S

(1) A(x) – funkcja tworząca dla a

$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

$$S(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_0 x + a_0 x^2 + a_1 x^2 + a_2 x^2 + a_0 x^3 + a_1 x^3 + a_2 x^3 + a_3 x^3 + \ldots = a_0 + a_1 x +$$

$$a_2 x^2 + \ldots + a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_0 x^2 + \ldots =$$

$$\cancel{a_0 + a_1 x + a_2} A(x) + xA(x) + x^2 A(x) + \ldots =$$

$$A(x)(1 + x + x^2 + \ldots) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

(10) Weźmy dowolną drogę z u do v w grafie G.

Jeśli w ~~grafie~~ drodze jest cykl, to żeby dostać się do v, wystarczy go pominąć $\{v_1, v_2, v_3, v_2, v_4\} \to \{v_1, v_2, v_4\}$.

Jeśli wierzchołek docelowy jest gdzieś w środku cyklu, to wchodzimy do cyklu do momentu wejścia do wierz. docelowego $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_3, v_2, \cancel{v_3}\, v_4\} \to \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Na pomocą tych zasad da się to rozszerzyć na kilka cykli i inne przypadki (np. zagnieżdżanie się cykli)

③ a) $a_n = n$, n parzyste, lub $1/n$, n nieparzyste

$a = (0, 1, 2, 1/3, 4, 1/5, \ldots)$. Weźmy ciąg $b = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$

Wiemy, że $B(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \cdot x = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$

Weźmy ciąg $c = (b_0, 0, b_1, 0, b_2, \ldots)$. $C(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2}$

Weźmy ciąg $d = (0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$, czyli $\left(0, \frac{s_1}{1}, \frac{s_2}{2}, \frac{s_3}{3}, \ldots\right)$ $s_n = 1$

Zatem $D(x) = \int \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{1-x}}{x} dx = \int \frac{\frac{x}{1-x}}{x} dx = \int \frac{1}{1-x} dx =$

$-\ln(1-x)$.

Niech $e = (0, 1, 0, 1/3, 0, 1/5, \ldots) = (0, d_1, 0, d_3, 0, d_5, \ldots)$.

$$E(x) = \frac{D(x) - D(-x)}{2} = \frac{-\ln(1-x) + \ln(1+x)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Czyli $A(x) = E(x) + C(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$, $H_0 = (0)$

$H = (0, 1, 1 + 1/2, 1 + 1/2 + 1/3, \ldots)$

Weźmy ciąg $a = (0, 1, 1/2, 1/3, \ldots)$.

Wtedy $H = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$. Wiemy z poprzedniego podpunktu, że $A(x) = -\ln(1-x)$. Dodając to, co w zadaniu pierwszym dostajemy, że:

$$H(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

④ $1^3 = 1, \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1, \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1.$ pierwiastki 3 stopnia z jedynki

Niech $p_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, p_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; $p_1, p_2 \to$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$A(p_1x) = a_0 + a_1p_1x + a_2p_1^2x^2 + a_3p_1^3x^3 + \dots$$

$$A(p_2x) = a_0 + a_1p_2x + a_2p_2^2x^2 + a_3p_2^3x^3 + \dots$$

$$A(x) + A(p_1x) + A(p_2x) = 3a_0 + a_1x(1+p_1+p_2) + a_2x^2(1+p_1^2+p_2^2) +$$

$$a_3x^3(1+p_1^3+p_2^3) + \dots = 3a_0 + 3a_3x^3 + 3a_6x^6 = 3B(x)$$

$$B(x) = \tfrac{1}{3}\left(A(x) + A\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) + A\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

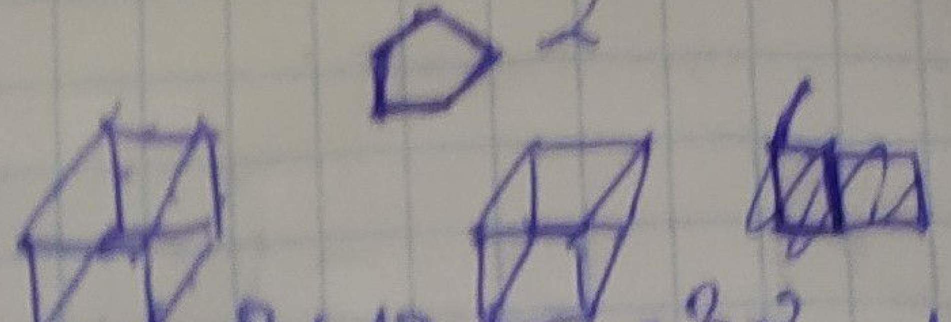
$$1^{3m} + p_1^{3m} + p_2^{3m} = 1 + 1^m + 1^m = 3, \ m \in \mathbb{N}$$

$$1 + p_1^{3m+1} + p_2^{3m+1} = 1 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = 1-1 = 0, \ m \in \mathbb{N}$$

$$1 + p_1^{3m+2} + p_2^{3m+2} = 1 + p_1^2 + p_2^2 = 1 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{-3-2i\sqrt{3}+1}{4} +$$

$$\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} = 1 + \frac{-2}{4} + \frac{-2}{4} = 1-1 = 0, \ m \in \mathbb{N}_+$$

Czyli wyrazy postaci a_{3m+1} i a_{3m+2} się wyzerują a postaci a_{3m} będą miały przy sobie wsp. 3

⑥ Q_k - graf k-wymiarowej kostki.  $8+12=3\cdot 2^{3-2}=12$

Zbiór wierzchołków to k-elementowe ciągi $\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{k}$

możemy mieć 0 lub 1.

Zatem dla k mamy 2^k możliwych ustawień, co daje nam 2^k możliwych wierzchołków.

Mamy k miejsc na różnice, czyli dla każdego wierzchołka jest k krawędzi. Ale skoro wierzchołek A ma krawędź z B, to B z A, czyli k została policzona dwa razy. Zatem liczba krawędzi to $\frac{1}{2}\cdot k\cdot 2^k = k\cdot 2^{k-1}$

⑧

a) Obliczanie stopnia: $O(s)$, s-stopień → idziemy po liście wierzchołków (listowa, czyli $O(s)=O(n)$), dla macierzowej → $O(n)$ → musimy sprawdzić dla każdego wierzchołka (wiersze)

b) Przeglądanie krawędzi → listowa to liczba ~~krawędzi~~ wierzchołków razy stopień każdej wierzchołka - czyli ~~liczba~~ O(k → liczba krawędzi. W macierzowej $O(n^2)$.

c) Czy krawędź należy? listowa → $O(s)$, s-stopień max z u i v. Bo musimy przejść listę dla u i v. Dla macierzy $O(1)$.

d) Usuwanie i ustawianie: - dla macierzy $O(1)$ → odczytanie odpowiednich pól w macierzy. Dla listowej $O(n)$ → musimy przejść się po liście, szukając odpowiedniego miejsca na usunięcie/dodanie