① Weźmy $n+1$ liczb z przedziału $1 \ldots 2n$. $k \in \mathbb{N}$

Zapiszmy każdą taką liczbę a_i jako $2^k b_i$ (b_i nieparzyste)

Wtedy mamy $n+1$ nieparzystych liczb z przedziału $1 \ldots 2n$

ale tych liczb w tym przedziale jest n. Zatem istnieją

takie $1 \leq p < q \leq n+1$, że $b_p = b_q$. Czyli są takie

dwie liczby a_p i a_q: a_p dzieli a_q.

② Kiedy (a,b) jest kratowy? Kiedy a,b całkowite.
Kiedy środek odcinka łączącego (a,b) z (c,d) kratowy?
Kiedy $\frac{a-c}{2}$ całkowity, $\frac{b-d}{2}$ też.
Rozważmy 4 możliwości (szufladki):

a P b NP
a NP b NP
a P b P
a NP b P

Wiadomo więc, że jeśli weźmiemy jakiś piąty punkt, to jego współrzędne będą tej samej parzystości co któryś z punktów w szufladkach. Zatem ich średnia da liczbę całkowitą, więc spośród 5 ciu punktów kratowych zawsze znajdziemy 2 takie dla których środek odcinka je łączącego będzie punktem kratowym.

③ Rozważmy takie sumy podciągów:

$$a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+\dots+a_n, \dots$$

Każdemu z nich przypiszmy pewną resztę r_l $1 \le l \le n$.
Jeśli $\exists_i : r_i = 0$, to sprawa załatwiona. Jeśli nie, to mamy dwie takie reszty, które są sobie równe (bo mamy n reszt (kulek) na $n-1$ możliwości ($n-1$ szufladek). Weźmy te dwie reszty i nazwijmy je $r_p, \overset{=r}{r_q}$ (zał., że $p<q$). Czyli istnieją takie dwa ciągi $a_1+\dots+a_p$ i $a_1+\dots+a_q$, które mod n dadzą tę samą resztę.

Zatem $a_1+\dots+a_p = Pn+r$ i $a_1+\dots+a_q = Qn+r$ $\quad P, Q \in \mathbb{N}$

$$a_1+\dots+a_q-(a_1+\dots+a_p) = Qn+r-(Pn+r) = (Q-P)n = a_{p+1}+\dots+a_q$$

ten podciąg jest podzielny przez n.

zbiór!

5 Mamy n wierszy, n kolumn i 2 przekątne → 2n+2 kulek

Nasza suma jest z przedziału $[-n, n]$ → 2n+1 możliwości ~~szufladek~~ (szufladek)

Wkładamy otrzymane sumy w możliwe sumy!
widać, że w jednej szufladce będą co najmniej dwie kulki.
Czyli są takie dwie otrzymane sumy, które są różne.

(4) Weźmy dowolną liczbę naturalną n i $n+1$ kolejnych liczb złożonych z samych jedynek. Wtedy wiemy, że istnieją dwie takie liczby, które podzielone przez n dadzą taką samą resztę. Oznaczmy te liczby jako n_1, n_2 a resztę jako r. Wtedy istnieją takie $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, że:

$n_1 = n \cdot q_1 + r$ i $n_2 = nq_2 + r$. Zał., że $n_1 > n_2$ (zatem $q_1 > q_2$)

Wtedy $n_1 - n_2 = nq_1 + r - (nq_2 + r) = nq_1 + r - nq_2 - r = nq_1 - nq_2 = n(q_1 - q_2)$. Czyli n ~~dzieli~~ $(n_1 - n_2) \bmod n = 0$.

Ale n_1 ma same jedynki w zapisie dziesiętnym, n_2 też.

$$n_1 - n_2 = \underbrace{1111\ldots1}_{k\text{-liczb}} - \underbrace{11\ldots1}_{l\text{-liczb}} = \underbrace{111\ldots1}_{k-l\text{ liczb}}\underbrace{0000\ldots}_{l\text{-liczb}}$$

Zatem $n_1 - n_2$ składa się z samych zer i jedynek i $(n_1 - n_2)\%n = 0$

(10) $a, b, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ i $NWD(a,n) = 1 \wedge NWD(b,n) = 1$.

Poprzez $\mathbb{D}_p(a)$ oznaczmy zbiór dzielników pierwszych a (dla b i n analogicznie)

Wiadomo, że a, $k \in \mathbb{D}_p(a) \Rightarrow k \notin \mathbb{D}_p(n)$ (dla b też).

Wiadomo, że $\mathbb{D}_p(ab) = \mathbb{D}_p(a) \cup \mathbb{D}_p(b)$.

Weźmy dowolne $k \in \mathbb{D}_p(ab)$. Wtedy $k \in \mathbb{D}_p(a) \vee k \in \mathbb{D}_p(b)$, czyli

$k \notin \mathbb{D}_p(n) \vee k \notin \mathbb{D}_p(n)$, czyli $k \notin \mathbb{D}_p(n)$.

Czyli $NWD(ab, n) = 1$.