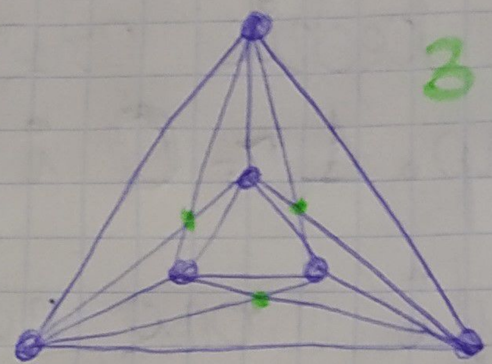
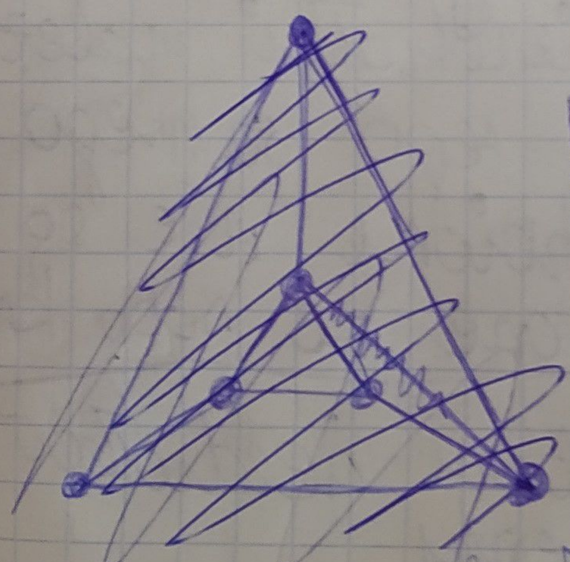
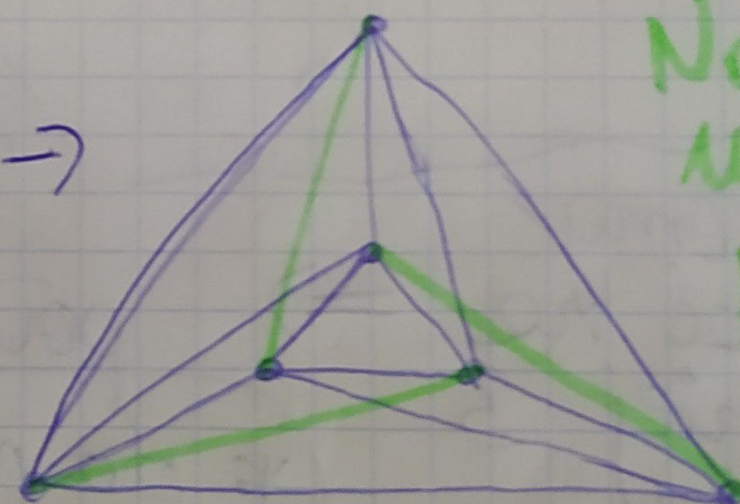
4



Usuwamy trzy krawędzie, z których żadne dwie nie mają wspólnych wierzchołków.

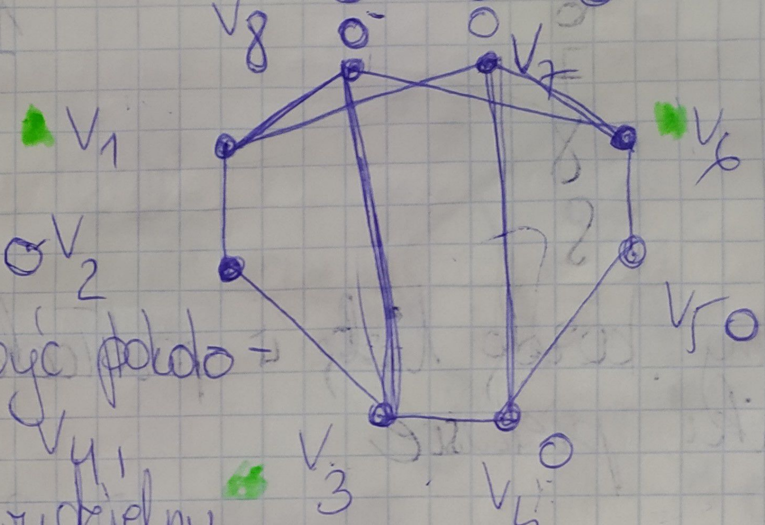


H →



Otrzymany graf H jest planarny.

9 $G=(V,E)$



Ale v_7 musi być pokolo-
rowane na ○ i v_4,
czyli graf dwudzielny
nie istnieje (bo nie da się pokolorować grafu
na dwa kolory).
Gdy jednak usuniemy krawędź (v_3, v_4) to się da.
Widać że jest to największy możliwy podgraf
(bo większy od niego jest tylko G).

G zawiera cykl Hamiltona:

$v_8 \to v_6 \to v_5 \to v_4 \to v_7 \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_8$

Czy G zawiera cykl ~~Hamiltona~~ Eulera?
NIE!
Tw. Graf ma cykl ~~Hamiltona~~ Eulera wtw. każdy wierzchołek
ma parzysty stopień i należy do wspólnej spójnej składowej.
$deg(v_7)=3$ $3 \neq$ np. $deg(v_1)=deg(v_6)=deg(v_8)=3$
Czyli wystarczy dodać dwie krawędzie (np. (v_1,v_6) (v_7,v_8)),
żeby każdy wierzchołek miał parzysty stopień.

(10) $H = (V, E)$, $E: \{(v_i, v_j) : NWD(i,j) > 1\}$

Zauważmy, że każda liczba parzysta będzie połączona krawędzią z każdą inną liczbą parzystą. Z liczb parzystych powstaje nam klika o 7 wierzchołków.

Wiemy też, że 1, 11 i 13 nie są połączone żadną ~~krawę~~ krawędzią, więc kolorujemy je na dowolny kolor. Zostają nam pozostałe liczby nieparzyste 3, 5, 7, 9, 15.

3, 5, 7 pokolorujmy na ten kolor co 2, 4 a 15 na 4ką a 9 ~~~~ na ten co 2 ten co 8

Sposób ~~żaden wierzcho~~ żadne wierzchołki tej samej krawędzi nie będą mieć jednego koloru. Pokolorowaliśmy więc H na 7 kolorów (na mniej się nie da bo siedmiowierzchołkowej kliki na mniej nie pokolorujemy).

(11) $G_n \to n$ wierzchołkowy graf t. że

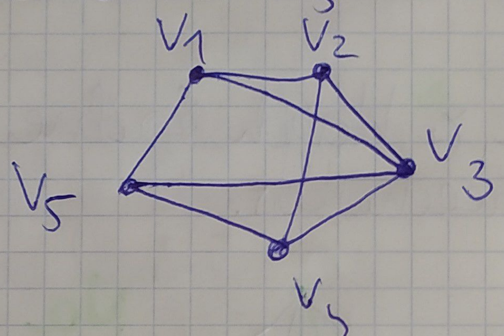
$E = \{(v_i, v_j) : i-j$ nie dzieli się przez $3\}$

Przyporządkujmy wierzchołkowi jego resztę z (indeksu jego) dzielenia przez 3.

Widać, że $\forall i \in \mathbb{N}\ \forall j \in \mathbb{N}\ \ i-j \nmid 3 \iff i\%3 \neq j\%3$.

Zatem widać, że każda reszta będzie połączona tylko z innymi resztami (np. 1 z 0 i 2).

Przykład dla G_5:



Czyli tworzą nam się trzy podzbiory wierzchołków z których dwa dowolne wierzchołki należące do tego samego podzbioru nie są połączone ze sobą krawędzią.

Graf możemy pokolorować na co najmniej 3 kolory $\Longrightarrow$

* do podzbioru wierzchołków innej reszty

Zauważmy, że żeby G_n miało cykl Eulera to musi $\deg(v_n)$ być parzysty. Czyli liczba krawędzi dla każdego wierzchołka* musi być taka sama. Zatem $|mod=1| = |mod=2| = |mod=3|$, czyli dla n równego wielokrotności 3ki będzie w grafie cykl Eulera.

Kiedy graf dwudzielny? Nigdy :(Bo najmniejsze i najoptymalne kolorowanie dla $n>2$ to 3 a nie 2 (czyli grafu dwudzielnego nie ma)