1

```
ALGORYTM(G,S):
    ODWIEDZONE, P, NP = [0,...,0]  (o długości rozmiaru G)
    STOS = NOWY_STOS(S)
    DOPÓKI STOS.NIEPUSTY():
        SPR = STOS.ZDEJMIJ()
        JEŚLI (ODWIEDZONE[SPR] == 1) => DALEJ
        ODWIEDZONE[SPR] = 1.
        DLA v z G[SPR]:
            JEŚLI SPR % 2 = 0 => P[SPR] = 1
            WPP => NP[SPR] = 1
            STOS.ODŁÓŻ_JEŚLI_NIE_LEŻY(v)

    DLA p, np z P, NP:
        JEŚLI (p == 1 && np == 1) => FAŁSZ
    PRAWDA
```

przeszukiwanie w głąb

② Z lematu o uściskach dłoni $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

bo drzewo ma $n-1$ krawędzi

Czyli $|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i t_i$. Ale też $|E| = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} t_i}_{=n} - 1$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i - 1 \quad / \cdot 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i-2) t_i + 2 = 0$$

$$\underbrace{-t_1}_{i=1} + \underbrace{0}_{(2-2)t_i} + \sum_{i=3}^{n} (i-2) t_i + 2 = 0$$

$$t_1 = \sum_{i=3}^{n} (i-2) t_i + 2.$$

← WZÓR NA t_1, KTÓRY NIE ZALEŻY OD t_2 (BO SIĘ WYZEROWAŁO) wspólny wierzchołek.

③ G jest drzewem $\Leftrightarrow$ $\forall u,w \in G$ istnieje jedna ścieżka która je łączy

$\Leftarrow$) Skoro każde dwa wierzchołki są połączone jedną ścieżką, to G jest spójny. Znaczy to też, że G jest acykliczny, czyli G jest drzewem.

$\Rightarrow$) Czyli G jest spójny i acykliczny (bo G jest drzewem)

- skoro jest spójny, to między dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje jedna ścieżka.
- skoro jest acykliczny, to istnieje maksymalnie jedna ścieżka która łączy dowolne wierzchołki. (bo co najmniej dwie istniałyby wtedy, kiedy byłby cykl → ~~moglibyśmy pójść "w lewo" i "w prawo"~~)

Czyli skoro G jest drzewem, to istnieje między dwoma wierzchołkami istnieje tylko jedna ścieżka.

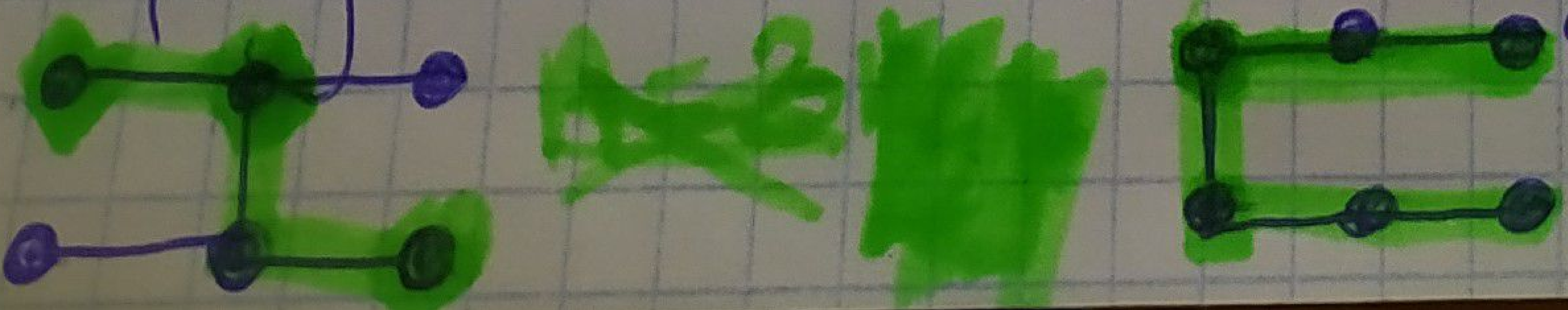
Czyli $\Rightarrow$ i $\Leftarrow$ udowodnione.

gdy ... jest niespójny, to drugi analogiczny.

(6) Podzielmy zbiór wierzchołków na takie dwa podzbiory
P → tutaj są tylko wierzchołki z parzystą liczbą zer i
NP → odpowiednio z nieparzystą. Krawędź między $v, u (\in V)$
istnieje wtw, kiedy v i u różnią się ~~tylko~~ jedną cyfrą.
Czyli nie istnieje krawędź pomiędzy dwoma dowolnymi
wierzchołkami należącymi do tego samego podzbioru (bo
różnią się one o parzystą liczbę cyfr). No ale istnieją
krawędzie pomiędzy wierzchołkami z różnych podzbiorów,
czyli graf jest dwudzielny.

8

Załóżmy, że istnieją dwie ~~w~~ ścieżki które nie mają wspólnego wierzchołka. Ale skoro graf jest spójny, to istnieje ścieżka między jakimiś dwoma wierzchołkami tych ~~tej~~ ścieżek (w najgorszym przypadku połączenie istnieje w $\lceil n/2 \rceil$ wierzchołku, w najlepszym w pierwszym/ostatnim). Czyli dostajemy nową, dłuższą ścieżkę (bo ta nowa ma w najgorszym wypadku długość n, w najlepszym 2n+1). Czyli spr., najdłuższa ścieżka mają wspólny wierzchołek.



⑨ Jeśli G jest spójny, to po kłopocie. W innym przypad
G jest niespójny.

Weźmy dowolne dwa wierzchołki $u, v \in V$.

- $\{u,v\} \notin E$, to $\{u,v\} \in E'$.
- $\{u,v\} \in E$. Wtedy u i v są w tej samej spójnej składowej

Czyli dla każdej innej spójnej składowej istnieje taki wierzchołek w, że $\{u,w\} \notin E$ i $\{u,v\} \notin E$. Więc $\{u,w\} \in E$
i $\{u,v\} \in E$. Czyli w G' istnieje ścieżka z u do v.

Zatem, jeśli G jest niespójny, to G' jest.

bo