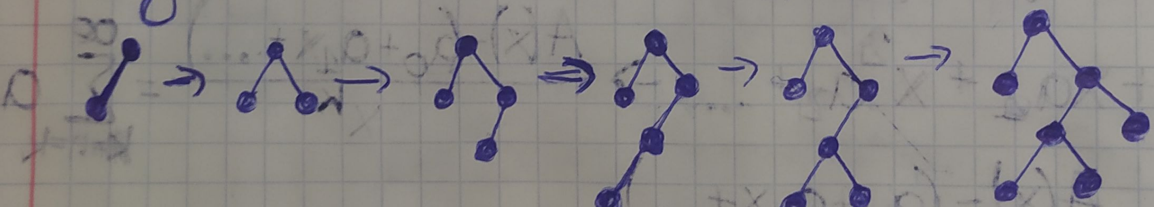
(2) Wiemy, że poprawnych ustawień n par nawiasów jest C_n. Znajdźmy bijekcję między zbiorem tych ustawień i zbiorem drzew binarnych, n-wierzchołkowych.

Kiedy z nawiasów robimy drzewo:

Idąc od lewej strony, nawias otwierający dostarcza nam dziecko z lewej strony aktualnego wierzchołka a ~~kiedy~~ zamykający ~~wierzchołek~~ dziecko tak blisko obecnego wierzchołka, jak tylko się da (jeśli ~~w~~ obecnym wierzchołek ma już dwoje dzieci, to idziemy wyżej)

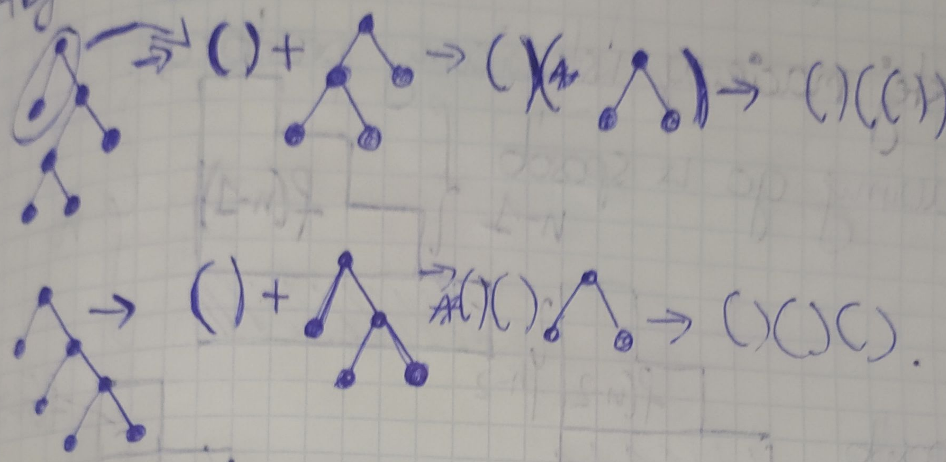
Przykład: ()(())



Kiedy z drzewa robimy nawiasy (czyli f. odwrotna)

Idąc od szczytu drzewa, ~~jeśli~~ jeśli ~~dla~~ dany wierzchołek nie ma dzieci, to ~~ro~~ zwracamy (), a jeśli ma dzieci, to wynik dla lewego poddrzewa zamykamy w nawiasy i z prawej strony dodajemy wynik dla prawego.

Przykład(y):



liczba tych drzew to C_n

Czyli skoro istnieje funkcja odwrotna, to bijekcja też.

③ Znajdźmy bijekcję między poprawnymi nawiasowaniami dla n par a liczbą nie-krzyżujących się uścisków dłoni pomiędzy n-parami. Ponumerujmy te osoby.

Z ludzi w nawiasy: Ustalmy, że jeśli osoba nr k ~~podaje~~ trzyma rękę z n, to $k<n$ znaczy, że k ją wyciąga

Jeśli, idąc od 1 do 2n, osoba ~~jeszcze n~~ wyciąga rękę, to ustawiamy otwierający nawias, wpp zamykający. Czyli jeśli na i-tym miejscu jest osoba, która podaje rękę, to na i-tym miejscu jest otwierający nawias.

Z nawiasów w ludzi:

Idąc od lewej, jeśli mamy na i-tym miejscu nawias otwierający, to znaczy, że ta osoba wyciąga rękę a jeśli zamykający, to osoba i-ta podaje rękę ostatniej osobie, która trzyma ją wyciągniętą. Czyli takich uścisków jest C_n.

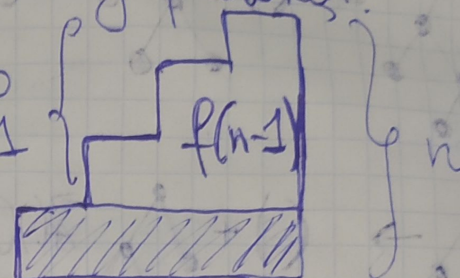
4

Dla $n=0$ mamy 1 możliwość.

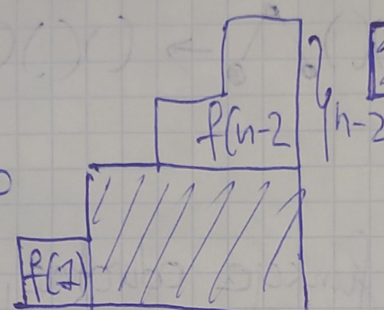
Dla $n=1$ jedną możliwość.

Do obciętej macierzy wstawiamy prostokąt.

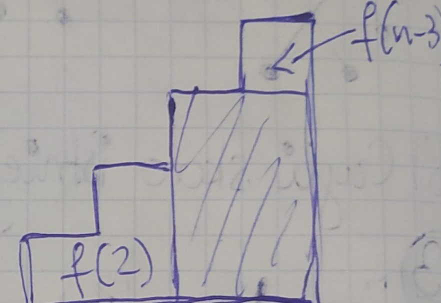
Jeśli wstawimy go w sposób



Jeśli w sposób



Jeśli w sposób →



Zatem można zauważyć, że wszystkich możliwości jest:

$$f(0)f(n-1)+f(1)f(n-2)+\ldots+f(n-1)\cdot f(0)=\sum_{i=0}^{n-1} f(i)\cdot f(n-i-1).$$

Ta zależność jest taka sama, jak u liczb Catalana, czyli możliwości na ustawienie tych n-prostokątów jest C_n.

7 a) dowolne składniki $\rightarrow F_R(x)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-ix}$

b) różne nieparzyste $\rightarrow F_R(x)=\prod_{i=0}^{\infty}(1+x^{2i+1})$

c) dowolne mniejsze od m $\rightarrow F_R(x)=\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1}{1-ix}\right)$

d) różne potęgi 2ki $\rightarrow F_R(x)=\prod_{i=0}^{\infty}(1+(2x)^i)$

⑤ $a_n = \{0,0,0,1,3,7,\ldots\}, b_n = \{1,3,7,15,\ldots\}$

$$A(x) = b_0 x^3 + b_1 x^4 + \ldots = x^3 (b_0 + b_1 x + \ldots) = x^3 B(x)$$

$$B(x) = 1 + 3x + 7x^2 + \ldots$$

$$-2x B(x) = -2x - 6x^2 - 14x^3 + \ldots \quad +$$

$$B - 2xB(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$ (bo x taki, że zbieżność zapewniona)

$$B(x)(1-2x) = \frac{1}{1-x}.$$

$$B(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{2x^2-3x+1} \longrightarrow A(x) = \frac{x^3}{2x^2-3x+1}$$

⑥ $b_n = (\overbrace{0,0,0,\ldots,0}^{k}, a_0, a_1, \ldots)$

a) $B(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^{k-1} + x^k a_0 + a_1 x^{k+1} + \ldots =$

$$x^k (a_0 + a_1 x + \ldots) = x^k \cdot A(x)$$

b) $c_n = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$

a_n $C(x) = a_k + x a_{k+1} + x^2 a_{k+2} + \ldots$

$\cancel{x^k \cdot C(x) = x^k a_k +}$

$$A(x) = a_0 + x a_1 + x^2 a_2 + \ldots \rightarrow \frac{A(x) - (a_0 + a_1 x + \ldots)}{x^k} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^{n-k}$$

$$C(x) = \frac{A(x) - (a_0 + a_1 x + \ldots)}{x^k}$$