

# Динамика частиц в жидкости под действием поляризованных по кругу высокочастотных вибраций

А. Ю. Байдин, Д. В. Любимов

Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Работа посвящена изучению поведения системы частиц, взвешенных в жидкости, под действием высокочастотных вибраций сосуда, поляризованных по кругу. На основании изучения взаимодействия двух частиц построена приближенная модель поведения ансамбля частиц в приближении парного взаимодействия и с использованием простых аппроксимаций сил, действующих на частицу как функций расстояния между частицами и ориентации пары частиц по отношению к направлению вибраций. В результате исследования показали, что частицы формируют кристаллическую решетку, которая ограничена стенками сосуда, и период решетки зависит от размеров сосуда и количества частиц. Также была исследована устойчивость этого квазикристалла по отношению к возмущениям.

**Ключевые слова:** частицы, вибрации, квазикристалл.

## 1. Введение

При действии вибрации на нелинейные механические системы открываются новые удивительные явления: верхнее положение маятника делается устойчивым, тяжелый металлический шар всплывает в слое песка, свая легко погружается в грунт под действием собственного веса, тяжелое тело или слой сыпучего материала движется вверх по наклонной плоскости, вращение ротора устойчиво поддерживается при выключенном электродвигателе и т.п. Для большинства эффектов характерно, что возникающее под действием вибрации движение системы состоит из двух составляющих – «медленной», мало изменяющейся за один период колебаний, и «быстрой» вибрации. Таким образом, из-за осциллирующей силы возникает осредненная сила, которая и приводит к парадоксальным явлениям.

Перейдем к явлениям, которые наблюдаются при вибрационном воздействии на неоднородные по плотности гидродинамические системы. Так, под действием вибраций включения, плотность которых больше плотности окружающей их жидкости, могут всплывать, и, наоборот, если плотность включения меньше плотности жидкости при некоторых условиях, тонут [1–5]. В случае деформируемых частиц поступательные вибрации сосуда действуют на форму включений, сплющивая их в направлении вибраций [6]. При однородных вибрациях средняя сила, действующая на включения со стороны пульсационного потока, существенна

лишь вблизи твердой стенки; она быстро убывает с увеличением расстояния от частицы до стенки [1–6]. Вибрации, имеющие ненулевую вращательную компоненту, приводят к возникновению дальнедействующей средней силы, которая может вызывать движение частиц против направления силы тяжести [7, 8]. В случае деформируемого включения непоступательные вибрации приводят также к изменению средней формы включения, определяемому градиентами скорости в невозмущенном потоке [9]. Тела, находящиеся в жидкости, под действием вибраций начинают взаимодействовать между собой и со стенками сосуда. Известно, что два сферических тела притягиваются, если линия, соединяющая их центры, ортогональна направлению вибраций, а если она параллельна направлению вибраций, то тела отталкиваются. При этом осредненное взаимодействие тел растет с увеличением интенсивности вибраций. С увеличением расстояния между телами сила взаимодействия ослабевает.

Что касается поведения в вибрационном поле ансамбля частиц, то существуют теоретические работы, в которых используется приближение сплошной среды для суспензии частиц, в предположении, однако, достаточно малой концентрации.

Известно, что частицы в жидкости под действием поступательных вибраций высокой частоты формируют кластеры, состоящие из двух и более частиц и ориентирующиеся перпендикулярно направлению вибраций. [10, 11]

В данной работе рассматривается система двух и более частиц, взвешенных в жидкости, под действием высокочастотных вибраций сосуда, поляризованных по кругу. Изучение проводится численно методами молекулярной динамики в приближении парного взаимодействия.

## 2. Постановка задачи

Имеется прямоугольный сосуд, наполненный жидкостью. В него помещается  $N$  сферических частиц. Далее, сосуд подвергается гармоническим колебаниям высокой частоты и малой амплитуды, поляризованным по кругу. Требуется проследить за временной эволюцией данной системы.

Частицы под действием вибраций начнут взаимодействовать между собой и со стенками сосуда посредством осредненных вибрационных сил. Взаимодействие частиц со стенками сосуда учитываться не будет.

Частота вибраций предполагается настолько большой, что толщина динамического пограничного слоя (вязкого скин-слоя) много меньше среднего расстояния между частицами. Таким образом, движение жидкости можно считать потенциальным, что облегчает задачу нахождения силы взаимодействия между частицами. Однако при сближении частиц на малое расстояние знак взаимодействия меняется из-за перестройки структуры пульсационного течения между частицами под действием вязкого трения. При этом знак меняет только компонента силы, направленная вдоль линии, соединяющей центры частиц.

Будем рассматривать однородное распределение частиц по объему сосуда. Каждая частица, двигаясь в жидкости, теряет энергию за счет силы сопротивления, пропорциональной скорости данной частицы. Сила тяжести учитываться не будет, так как в данной работе интересны только осредненные эффекты. Силой тяжести можно и пренебречь, если допустить, что эксперимент проводится в космосе, либо брать достаточно маленькие частицы.

## 3. Метод исследования

Задача решается численно методами молекулярной динамики в приближении парного взаимодействия. Для этого необходимо получить формулу для силы взаимодействия пары частиц в вибрационном поле.

Рассмотрим две частицы, находящиеся в сосуде, подверженном гармоническим вибрациям, поляризованным по кругу. Силу, действующую на тело, можно представить в виде [12]:

$$\mathbf{f} = -\nabla P,$$

где  $V$  – объем и  $P$  – давление.

$$P = -\rho_{\text{eff}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}, \quad \rho_{\text{eff}} = \frac{3}{2} \rho \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s + 0.5\rho},$$

$\rho_s$  – плотность материала тела,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\overline{\mathbf{v}^2}$  – средний квадрат скорости жидкости.

Таким образом, для силы имеем:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} V \rho_{\text{eff}} \nabla \overline{\mathbf{v}^2} = \frac{1}{2} m_{\text{eff}} \nabla \overline{\mathbf{v}^2}. \quad (1)$$

Скорость невозмущенного потока жидкости можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \text{Re}(\mathbf{W}_1 e^{i\omega t}) + \text{Re}(\mathbf{W}_2 e^{i(\omega t + \pi/2)}) = \\ &= \text{Re}[(\mathbf{W}_1 + i\mathbf{W}_2) e^{i\omega t}] = \text{Re}(\mathbf{W} e^{i\omega t}). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим взаимодействие между двумя частицами. Найдем силу, действующую со стороны  $k$ -частицы на  $i$ -частицу. Скорость движения  $k$ -частицы:

$$\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u} = \text{Re}(\mathbf{U} e^{i\omega t}).$$

Течение жидкости считаем потенциальным, тогда  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ . Для потенциала имеем уравнение с граничным условием:

$$\Delta \phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_s = u_n.$$

Потенциал для нашей задачи запишем  $\phi = \text{Re}(\Phi e^{i\omega t})$ . Уравнение и граничные условия примут вид:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_s = u_n. \quad (3)$$

Решение уравнения Лапласа ищем в дипольном приближении:

$$\Phi = \frac{\mathbf{A} \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4)$$

Потенциал  $\phi$  описывает возмущенный поток жидкости, вызванный неоднородностью. Невозмущенный поток жидкости создают вибрации сосуда. Согласно [13], скорость шара, приводимого в движение жидкостью, есть:

$$\mathbf{u} = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_s} \mathbf{V},$$

где  $\mathbf{V}$  – скорость невозмущенного потока, определенная выражением (2).

С учетом невозмущенного потока граничное условие для амплитуды потенциала (3) принимает вид:

$$W_n + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_s = U_n. \quad (5)$$

Подставляя наше решение (4) в граничное условие(5), для коэффициента  $A$  получаем выражение:

$$A = \frac{R^3}{2} \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s + 0.5\rho} W = CW.$$

Окончательно, скорость жидкости

$$\mathbf{v} = \left( \mathbf{W} + \frac{\mathbf{A}}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{A}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right) e^{i\omega t}.$$

Найдем средний квадрат скорости и подставим его в выражение для силы (1):

$$\mathbf{f} = -\frac{3m_{eff}C}{r^4} \left[ (\mathbf{W}_1^2 + \mathbf{W}_2^2) \mathbf{n} + 2(\mathbf{W}_1 \mathbf{n}) \mathbf{W}_1 + 2(\mathbf{W}_2 \mathbf{n}) \mathbf{W}_2 - 5(\mathbf{W}_1 \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - 5(\mathbf{W}_2 \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \right].$$

Здесь введено обозначение  $\mathbf{n} = \mathbf{r} / r$ . Слагаемые более высокого порядка малости не учитываются. Вектор  $\mathbf{r}$  проведен от  $k$ -частицы к  $i$ -частице.

Так как вибрации поляризованы по кругу, можно написать, что  $\mathbf{W}_{1,2} = W \mathbf{j}_{1,2}$ ,  $\mathbf{A}_{1,2} = A \mathbf{j}_{1,2}$ . Тогда для силы, действующей со стороны  $k$ -частицы на  $i$ -частицу, получаем выражение:

$$\mathbf{f}_{ik} = -\frac{3m_{eff}CW^2}{r_{ik}^4} \left[ 2\mathbf{n}_{ik} + 2(\mathbf{j}_1 \mathbf{n}_{ik}) \mathbf{j}_1 + 2(\mathbf{j}_2 \mathbf{n}_{ik}) \mathbf{j}_2 - 5(\mathbf{j}_1 \mathbf{n}_{ik})^2 \mathbf{n}_{ik} - 5(\mathbf{j}_2 \mathbf{n}_{ik})^2 \mathbf{n}_{ik} \right]. \quad (6)$$

Полная сила, действующая на  $i$ - частицу, будет равна сумме сил со стороны каждой частицы, т.е.

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^N \mathbf{f}_{ik},$$

где  $N$  – полное число частиц.

Так как полученная формула для взаимодействия пары частиц не меняет знак на расстояниях порядка толщины вязкого скин-слоя, она не может быть применена на таких расстояниях. Таким образом, с использованием результатов статьи [11], данная формула была модифицирована следующим образом.

Силу можно разбить на две составляющих: параллельную линии, соединяющей центры частиц, и перпендикулярную ей. Для простоты сила записана для пары частиц без обозначения индексов:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\parallel} + \mathbf{f}_{\perp}.$$

В общем случае сила есть функция двух переменных: расстояния и угла между частицами.

$$\mathbf{f}_{\parallel} = \text{const}_{\parallel} R_{\parallel}(r) T_{\parallel}(\theta) \mathbf{n}, \quad \cos(\theta) = \mathbf{j}_1 \mathbf{n},$$

$$\mathbf{f}_{\perp} = \text{const}_{\perp} R_{\perp}(r) T_{\perp}(\theta) \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}.$$

Для случая вибраций, поляризованных по кругу, получилось, что

$$T_{\parallel}(\theta) = -1, \quad T_{\perp}(\theta) = 0.$$

Это значит, что сила взаимодействия не зависит от ориентации частиц относительно вибраций.

Для константы и функции расстояния имеем:

$$\text{const}_{\parallel} = -3m_{eff}CW^2, \quad R_{\parallel}(r) = \frac{\alpha(r-a)}{r^5 + \beta(r+\varepsilon)}.$$

Ниже приведен график функции  $R_{\parallel}$  для параметров  $a = 0.3$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\beta = \frac{2-5a}{16(a+\varepsilon)}$ ,  $\alpha = 40 \frac{\beta\varepsilon}{a}$ .

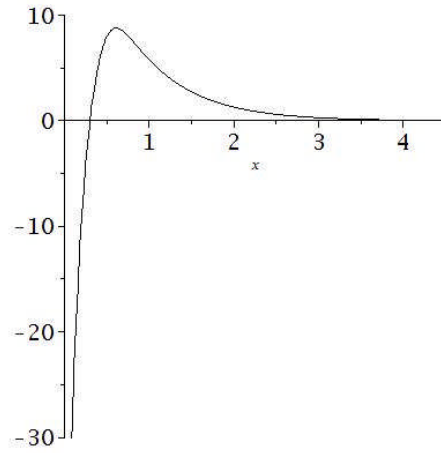


Рис. 1. График функции  $R$

Как отсюда следует, частицы отталкиваются на больших расстояниях и притягиваются на маленьких. Уравнения движения частиц, которые решаются численно, имеют следующий вид:

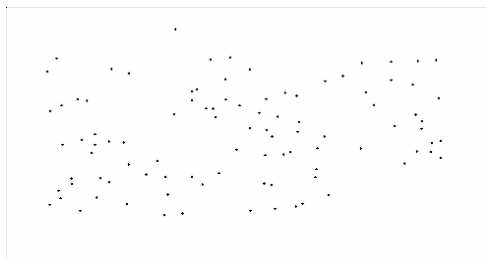
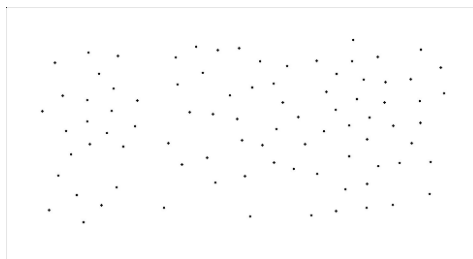
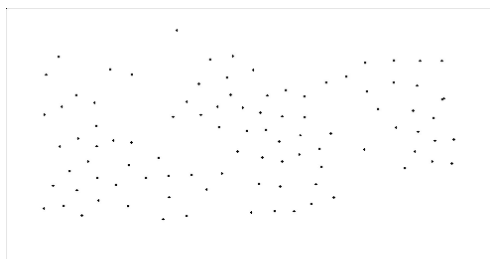
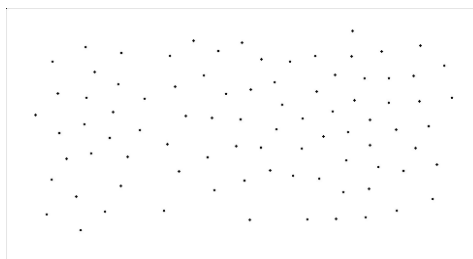
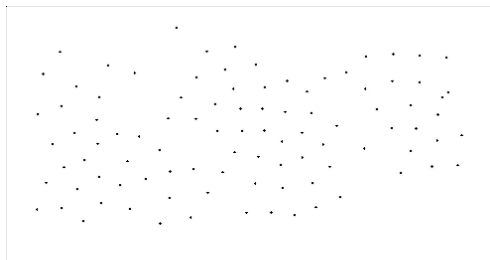
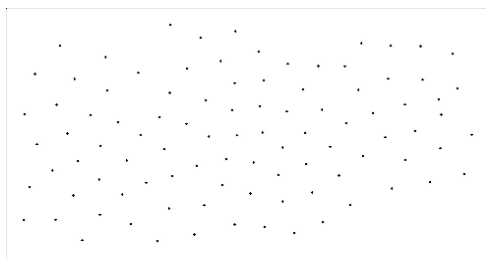
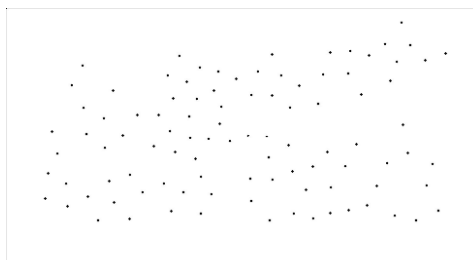
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{\mathbf{V}}_i \\ m_i \dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{F}_i - b \mathbf{V}_i \end{cases}, \quad i = \overline{1, N},$$

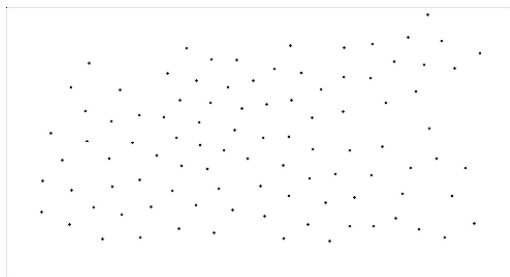
где  $b$  – коэффициент диссипации.

## 4. Результаты

Начальное распределение частиц по объему сосуда задается случайной функцией координат. Ниже приведены результаты расчета в разные моменты времени для следующих параметров задачи:

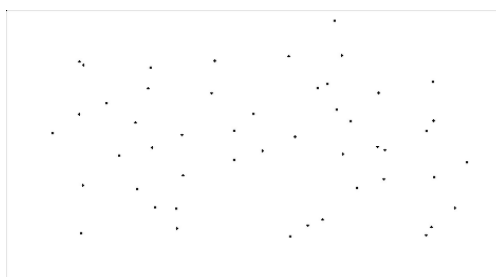
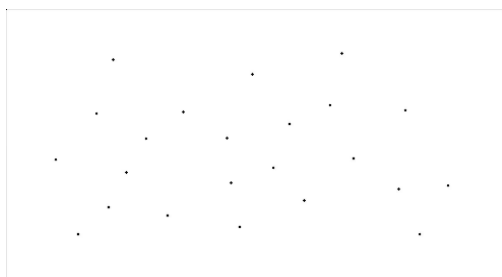
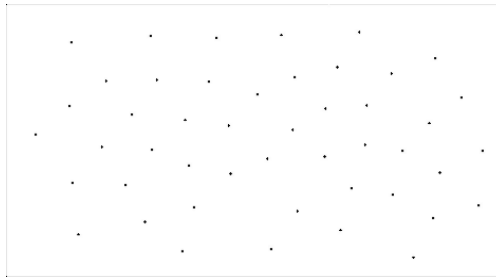
- $N = 100$  – количество частиц;
- $a = 0.01$  – амплитуда колебаний сосуда;
- $\omega = 2000$  – частота колебаний сосуда;
- $r_0 = 0.5$  – радиус частицы;
- $b = 0.6$  – коэффициент диссипации.

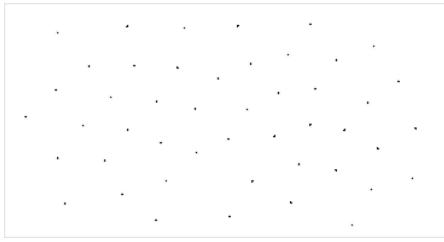
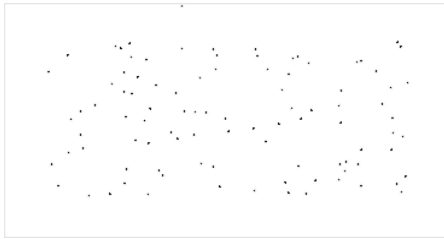
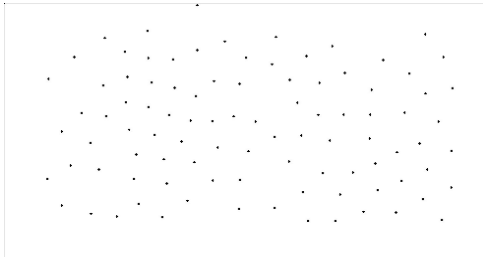
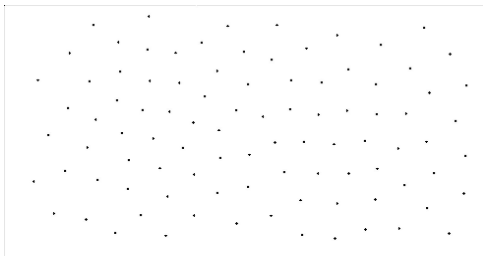
Рис. 2.  $t = 0$ Рис. 7.  $t = 260$ Рис. 3.  $t = 270$ Рис. 8.  $t = 1020$ Рис. 4.  $t = 1350$ Рис. 9.  $t = 2830$ Рис. 5.  $t = 7430$  $\omega = 4000$  $\omega = 3000$ Рис. 6.  $t = 0$ Рис. 10.  $t = 0$ Рис. 11.  $t = 100$

Рис. 12.  $t = 510$ Рис. 16.  $t = 10640, N = 25$ Рис. 13.  $t = 2570$ Рис. 17.  $t = 15990, N = 25$ 

Из рисунков видно, что частицы формируют структуру, похожую на кристаллическую решетку. Также можно видеть, что с ростом частоты вибраций время формирования этой структуры – квазикристалла – уменьшается.

На следующих рисунках представлены серии картинок для  $\omega = 2000$  и разного числа частиц.

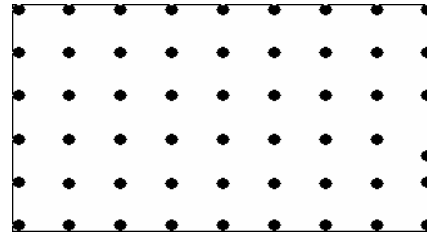
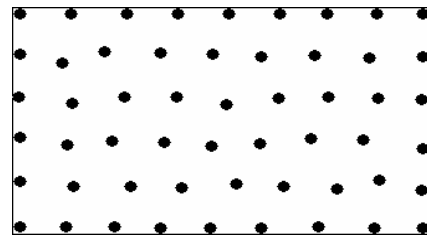
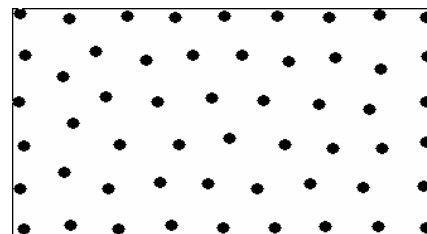
Рис. 18.  $t = 0, N = 50$ Рис. 14.  $t = 0, N = 25$ Рис. 19.,  $N = 50, t = 5980$ Рис. 15.  $t = 5320, N = 25$ Рис. 20.  $t = 13150, N = 50$

Рис. 21.  $t = 18990$ ,  $N = 50$ Рис. 22.  $t = 0$ ,  $N = 100$ Рис. 23.  $t = 2000$ ,  $N = 100$ Рис. 24.  $t = 10000$ ,  $N = 100$ Рис. 25.  $t = 23400$ ,  $N = 100$ 

Также формируется квазикристалл, но с разным периодом решетки в зависимости от числа частиц в системе. Следовательно, можно сказать, что период квазирешетки определяется размерами сосуда.

Объяснение тому, что в представленных результатах не наблюдается формирование кристаллической решетки, следующее: с увеличением расстояния между частицами сила взаимодействия заметно уменьшается, в связи с этим скорость формирования кристаллической решетки значительно уменьшается. Но из полученных результатов видна тенденция формирования кристаллической решетки.

Далее представлены картинки, показывающие распространение возмущений для параметров:  $N = 54$ ,  $\omega = 4000$ ,  $b = 0.0001$ .

Рис. 26.  $t = 0$ Рис. 27.  $t = 88$ Рис. 28.  $t = 530$ 

Эти рисунки показывают, что возмущения распространяются, но с течением времени они становятся хаотичными. При увеличении коэффициента диссипации на 2 порядка распространение возмущений становится едва заметным, и они быстро затухают.

## 5. Заключение

В данной работе получена аналитическая формула для взаимодействия пары частиц в высокочастотном поле вибраций, поляризованных по кругу, из которой следует, что сила взаимодействия не зависит от ориентации частиц относительно вибраций. Написана программа, позволяющая проследить за временной эволюцией частиц в сосуде, подверженном гармоническим колебаниям, поля-

ризованным по кругу. Обнаружено ориентирующее действие вибраций в такой системе. Частицы со временем образуют структуру, похожую на кристаллическую решетку. Но так как средний период квазирешетки порядка расстояний, на которых сила взаимодействия достаточно мала, то скорость формирования кристаллической решетки со временем значительно уменьшается. Хотя тенденция формирования кристаллической решетки может наблюдаться и по полученным результатам. Также исследована упругость данной решетки по отношению к возмущениям. При достаточно малом коэффициенте диссипации возмущения распространяются хаотически, смещение частиц не превышает расстояния между частицами. При последующем увеличении значения коэффициента диссипации возмущения становятся едва заметными и быстро затухают.

### Список литературы

1. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями// ДАН СССР, 1983. Т. 270, №1. С. 62–67.
2. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. О движении твердого тела в вибрирующей жидкости//Конвективные течения, Пермь, ПГПИ. 1987. С. 61–70.
3. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P. The motion of solid body in a liquid under the influence of a vibration field. // Reviewed Proc. Of the First Int. Symp. On Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity, Gordon and Breach, 1992. P. 247–251.
4. Луговцев Б.А., Сенницкий В.Л. О движении тела в вибрирующей жидкости// ДАН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
5. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P., Roux B. Vibration influence of a two-phase system in weightlessness conditions//J. Physique IV. 2001. Vol. 11 (Pr6). p. 83–90.
6. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P., Roux B. Deformation of gas or drop inclusion in high frequency vibrational field//Microgravity Quarterly. 1996. Vol.6, N 2–3. P. 69–73.
7. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P. Behavior of a drop (bubble) in a non-uniform pulsating flow// Adv. Space Res. 2002. Vol. 29, N 4. P. 667–672.
8. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P., Roux B. Interface orienting by vibrations//C.R. Acad. Sci. Paris. Serie II b. 1997. T. 325. P. 391–396.
9. Любимов Д.В., Любимова Т.П. Об одном методе сквозного счета для решения задач с деформируемой поверхностью раздела// Моделирование в механике. 1990. Т. 4(21), N1. С. 136–140.
10. Байдин А.Ю., Любимов Д.В. Динамика частиц в жидкости под действием вибраций высокой частоты// Конференция молодых ученых «Неравновесные переходы в сплошных средах». Тезисы докладов. Пермь. 2009. С. 30–33.
11. D. Klotz, M.R. Swift, R.M. Bowley, P.J. King. Interaction of spheres in oscillatory fluid flows// Phys. Rev. 2007. E 76, 056314.
12. Заичкин Е.В., Любимов Д.В. Поведение взвешенного в жидкости тела в поле торсионных вибраций// Вибрационные эффекты в гидродинамике, Пермь. 2001. вып. 2. С. 97–109.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие: в 10 т. Т. 6. Гидродинамика. М.: 1986. 736 с.

## Particle dynamic under high frequency circularly polarized vibrations

A. Y. Baydin, D. V. Lyubimov

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

Research is devoted to studying a behavior of a system of particles which are placed in a fluid-filled vessel under high frequency circularly polarized vibrations of the vessel. Basing on investigating the interaction of two particles an approximate model was obtain using the pair interaction approximation and simple approximations for forces acting on a particle as functions of distance between particles and orientation of pair particles with respect to a direction of vibrations. The result of research is that the particles form a crystal lattice which is limited by vessel's boundaries, and lattice spacing depends on vessel size and amount of particles. In addition, stability of this quasicrystal was also studied against perturbations.

Keywords: particles, vibrations, quasicrystal.