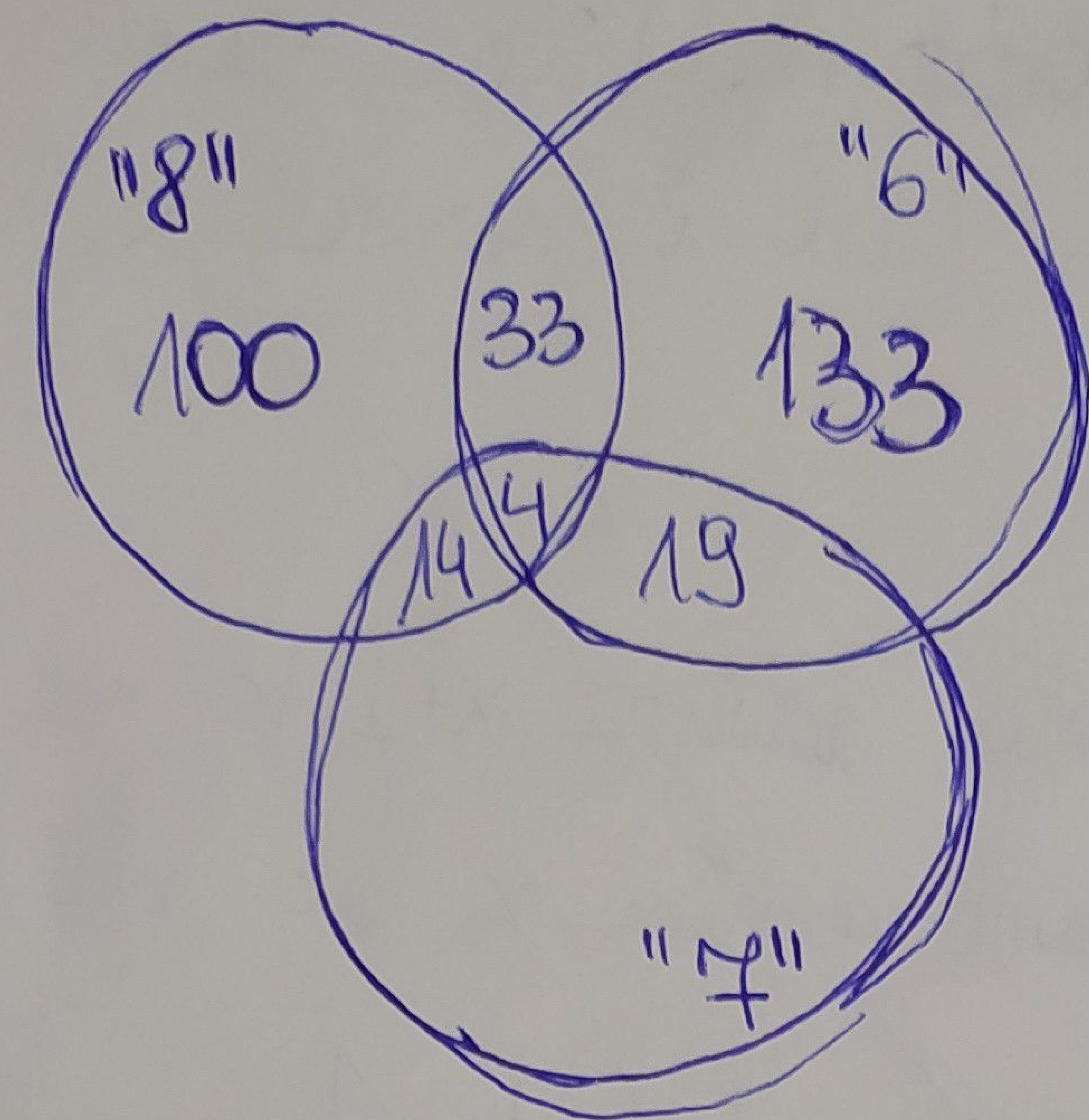
②



$\left\lfloor \frac{800}{42} \right\rfloor = 19 \to 6$ i 7

$\left\lfloor \frac{800}{56} \right\rfloor = 14 \to 8$ i 7

$\left\lfloor \frac{800}{168} \right\rfloor = 4$

$\left\lfloor \frac{800}{8} \right\rfloor = 100 \to$ tyle liczb podzielnych przez 8

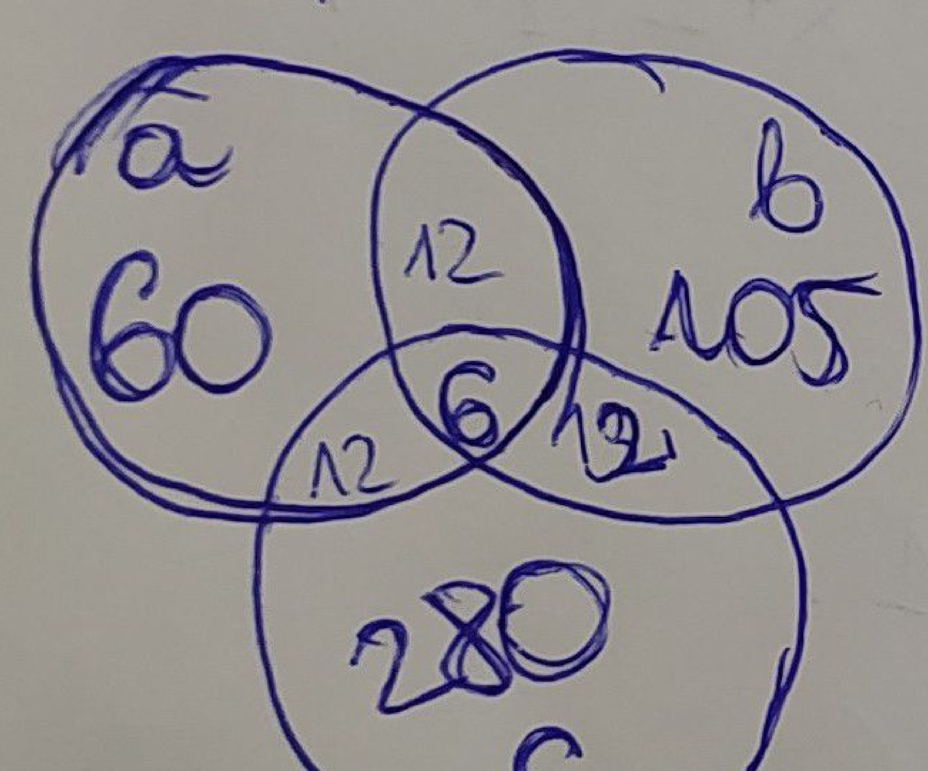
$\left\lfloor \frac{800}{6} \right\rfloor = 133 \to$ tyle liczb podzielnych przez 6

171

$\left\lfloor \frac{800}{24} \right\rfloor \Rightarrow 33 \to$ podzielne przez 8 i 6

Podzielne przez 8 lub 6, ale nie 7 $\to 133-19+100-14+\overset{-33}{4} = 204-33=$

③



_ _ _ _ _ _ _ _ _

aaaa $\to 6 \cdot \binom{5}{3} = 60$

bbb $\to 7 \cdot \binom{6}{4} = 105$

ccc $\to 8 \cdot \binom{7}{4} = 280$

_ _ _ _ A=aaaa, B=bbb, C=cc

aaaa+bbb → NA A → 4, na B → 3 możliwości $3 \cdot 4 = 12$

aaaa+cc → NA A → 5 NA C → 4 _ _ _ _ _ _

bbb+cc → NA B → 6 NA C → 5 _ _ _ _ _ _ _

aaaa+bbb+cc → $3 \cdot 2 = 6$

Wszystkich możliwości → $\binom{9}{4}\binom{5}{3} = 1260$

Dobrych ustawień (czyli bez bloków) → $1260-60-105-280+\overset{12+20+30}{\cancel{12\ 33}}-6=845$

Niech $Z(x)$ będzie liczbą po[illegible]

takiego, że nie ma w nim dwóch sąsiadujących liczb i zawiera X. Niech $B(x)$ z kolei nie zawiera X.

Można zauważyć, że:

$Z(x+1) = B(x)$ [jeśli jakiś podzbiór ma $x+1$, to nie ma x]

$B(x+1) = Z(x) + B(x)$ [Bo w $B(x+1)$ będą wszystkie podzbiory z x i bez x.]

Wiadomo, że $Z(1) = 1$ i $B(1) = 1$.

$$B(x+1) = Z(x) + B(x) = B(x-1) + Z(x-1) + B(x-1) =$$
$$Z(x-1) + 2B(x-1) = 2Z(x-1) + 3B(x-1) = \dots$$
$$= F_x(Z(1)) + F_{x+1}(B(1)) = F_x + F_{x+1} = F_{x+2}.$$

Czyli $B(x) = F_{x+1}$.

Więc $Z(x) = B(x-1) = F_{x-1+1} = F_x$.

Zatem wynik to suma podzbiorów "dobrych" z x i bez.

$$B(x) + Z(x) = F_{x+1} + F_{x} = F_{x+2}.$$

(11) Wszystkich możliwych układów zaproszeń $-\binom{7}{3}^7$. Mamy 7 zbiorów po jednym dla każdej osoby i odkładamy tam takie układy, w którym jest ona niezaproszona. Moc takiego zbioru to $\binom{6}{3}^7$. Ponadto może się zdarzyć sytuacja w której nie zaproszono dwóch osób $\rightarrow$ moc zbioru takich układów to $\binom{5}{3}^7$. Kiedy nie zaproszono trzech $\rightarrow \binom{4}{3}^7$ i kiedy czterech $\rightarrow \binom{3}{3} = 1$. Liczby takich "przecięć zbiorów" to $\binom{7}{2}$ ~~dla~~ $\rightarrow$ kiedy nie zaprosił dwóch wybranych osób, $\binom{7}{3} \rightarrow$ trzech, $\binom{7}{4} \rightarrow$ czterech. ~~7~~ Kiedy nie zaprosił jednej osoby $\rightarrow$ 7 ~~możliwości~~ zbiorów $\rightarrow$ 7 osób.

Czyli, z zasady włączeń i wyłączeń błędnych możliwości $7\binom{6}{3}^7 - \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 + \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 - \binom{7}{4}$.

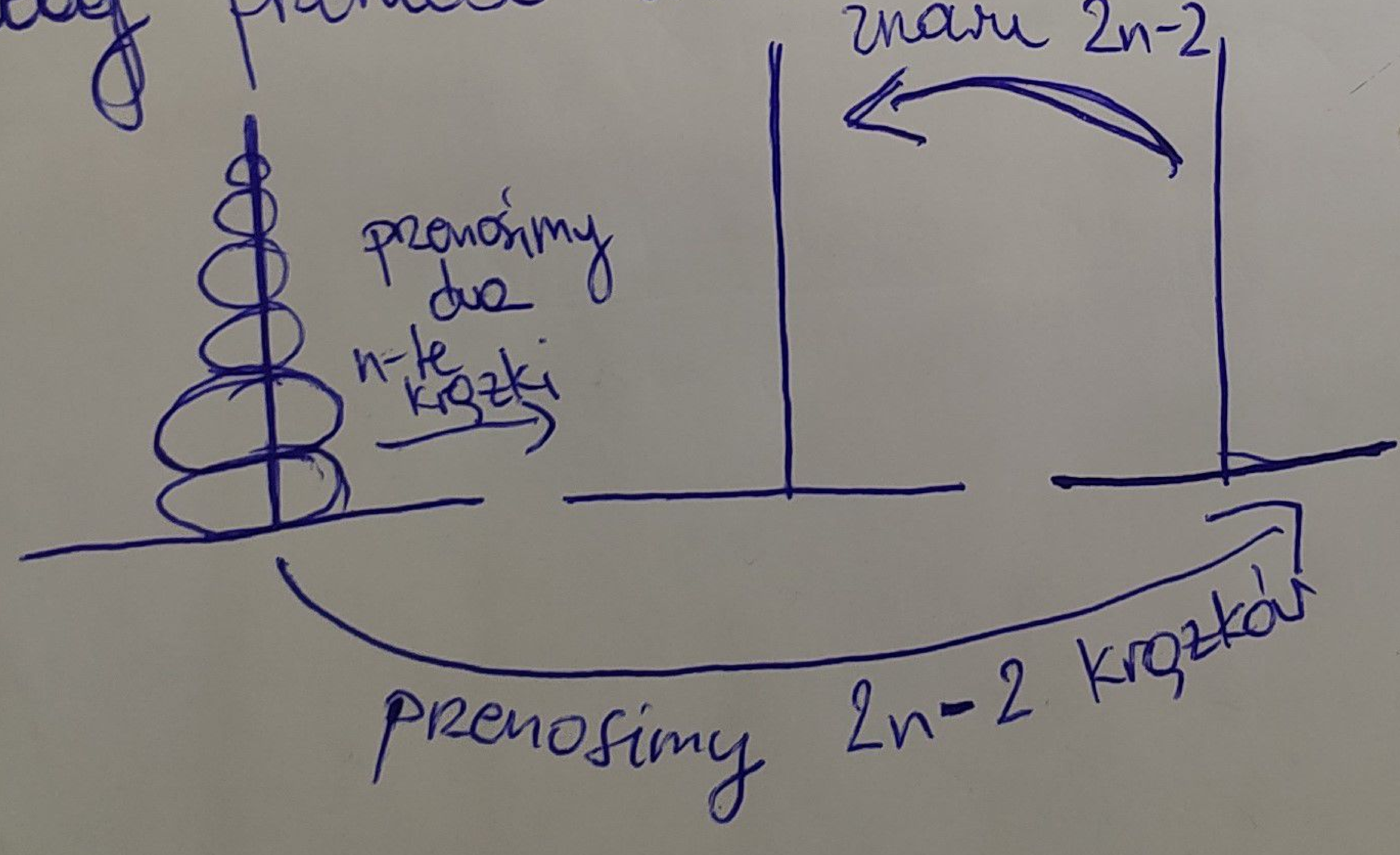
Czyli poprawnych ukł. zapr. $\rightarrow \binom{7}{3}^7 - 7\cdot\binom{6}{3}^7 + \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 - \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 + \binom{7}{4}$.

(10) $f(k) \to$ liczba sposobów wejścia k-schodków

Ze schodka n-1 mamy jedną możliwość. Z n-2 → dwie, bo możemy od razu wskoczyć na n-ty schodek lub wejść na n-1 i potem na n-ty. Z n-3 mamy łącznie 3 drogi: przeskakujemy na n-1 schodek i stamtąd jedna możliwość lub na n-2 schodek i stamtąd dwie możliwości. Można więc zauważyć, że z k-2 schodka mamy ~~k-1 m~~ możliwości z k-1 schodka plus z k-tego schodka. Zatem $f(1) \overset{F_2}{=} 1$, $f(2) \overset{F_3}{=} 2$ i $f(k) = f(k-1) + f(k-2)$

Czyli $f(k)$ to $(k+1)$ ~~k~~-ty wyraz ciągu Fibonacciego.

(6) Wieża Hanoi - 2n krążków n różnych rodzajów (rozmiarów) żeby przenieść klocki dla n=1 potrzeba 2 ruchów. $F(1)=2$



Czyli

$F(1)=2$

$F(n) = F(n-1) + 2 + F(n-1) =$

$$\begin{cases} F(n) = 2F(n-1) + 2 \\ F(1) = 2. \end{cases}$$