(1)

Dowód indukcyjny.

Baza: Dla jednowierzchołkowego grafu algos przydzieli jeden kolor → optymalne rozwiązanie.

Krok: Załóżmy, że algorytm optymalnie koloruje dla danej sekwencji k wierzchołków. Dodajemy k+1 wierzchołek. Wiemy też, że ~~żaden wierzchołek nie~~ wszystkie inne wierzchołki ~~jest~~ są pokolorowany na ~~ten sam kolor~~ maksymalnie k kolorów ~~co nowy~~ ~~wierzchołek~~. Co znaczy, że ten algorytm przypisze nowemu wierzchołkowi albo nowy kolor, albo jakiś już przypisany. No ale nowy graf dalej będzie pokolorowany na k+1 kolorów, czyli optymalnie.

(7) Dowód indukcyjny.

Baza: Płaszczyzna przecięta jedną prostą jest pokolorowana na dwa kolory (różne).

Krok: Załóżmy, że płaszczyzna przecięta n prostymi jest dobrze pomalowana. ~~Dorza~~ Dokładając n+1 prostą problem występuje przy podpłaszczyznach, które stykają się z nową prostą. Weźmy lewą stronę tej prostej i zmieńmy kolor każdej podpłaszczyzny. Wtedy, z założenia podpłaszczyzny nie-sąsiednie do nowej prostej będą pokolorowane poprawnie ~~a~~ te po przeciwnych stronach od strony nowej prostej nie będą pokolorowane tak samo (bo zmieniliśmy kolory w kroku indukcyjnym).

(8) Usadzenie 2n uczniów w n ławkach. Jeśli $n>1$, to da się to zrobić na minimum dwa sposoby.
Jeśli $n=1$ to mamy dwie osoby i one siedzą ze sobą.
Jeśli $n>1$, to graf ma co najmniej trzy wierzchołki i stopień każdego z nich to $n$. Ale $n \geq \frac{|V|=2n}{2}=n$
Czyli tw. Diraca jest spełniane, więc istnieje cykl Hamiltona.
Weźmy ten cykl. ~~Te krawędzie~~ Bierzemy co drugą krawędź w (oraz taki sposób:
Pierwsze ustawienie to takie, w którym pierwsze krawędź cyklu tworzy pierwszą ławkę. To drugie zaś nie łączy dwóch pierwszych osób w pary (ale łączy drugą z trzecią...)
Przykład:

1° 1—2 3—4    2° 2—3 4—1

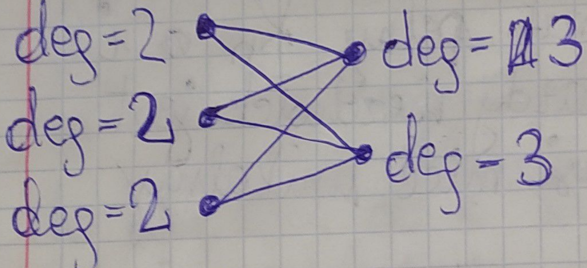
(9) Mamy do czynienia z grafem pełnym $K_n$. Numerujemy graczy. Pierwsza runda: $\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ n & n-1 & & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1 \end{matrix}$
metoda: 1 ⟶ ⟵
Z każdą kolejną rundą pierwszy gracz zostaje w tym samym miejscu ale ruszamy innych w taki sposób: 2nd $\begin{matrix} 1 & n & \dots & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1 \\ n-1 & n-2 & \dots & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{matrix}$ 3rd $\begin{matrix} 1 & n-1 & \dots \\ n-2 & n-3 & \dots \end{matrix}$
Widać, że żeby każdy zagrał z każdym, to trzeba $n-1$ tur dla $n$ parzystych.
Dla $n$ nieparzystych dodajemy "nową liczbę" i kiedyś czyjaś kolej wypadnie z "nową liczbą", to wtedy ten ktoś nie gra i ma wolne.
Liczba tur dla $n$ nieparzystych $\rightarrow n-1+1=n$.

(10)

Tw. Diraca:

Jeśli $G=(V,E)$ to graf prosty, który ma co najmniej trzy wierzchołki i $\forall v \in V \ \deg(v) \geq \cancel{\frac{|V|-1}{2}} \ \frac{|V|}{2}$

Czy zadziała dla $\deg(v) \geq \frac{|V|-1}{2}$ ?




$\deg_{min}(v) = 2 \geq \frac{5-1}{2}$.

No ale cyklu nie ma.

Czyli jak zastąpimy $\deg_{min}$ przez $\frac{|V|-1}{2}$, to nie działa.

$G=(V,E)$ (12) Niech $\chi(G)=a$, $\chi(\overline{G})=b$. Bierzemy $a$-kolorowanie grafu $G$ $(k)$ i $b$-kolorowanie grafu $\overline{G}$ $(\overline{k})$.

Każdemu wierzchołkowi $v \in V$ przypisujemy parę $(k(v), \overline{k}(v))$. Takich par jest $k \cdot l$. Ale jest to też jakieś kolorowanie $K_n$ (bo dla każdych dwóch wierzchołków są one przyległe albo w $G'$, albo w $G$, czyli kolorujemy je na różne kolory).

Wiemy też, że $\chi(K_n)=n$, zatem:

$$|V| \ n = \chi(K_n) \leq k \cdot l = \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}).$$

Czyli $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n = |V|$.