2

a) $a_{n+1} = |\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}|$ $\quad a_0 = a_1 = 1$

$a_{n+2} = |\sqrt{a_{n+1}^2 + a_n^2}| \rightarrow a_{n+2}^2 = a_{n+1}^2 + a_n^2$

$b_n = a_n^2 \rightarrow b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$

$b_0 = 1$

$b_1 = 1$

$E^2\langle b_n \rangle - E\langle b_n \rangle + \langle b_n \rangle = 0$

$(E^2 - E + 1)\langle b_n \rangle = 0$

$\left(E - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(E - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

$b_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$b_0 = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \rightarrow \alpha + \beta = 1 \rightarrow \alpha = 1 - \beta$

$\cancel{\alpha - \alpha\sqrt{5} + \beta + \beta\sqrt{5} = 2}$

$1 = (1-\beta)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$2 = (1-\beta)(1-\sqrt{5}) + \beta + \beta\sqrt{5}$

$2 = 1 - \sqrt{5} - \beta + \sqrt{5}\beta + \beta + \beta\sqrt{5}$

$1 = 2\beta\sqrt{5} - \sqrt{5} \cancel{= \sqrt{5}(2\beta - 1)}$

$\cancel{1 + 2\beta \quad 2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}}$ $\quad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \alpha = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$

$a_n = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

b) $b_{n+1} = |\sqrt{b_n^2 + 3}| \rightarrow b_{n+1}^2 = b_n^2 + 3$

Niech $c_n = b_n^2$.

$c_{n+1} = c_n + 3$

$b_0 = 8 \to c_0 = 64$

$b_1 = 64 + 3 = 67$

$E\langle c_n\rangle - \langle c_n\rangle = 3$

$(E-1)\langle c_n\rangle = 3 \to (E-1)^2\langle c_n\rangle = 0$

$(\alpha n + \beta)1^n = (\alpha n + \beta)$.

$\cancel{\alpha 0 + \beta = 64}$ $\alpha \cdot 0 + \beta = 64 \to \beta = 64$

$\alpha + \beta = 67 \to \alpha = 3$

$\cancel{b_n = \sqrt{3n+n}}$ $c_n = 3n + 67 \to b_n = \sqrt{3n+67}$

c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}$

$c_{n+1} = (n+1)c_n + n(n+1)c_{n-1} \quad / \cdot \frac{1}{(n+1)!}$

$\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c_n}{n!} + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!}$; $d_n = \frac{c_n}{n!}$.

$c_0 = d_0 = 0$

$c_1 = d_1 = 1$

$d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$

$E^2\langle d_{n+2}\rangle - E\langle d_{n+1}\rangle + d_n = 0$

$(E^2 - E + 1)\langle d_n\rangle = 0 \to \left(E - \frac{1-\sqrt5}{2}\right)\left(E - \frac{1+\sqrt5}{2}\right) = 0$

$d_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n$ $\quad d_0 \to \alpha = -\beta$

$d_1 = 1 = -\beta\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) = \beta\left(\frac{\sqrt5 - 1 + 1 + \sqrt5}{2}\right) = \beta\sqrt5$

$\beta = \frac{1}{\sqrt5}$, $\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$c_n = n!\left(-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\right)$

④ Iloczyn dowolnych k-kolejnych l. nat. jest podzielny przez k!

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}{k!} = \frac{(n+k)!}{k!(n+k-k)!} = \binom{n+k}{k} \cdot \mathbb{Z}$$

racji, że dwumian zawsze da liczbę całkowitą, to

$(n+k)(n+k-1)\cdot\ldots\cdot(n+2)(n+1) \mid k.$

⑥ $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$, $a_0 = 2$, $a_n > 0$

Niech $b_n = a_n^2$, czyli $b_n = 2b_{n-1} + 1 \rightarrow b_{n+1} = 2b_n + 1$

$b_{n+1} = 2b_n + 1$, $b_0 = 2^2 = 4$.

$E(b_n) - 2(b_n) = 1$

$(E-2)(b_n) = 1 \rightarrow (E-1)(E-2)(b_n) = 1$

Postać ogólna $\rightarrow \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n = \alpha + \beta \cdot 2^n$

Znajdźmy α i β.

$b_1 = 9 = 4 \cdot 2 + 1$

$$\ominus \begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha + 2\beta = 9 \end{cases}$$

$\beta = 5 \rightarrow \alpha = -1$.

Czyli $b_n = 5 \cdot 2^n - 1$

$a_n = \sqrt{b_n} = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$, bo $a_n > 0$.

7) Niech a_n będzie liczbą słów n-literowych o parzystej liczbie a. Niech ~~b~~ b_n odpowiednio nieparzystej
Idziemy od prawej i dostawiamy kolejne literki.

Albo dostawiamy "a" do ciągu z nieparzystą liczbą albo jedną z 24 literek do ciągu z parzystą i i tak nasze słowo będzie liczyć się do p. W przypadku np analogicznie.

$$a_{n+1} = b_n + 24a_n \rightarrow 24a_{n+1} = 24b_n + 576a_n$$

$$b_{n+1} = a_n + 24b_n$$

$$\ominus\begin{cases} 24a_{n+1} = 24b_n + 576a_n \\ b_{n+1} = a_n + 24b_n \end{cases} \rightarrow 24a_{n+1} - b_{n+1} = 575a_n$$

$$b_{n+1} = 24a_{n+1} - 575a_n$$

Czyli:

$$a_{n+2} = b_{n+1} + 24a_{n+1} = 48a_{n+1} - 575a_n.$$

$$a_{n+2} - 48a_{n+1} + 575a_n = 0$$

$$E^2(a_n) - 48E(a_n) + 575a_n = 0$$

$$(E^2 - 48E + 575)(a_n) = 0$$

$$(E-25)(E-23)a_n = 0$$

string pusty → a występuje 0 razy

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 24 \\ a_n = \frac{1}{2}(25^n + 23^n) \end{cases}$$

a wyst. 0 razy → 24 możliwości na jedyną literkę

Postać ogólna → $\alpha \cdot 25^n + \beta \cdot 23^n$

$\alpha + \beta = 1 \rightarrow \beta = 1 - \alpha = \frac{1}{2}$

Czyli $\beta = \frac{1}{2}$

$25\alpha + 23\beta = 24 \rightarrow 25\alpha + 23 - 23\alpha = 24 \rightarrow 2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

8

a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$

$$-a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n = 1 - 3^n$$

$$(-E^2 + 2E - 1)a_n = 1 - 3^n$$

$$(E-1)(E-3)(-E^2+2E-1) = 0$$

$$(E-1)(E-3)(E^2-2E+1) = 0$$

$$(E-1)^3(E-3) = 0$$

$$(\alpha + \beta n + \gamma n^2)1^n + \delta \cdot 3^n$$

Postać ogólna $\rightarrow$ $\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta \cdot 3^n$

b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$

$$E^2(a_n) = 4E(a_n) - 4a_n + n2^{n+1}$$

$2^n \cdot$ wielomian 1-go stopnia nad $n \rightarrow$ anihilacja przez $(E-2)^2$

$$(E-2)^2(a_n) = n2^{n+1} = 2n2^{n}$$

$$(E-2)^2(E-2)^2(a_n) = 0$$

$(E-4)^{?}(a_n) = 0$

Postać ogólna $\to 2^n(\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3)$

$a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = 4-4+0\cdot 2^1 = 0,\ a_3 = 0-4+4 = 0.$

$2^0(\alpha+0+0+0) = 1$

$\alpha = 1$

$2^1(1+\beta+\gamma+\delta) = 1$

$2+2\beta+2\gamma+2\delta = 1$

$\beta+\gamma+\delta = -\frac{1}{2}$

$\beta = -\frac{1}{2} - \gamma - \delta$

$2^2(1-1-2\gamma-2\delta+4\gamma+8\delta) = 0$

$+2\gamma+6\delta = 0$

$\gamma = -3\delta$

$2^3(1-\frac{3}{2}-3\gamma-3\delta+9\gamma+\delta 27) = 0$

$-\cancel{\frac{1}{2}}+6\gamma+24\delta = \frac{1}{2} \to -18\delta+24\delta = \frac{1}{2}$

$6\delta = \frac{1}{2} \to \delta = \frac{1}{12}$

$\gamma = -\frac{1}{4},\ \beta = -\frac{6}{12}+\frac{3}{12}-\frac{1}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

Wzór "jawny" $\to a_n = 2^n(1-\frac{1}{3}n-\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{12}n^3).$

c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$

$E^2(a_n) + 2E(a_n) + a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$

$(E-\frac{1}{2})\langle\frac{1}{2^{n+1}}\rangle = \langle\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\rangle - \langle\frac{1}{2\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 4}, \dots\rangle = \langle 0\rangle$

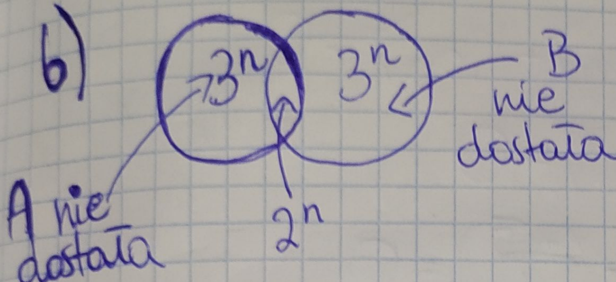
$(E-\frac{1}{2})(E+1)^2(a_n) = 0$

Postać ogólna $\to \alpha(\frac{1}{2})^n + (\beta n+\gamma)\cdot(-1)^n.$

10

a) Wszystkich możliwych sposobów jest 4^n, zaś tych w których tylko B, C i D dostały nagrodę $\rightarrow 3^n$.
Zatem odpowiedź to $4^n - 3^n$.

b)

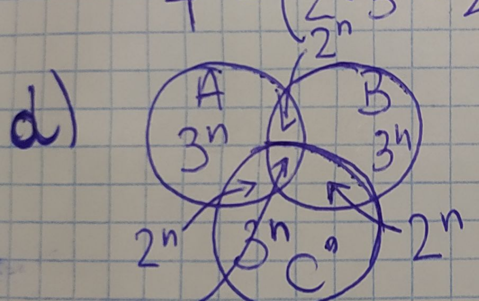


$3^n + 3^n - 2^n$.

c) Od wszystkich sposobów odejmujemy te, w których A lub B nie dostała nic.

$4^n - (2\cdot 3^n - 2^n)$

d)



Chcemy sumy A, B, C, gdzie zbiór odpowiada sytuacjom w których osoba nie dostała nic.

$3\cdot 3^n - 3\cdot 2^n + 1$

1 taka sytuacja → wtedy dostaje tylko D

e) Od wszystkich sytuacji odejmujemy te, w których jest taka osoba, która nic nie dostała.

$4^n - \left(4\cdot 3^n - \binom{4}{2}\cdot 2^n + 4\right)$.

któraś z osób nie dostała

dwie osoby nic nie dostały

jedna osoba dostała wszystko