Egzamin z analizy numerycznej (L)

8 lutego 2021 r.

Pierwszy termin

Pracuj samodzielnie!!!

Imię i nazwisko: Kacper Bajkiewicz

Numer części: IV   Numer zadania: 3

$f(x) = \sin(2x)$. Interpolacja w punktach będącymi zerami wielomianu Czebyszewa T_{n+1} (czyli będą z przedziału $[-1,1]$).

Wiemy z wykładu, że błąd interpolacji równa się:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

$\boxed{\eta_x \in [-1,1]}$!

Niech $(x-x_0)\cdots(x-x_n) = p_{n+1}$.

Chcemy, żeby $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-8}$. Zatem:

z wykładu wiemy, że da się to oszacować przez $\frac{1}{2^n}$

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| = \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}\right| \max_{x\in[-1,1]} |p_{n+1}|.$$

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}\right| = \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(\eta_x)| \cdot \frac{1}{(n+1)!}.$$

Szacujemy pochodną:

~~sin~~ $f'(x) = 2\cos(2x)$ $f''(x) = -4\sin(2x)$ $f'''(x) = -8\cos(2x)$ ...

Czyli $|f^{(n+1)}(x)| = |2^{n+1} \cdot X(2x)| \leq 2^{n+1}$

Gdzie X to albo sinus albo cosinus. (da się po oszacować przez 1)

Pamiętaj o zasadach nadsyłania rozwiązań!

Czyli: $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 2^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{2}{(n+1)!}.$

Najmniejsze n, które będzie spełniać nierówność $\frac{2}{(n+1)!} \leq 10^{-8}$ to minimalna liczba iteracji do osiągnięcia błędu.