④ $V = A \cup B$

1) Warunek konieczny → $|A| = |B|$.

Jeśli $|A| \neq |B|$, to załóżmy, że $|A| < |B|$ i G zawiera cykl Hamiltona (niech zacznie się w wierzchołku $a \in A$). Wtedy po przejściu $2|A|$ krawędzi otrzymamy $|B|-|A|$ niewykorzystanych krawędzi. Ale skoro ~~$|B| <$~~ $|B| > |A|$, to nie może powstać cykl Hamiltona.

2) Szukamy cyklu. Widać, że skoczek skacze na pola przeciwnego koloru. Na szachownicy 5×5 mamy 13 pól jednego koloru, 12 drugiego → zatem $|A| \neq |B|$, czyli cykl nie istnieje → nie da się odwiedzić każdego pola dokładnie raz i wrócić.

⑤ Oznaczamy kostkę dwoma kolorami → naprzemiennie. Mysz zaczyna zjadać od jednego koloru → później może jeść kawałek przeciwnego koloru. Mamy więc graf dwudzielny (wierzchołki pozbierane po kolorach). Mamy 13 kostek tego koloru, co róg i 14 przeciwnego (13 + plus to co na samym środku). Czyli za na końcu zje przeciwny kolor do tego co na rogu i zjeść musi to, co w środku (ale nie może tego zrobić, bo środkowe i ostatnia jest tego samego koloru)

Czyli mysz nie może zjeść środkowego pola jako ostatniego.

6 Dowód indukcyjny:

T(n) - każdy n-elementowy turniej zawiera ścieżkę Hamiltona

Baza indukcji:

T(1), T(2) działa.

Krok indukcyjny:

Załóżmy, że dla 1,...,n teza spełniona. Rozważmy n+1 elementowy turniej. Wybierzmy wierzchołek v (dowolny). Podzielmy pozostałe wierzchołki na dwa zbiory → I (w którym są wierzchołki z których jest ścieżka do v) i O (z wierzchołkami ze ścieżką od v). I i O będą miały co najwyżej n wierzchołków.

W I wierzchołki i krawędzie między nimi tworzą ~~drzewo~~ turniej (czyli teza dla I spełniona), dla O też. Jeśli połączymy ścieżkę z I z v. ~~Hiema~~ czyli dostajemy ścieżkę z I i v. No ale skoro to turniej, to jest jakieś połączenie między I i O, które łączy ścieżkę z I i v ze ścieżką z O.

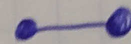
Zatem, na mocy zasady indukcji, T(n+1) działa.

④ n-wymiarowa kostka Q_n → czy zawiera ścieżkę Hamiltona?

$Q_n \Rightarrow$ n-elementowe ciągi zer i jedynek

Dwa wierzchołki sąsiednie $\Leftrightarrow$ ciągi różnią się o 1 pozycję

Dowód indukcyjny:



Podstawa indukcji: T(1) działa •, T(2) też

Krok indukcyjny:
Zał., że teza spełniona dla 1, …, n. Rozpatrzmy Q_{n+1}.

Czyli te ciągi, które tworzą Q_{n+1} da się podzielić na te postaci $0Q_n$ i $1Q_n$. Podgrafy $0Q_n$ mają ścieżkę, $1Q_n$ też na mocy założenie indukcyjnego. No ale wiemy, że między jakimś ciągiem $0Q_n$ i $1Q_n$ istnieje połączenie (~~bo~~ czyli różnią się o jedno miejsce). Zatem połączyliśmy $0Q_n$ i $1Q_n$ ścieżką, czyli teza indukcyjna spełniona dla Q_{n+1}.