⑤ Algorytm modyfikujemy tylko ze strony implementacyjnej → "sąsiadem" z algorytmu z wykładu staje się wierzchołek, do którego istnieje krawędź z wierz. wyjściowego

Sam Dijkstra działa dla grafów skierowanych!

③ A, B → rozłączne zbiory osób

Każda $^{a \in A}$ osoba ze zbioru A chce poślubić $n_a \geq 1$ osób.

Bierzemy więc każdą osobę ze zbioru A i klonujemy ją tyle razy, żeby liczba jego wystąpień odpowiadała liczbie osób, które chce poślubić.

Dostajemy wtedy nowy zbiór wierzchołków → A'.

Zachodzi też, że jeśli nie wybierzemy kogoś z B, to można przyporządkować go dowolnej osobie, a która jest z nią połączona.

Mamy teraz problem odpowiedni do tego o dopasowaniu małżeństw, czyli wystarczy, że będzie działać tw. tw. Halla.

Wiadomo, że konieczne jest, żeby $|A| \geq |B|$.

8 $G=(V,E)$

Weźmy ścieżkę P o najdłuższej długości, która kończy się w wierzchołku v. Weźmy trzech sąsiadów x,y,z. Wiemy, że $x,y,z \in P$ (bo gdyby któryś nie należał, to moglibyśmy dołączyć do P i wtedy P nie byłaby najdłuższa).

Rozpatrzmy trzy ścieżki z v do y:

- vx + ścieżka z x do y w P
- vz + ścieżka z z do y w P.
- krawędź $v-y$

Jak ~~połączymy te dwie dowolne~~ weźmiemy je trzy ścieżki vy, to z zasady Dirichleta dwie z nich ~~są takiej~~ mają długość o takiej samej parzystości.

No ale połączenie tych dwóch ścieżek da cykl i ~~parzysto~~ to parzystej długości.

(9) S,T ⇒ rozdzielne zbiory S - studenci
T - towarzystwa i koła

Studentów jest ~~nk~~ nk a towarzystw z kołami 2n.

Student jest połączony z jednym kołem i z jedną towarzystwem (ale reprezentuje tylko jedno z nich!)

Bierzemy jakiś podzbiór kół i towarzystw/a (o liczbie ~~ad~~)

Wychodzi z niego dk połączeń w stronę studentów

No ale $k \geq 2$ no i student reprezentuje max 2 organizacje (wchodzą do niego 2 krawędzie), więc w tych studentów w $V(T')$ jest co najmniej i.

Zatem da się wysłać taką delegację.

(10) ~~Pod~~ Skonstruujmy graf ze zbiorem ~~kom~~ wierzchołków C, który odpowiada kolumnom prostokąta łacińskiego $m \times n$ i $N \to$ zbiorem wierzchołków odpowiadającym liczbom. Krawędź z c_i do n_j istnieje, jeśli n_j da się wpisać w kolumnę c_i.

$m<n$

Widać, że w kolumnę da się wpisać $(n-m)$ różnych liczb. Widać też, że każdą liczbę da się wpisać w co najwyżej $(n-m)$ różnych kolumn. Z tego można wywnioskować, że $\forall c' \in C \ |c'| \leq |V(c')|$ i $\forall n' \in N \ |n'| \leq |V(n')|$. To daje spełniony warunek Halla, czyli w tym grafie istnieje skojarzenie doskonałe. Zatem da się dopisać ~~jeden~~ jedną liczbę ~~wiersz~~ do każdego z nowych kwadracików w nowym wierszu.

Czyli dla każdego prostokąta łacińskiego da się dopisać wiersz.