojast viis korda vanem?

27. Esimesel riiulil on raamatuid kaks korda vähem kui teisel. Kui esimeselt riiulilt võtta ära 6 raamatut, aga teisele panna 8 raamatut juurde, siis on esimesel riiulil 7 korda vähem raamatuid kui teisel riiulil. Mitu raamatut on kummalgi riiulil?

28. Rong sõidab linnast A linna B kiirusega 30 km/h ja linnast B linna A kiirusega 28 km/h, kulutades kogu sõiduks $14\frac{1}{2}3$ tundi. Leidke linnade A ja B vaheline kaugus.

29. Kaks jalgratturit väljusid üheaegselt linnadest, mille vahemaa on 300 km, teineteisele vastu. Esimene neist sõitis tunnis 12 km, teine aga 13. Mitme tunni pärast jalgratturid kohtusid?

30. Sõiduki esimese ratta ümbermõõt on tagumise ratta ümbermõõdust $\frac{1}{2}$ m võrra lühem. Esimene ratas teeb 30 m pikkusel teel sama palju pöördeid kui tagumine ratas 36 m pikkusel teel. Leidke kummagi ratta ümbermõõt.

31. Kahe kraani kaudu täituks paak $9\frac{3}{8}$ tunni jooksul. Kui mõlemad kraanid olid avatud 5 tundi, suleti teine kraan torustiku rikke tõttu, kuid esimene kraan jäi paagi täitumiseni 7 tunniks avatuks. Mitme tunniga täituks paak kummagi kraani kaudu eraldi?

32. Üks arv on teisest a korda väiksem. Kui esimesele arvule liita m ja teisele arvule n, siis esimene summa on teisest b korda väiksem. Leidke need arvud.

33. Aerutades pärivoolu liigub aerutaja t tunniga m meetrit; aerutades vastuvoolu kulub tal sama vahemaa läbimiseks u tundi rohkem. Leidke jõe voolu kiirus.

34. Kahest kompvekisordist hindadega a krooni kilogramm ja b krooni kilogramm koostati d kilogrammi segu. Selle segu müümisel hinnaga m krooni kilogramm saadi s krooni kahju. Mitu kilogrammi ühte ja mitu kilogrammi teist sorti kompvekke võeti segu koostamiseks?

35. Üks tööline lõpetab töö m päevaga, teisel kulub sama töö tegemiseks n päeva. Mitme päevaga lõpetavad selle töö kaks töölist koos töötades?

36. Murru lugeja on nimetajast 3 võrra väiksem. Kui lugejat suurendada 3 korda ja nimetajat 3 võrra, siis on murru väärtus 2. Leidke see murd.

37. Leidke ristküliku pikkus ja laius, kui esimene on teisest 2 m võrra suurem ja ristküliku pindala on 15 m^2.

38. Ristkülikukujuline lillepeenar külgedega 2 m ja 4 m on piiratud ühelaiuse teega. Leidke tee laius, kui tee pindala on 9 korda suurem lillepeenra pindalast.

39. Kolmnurga kõrgus on 4 m võrra alusest lühem. Kolmnurga pindala on 30 m^2. Leidke kolmnurga alus ja kõrgus.

40. Ekskursioonist osavõtjad pidid maksma kokku 7200 krooni, igaüks ühepalju. Kui osavõtjaid oleks olnud 3 inimese võrra vähem, siis oleks igaühel tulnud maksta 400 krooni rohkem. Mitu inimest võttis ekskursioonist osa?

41. Linnast väljus samaaegselt 2 autot. Esimese auto kiirus oli 10 km võrra tunnis suurem teise auto kiirusest ja seepärast jõudis ta 1 tund varem sihtkohta. Leidke mõlema auto kiirused, kui sihtkoht asub linnast 560 km kaugusel.

42. Kahe sadama vaheline kaugus mööda jõge on 80 km. Aurik sõitis selle maa edasitagasi 8 tunni 20 minutiga. Leidke auriku kiirus seisvas vees, kui jõe voolu kiirus on 4 km/h.

43. Jalgrattur hilines 30 km pikkusele distantsile väljumisega 3 minutit ning sõitis kavandatud keskmisest kiirusest 1 kilomeetri võrra tunnis rohkem. Kohale jõudis ta täpselt ettenähtud ajal. Missuguse kiirusega oli jalgratturi sõit kavandatud?

44. Kahelt lennuväljalt, mille vahemaa on 2400 km, lendasid teineteisele vastu 2 lennukit. Ühe lennuki kiirus, mis väljus teisest 40 minutit varem, oli teise lennuki kiirusest 60 km/h võrra vähem. Lennukid kohtusid siis, kui mõlemal oli läbitud pool vahemaast. Leidke lennikite kiirused.

45. Kaks töölist koos töötades lõpetavad töö 8 tunniga. Esimene neist suudaks üksi töötades lõpetada selle töö 12 tunni võrra kiiremini kui teine üksi töötades. Mitme tunniga lõpetaks selle töö kumbki tööline üksi töötades?

46. Kui põllu kündmisel oli üks traktor juba 6 tundi töötanud, tuli appi teine traktor. Pärast neljatunnilist koostööd oli põld küntud. Mitme tunniga oleks kündnud selle põllu kumbki traktor eraldi, kui esimesel traktoril oleks selleks kulunud 3 tundi rohkem kui teisel?

47. Kaks bussi sõidavad ühest linnast teise. Et esimene buss sõidab tunnis 4 km rohkem kui teine, siis läbib ta selle vahemaa 15 minuti võrra lühema ajaga. Kui suure kiirusega liiguvad bussid, kui linnade vahemaa on 72 km?

48. Kaater väljus linnast A üheaegselt parvega, mis ujus pärivoolu. Sõitnud edasi $13\frac{1}{3}$ km, pöördus kaater tagasi ning kohtus parvega 4 km kaugusel linnast A. Leidke kaatri kiirus seisvas vees, kui jõe voolu kiirus on 4 km/h.

49. Leidke kahekohaline arv, mille üheliste number on kahe võrra suurem kümneliste numbrist ja mille korrutis oma ristsummaga on 144.

50. Esimesel pumbal kuluks basseini täitmiseks 3 tundi vähem kui teisel pumbal. Basseini täitmiseks pandi tööle korraga mõlemad pumbad, 10 tunni pärast esimene pump katkestas töö ja teine pump töötas üksi veel 5 tundi 45 minutit. Mitme tunniga täituks bassein kummagi pumba üksi töötamise korral?

51. Ristkülikukujulisest plekitahvlist on valmistatud pealt lahtine karp nii, et tahvli igast nurgast on välja lõigatud ruut, mille külje pikkus on 5 cm. Milliste mõõtmetega oli plekitahvel, kui tema pikkus oli kaks korda suurem laiusest ning saadud karbi ruumala on 1500 cm^3?

52. Kaks töölist koos töötades lõpetavad töö $6\frac{2}{3}$ tunniga. Mitme tunniga lõpetaks selle töö esimene tööline üksi töötades, kui tal kulub selle töö tegemiseks teisest 3 tundi vähem aega?

53. Kahe raudteejaama vahelina kaugus on 144 km. Reisirong läbib selle vahemaa ühe tunni võrra kiiremini kaubarongist. Leidke kummagi rongi keskmine kiirus, kui kaubarongi kiirus moodustab 75% reisirongi kiirusest.

54. Kaks töölist kavatsesid töö lõpetada 30 päevaga. Pärast kuuepäevast tööd üks neist haigestus, teine jätkas tööd ja lõpetas selle üksi 40 päevaga. Mitme päevaga oleks selle töö sooritanud kumbki tööline üksi töötades?

55. Tööline pidi päeva jooksul valmistama 196 detaili. Kahe esimese tunni jooksul töötas ta plaani kohaselt, edasi aga valmistas igas tunnis 6 detaili rohkem ja jõudis seepärast vahetuse lõpuks valmistada 226 detaili. Mitu detaili pidi tööline plaani järgi tunnis valmistama?

56. Mootorrattur läbib 1 kilomeetri 4 minuti võrra kiiremini kui jalgrattur. Mitu kilomeetrit sõidab kumbki neist 5 tunni jooksul, kui mootorrattur sõidab selle ajaga 100 km rohkem kui jalgrattur?

57. Mööda jõge pärivoolu liikuv aurik läbib a kilomeetrit m tunniga; liikudes vastuvoolu läbib ta sama tee n tunniga. Leidke jõe voolu kiirus.

PEATÜKK 3

Funktsioonid

3.1. Põhimõisted

Seost $y = f(x)$ nimetatakse funktsionaalseks seoseks ehk **funktsiooniks** hulgal X, kui muutuja x igale väärtusele hulgast X vastab üks ja ainult üks muutuja y väärtus hulgast Y. Võrdust $y = f(x)$ loetakse: y on x funktsioon (*igrek on iksi funktsioon*).

Näited. $y = 2x, \quad y = 3x^2 - 2x, \quad y = \dfrac{2x}{x-3}.$

Muutujat x nimetatakse sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks. Argumendi x väärtuste hulka X nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **määramispiirkonnaks**.

Muutujat y nimetatakse sõltuvaks muutujaks ehk funktsiooniks. Funktsiooni y väärtuste hulka Y nimetatakse funktsiooni **muutumispiirkonnaks**.

Näited.

1. Funktsiooni $y = 3x - 2$ määramispiirkonnaks on hulk $X = \mathbb{R}$. Ka muutumispiirkonnaks on hulk $Y = \mathbb{R}$.
2. Funktsiooni $y = \sqrt{x-2}$ puhul $X = \{x \,|\, x \geqslant 2\}$, kuna ruutjuurt saame leida ainult mittenegatiivsest arvust; $Y = \{y \,|\, y \geqslant 0\}$.
3. Funktsiooni $y = x^2 - 4$ puhul $X = \mathbb{R}$; $Y = \{y \,|\, y \geqslant -4\}$.
4. Funktsiooni $y = \dfrac{2x}{2x+3}$ puhul $X = \{x \,|\, x < -1{,}5 \vee x > -1{,}5\}$, kuna $x = 1{,}5$ korral nimetaja võrduks nulliga; $Y = \{y \,|\, y < 1 \vee y > 1\}$, sest murru väärtus ei saa võrduda arvuga 1.
5. Funktsiooni $y = \sqrt{\dfrac{2x-4}{x+3}}$ puhul $X = \{x \,|\, x < -3 \vee x \geqslant 2\}$, kus määramispiirkond on võrratuse $\dfrac{2x-4}{x+3} \geqslant 0$ lahendiks; $Y = \{y \,|\, y \geqslant 0 \wedge y \neq \sqrt{2}\}$.

Funktsiooni $y = f(x)$ väärtust argumendi väärtuse $x = a$ korral tähistatakse $f(a)$.

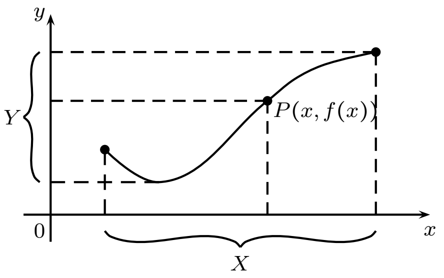
Näide. Leiame funktsiooni $f(x) = x^2 - 4x$ väärtused kohtadel -1, 0 ja 2.

1) $f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$;
2) $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$;
3) $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$.

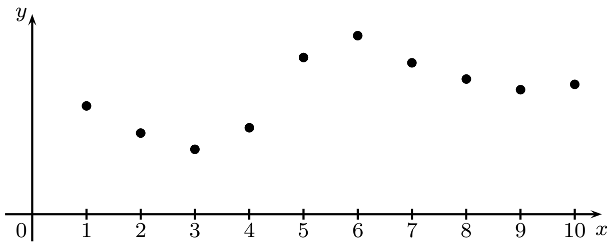
Funktsiooni graafik

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, $x \in X$. Märgime koordinaattasandil punktid, mille koordinaatideks on x ja $f(x)$. Kõigi niisuguste punktide $P = (x, f(x))$ hulka , kus $x \in X$, nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **graafikuks** (joon. 1).

Kui funktsiooni määramispiirkonnaks on lõik $[a, b]$, kus see funktsioon on pidev, siis on graafikuks joon. On aga funktsiooni määramispiirkonnaks näiteks hulk $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, siis funktsiooni graafikuks on mingi kümnest punktist koosnev hulk (joon. 2).



Joon. 1



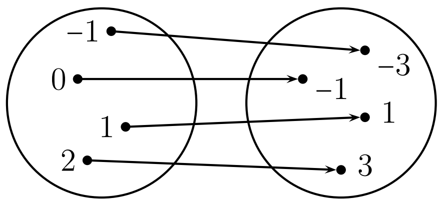
Joon. 2

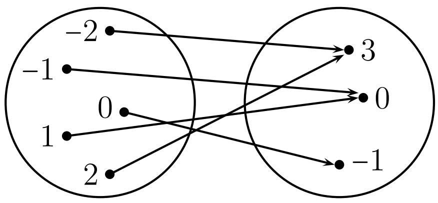
Funktsiooni esitusviisid.

Funktsiooni on võimalik esitada mitmel erineval viisil, näiteks
1) nooldiagrammina;
2) tabelina;
3) valemina ehk võrrandina;
4) järjestatud paaride hulgana;
5) graafikuna.

Näited. Vaatleme kahe funktsiooni erinevaid esitusviise, kui määramispiirkonnaks on
a) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ b) $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

1) nooldiagrammina





2) tabelina

a)

x	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3

b)

x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3

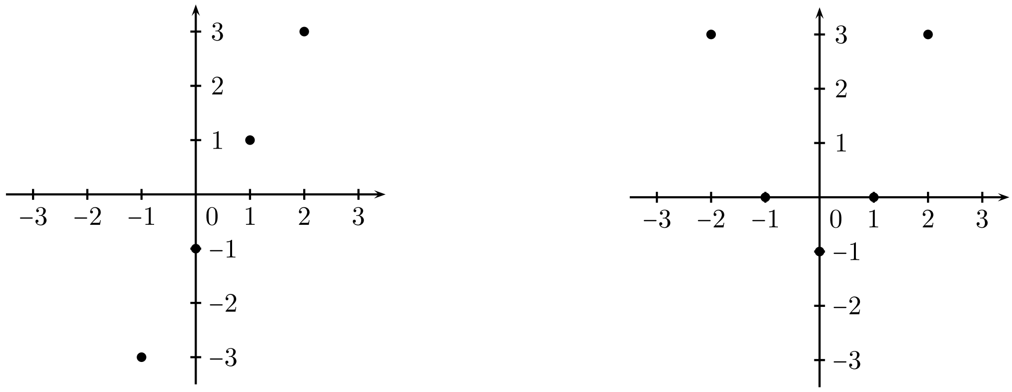
3) valemina

a) $y = 2x - 1$ b) $y = x^2 - 1$

4) järjestatud paaride hulgana

a) $K = \{(-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3)\}$ b) $L = \{(-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$

5) graafikuna



Funktsiooni nullkohad.

Argumendi väärtusi, mille korral funktsiooni väärtus on 0, nimetatakse funktsiooni **nullkohtadeks**. Funktsiooni $y = f(x)$ nullkohtade leidmiseks tuleb lahendada võrrand $f(x) = 0$. Nullkohtade hulka tähistatakse sümboliga X_0.

Funktsiooni positiivsus ja negatiivsuspiirkond.

Funktsiooni **positiivsuspiirkonna** moodustavad argumendi need väärtused, mille korral funktsiooni väärtus on positiivne. Funktsiooni $y = f(x)$ positiivsuspiirkonna leidmiseks tuleb lahendada võrratus $f(x) > 0$.

Funktsiooni **negatiivsuspiirkonna** moodustavad argumendi need väärtused, mille korral funktsiooni väärtus on negatiivne. Funktsiooni $y = f(x)$ negatiivsuspiirkonna leidmiseks tuleb lahendada võrratus $f(x) < 0$.

Funktsiooni positiivsuspiirkonda tähistame X^+ ja negatiivsuspiirkonda X^-. Kui funktsiooni väärtused on positiivsed, siis asub funktsiooni graafik selles piirkonnas ülalpool x-telge. Negatiivsuspiirkonnas asub graafik allpool x-telge. Kehtib võrdus $X = X_0 \cup X^+ \cup X^-$.

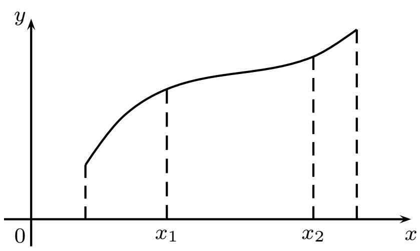
Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **kasvavaks** piirkonnas X, kui selles piirkonnas argumendi igale suuremale väärtusele vastab funktsiooni suurem väärtus (joon. 3):

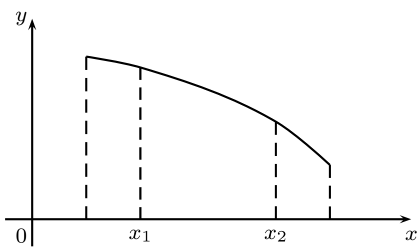
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

ning **kahanevaks**, kui argumendi igale suuremale väärtusele vastab funktsiooni väiksem väärtus (joon. 4):

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$



Joon. 3



Joon. 4

Kui iga x_1 ja x_2 korral piirkonnast X

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \qquad \big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)\big),$$

siis nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ **mittekahanevaks** (**mittekasvavaks**) piirkonnas X. Mittekahanevaid ja mittekasvavaid funktsioone nimetatakse ühiselt **monotoonseteks funktsioonideks**. Konstantne funktsioon on nii mittekahanev kui ka mittekasvav funktsioon. Kasvavaid ja kahanevaid funktsioone nimetatakse ühiselt **rangelt monotoonseteks funktsioonideks**.

Funktsiooni kasvamisvahemikku tähistatakse $X\uparrow$ ja kahanemisvahemikku $X\downarrow$.

Funktsiooni ekstreemumid.

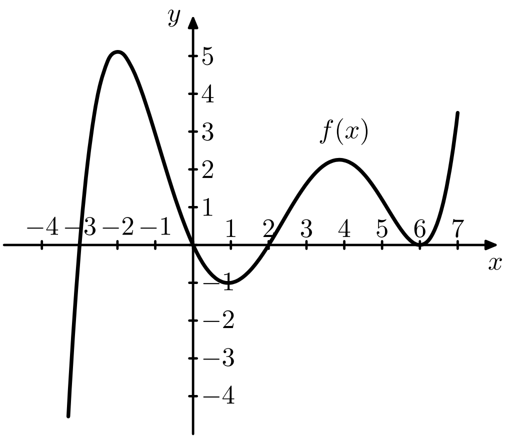
Graafiku nendes kohtades, kus kasvamine asendub kahanemisega, on funktsioonil suurim väärtus, võrreldes naaberväärtustega. Kohal, kus kahanemine asendub kasvamisega, on funktsioonil vähim väärtus, võrreldes naaberväärtustega. Need väärtused ei tarvitse olla funktsiooni suurimad või vähimad väärtused funktsiooni kogu määramispiirkonna ulatuses, vaid argumendi vastava väärtuse ümbruses.

Kohal x_0 on funktsioonil $y = f(x)$ **maksimum**, kui kõigi argumendi x väärtuste korral koha x_0 mingist ümbrusest kehtib võrratus $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Kohal x_0 on funktsioonil $y = f(x)$ **miinimum**, kui kõigi argumendi x väärtuste korral koha x_0 mingist ümbrusest kehtib võrratus $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Funktsiooni ekstreemumkohtade hulka tähistatakse X_e.

Näide.



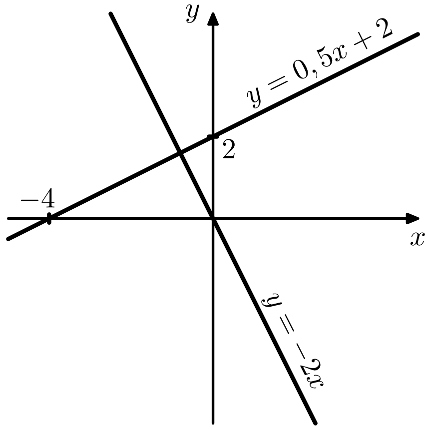
Määramispiirkond $X = \mathbb{R}$
Muutumispiirkond $Y = \mathbb{R}$
Nullkohad $X_0 = \{-3; 0; 2; 6\}$
Positiivsuspiirkond $X^+ = (-3; 0) \cup (2; 6) \cup (6; \infty)$
Negatiivsuspiirkond $X^- = (-\infty; -3) \cup (0; 2)$
Kasvamisvahemikud $X_1\uparrow = (-\infty; -2)$, $X_2\uparrow = (1; 4)$,
$X_3\uparrow = (6; \infty)$
Kahanemisvahemikud $X_1\downarrow = (-2; 1)$, $X_2\downarrow = (4; 6)$
Ekstreemumkohad $X_e = \{-2; 1; 4; 6\}$
Maksimumkohad $X_{max} = \{-2; 4\}$
Miinimumkohad $X_{min} = \{1; 6\}$

3.2. Lineaarfunktsioonid

Lineaarfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $y = ax + b$, kus a ja b on fikseeritud konstandid. Funktsiooni $y = ax + b$ graafikuks on sirge tõusuga $a = \tan\alpha$ (α on nurk sirge ja x-telje vahel) ning algordinaadiga b (koht, kus sirge lõikab y-telge).

Omadused:

1. Määramispiirkond $X = (-\infty, \infty)$.
2. Muutumispiirkond $Y = (-\infty, \infty)$, kui $a \neq 0$.
3. Nullkoht $x = -\dfrac{b}{a}$.
4. Funktsioon on kogu määramispiirkonnas kasvav, kui $a > 0$, ning kahanev, kui $a < 0$.
5. Graafik lõikab y-telge punktis $y = b$.



Võrdeline sõltuvus.

Kui lineaarfunktsioonis $b = 0$, siis esitab see funktsioon võrdelist sõltuvust. Võrdelise sõltuvuse $y = ax$ graafikuks on nullpunkti läbiv sirge. Suurust a nimetatakse võrdeteguriks.

Näide 1. Kauba hind on võrdeline kauba kogusega, võrdeteguriks on ühiku hind.
Näide 2. Ühtlase kiirusega liikuva keha poolt läbitud teepikkus on võrdeline sõiduajaga, võrdeteguriks on liikumiskiirus.

Konstantne funktsioon.

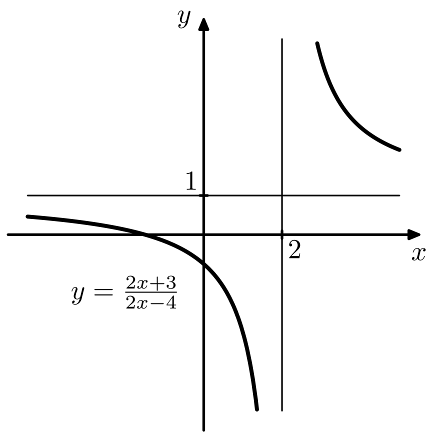
Kui lineaarfunktsiooni avaldises $a = 0$, siis saame funktsiooni $y = b$. Viimast nimetatakse konstantseks funktsiooniks, selle graafikuks on x-teljega parallelne sirge, kui $b \neq 0$, ning x-telg, kui $b = 0$.

3.3. Murdlineaarsed funktsioonid

Funktsioone, mis on määratud valemiga $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$), nimetatakse murdlineaarseteks funktsioonideks.

Omadused:

1. Määramispiirkond $X = \left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$.
2. Muutumispiirkond $Y = \left(-\infty, \dfrac{a}{c}\right) \cup \left(\dfrac{a}{c}, \infty\right)$.
3. Nullkoht $x = -\dfrac{b}{a}$.
4. Poolsirgetel $\left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right)$ ja $\left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$ on funktsioon kasvav, kui $ad - bc > 0$, ning kahanev, kui $ad - bc < 0$.



Pöördvõrdeline sõltuvus.

Kui murdlineaarse funktsiooni avaldises võtta $a = d = 0$ ja $c = 1$, see tähendab, $y = \frac{b}{x}$, siis esitab see funktsioon pöördvõrdelist sõltuvust. Pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on koordinaatide alguspunkti, samuti sirgete $y = x$ ning $y = -x$ suhtes sümmeetriline hüperbool.

Näide. Töölise poolt valmistatud teatud kindla hulga toodangu valmistamiseks kulunud aeg ja ühes ajaühikus valmistatud toodangu hulk on pöördvõrdelises seoses.

3.4. Astmefunktsioonid

Astmefunktsioonideks nimetatakse funktsioone $y = x^a$, kus $a \in \mathbb{R}$.

Paaris- ja paaritud funktsioonid.

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **paarisfunktsiooniks**, kui iga x korral funktsiooni määramispiirkonnast kehtib võrdus $f(-x) = f(x)$. Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **paarituks funktsiooniks**, kui iga x korral funktsiooni määramispiirkonnast kehtib võrdus $f(-x) = -f(x)$. Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Vaatleme astmefunktsiooni $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Kui n on paarisarv, st. $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), siis

$$(-x)^n = (-x)^{2k} = ((-x)^2)^k = (x^2)^k = x^{2k} = x^n.$$

Kui aga n on paaritu arv, st. $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), siis

$$(-x)^n = (-x)^{2k+1} = (-x)^{2k} \cdot (-x) = x^{2k} \cdot (-x) = -x^{2k+1} = -x^n.$$

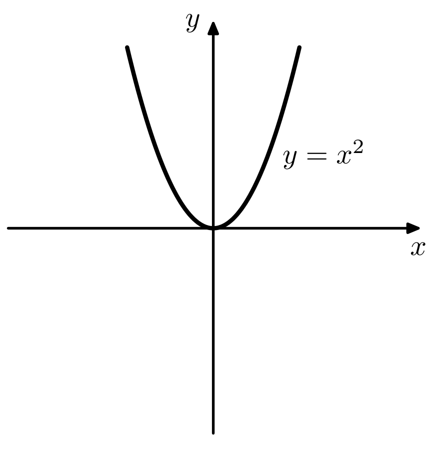
Seega on astmefunktsioon $y = x^n$ paaris n korral paarisfunktsioon, paaritu n korral aga paaritu funktsioon.

Ruutfunktsioon.

Kui astmefunktsiooni avaldises $n = 2$, st. $y = x^2$, siis nimetatakse seda funktsiooni ruutfunktsiooniks. Tema graafikuks on parabool (ruutparabool), mille haripunkt asub nullpunktis, mille harud on suunatud ülespoole ning mis on sümmeetriline y-telje suhtes.

Omadused:

1. Määramispiirkond $X = (-\infty, \infty)$.
2. Muutumispiirkond $Y = [0, \infty)$.
3. Nullkoht $x = 0$.
4. Ruutfunktsioon on paarisfunktsioon.
5. Kasvamispiirkonnaks on poolsirge $[0, \infty)$.
6. Kahanemispiirkonnaks on poolsirge $(-\infty, 0]$.
7. Minimaalne väärtus $y = 0$ on kohal $x = 0$.

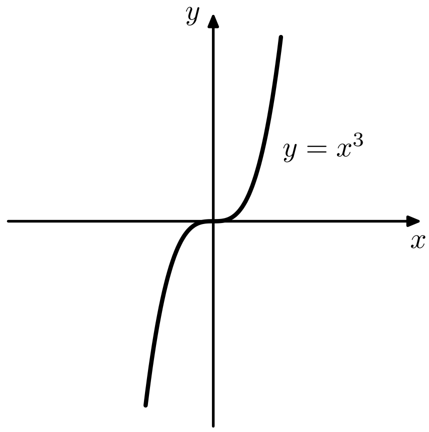


Kuupfunktsioon.

Kui astmefunktsiooni avaldises $n = 3$, st. $y = x^3$, siis nimetatakse seda funktsiooni kuupfunktsiooniks. Tema graafikuks on kuupparabool.

Omadused:

1. Määramispiirkond $X = (-\infty, \infty)$.
2. Muutumispiirkond $Y = (-\infty, \infty)$.
3. Nullkoht $x = 0$.
4. Kuupfunktsioon on paaritu funktsioon.
5. Kuupfunktsioon kasvab kogu määramispiirkonnas.



3.5. Juurfunktsioonid

Pöördfunktsioon

Kui hulgal X on määratud funktsioon, siis vastab hulga X igale elemendile üks kindel element hulgast Y.

Näide 1. Olgu hulk X Eesti Vabariigi kodanike hulk ja hulk Y nende isikukoodide hulk. Sel juhul on hulgal X määratud funktsioon, kuna igale EV kodanikule vastab üks kindla eeskirja järgi määratud isikukood. On olemas ka pöördvastavus: igale isikukoodile vastab üks isik. See tähendab, et ka hulgal Y on määratud funktsioon.

Näide 2. Olgu hulk X mingi kooli õpilaste hulk ja hulk Y õpilaste vanuste (aastates) hulk. Hulgal X on määratud funktsioon, sest igale õpilasele vastab üks kindel vanus. Seevastu hulgal Y ei ole määratud funktsioon, sest ühevanuseid õpilasi on koolis mitu. Kui on antud hulga Y element (vanus), siis ei saa me üheselt määrata, missuguse õpilasega on tegemist.

Kui funktsiooni $y = f(x)$ muutumispiirkonna Y igale elemendile y vastab üks kindel element x funktsiooni f määramispiirkonnast, siis on hulgal Y määratud funktsioon, mida nimetatakse esialgse funktsiooni $y = f(x)$ **pöördfunktsiooniks** ja tähistatakse $y = f^{-1}(x)$. Funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes.

Astmefunktsioonide ($n > 1$) pöördfunktsioone nimetatakse juurfunktsioonideks.

Funktsioonil $y = x^{2k}$, $x \in (-\infty, \infty)$ pole pöördfunktsiooni, sest antud seosega vastab igale arvule $y > 0$ muutuja x kaks erinevat väärtust. Pöördfunktsiooni saamiseks kitsendatakse funktsiooni $y = x^{2k}$ määramispiirkonda nii, et $x \in [0, \infty)$. Sellisel juhul vastab seosega $y = x^{2k}$ igale arvule $y \geqslant 0$ täpselt üks muutuja x väärtus.

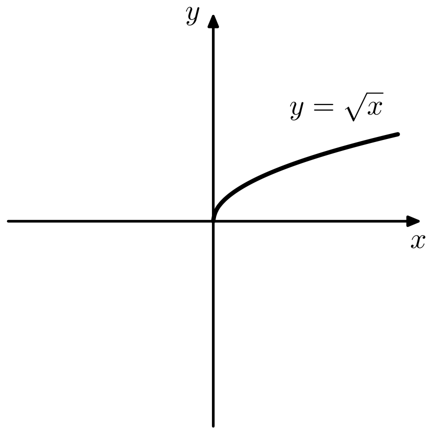
Kui astmefunktsiooni astendaja on paaritu arv, siis niisugust probleemi ei teki, sest vastav funktsioon on rangelt monotoonne.

Ruutjuur

Funktsioon $y = \sqrt{x}$ (ruutjuur) on funktsiooni $y = x^2$, $x \geqslant 0$, pöördfunktsioon. Tema graafikuks on ruutparabooli üks haru, millele y-telg on puutujaks nullpunktis.

Omadused:

1. Määramispiirkond $X = [0, \infty)$.
2. Muutumispiirkond $Y = [0, \infty)$.
3. Nullkoht $x = 0$.
4. Ruutjuur on kasvav kogu määramispiirkonnas.
5. Minimaalne väärtus $y = 0$ on kohal $x = 0$.
6. Graafik läbib punkti $(1, 1)$.

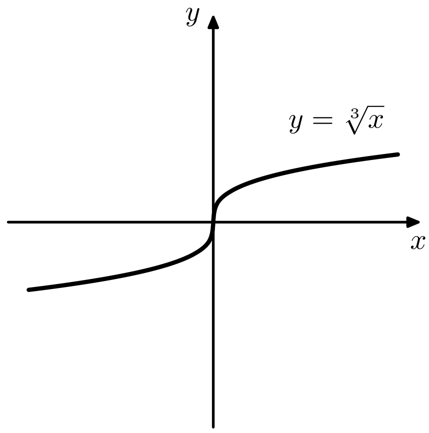


Kuupjuur

Funktsioon $y = \sqrt[3]{x}$ (kuupjuur) on funktsiooni $y = x^3$ pöördfunktsioon. Tema graafikuks on kuupparabool.

Omadused:

1. Määramispiirkond $X = (-\infty, \infty)$.
2. Muutumispiirkond $Y = (-\infty, \infty)$.
3. Nullkoht $x = 0$.
4. Kuupjuur on paaritu funktsioon.
5. Kuupjuur on kasvav kogu määramispiirkonnas.
6. Graafik läbib punkte $(1, 1)$ ja $(-1, -1)$.



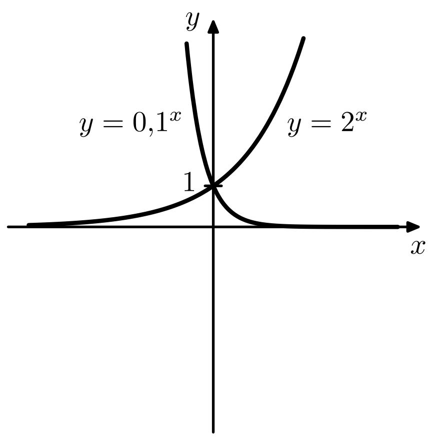
3.6. Eksponentfunktsioonid

Eksponentfunktsioonideks nimetatakse funktsioone $y = a^x$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$. Arvu a nimetatakse eksponentfunktsiooni aluseks.

Omadused:

1. Määramispiirkond $X = (-\infty, \infty)$.
2. Muutumispiirkond $Y = (0, \infty)$.
3. Funktsioon on kogu määramispiirkonnas kasvav, kui $a > 1$ ning kahanev, kui $0 < a < 1$.
4. Nullkohad puuduvad.
5. Graafik lõikab y-telge punktis $y = 1$.

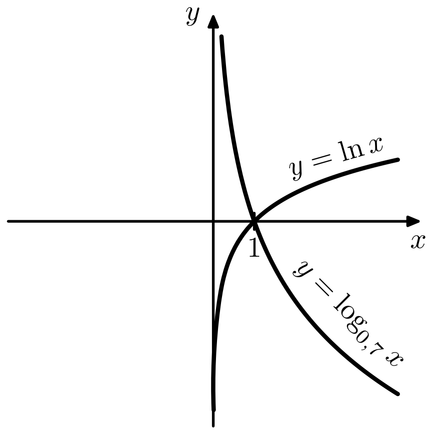
Eksponentfunktsioonide $y = a^x$ ja $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ graafikud on sümmeetrilised y-telje suhtes.



3.7. Logaritmfunktsioonid

Eksponentfunktsiooni $y = a^x$ pöördfunktsiooni nimetatakse logaritmfunktsiooniks, ning tähistatakse $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Arvu a nimetatakse logaritmfunktsiooni aluseks. Kui $a = 10$, siis alust ei märgita ning funktsiooni $y = \log x$ nimetatakse logaritmfunktsiooniks alusel 10. Kui aluseks on arv $e \approx 2{,}7$, siis vastavat logaritmfunktsiooni tähistatakse $y = \ln x$ ja nimetatakse logaritmfunktsiooniks alusel e ehk naturaallogaritmiks.

Omadused:

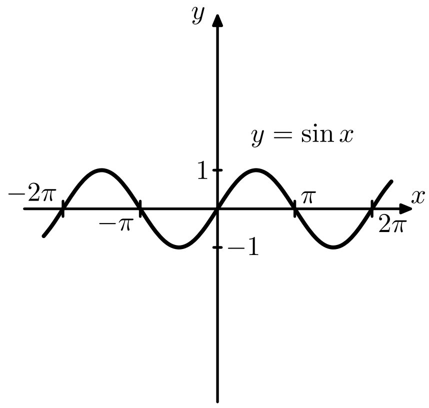


1. Määramispiirkond $X = (0, \infty)$.
2. Muutumispiirkond $Y = (-\infty, \infty)$.
3. Funktsioon on kogu määramispiirkonnas kasvav, kui $a > 1$, ning kahanev, kui $0 < a < 1$.
4. Nullkoht $x = 1$.

3.8. Trigonomeetrilised funktsioonid

Trigonomeetrilisteks funktsioonideks nimetatakse funktsioone $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ ja $y = \cot x$.

Siinusfunktsiooni $y = \sin x$ graafikut nimetatakse sinusoidiks.
Omadused:



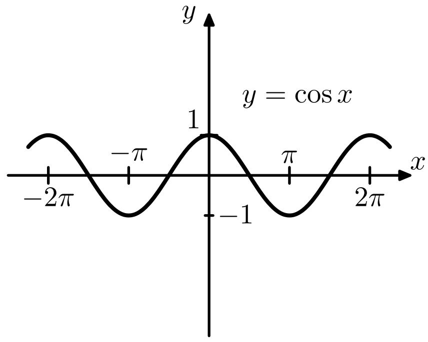
1. Määramispiirkond $X = (-\infty, \infty)$.
2. Muutumispiirkond $Y = [-1, 1]$.
3. Siinusfunktsioon on perioodiline perioodiga 2π.
4. Siinusfunktsioon on paaritu funktsioon.
5. Nullkohad asuvad punktides $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. Maksimumkohtadeks, kus $\sin x = 1$, on punktid $x = (4k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
7. Miinimumkohtadeks, kus $\sin x = -1$, on punktid $x = (4k + 3)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Koosinusfunktsiooni $y = \cos x$ graafikuks on sinusoid, mis saadakse siinusfunktsiooni graafikut piki x-telge suuruse $\dfrac{\pi}{2}$ võrra vasakule nihutades.

Omadused:

1. Määramispiirkond $X = (-\infty, \infty)$.
2. Muutumispiirkond $Y = [-1, 1]$.
3. Koosinusfunktsioon on perioodiline perioodiga 2π.
4. Koosinusfunktsioon on paarisfunktsioon.

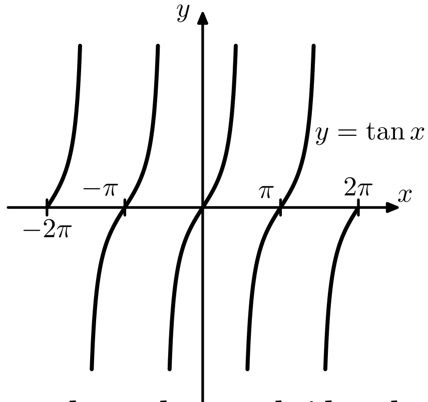
5. Nullkohad asuvad punktides $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. Maksimumkohtadeks, kus $\cos x = 1$, on punktid $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
7. Miinimumkohtadeks, kus $\cos x = -1$, on punktid $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Tangensfunktsioon $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ei ole määratud nendes punktides, kus $\cos x = 0$, st. $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Tangensfunktsiooni graafikut nimetatakse tangensoidiks.

Omadused:

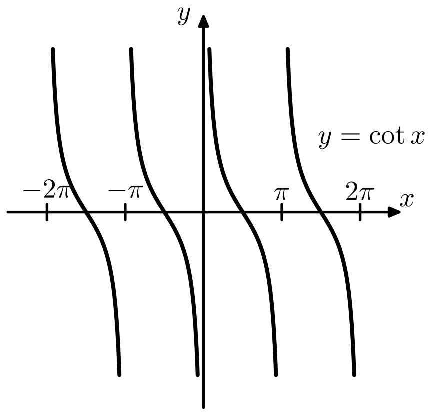
1. Määramispiirkond $X = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \,\middle|\, x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. Muutumispiirkond $Y = (-\infty, \infty)$.
3. Tangensfunktsioon on perioodiline perioodiga π.
4. Tangensfunktsioon on paaritu funktsioon.
5. Nullkohad asuvad punktides $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Kootangensfunktsioon $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ei ole määratud nendes punktides, kus $\sin x = 0$, st. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Kootangensfunktsiooni graafikut nimetatakse kootangensoidiks.

Omadused:

1. Määramispiirkond $X = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \,\middle|\, x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. Muutumispiirkond $Y = (-\infty, \infty)$.
3. Kootangensfunktsioon on perioodiline perioodiga π.
4. Kootangensfunktsioon on paaritu funktsioon.
5. Nullkohad asuvad punktides $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.



3.9. Elementaarfunktsiooni mõiste

Põhilisteks elementaarfunktsioonideks nimetatakse järgmisi funktsioone:
1) konstantne funktsioon $y = c$;
2) astmefunktsioonid $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$;
3) eksponentfunktsioonid $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$);
4) trigonomeetrilised funktsioonid $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ ja $y = \cot x$;
5) ülaltoodute pöördfunktsioonid.

Elementaarfunktsiooniks nimetatakse iga funktsiooni, mida on võimalik moodustada põhilistest elementaarfunktsioonidest, rakendades lõplik arv kordi nelja aritmeetilist tehet (liitmist, lahutamist, korrutamist, jagamist) ja liitfunktsiooni moodustamist.

Ülesanded

58. Joonista vihikusse koordinaatteljestik. Ühiklõigu pikkuseks vali $0{,}5$ cm. Kanna abstsissteljele arvud -10 kuni 9, ordinaatteljele arvud -5 kuni 5. Märgi koordinaattasandile järgmised punktid ning ühenda need järjestikku.

$(-6;0)$	$(-7;-2)$	$(-1;-2)$	$(6;-5)$	$(5;-1)$	$(-3;4)$
$(-8;2)$	$(-4;-2)$	$(1;-3)$	$(7;-4)$	$(2;-2)$	$(0;5)$
$(-9;2)$	$(-5;-4)$	$(2;-3)$	$(7;-3)$	$(0;-2)$	$(2;5)$
$(-10;1)$	$(-4;-5)$	$(4;-2)$	$(6;-1)$	$(-4;-1)$	$(4;4)$
$(-10;0)$	$(-3;-5)$	$(4;-3)$	$(9;0)$	$(-6;0)$	$(7;0)$
$(-9;-1)$	$(-1;-3)$	$(5;-5)$	$(7;0)$	$(-5;2)$	

59. On antud hulk $D = \{-5,-1,0,2,3,6\}$ ja seos $f(x) = 3x - 2$, kus $x \in D$. Leia selle seosega esitatud funktsiooni väärtuste hulk M ja esita funktsioon järjestatud arvupaaridena.

60. On antud hulk $D = \{-4,-2,0,1,4,7\}$ ja seos $f(x) = x^2 - 5$, kus $x \in D$. Leia selle seosega esitatud funktsiooni väärtuste hulk M ja esita funktsioon tabelina.

61. Esita funktsioonid

a)

x	-3	-1	2	4
y	-6	-2	4	8

b)

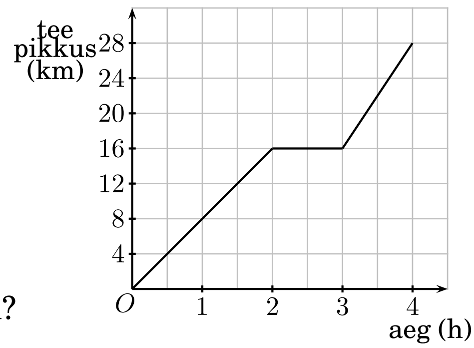
x	-2	-1	0	2
y	-3	0	3	8

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3

nooldiagrammi ning graafiku abil. Milline on nende funktsioonide esitus valemina?

62. Uuri jalgratturi liikumisgraafikut ning vasta küsimustele.
1) Millal tegi jalgrattur puhkepeatuse?
2) Kui kaua ta puhkas?
3) Missuguse kiirusega jätkas jalgrattur sõitu?
4) Mitu kilomeetrit ta pärast puhkust sõitis?
5) Millal ta lõpp-punkti jõudis?
6) Mitu kilomeetrit ta üldse sõitis?
7) Missuguse kiirusega sõitis ta puhkepeatuseni?



63. Joonista tabelis toodud andmete põhjal Mardi liikumise graafik. Mart läbib küll igas tunnis erineva pikkusega teelõike, kuid oletame, et igal tunnil eraldi liigub ta ühtlase kiirusega.

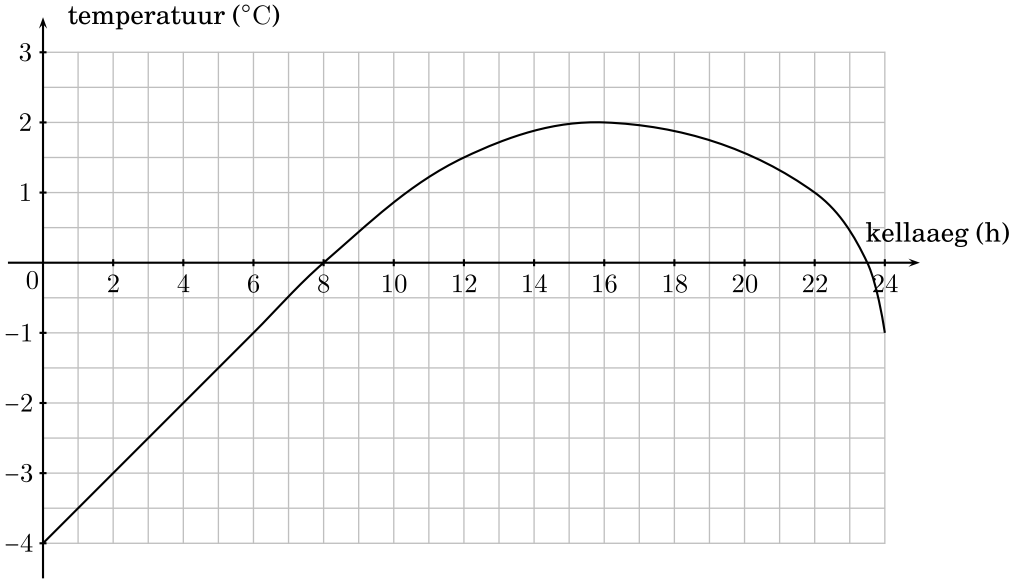
Aeg (h)	0	1	2	3	4
Kaugus lähtepunktist (km)	0	4	9	13	16

1) Kui pika vahemaa läbis Mart 3 tunniga?
2) Kui palju aega kulus Mardil 16 km läbimiseks?
3) Kui suur oli Mardi liikumise kiirus esimesel tunnil, neljandal tunnil?
4) Kui suur oli Mardi keskmine kiirus?

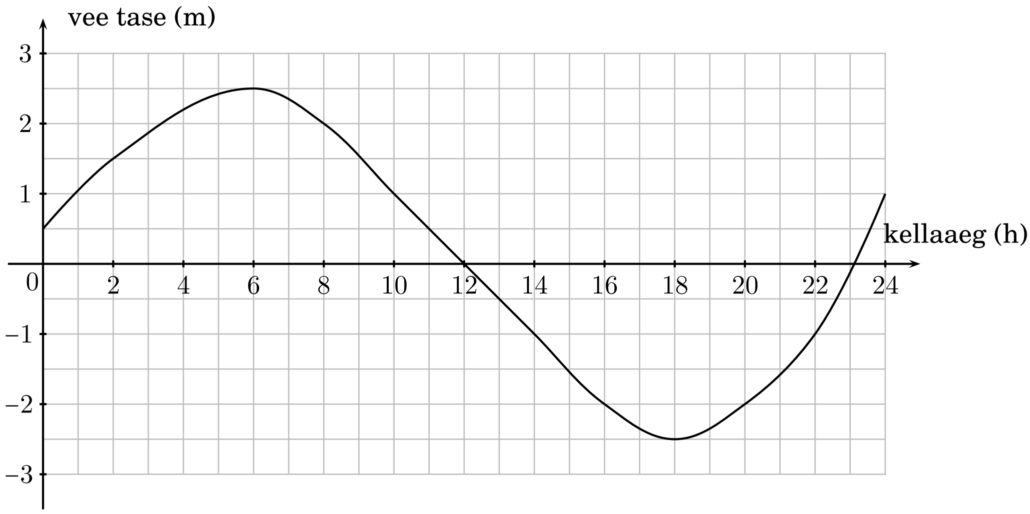
64. Joonesta õhutemperatuuri muutumise graafik kesköövst kuni keskpäevani vastavalt tabelis toodud andmetele.

Kellaaeg (h)	0	2	4	6	8	10	12
Temperatuur (°C)	−3	−5	−6	−4	0	2	5

65. Uuri järgmist graafikut ja vasta küsimustele.
1) Milline oli õhutemperatuur kell 12, kell 24?
2) Mis kell oli õhutemperatuur −4 °C, 0 °C, 2 °C?
3) Millal oli õhutemperatuur kõige madalam, kõige kõrgem, positiivne, negatiivne?
4) Mitme kraadi võrra muutus õhutemperatuur kella 16 ja 22 vahel, südaööst kuni kella 8-ni hommikul?

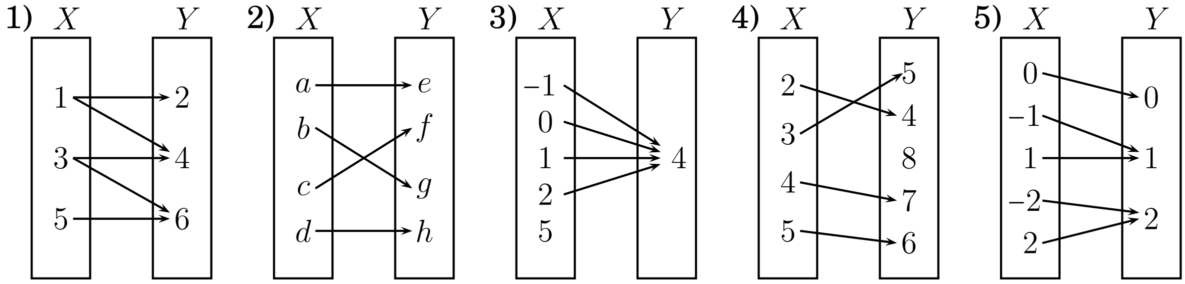


66. Uuri merevee taseme (tõusu ja mõõna) ööpäevase muutumise graafikut ning leia vastused järgmistele küsimustele.
1) Millal oli merevee tase kõige kõrgem, kõige madalam?
2) Millal oli merevesi nulltasemel?
3) Millises ajavahemikus merevee tase tõusis? Millises ajavahemikus oli mõõn, st merevee tase langes?

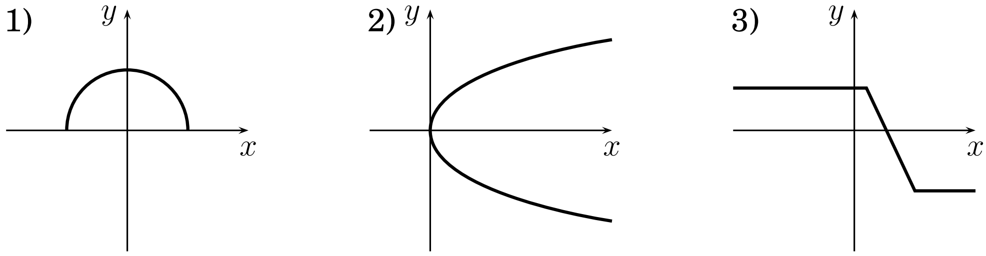


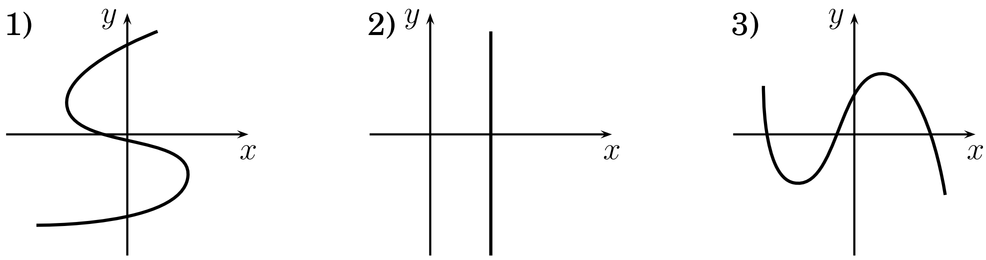
67. Leia järgnevate paaride seast need, mille vaheline vastavus määrab funktsiooni. Määra, kumb on sõltumatu ja kumb sõltuv muutuja.
1) sõidupileti hind ja sõidetava tee pikkus;
2) ruudu külg ja ruudu pindala;
3) vaskjuhtme pikkus ja juhtme kaal;
4) veerõhk allveelaevale ja allveelaeva sügavus;
5) auto kiirus ja paagis oleva bensiini kogus;
6) kaubamajas sisseoste tehes ostudeks kulunud aeg ja kaugus kassast.

68. Kas hulgal X on määratud funktsioon?



69. Milline järgmistest joontest esitab funktsiooni $y = f(x)$? Miks?





70. On antud funktsioon $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Leia

1) $f(0)$; 3) $f(-3)$; 5) $f(-x)$; 7) $f(x-a) - f(a)$;
2) $f(2)$; 4) $f(a)$; 6) $f(b+1)$; 8) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

71. Olgu funktsioon $s = h(t)$ oma määramispiirkonna $\mathbb{R}$ üksikutes osahulkades defineeritud järgmiselt:

$$h(t) = \begin{cases} 2t+3, & \textbf{kui} \quad -\infty < t \leqslant -2, \\ t^2 + t, & \textbf{kui} \quad -2 < t < 1, \\ 3t - 5, & \textbf{kui} \quad 1 \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Leia 1) $h(-3)$; 2) $h(-2)$; 3) $h(-1)$; 4) $h(0)$; 5) $h(1)$; 6) $h(2)$.

72. Joonesta funktsiooni graafik.

1) $y = \begin{cases} x^2, \text{ kui } x < 1, \\ 2 - x, \text{ kui } x \geqslant 1, \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2x + 3, \text{ kui } x < -1, \\ x^2 - 2, \text{ kui } x \geqslant -1, \end{cases}$

3) $y = |2x + 3| - x,$ 4) $y = x + \dfrac{x}{|x|}.$

73. Joonesta funktsiooni graafik järgmiste andmete põhjal.

1) $X = \mathbb{R}$, $X^+ = (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$, $X^- = (1; 4)$, $x_{min} = 2{,}5$, $X\uparrow = (2{,}5; \infty)$, $X\downarrow = (-\infty; 2{,}5)$, $f(2{,}5) = -2{,}25$;

2) $X = \mathbb{R}$, $X_0 = \{0; 6\}$, $X^+ = (-\infty; 0) \cup (0; 6)$, $X^- = (6; \infty)$, $X\uparrow = (0; 3)$, $X_1\downarrow = (-\infty; 0)$, $X_2\downarrow = (3; \infty)$, $X_e = \{0; 3\}$, $f(0) = 0$, $f(3) = 8$;

74. Funktsioon $y = \lceil x \rceil$ kujutab reaalarvu x täisosa, kui selle arvu murdosa vaadata alati mittenegatiivsena (näiteks $\lceil 2{,}45 \rceil = 2$, $\lceil 5{,}896 \rceil = 5$, $\lceil -1,75 \rceil = -2$ jne.). Joonesta selle funktsiooni graafik.

75. Funktsioon $y = \{x\}$ kujutab reaalarvu x mittenegatiivset murdosa ja on defineeritud võrdusega $y = x - [x]$. Joonesta selle funktsiooni graafik.

76. Millised loetletud suurustest on võrdelised, millised pöördvõrdelised? a) Ühesuguse kauba hulk ja tema hind; b) kauba hind ja tema hulk jääva koguhinna juures; c) kauba koguhind ja ühiku hind; d) ühtlase liikumise kestus ja läbitud tee; e) ühtlase liikumise kiirus ja liikumise kestus sama teepikkuse juures; f) liikumise kiirus ja läbikäidud tee pikkus; g) ristküliku pikkus ja pindala jääva laiuse korral; h) pikkus ja laius antud pindala korral; i) tööliste arv ja töö hulk; j) tööliste arv ja töö kestus; k) korrutis ja tegurite suurus; l) jagatav ja jagatis antud jagaja korral; m) nimetaja ja murru suurus jääva lugeja korral; n) lugeja ja nimetaja murru jääva väärtuse korral.

77. Olgu ülikoolis töötavate õppejõudude arv O ning tudengite arv T. Pane kirja seos O ja T vahel, kui iga õppejõu kohta õpib ülikoolis 80 tudengit.

78. Sõidu algul näitab taksomeeter 15 kr., millele lisandub iga 100 m sõidu eest 2 kr. Väljenda sõidu maksumus (y) teepikkuse (x) funktsioonina. Leia selle funktsiooni määramispiirkond.

79. Avalda kumera hulknurga sisenurkade summa (N) selle hulknurga külgede arvu (n) funktsioonina. Leia selle funktsiooni määramispiirkond.

80. Täisnurkse kolmnurga pindala on 5 cm^2. Avalda üks kaatet (a) teise kaateti (b) funktsioonina. Leia selle funktsiooni määramispiirkond.

81. Ümmarguse seibi avause raadius on r ($r = const$). Avalda seibi pindala (s) seibi ääre laiuse (x) funktsioonina. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond? Seda funktsiooni esitava avaldise määramispiirkond?

82. Jalgsimatk kestis 9 tundi. Esimesed 5 tundi liiguti kiirusega $4{,}5$ km/h, siis puhati $0{,}5$ tundi ja ülejäänud ajal liiguti kiirusega 4 km/h. Avalda läbitud tee pikkus (s) aja (t) funktsioonina.

83. Leia funktsiooni määramispiirkond X, muutumispiirkond Y, nullkohad X_0, positiivsuspiirkond X^+ ja negatiivsuspiirkond X^-.

1) $f = \{(-2;3),(-1;5),(0;2),(1;1),(2;0),(3;-1),(4;0)\}$

2) $g = \{(-2;1),(-3;1),(0;1),(2;-1),(5;1),(-1;0),(4;-1)\}$

3) $y = -2x + 6$ 6) $y = 2x - 5$ 9) $y = x^2 - 4$ 12) $y = \dfrac{5}{x^2+2}$

4) $y = x^2 + 2x - 3$ 7) $y = x^2 - 6x$ 10) $y = -\dfrac{2}{x}$ 13) $y = \sqrt{3-x}$

5) $y = x^2 + 4x - 5$ 8) $y = (3-x)^2$ 11) $y = \dfrac{x}{x-1}$ 14) $y = |x-2|$

84. Leia graafiku abil funktsiooni kasvamispiirkond $X\uparrow$, kahanemispiirkond $X\downarrow$ ja ekstreemumkohad X_{min}, X_{max}.

1) $y = |2x-1|$; 2) $y = x^2 - 3$; 3) $y = (2-x)(x+1)$; 4) $y = -\dfrac{2}{x+1}$; 5) $y = \sqrt{9-x^2}$

85. Peegelda funktsiooni graafikut y-telje suhtes. Missuguse valemiga esitub saadud funktsioon?

1) $y = 3x - 1$ 2) $y = x^3$ 3) $y = -2x^2 + 4$ 4) $y = -x^2 - x + 6$

86. Peegelda funktsiooni graafikut koordinaatide alguspunkti suhtes. Missuguse valemiga esitub saadud funktsioon?

1) $y = 5x$ 2) $y = 4 - 3x$ 3) $y = (x-3)^2 + 1$ 4) $y = x^4 - 5$

87. Kontrolli, missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid või paaritud funktsioonid?

1) $y = x^2 + 5x$ 2) $y = x + \dfrac{1}{x}$ 3) $y = -x^2 + 2$ 4) $y = x^3 + x^{-1}$

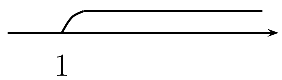
PEATÜKK 4

Võrratused

Üleskirjutist, kus kahe avaldise vahel on võrratusmärk, nimetatakse **võrratuseks**.

Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ mingid muutuja x funktsioonid. Võrratusi $f(x) < g(x)$ ja $f(x) > g(x)$ nimetatakse **rangeteks võrratusteks**, võrratusi $f(x) \leqslant g(x)$ ja $f(x) \geqslant g(x)$ **mitterangeteks võrratusteks**.

Võrratuse lahendamine tähendab kõigi selliste reaalarvude leidmist, mille puhul antud võrratus osutub tõeseks arvvõrratuseks. Iga niisugust reaalarvu x nimetatakse võrratuse lahendiks. Koos moodustavad need võrratuse lahendihulga. Näiteks võrratuse $x - 1 > 0$ lahenditeks on kõik reaalarvud, mis on suuremad arvust 1. Võrratuse **lahendihulga** võib esitada
1) võrratusena (toodud näites $x > 1$),
2) geomeetriliselt,
3) hulgana $\big($toodud näites $L = \{x \mid x > 1\}\big)$.



Mitme võrratuse koos vaatlemine annab meile võrratuste süsteemi, mille lahendihulgaks on kõigi süsteemis olevate võrratuste lahendihulkade ühisosa.

4.1. Võrratuste samaväärsus

Kahte võrratust (võrratuste süsteemi) nimetatakse samaväärseks, kui neil on ühesugused lahendihulgad. Võrratuste lahendamisel kasutatakse järgmisi omadusi:

1. Võrratused $f(x) < g(x)$ ja $-f(x) > -g(x)$ on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud.

2. Võrratused $f(x) < g(x)$ ja $\dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{g(x)}$ on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on **positiivsed**.

3. Võrratused $f(x) < g(x)$ ja $f(x)+\varphi(x) < g(x)+\varphi(x)$ on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$, $g(x)$ ja $\varphi(x)$ on määratud.

   Järeldus: Võrratuse liikmeid võib üle viia ühelt poolelt teisele, muutes nende ees olevad märgid vastupidiseks.

4. Võrratused $f(x) < g(x)$ ja $f(x) \cdot \varphi(x) < g(x) \cdot \varphi(x)$ on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$, $g(x)$ ja $\varphi(x)$ on määratud ning $\varphi(x) > 0$.

Järeldus: Võrratuse pooli võib korrutada (jagada) ühe ja sama positiivse arvuga. Võrratuse poolte korrutamisel (jagamisel) ühe ja sama negatiivse arvuga tuleb muuta võrratuse märk vastupidiseks.

5. Võrratused $f(x) < g(x)$ ja $[f(x)]^{2k+1} < [g(x)]^{2k+1}$ on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud.

6. Võrratused $f(x) < g(x)$ ja $[f(x)]^{2k} < [g(x)]^{2k}$ on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on **positiivsed**.

7. Võrratused $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ ja $f(x) \cdot g(x) > 0$ on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud.

8. Võrratuse $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$ lahendiks on võrratussüsteemide

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ja} \begin{cases} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

lahendihulkade ühend.

4.2. Võrratuste lahendamine

Lineaarvõrratused.

Esimese astme võrratuseks ehk lineaarvõrratuseks nimetatakse võrratust, mille ühel poolel on lineaaravaldis muutuja suhtes ning teisel poolel kas lineaaravaldis muutuja suhtes või konstant.

Näide.

$$\begin{aligned} 4x - 3 &> 7 - x \\ 4x + x &> 7 + 3 \\ 5x &> 10 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

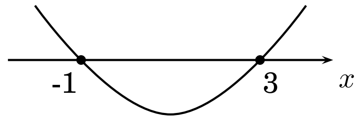
Võrratuse lahendihulk on $L = \{x \mid x > 2\} = (2; \infty)$.

Ruutvõrratused.

Ruutvõrratuseks nimetatakse võrratust, mille vähemalt ühel poolel on ruutpolünoom ning teisel poolel on kas ruutpolünoom, lineaaravaldis või konstant. Näiteks võrratused $5 - x^2 > 2x^2 + 3$, $x + 4 \leqslant 3x - x^2$ ja $x^2 \geqslant 4$ on ruutvõrratused.

Igale rangele ruutvõrratusele saab anda ühe kujudest $ax^2 + bx + c > 0$, $a > 0$, või $ax^2 + bx + c < 0$, $a > 0$. Nende võrratuste lahendihulgad leitakse funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafiku abil. Esimesel võrratusel on selleks muutuja x nende väärtuste hulk, mille korral vastav graafik asub ülalpool x-telge, teisel võrratusel muutuja x nende väärtuste hulk, mille korral vastav graafik asub allpool x-telge. Arutelu lihtsustamise huvides on alati kasulik võrratust teisendada nii (vajadusel teguriga -1 korrutades), et pealiikme kordaja a oleks positiivne. Sel juhul avaneb funktsiooni graafikuks olev parabool alati ülespoole, mistõttu on vaja leida vaid ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid ning nende abil skitseerida graafik. Kui sellel võrrandil lahendid puuduvad, siis on võrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ lahendihulk $\mathbb{R}$ ja võrratuse $ax^2 + bx + c < 0$ lahendihulk tühihulk $\varnothing$.

Näide. Lahendada võrratus $x^2 - 2x - 3 < 0$.
Leiame ruutvõrrandi $x^2 - 2x - 3 = 0$ lahendid $x_1 = 3$ ja $x_2 = -1$, kanname need x-teljele ning tõmbame läbi punktide -1 ja 3 parabooli, mis avaneb ülespoole. Antud võrratuse lahendihulgaks on vahemik, kus see parabool asub allpool x-telge, st. vahemik $L = (-1; 3)$.



Märkus. Mitterange võrratuse (näiteks $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$) lahendihulga saame, kui vastava range võrratuse lahendihulgale lisame ruutvõrrandi lahendid (näite korral $L = [-1; 3]$).

Kõrgema astme võrratused.

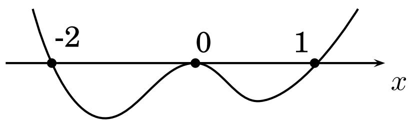
Avaldist $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kus $a_0, a_1, \ldots, a_n$ on reaalarvud, nimetatakse n-astme polünoomiks muutuja x suhtes, kui $a_n \neq 0$. Arve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nimetatakse polünoomi $P_n(x)$ kordajateks. Iga polünoom $P_n(x)$ lahutub pealiikme kordaja, lineaar- ja ruuttegurite korrutiseks

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x - \alpha_m)^{k_m}(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_r x + q_r)^{s_r}, \tag{4.1}$$

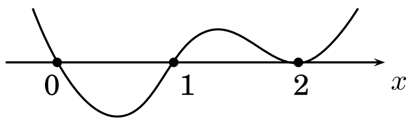
kus $k_1, k_2, \ldots, k_m$ on naturaalarvud (vastavate nullkohtade kordsused), $s_1, s_2, \ldots, s_r$ on naturaalarvud ning ruuttegurid $x^2+p_1x+q_1, \ldots, x^2+p_rx+q_r$ on mistahes reaalarvu x korral positiivsed. Funktsiooni $y = P_n(x)$ graafiku skitseerimiseks kanname x-teljele polünoomi $P_n(x)$ nullkohad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, tõmbame läbi nende joone, alustades juhul $a_n > 0$ ülalt paremalt ning juhul $a_n < 0$ alt paremalt. Seejuures iga nullkohta läbime x-telge lõigates, kui selle nullkoha kordsus on paaritu arv, ning puutudes, kui selle nullkoha kordsus on paarisarv.

Võrratust lahendades on otstarbekas teisendada võrratus kujule (4.1), kus $a_n > 0$.

Näide 1. Lahendada võrratus $x^2(x+2)^3(x^2+1)(x-1) > 0$. Kanname x-teljele polünoomi nullkohad 0, -2 ja 1 ning tõmbame vastava joone. Lahendihulga annavad piirkonnad, kus graafik on ülalpool x-telge, st. $L = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$.



Näide 2. Lahendada võrratus $(x-2)^2(x^2+2)(1-x)x^3 \geqslant 0$. Kui avaksime siin sulud ning leiaksime pealiikme kordaja, siis oleks see -1. Seepärast korrutame võrratuse mõlemaid pooli arvuga -1. Saame lähtevõrratusega samaväärse võrratuse $(x-2)^2(x^2+2)(x-1)x^3 \leqslant 0$. Lahendihulga loeme jooniselt, selleks on $L = [0, 1] \cup \{2\}$.



Murdvõrratused.

Võrratust $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$, kus $P_n(x)$ ja $Q_m(x)$ on polünoomid, nimetatakse murdvõrratuseks. Et selline võrratus on samaväärne võrratusega $P_n(x)Q_m(x) < 0$, siis lahendub murdvõrratus samade meetoditega kui kõrgema astme võrratused.

Kui on tegemist mitterange murdvõrratusega, siis tuleb silmas pidada, et nimetaja

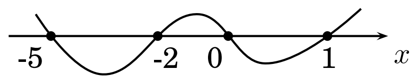
$Q_m(x)$ nullkohad ei kuulu selle võrratuse lahendihulka, lugeja $P_n(x)$ nullkohad aga kuuluvad.

Näide. Lahenda võrratus $\frac{5}{x^2+2x} \leqslant \frac{4+x}{x+2}$.

Viinud mõlemad murrud ühele poole võrratusmärki, saame võrratuse

$$\frac{5-x^2-4x}{x(x+2)} \leqslant 0 \text{ ehk } \frac{x^2+4x-5}{x(x+2)} \geqslant 0,$$

mis on samaväärne võrratusega $(x^2+4x-5)x(x+2) \geqslant 0$, kui $x \neq 0$ ja $x \neq -2$. Pärast ruutpolünoomi tegureiks lahutamist saame võrratuse $(x+5)(x-1)x(x+2) \geqslant 0$, kus $x \neq 0$ ja $x \neq -2$. Lahendihulga $X = (-\infty, -5] \cup (-2, 0) \cup [1, \infty)$ loeme jooniselt.

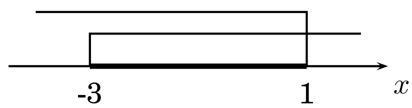


4.3. Võrratussüsteemide lahendamine

Võrratussüsteemi lahendihulgaks on selle süsteemi üksikute võrratuste lahendihulkade ühisosa. Võrratussüsteemi lahendades tuleks kõigepealt lahendada eraldi kõik süsteemis esinevad võrratused ning seejärel leida lahendihulkade ühisosa näiteks joonise abil.

Näide 1.

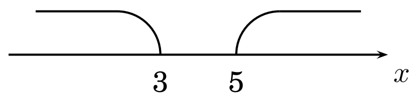
$$\begin{cases} 2x+6 \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geqslant -6 \\ -x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x \leqslant 1 \end{cases}$$



Vastus: $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

Näide 2.

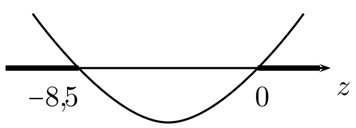
$$\begin{cases} 2x < 6 \\ 5 < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 5 \end{cases}$$



Vastus: lahend puudub.

Näide 3.

$$\begin{cases} (3z+5)^2-(3-2z)^2 \geqslant (z+4)^2 \\ (3z+1)^2 > (2z+5)^2-33 \end{cases}$$



Lahendame esimese võrratuse:

$(3z+5)^2-(3-2z)^2 \geqslant (z+4)^2$

$9z^2+30z+25-9+12z-4z^2 \geqslant z^2+8z+16$

$9z^2-4z^2-z^2+30z+12z-8z+25-9-16 \geqslant 0$

$4z^2+34z \geqslant 0$

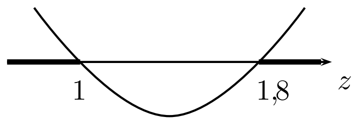
$4z^2+34z = 0$

$(4z+34)z = 0$

$z_1 = 0 \qquad 4z+34 = 0 \quad 4z = -34 \mid :4 \quad z_2 = -8{,}5$

$L_1 = (-\infty; -8{,}5] \cup [0; \infty)$

Lahendame teise võrratuse:



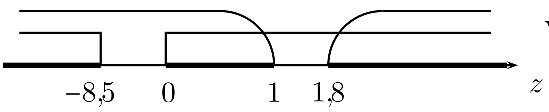
$(3z+1)^2 > (2z+5)^2 - 33$
$9z^2 + 6z + 1 > 4z^2 + 20z + 25 - 33$
$9z^2 - 4z^2 + 6z - 20z + 1 - 25 + 33 > 0$
$5z^2 - 14z + 9 > 0$
$5z^2 - 14z + 9 = 0$

$$z = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9}}{2 \cdot 5} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 180}}{10} = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{14 \pm 4}{10}$$

$$z_1 = \frac{14-4}{10} = 1 \quad z_2 = \frac{14+4}{10} = 1{,}8$$

$L_2 = (-\infty; 1) \cup (1{,}8; \infty)$

Leiame lahendihulkade ühisosa:



Vastus: $L = (-\infty; -8{,}5] \cup [0; 1) \cup (1{,}8; \infty)$.

Ülesanded

88. Lahenda lineaarvõrratused

1) $8x - 2 > 12x - 6$
2) $2 - 5x < 1 + 3x$
3) $4x - 7 \leqslant -3 - 5x$
4) $\dfrac{x-2}{4} < 0$
5) $\dfrac{x-1}{-5} \leqslant 0$
6) $-2x > 0$
7) $4x < x$
8) $-x > x$
9) $\dfrac{x}{-2} \leqslant 0$

89. Lahenda ruutvõrratused

1) $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$
2) $3x^2 - 5x - 2 < 0$
3) $5x^2 + 6x + 1 > 0$
4) $5x^2 - 7x + 2 > 0$
5) $x^2 - 4 \leqslant 4$
6) $-x^2 + 5x - 6 > 0$
7) $(x + 5)x \leqslant 2(x^2 + 2)$
8) $x > -\dfrac{1}{2}x^2 - 4,5x + 6$
9) $x^2 - 15x \geqslant 3(108 - 5x)$

90. Lahenda võrratused

1) $x - 3 < -2 + x$
2) $x - 3 > -2 + x$
3) $x - 7 \leqslant x - 7$
4) $\left(\dfrac{x}{5} + 3\right)^2 \leqslant 0$
5) $(3x - 5)^2 > 0$
6) $(2x + 8)^2 \geqslant 0$
7) $x + 2 < x + 2$
8) $(2x - 1)^2 > 2x(2x - 2) + 1$
9) $(3 - 5x)^2 \geqslant 9 + 5x(5x - 6)$

91. Lahenda lineaarvõrratused

1) $4(x - 2) - 6 - 2(x - 2) + 6x < -3(2 - 4x) - 4 - 2x$
2) $-4 - 3(1 - 3x) - 8x - 3 > -x + 2(x - 6) - 4(5 - 2x)$
3) $-3\left[1 - (2 - x)(2x + 3) - \dfrac{x-3}{2}\right] > 13 - 2x(3x - 2)$
4) $15x - 6 - x \leqslant -\dfrac{3x-1}{4} - \left[1 - 2\left(x - \dfrac{3+x}{5}\right)\right]$
5) $\dfrac{0{,}12 - x}{0{,}03} - 4\dfrac{1}{2} \geqslant -\dfrac{0{,}01 + 3x}{0{,}02}$

92. Lahenda kõrgema astme võrratused

1) $(x - 1)^3(x + 4)(x - 2)^2(x + 1) < 0$
2) $x^2(x - 4)^3(x - 2)^4(x + 3) \leqslant 0$
3) $(x + 3)^2(x - 4)^2(x + 2)(x - 5)^3 \leqslant 0$
4) $x(x + 1)^2(x + 2)^3(x - 2)(x - 4) \geqslant 0$
5) $x(x + 1)^2(x - 5)^3(x + 6)^4(x - 2) \leqslant 0$
6) $(x + 1)(x + 1)(x - 3)(x - 2) < 0$
7) $x^2(x^2 - x - 20)^3(x^2 - 7x + 12) < 0$
8) $(x - 1)^2(x^2 - x - 42)(x^2 + 8x + 7)^4 > 0$
9) $(x + 1)^2(x^2 - 5x + 4) \leqslant 0$
10) $(x + 2)^2(x^2 + 8x - 9) \geqslant 0$
11) $x^7 - x^6 + 9x^5 - 9x^4 < 0$
*12) $-x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x + 8 > 0$

93. Lahenda murdvõrratused

1) $\dfrac{(x+1)(x+2)^2}{(x-3)^3(x-4)^4} \leqslant 0$

2) $\dfrac{x+1}{2(x-1)} < \dfrac{9}{2(x+4)} + \dfrac{1}{x-1}$

3) $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} \leqslant \dfrac{1}{x-3}$

4) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-5x+6} > 1$

5) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1$

6) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$

7) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{(4-x)x^2} \geqslant 0$

8) $\dfrac{x+1}{x-3} \geqslant \dfrac{x-2}{x-5}$

94. Lahenda võrratusesüsteemid

1) $\begin{cases} 7x-2 > 18-3x \\ 5-x < 2x-10 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x-2 < 3x+6 \\ 2x+1 < 4x-9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - \dfrac{5+x}{4} > 3x \\ 2x-5 < 3x \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{2x-1}{3} \geqslant \dfrac{x-6}{6} + 5 \\ \dfrac{x-3}{5} \leqslant \dfrac{5x-1}{2} - \dfrac{6x+1}{3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4-3t > t-12 \\ t-2 > 4-2t \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3(1+t)-13 < 0 \\ t+4 < 4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x-8 < 3(4x-3)+16 \\ \dfrac{4(x+1)}{5} < \dfrac{3}{5}x + 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{2m+2}{7} - \dfrac{4m-3}{2} \leqslant \dfrac{2+13m}{14} - 1 \\ 3\dfrac{1}{3} - \dfrac{5-4m}{6} > \dfrac{m-2}{2} - \dfrac{3m+1}{3} \end{cases}$

95. Millises piirkonnas on funktsiooni väärtused mittenegatiivsed?

1) $y = -x + 5$

2) $y = -\dfrac{1}{2}(x-3)$

3) $y = \dfrac{3x-5}{4} - \dfrac{2x+5}{2}$

4) $y = \dfrac{3-2x}{6} - \dfrac{2-x}{3} + 2$

96. Millises piirkonnas on avaldise $f(x)$ väärtused suuremad kui $g(x)$ omad?

1) $f(x) = 2x+3$; $g(x) = x+4$

2) $f(x) = 3x+2$; $g(x) = -x-2$

97. Millises piirkonnas on ruutpolünoomi $y = P(x)$ väärtused suuremad funktsiooni $y = f(x)$ väärtustest?

1) $P(x) = x^2 + 3$; $f(x) = 28$

2) $P(x) = x^2 + 5x$; $f(x) = 2x^2 + 2x - 18$

3) $P(x) = 7x^2 - 6x + 7$; $f(x) = 3x^2 + 4x + 13$

4) $P(x) = 11 - 4x - 7x^2$; $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$

98. Millises piirkonnas on kõigi antud lineaarfunktsioonide väärtused positiivsed?

1) $y = 2 - \frac{x}{2}$; $y = \frac{x}{3} + 1$

2) $y = 1 - x$; $y = \frac{1}{3}(x + 2)$

3) $y = \frac{3x - 2}{5} + 4$; $y = \frac{4x}{3} - \frac{x - 1}{2}$; $y = 2x - 7$

4) $y = 1 - \frac{x}{2}$; $y = 2x + 2{,}5$; $y = \frac{3x - 5}{6}$

99. Millises piirkonnas on mõlemad avaldised $P(x)$ ja $Q(x)$ negatiivsed?

1) $P(x) = -x^2 + 3x + 18; \quad Q(x) = 2x^2 - 3x - 9$

2) $P(x) = -x^2 - 5x; \quad Q(x) = 4x^2 - 16$

3) $P(x) = -10 - 3x + x^2; \quad Q(x) = -x^2 + x + 6$

100. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y = \sqrt{36 - 4x}$

2) $y = \sqrt{5x} - \sqrt{2x - 6}$

3) $y = \frac{\sqrt{7x + 14}}{\sqrt{x}}$

4) $y = \sqrt[4]{2 - x} - \frac{1}{\sqrt{5x + 25}}$

5) $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{8 - x} - \sqrt[6]{7x + 21}$

6) $y = \frac{\sqrt{8x - 40}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$

7) $y = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$

8) $y = \sqrt[4]{36 + 6x - 2x^2}$

9) $y = \frac{17 - x}{\sqrt{4x^2 - 12}}$

10) $y = \left(\sqrt{8x - 3x^2 - 4}\right)^{-1}$

Vastused

Algebralised avaldised

1. 1) $a \neq 1$; 2) $x + y > 0$; 3) $x \in \mathbb{R}$; 4) $x \geqslant -1$ ja $x \neq 0$; 5) $x \geqslant 0$; 6) $a \neq \frac{1}{2}$; 7) $x \geqslant -2$; 8) $x \neq 2$.

2. 1) -2; 2) 26; 3) $59a^6$; 4) 0.

3. 1) $a^3 + b^3$; 387; 2) $2a^3$; 432; 3) $4(x - y)$; 28; 4) $(x + y)^2 - (x + y)^4$; -240.

4. 1) $4ab$; 2) $a^2 - (b - c)^2$; 3) $4x^2 + 2x + 2$; 4) 0; 5) $55x^3 - 144x^2 + 229x - 27$; 6) $113 - 16x^2$.

5. 1) $6b(2a - 3c + 4d)$; 2) $15xy^2(4xy + 1 - 2x)$; 3) $(a + 1)(b - c)$; 4) $(x - y)(a + b)$; 5) $x(a - 4)$; 6) $(2 + b)(1 - c)$; 7) $2(x + y)$; 8) $(5 - y)(5 + y)$; 9) $2(12 - y)(12 + y)$; 10) $am(2a - m)(2a + m)$; 11) $5x(1 - 2a)(1 + 2a)$; 12) $(3a - 2x + 1)(3a + 2x - 1)$; 13) $-4ab$; 14) $(a - 2)^2$; 15) $(5 - y)^2$; 16) ruutpolünoomil puuduvad reaalarvulised nullkohad, teguriteks lahutada ei saa; 17) $2a^2(a + b)^2$; 18) $(x + 1)^3$.

6. 1) $(a + 5)(a^2 - 5a + 25$; 2) $(4 - x)(16 + 4x + x^2)$; 3) $16b^2(2a - 3c)(4a^2 + 6ac + 9c^2)$; 4) $(a + 2)(x + y)$; 5) $(t - a)(t - 3)$; 6) $(x + 1)(x^2 + 1)$; 7) $(x - 2)(x^2 - 2)$; 8) $(x^3 - 8) - 3x(x - 2) = (x - 2)(x^2 - x + 4)$; 9) $(a + b)(a - b - 1)$; 10) $(a - b + c)(a + b - c)$; 11) $(2a + 1)(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$; 12) $(x + 6)(x + 8)$; 13) $(x + 2)(3x - 1)$; 14) $x(x - 4)(x + 1)$; 15) $(x - y - 1)^2$; 16) $(u + 1)(u - 2)(u + 2)$; 17) $(2x - 5y)^2 - 6^2 = (2x - 5y - 6)(2x - 5y + 6)$; 18) $2(1 - 3a^3)^3$; 19) $(3x^2 - y)^3$; 20) $(x + y + 1)^2$.

7. 1) $\frac{x + 13}{x + 15}$; 2) $\frac{3x + 1}{2x - 1}$; 3) $\frac{2m - 1}{m - 3}$; 4) $\frac{n^2 + 4n + 16}{n - 7}$; 5) $\frac{a + 13b}{a + 15b}$; 6) $\frac{a - 7b}{a + b}$.

8. 1) $\frac{3}{b}$; 2) $\frac{4x - 15}{20}$; 3) $\frac{ay + bx}{xy}$; 4) $\frac{3(x - y)}{2(x + y)}$; 5) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$; 6) 0; 7) $\frac{a - b}{x}$; 8) $\frac{2x}{y}$; 9) $\frac{4a}{2a - 3x}$; 10) $\frac{2x}{4a - x}$; 11) $\frac{2xa^3}{(a^6 - 1}$; 12) $\frac{a}{2(a + 1)^3}$; 13) 0; 14) $\frac{c + b - a}{c - b - a}$.

9. 1) $\frac{2b}{a}$; 2) $\frac{n(n + 1)}{2(n - 1)}$; 3) $\frac{3a^2}{x^2}$; 4) $\frac{a + b}{a - b}$; 5) $a^2 - a - 3$; 6) 1; 7) $\frac{b}{9(3 + b)}$; 8) $\frac{x}{x - 2y}$; 9) $\frac{9m^2 - 1}{3m}$; 10) $\frac{1}{2a(a + 2)}$; 11) $\frac{1}{a + 2b}$; 12) $\frac{a - 3}{a + 2}$; 13) 1; 14) $\frac{ab}{a + b}$; 15) $\frac{1 + x}{(1 - x)(1 - 2x)}$; 16) $\frac{a + 1}{ax}$; 17) $\frac{bc + ac + ab}{bc + ac - ab}$.

Võrrandid ja võrrandisüsteemid

10. 1) $\frac{1}{8}$; 2) -1; 3) $-1\frac{5}{9}$; 4) -52; 5) $-3\frac{9}{10}$; 6) $-4\frac{1}{6}$; 7) 1; 8) $1\frac{1}{5}$; 9) $9\frac{3}{5}$; 10) 8;

11) 1; 12) tegemist on samasusega, lahendiks sobib iga arv; 13) lahend puudub; 14) 5; 15) 7.

11. 1) $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; 2) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 3) $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 4) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -3\frac{1}{2}$; 5) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{4}$; 6) $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = 1$; 7) lahendid puuduvad 8) $x_1 = 3$, $x_2 = 7$; 9) $x_1 = 10$, $x_2 = -2$; 10) $x_1 = 0$, $x_2 = 7$; 11) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$; 12) $x_1 = -8\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$; 13) $x_1 = 1\frac{1}{3}$, $x_2 = -1\frac{1}{3}$; 14) $x_1 = \frac{4}{15}$, $x_2 = -\frac{4}{15}$; 15) lahendid puuduvad.

13. 1) $x_1 = 8$, $x_2 = 2$; 2) $x = 3$; 3) lahendid puuduvad; 4) $x = 1{,}5$; 5) $x = 3$; 6) $x = 8$; 7) $x = -\frac{1}{2}$; 8) $x = 4\frac{4}{11}$.

16. 1) $x = \frac{1}{5}$, $y = -1$; 2) $x = 5$, $y = -2$; 3) $x = 3$, $y = 2$; 4) $x = -1$, $y = 2$; 5) $x = -3$, $y = 1$; 6) $x = -4$, $y = -5$; 7) $x = 3$, $y = -6$; 8) $x = 4$, $y = -2$; 9) $x = -5$, $y = 3$.

20. 28 õpilast; **21.** 4; **22.** 84; **23.** 75; **24.** 4 ja 3; **25.** 37; **26.** 5; **27.** 10 ja 20; **28.** 210 km; **29.** 12 h; **30.** $2\frac{1}{2}$ m ja 3 m; **31.** 15 h ja 25 h; **36.** $\frac{12}{15}$; **37.** 5 m ja 3 m; **38.** 3 m; **39.** 10 m ja 6 m; **40.** 9; **41.** 80 km/h ja 70 km/h; **42.** 20 km/h; **43.** 24 km/h; **44.** 300 km/h ja 360 km/h; **45.** 24 h ja 12 h; **46.** 15 h ja 12 h; **47.** 36 km/h ja 32 km/h; **48.** $22\frac{2}{3}$ km/h; **49.** 24; **50.** 24 h ja 27 h; **51.** 40 cm ja 20 cm; **52.** 12 h; **53.** 40 km/h ja 36 km/h; **54.** 50 ja 75; **55.** 28; **56.** 150 km ja 50 km.

Funktsioonid

83.

1) $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $Y = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$; $X_0 = \{2, 4\}$; $X^+ = \{-2, -1, 0, 1\}$; $X^- = \{3\}$;

3) $X = \mathbb{R}$; $Y = \mathbb{R}$; $X_0 = \{3\}$; $X^+ = (-\infty, 3)$; $X^- = (3, \infty)$;

5) $X = \mathbb{R}$; $Y = [-9, \infty)$; $X_0 = \{-5, 1\}$; $X^+ = (-\infty, -5) \cup (1, \infty)$; $X^- = (-5, 1)$;

7) $X = \mathbb{R}$; $Y = [-9, \infty)$; $X_0 = \{0, 6\}$; $X^+ = (-\infty, 0) \cup (6, \infty)$; $X^- = (0, 6)$;

9) $X = \mathbb{R}$; $Y = [-4, \infty)$; $X_0 = \{-2, 2\}$; $X^+ = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; $X^- = (-2, 2)$;

11) $X = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; $Y = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; $X_0 = \{0\}$; $X^+ = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$; $X^- = (0, 1)$;

12) $X = \mathbb{R}$; $Y = (0; 2{,}5]$; $X_0 = \varnothing$; $X^+ = \mathbb{R}$; $X^- = \varnothing$;

13) $X = (-\infty, 3]$; $Y = [0, \infty)$; $X_0 = \{3\}$; $X^+ = (-\infty, 3)$; $X^- = \varnothing$;

14) $X = \mathbb{R}$; $Y = [0, \infty)$; $X_0 = \{2\}$; $X^+ = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; $X^- = \varnothing$.

84.

1) $X\!\uparrow = (0{,}5; \infty)$; $X\!\downarrow = (-\infty; 0{,}5)$; $X_{min} = \{0{,}5\}$; $X_{max} = \varnothing$;

2) $X\!\uparrow = (0, \infty)$; $X\!\downarrow = (-\infty, 0)$; $X_{min} = \{0\}$; $X_{max} = \varnothing$;

3) $X\!\uparrow = (-\infty; 0{,}5)$; $X\!\downarrow = (0{,}5; \infty)$; $X_{min} = \varnothing$; $X_{max} = \{0{,}5\}$;

4) $X\uparrow = (-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$; $X\downarrow = \varnothing$; $X_{min} = \varnothing$; $X_{max} = \varnothing$;

5) $X\uparrow = (-3,0)$; $X\downarrow = (0,3)$; $X_{min} = \{-3,3\}$; $X_{max} = \{0\}$.

Võrratused

88. 1) $x < 1$; 2) $x > \frac{1}{8}$; 3) $x \leqslant \frac{4}{9}$; 4) $x < 2$; 5) $x \geqslant 1$; 6) $x < 0$; 7) $x < 0$; 8) $x < 0$; 9) $x \geqslant 0$.

89. 1) $x \leqslant 2$ või $x \geqslant 3$; 2) $-\frac{1}{3} < x < 2$; 3) $x < -1$ või $x > -\frac{1}{5}$; 4) $x < \frac{2}{5}$ või $x > 1$; 5) $-2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}$; 6) $2 < x < 3$; 7) $x \leqslant 1$ või $x \geqslant 4$; 8) $x < -12$ või $x > 1$; 9) $x \leqslant -18$ või $x \geqslant 18$.

90. 1) $x \in \mathbb{R}$; 2) lahendid puuduvad; 3) $x \in \mathbb{R}$; 4) $x = -15$; 5) $x \in (-\infty, 1\frac{2}{3}) \cup (1\frac{2}{3}, \infty)$; 6) $x \in \mathbb{R}$; 7) lahendid puuduvad; 8) lahendid puuduvad; 9) $x \in \mathbb{R}$.

91. 1) $x > 0$; 2) $x < 2\frac{3}{4}$; 3) $x > 5$; 4) $x \leqslant \frac{81}{263}$; 5) $x \geqslant 0$.

92. 1) $x \in (-\infty,-4) \cup (-1,1)$; 2) $x \in [-3,4]$; 3) $x \in \{-3\} \cup [-2,5]$; 4) $x \in (-\infty,-2] \cup \{-1\} \cup [0,2] \cup [4,\infty)$; 5) $x \in (-\infty,0] \cup [2,5]$; 6) $x \in (2,3)$; 7) $x \in (-4,0) \cup (0,3) \cup (4,5)$; 8) $x \in (-\infty,-7) \cup (-7,-6) \cup (7,\infty)$; 9) $x \in \{-1\} \cup [1,4]$; 10) $x \in (-\infty,-9] \cup \{-2\} \cup [1,\infty)$; 11) $x \in (-\infty,0) \cup (0,1)$; 12) $x \in (-2,2)$.

93. 1) $x \in \{-2\}\cup[-1,3)$; 2) $x \in (-4,1)\cup(1,5)$; 3) $x \in (-\infty,-1)\cup(3,7)$; 4) $x \in (0{,}5;2)\cup(3;\infty)$; 5) $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,0]$; 6) $x \in (-\infty;1) \cup (1{,}5;2) \cup (3;\infty)$; 7) $x \in [-1,0) \cup (0,1] \cup [3,4)$; 8) $x \in (3,5) \cup [11,\infty)$.

94. 1) $x > 5$; 2) lahend puudub; 3) $-5 < x < 1$; 4) $x \geqslant 1\frac{3}{4}$; 5) $2 < t < 4$; 6) $t < 0$; 7) lahend puudub; 8) $m \geqslant 1$.

95. 1) $x \leqslant 5$; 2) $x \leqslant 3$; 3) $x \leqslant -15$; 4) $x \in \mathbb{R}$.

96. 1) $x > 1$; 2) $x > -1$.

97. 1) $x < -5$ või $x > 5$; 2) $-3 < x < 6$; 3) $x < -\frac{1}{2}$ või $x > 3$; 4) $-\frac{3}{4} < x < 1$.

98. 1) $-3 < x < 4$; 2) $-2 < x < 1$; 3) $x > 3\frac{1}{2}$; 4) $1\frac{2}{3} < x < 2$.

99. 1) lahend puudub; 2) $0 < x < 2$; 3) $3 < x < 5$.

100. 1) $x \leqslant 9$; 2) $x \geqslant 3$; 3) $x > 0$; 4) $-5 < x \leqslant 2$; 5) $0 \leqslant x \leqslant 8$; 6) $x \geqslant 5$; 7) $x \leqslant -\frac{1}{2}$ või $x \geqslant 3$; 8) $-3 \leqslant x \leqslant 6$; 9) $x < -\sqrt{3}$ või $x > \sqrt{3}$; 10) $\frac{2}{3} < x < 2$.