

# Partial displacement, energetické spliny

Stručný návod na cvičení.

December 2, 2022

## 1 Energetické spliny

Energetický spline, nazývaný také anglickým termínem “snake”, je často používaný v oblasti počítačové grafiky [3]. Pro potřeby kartografické generalizace byla definice splinu upravena. Operátor partial modification je reprezentován parametrickou křivkou

$$d(s) = (x(s) - x_{(0)}(s), y(s) - y_{(0)}(s)),$$

kde  $x_{(0)}$ ,  $y_{(0)}$  představují souřadnice původního (vstupního) prvku,  $x, y$  souřadnice generalizovaného (výstupního) prvku, a  $s$  je parametr,  $s \in \langle 0, 1 \rangle$ . Příslušný energetický model pro křivku  $L$  s délkou  $l$  má tvar

$$E(d) = \int_l E_i(s) ds + \int_l E_e(s) ds,$$

zahrnuje vnitřní energii splinu  $E_i$  (internal energy) a vnější energii  $E_e$  (external energy), které ovlivňují tvar splinu. Cílem metody je nalézt takovou z mnoha možných deformací, která minimalizuje celkovou energii splinu. Výsledný spline zaujímá rovnovážnou polohu, která zohledňuje jak vnitřní energii (tj. mechanické vlastnosti materiálu), tak i působení vnějších sil. Vnitřní energie splinu zajišťuje, aby tento nemohl být nepřírozeně modifikován vnějšími silami. Situace je znázorněna obr. 1.

**Vnitřní energie** Vnitřní energie splinu definovaná vztahem [1]

$$E_i(s) = \frac{1}{2} \left( \alpha(s) \|d(s)\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{\partial d(s)}{\partial s} \right\|^2 + \gamma(s) \left\| \frac{\partial^2 d(s)}{\partial s^2} \right\|^2 \right),$$

ovlivňuje průběh splinu a jeho tvar. První člen měří vzdálenost splinu od původního elementu, druhý napětí (elasticitu) splinu, poslední pak tuhost (křivost) splinu. Vliv těchto faktorů je modelován s využitím trojice parametrů  $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s) \in \mathbb{R}^+$ . Spline tedy může více či méně sledovat původní prvek, více či méně kopírovat jeho tvar, [3], [2]. Ukázku vlivu těchto parametrů vidíme na obr. 2.

**Vnější energie.** Vnější energie řídí deformaci splinu způsobenou vnějšími silami. Energetická funkce popisující silový model může mít mnoho podob. Z matematického pohledu by měla být spojitá v bodě, diferencovatelná a mít jednoduchý průběh bez zbytečných oscilací. její

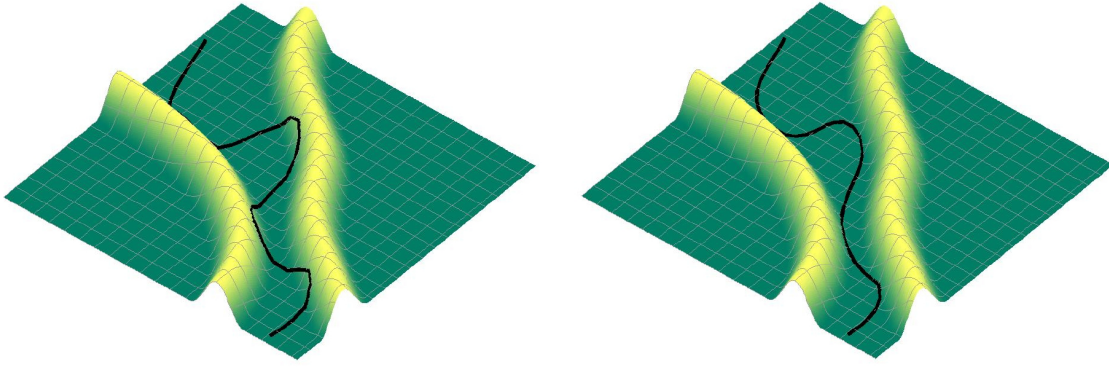


Figure 1: Ukázka formování tvaru energetického splinu vlivem vnější energie.

minimum je blízko svislé osy bufferu. Rozhodující faktory ovlivňující míru deformace představují gradient (strmost) a omezenost funkce shora. Čím větší jsou funkční hodnoty, tím silnější je jejich vliv na deformaci tvaru. Existuje mnoho způsobů, jak navrhnout přidruženou energetickou funkci. Z pohledu kartografické generalizace, jejíž cílem je realizace generalizační operace partial displacement, při které se snažíme nepřiblížit se k jinému prvku na vzdálenost menší než  $\underline{d}$ , viz kap. 2.

**Minimalizace celkové energie.** Požadavek minimalizace celkové energie splinu

$$E(d(s)) = \int_l F(s, d(s), d'(s), d''(s)) ds,$$

vede k využití Eulerovy-Lagrangovy rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y''} - \dots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial F}{\partial y^n} = 0.$$

Jeho aplikací na  $E(d)$  obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \alpha(s)d(s) + \nabla E_e(x(s), y(s)), \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \beta(s) \frac{\partial d(s)}{\partial s} \right) = \beta(s) \frac{\partial d^2(s)}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y''} &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \gamma(s) \frac{\partial^2 d(s)}{\partial s^2} \right) = \gamma(s) \frac{\partial d^4(s)}{\partial s^4}, \end{aligned}$$

optimální řešení má tvar

$$\alpha(s)d(s) + \beta(s) \frac{\partial d^2(s)}{\partial s^2} - \gamma(s) \frac{\partial d^4(s)}{\partial s^4} + \nabla E_e(x(s), y(s)) = 0.$$

Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \alpha(s)d_x(s) + \beta(s) \frac{\partial d_x^2(s)}{\partial s^2} - \gamma(s) \frac{\partial d_x^4(s)}{\partial s^4} + \frac{\partial}{\partial x} E_e(x(s), y(s)) &= 0, \\ \alpha(s)d_y(s) + \beta(s) \frac{\partial d_y^2(s)}{\partial s^2} - \gamma(s) \frac{\partial d_y^4(s)}{\partial s^4} + \frac{\partial}{\partial y} E_e(x(s), y(s)) &= 0. \end{aligned}$$

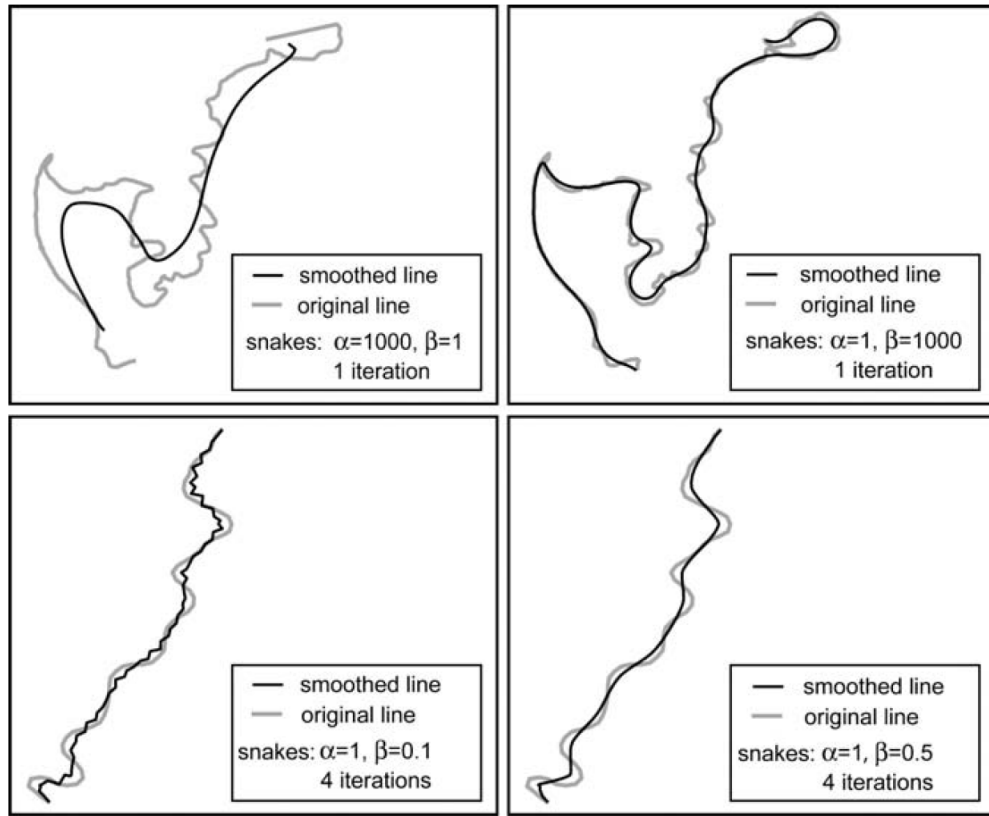


Figure 2: Vliv parametrů  $\beta, \gamma$  na průběh splinu.

Pokud hodnoty  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$ ,  $\gamma(s)$  budeme považovat za konstantní, což je vzhledem k ekvidistantnímu kroku  $h$  očekávatelné, získáme Eulerovy rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \gamma \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} + \frac{\partial}{\partial x} E_e(x(s), y(s)) &= 0, \\ \alpha y + \beta \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \gamma \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} + \frac{\partial}{\partial y} E_e(x(s), y(s)) &= 0.\end{aligned}$$

**Diskrétní řešení.** Pokud je spline vzorkován s konstantním krokem  $h$ , lze použít také jeho diskrétní aproximaci, která je pro praktické výpočty vhodnější. Parciální derivace lze nahradit centrálními diferencemi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_i}{\partial s^2} &= \frac{1}{h^2}(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \\ \frac{\partial^4 x_i}{\partial s^4} &= \frac{1}{h^4}(x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}).\end{aligned}$$

Po dosazení do Eulerových rovnic získáme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}\alpha(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + \beta(x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}) + E_{e,x} &= 0, \\ \alpha(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + \beta(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + x_{i+2}) + E_{e,y} &= 0,\end{aligned}$$

hodnoty  $E_{e,x}, E_{e,y}$  představují parciální derivace vnější energie podle proměnných  $x, y, h$  v bodě  $(x_i, y_i)$ . Je patrné, že spline musí být vzorkován alespoň pěti body  $p_{i-2}, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}$ . Příslušná maticová reprezentace má tvar

$$\begin{aligned} A\Delta X + E_{e,x} &= 0, \\ A\Delta Y + E_{e,y} &= 0, \end{aligned}$$

kde  $A$  je pentadiagonální matice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & b & a \end{bmatrix},$$

jejíž prvky spočteme z

$$a = \alpha + \frac{2\beta}{h^2} + \frac{6\gamma}{h^4}, \quad b = -\frac{\beta}{h^2} - \frac{4\gamma}{h^4}, \quad c = \frac{\gamma}{h^4}. \quad (1)$$

Jelikož matice  $A$  je singulární, hodnoty  $\Delta X_{(i)}, \Delta Y_{(i)}$  nemůžeme určit přímo, soustavu proto řešíme iterací

$$\Delta X_{(i)} = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda \Delta X_{(i-1)} - E_{e,x}), \quad (2)$$

$$\Delta Y_{(i)} = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda \Delta Y_{(i-1)} - E_{e,y}), \quad (3)$$

kde

$$\Delta X_{(i)} = X_{(i)} - X_{(0)},$$

$$\Delta Y_{(i)} = Y_{(i)} - Y_{(0)},$$

představují souřadnicové rozdíly vrcholů splinu v  $i$ -té iteraci a počáteční aproximace představované lomenou čarou. Pro  $i = 0$ , platí

$$\Delta X_{(0)} = \Delta Y_{(0)} = 0.$$

Matici  $A$  chápeme jako konstantní v průběhu celého iteračního procesu. Nezohledňujeme tak změny vzdálenosti mezi jednotlivým vrcholy polylinie, hodnota  $h$  se nemění.

Aby bylo diskretizované řešení funkční, předpokládáme, že generalizovaná polylinie by měly mít co nejhladší průběh s dostatečně hustým a pokud možno konstantním krokem vzorkování. Parametr  $\lambda$  ovlivňuje rychlost konvergence iteračního procesu, větší hodnoty  $\lambda$  vedou k “rychlejším” posunům  $\Delta X_{(i)}, \Delta Y_{(i)}$  vrcholů splinu.

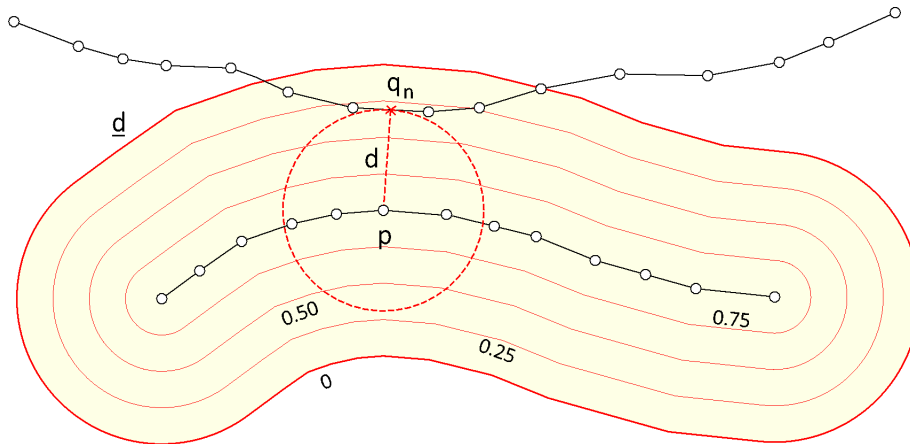


Figure 3: Energetická funkce  $E_e(x, y)$  se znázorněnými vrstevnicemi.

## 2 Operace Partial Displacement

Tato generalizační operace, jejíž český ekvivalent je “částečná modifikace”, provádí komplexní korekci tvaru a geometrické polohy generalizovaného prvku. Zahrnuje posun a změnu tvaru takových částí prvku, které se přiblíží k jinému prvku pod určitou mez danou hodnotou  $\underline{d}$ . Tento generalizační operátor se často používá u prvků, které se v generalizované mapě ocitnou příliš blízko, a může tak dojít k jejich vzájemnému grafickému konfliktu (slití). Existuje několik základních generalizačních schémat, u kterých je tato operace v praxi používána:

### 1. Částečná modifikace jednoho prvku

Model pevného prvku, tzv. bariéry (překážky), jehož poloha se nesmí měnit, generalizovaného prvku, který je modifikovatelný.

### 2. Částečná modifikace obou prvků

Oba prvky mohou měnit svoji polohu a tvar, žádný z nich není pevný.

### 3. Kombinace obou případů

Model pevného prvku (bariéry) a generalizovaných prvků. Poloha a tvar generalizovaných prvků vůči sobě i vůči překážce se může měnit.

**Energetická funkce.** Energetická funkce

$$E_e(x, y) = \begin{cases} c(1 - \frac{d}{\underline{d}}), & d < \underline{d}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (4)$$

je navržena tak, aby zabránila přiblížení dvou prvků na vzdálenost menší než  $\underline{d}$ . Vrstevnice funkce jsou znázorněny na obr. x. Z kartografického pohledu můžeme  $\underline{d}$  chápat jako minimální vzdálenost prvků, při které nedojde k jejich grafickému slití v měřítku generalizované mapy. Vzdálenost je měřena mezi vrcholy  $p_i$  jednoho prvku a liniovými segmenty druhého prvku. Konstanta  $c, c \in \mathbb{R}^+$ , ovlivňuje hodnotu gradientu, a reguluje “spád” funkce. Jinak řečeno,

ovlivňuje míru, jakou tento člen přispívá do tvaru splinu. Iterativní řešení diskretizované varianty splinu využívá parciální derivace  $E_e(x, y)$  dle  $x, y$ . Pokud pro  $d < \underline{d}$  funkci přepíšeme do tvaru

$$E_e(x, y) = c(1 - \frac{\sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}}{\underline{d}}),$$

kde  $q_n = [x_n, y_n]$  je nejbližší vrchol k vrcholu  $p = [x, y]$ , parciální derivace mají tvar

$$\frac{\partial E_e(x, y)}{\partial x} = -c \frac{x - x_n}{d\underline{d}},$$

$$\frac{\partial E_e(x, y)}{\partial y} = -c \frac{y - y_n}{d\underline{d}}.$$

Pro  $d \geq \underline{d}$ , parciální derivace mají tvar

$$\frac{\partial E_e(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial E_e(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Změna polohy vrcholů splinu, ovlivňující tvar splinu, probíhá pouze ve směru  $p \rightarrow q_n$ . Výsledné posuny vrcholy vycházejí z požadavku vyrovnaného stavu mezi vnitřní a vnější energií.

## 2.1 Částečná modifikace jednoho prvku

Tato varianta generalizace modeluje kartografickou situaci, kdy jeden z prvků je pevný, a jeho poloha ani tvar se nemění. Generalizovaný prvek je představován polyní  $L = \{p_1, \dots, p_n\}$  s  $n$  vrcholy  $p_i = [x_i, y_i]$ , bariéra je polylinie  $B = \{q_1, \dots, q_m\}$  s  $m$  vrcholy  $q_j = [x_j, y_j]$ . Z širšího pohledu je bariéra chápána jako překážka, které by se měl generalizovaný prvek vyhnout. Částečná změna tvaru a polohy jsou tedy aplikovány pouze na generalizovaný prvek. Energetická funkce

$$E_e(x_i, y_i) = \begin{cases} c(1 - \frac{d_i}{\underline{d}}), & d_i < \underline{d}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

tedy zohledňuje pouze vzdálenost vrcholů splinu  $p_i$  od překážky  $B$ , tento model je reprezentován obr. 4. Vzdálenost  $d_i$  je měřena mezi vrcholem  $p_i \in L$  a nejbližším bodem  $q_n \in B$ .

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2}.$$

Pro  $d_i < \underline{d}$ , parciální derivace  $E_e(x_i, y_i)$  mají tvar

$$\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial x_i} = -c \frac{x_i - x_n}{d_i \underline{d}}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial y_i} = -c \frac{y_i - y_n}{d_i \underline{d}}, \quad (6)$$

jinak

$$\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial y_i} = 0.$$

V kartografii tuto variantu použijeme v případě, kdy požadujeme, aby tvar a polohu měnil pouze generalizovaný prvek. Typickým případem je vztah silniční sítě a vodstva, kdy by poloha ani tvar vodního toku by neměly být generalizační operací dotčeny.

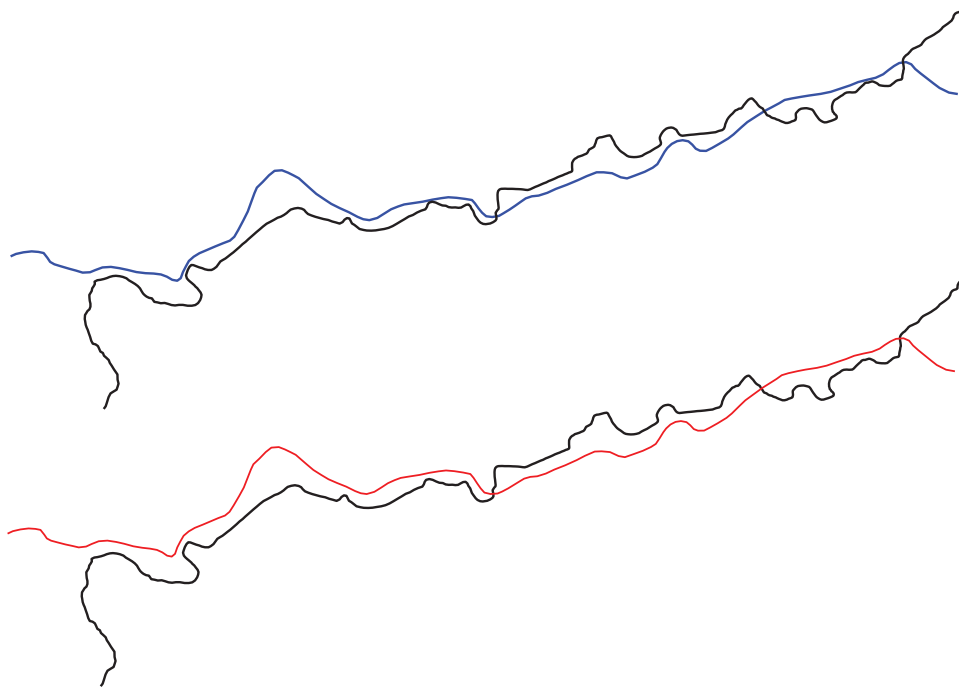


Figure 4: Částečná modifikace jednoho prvku v místech, kde dochází ke konfliktu s bariérou, poloha bariéry se nemění.

**Vlastní algoritmus.** V rámci předzpracování je provedena konverze spojové reprezentace polylinie na reprezentaci maticovou. Generalizovaný prvek  $L$  je popsán maticemi  $X(n, 1)$  a  $Y(n, 1)$ , bariéra  $B$  maticemi  $X'(m, 1)$  a  $Y'(n, 1)$ .

1. *Výpočet kroku  $h$*

Vypočteme souřadnicové rozdíly

$$\delta X = x_{i+1} - x_i, \quad \delta Y = y_{i+1} - y_i,$$

a vzdálenosti mezi vrcholy generalizované polylinie

$$H = \sqrt{\|\delta X\|_2 + \|\delta Y\|_2}.$$

Výpočet normy lze realizovat s využitím násobení po složkách  $\|\delta X\|_2 = \delta X \cdot \delta X$ . Výsledný krok  $h$  určíme jako střední hodnotu  $H$ .

2. *Určení prvků matice  $A$*

Pro zadané hodnoty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  a krok  $h$  určíme s využitím (1) hodnoty koeficientů  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a naplníme matici  $A$ . Matice  $A$  je v průběhu iteračního procesu konstantní. Pokud položíme  $B = A + \lambda I$ , můžeme si předpočítat inverzi  $B^{-1}$ .

3. *Iterační proces*

Položme  $i = 0$  a inicializujeme hodnoty matic  $X_{(0)} = X$  a  $Y_{(0)} = Y$ . Pro předem zadaný počet iterací (alternativně, pokud je změna vrcholů mezi dvěma iteracemi menší než zadaný krok), provádíme níže uvedené kroky:

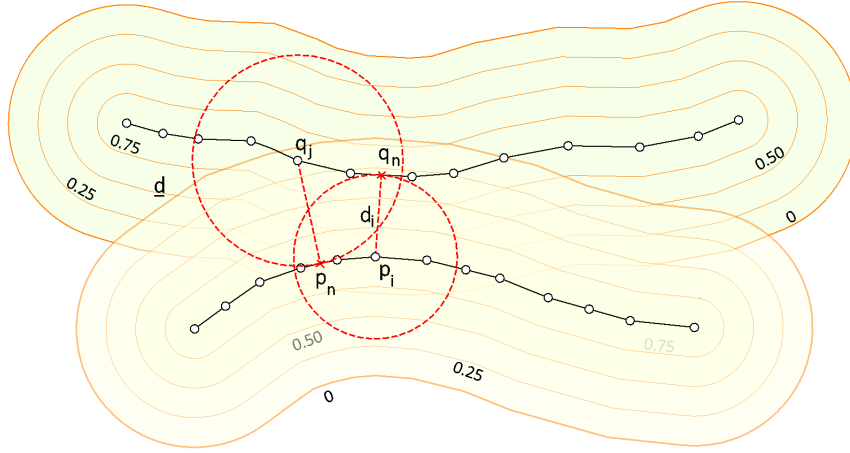


Figure 5: Izočáry energetických funkcí  $E_e(x_i, y_i)$  a  $E_e(x_j, y_j)$ .

- (a) Vytvoříme matice  $E_x(n, 1)$  a  $E_y(n, 1)$  a spočteme hodnoty jejich prvků: Pro každý bod  $p_i \in L$ ,  $p_i = [x_i, y_i]$ , nalezneme nejbližší bod  $q_n \in B$ ,  $q_n = [x_n, y_n]$ , a s využitím (5, 6) spočteme hodnoty parciálních derivací vnější energie  $\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial y_i}$  v tomto bodě.
- (b) S využitím (2, 3) určíme hodnoty posunů  $\Delta X_{(i)}$ ,  $\Delta Y_{(i)}$

$$\Delta X_{(i)} = B^{-1}(\lambda \Delta X_{(i-1)} - E_{e,x}), \quad \Delta Y_{(i)} = B^{-1}(\lambda \Delta Y_{(i-1)} - E_{e,y}),$$

a vypočteme nové souřadnice vrcholů splinu

$$X_{(i)} = X + \Delta X_{(i)}, \quad Y_{(i)} = Y + \Delta Y_{(i)}.$$

- (c) Inkrementujeme index  $i = i + 1$ . Pokud  $i < \text{max\_iters}$ , jdi na bod a), jinak ukonči iterační proces.

Následně je provedena konverze maticové reprezentace  $X, Y$  na spojový seznam vrcholů reprezentujících generalizovanou polylinii. Iterační proces konverguje zpravidla poměrně pomalu, v praxi je potřeba realizovat nižší stovky iterací.

## 2.2 Částečná modifikace obou prvků

V tomto případě není ani jeden z prvků chápán jako pevný, jejich vzájemná poloha a tvar se mohou měnit. Z kartografického pohledu jsou tedy oba prvky předmětem generalizačního operátoru. První prvek je představován polynií  $L = \{p_1, \dots, p_n\}$  tvořenou  $n$  vrcholy  $p_i$ , druhý prvek polylinií  $L' = \{q_1, \dots, q_m\}$  tvořenou  $m$  vrcholy  $q_j$ . Energetická funkce zohledňuje vzájemný vliv obou prvků. V praxi tedy řešíme (23) pro oba prvky. Energetická funkce pro polylinii  $L'$  má tvar

$$E_e(x_j, y_j) = \begin{cases} c(1 - \frac{d_j}{\underline{d}}), & d_j < \underline{d}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$



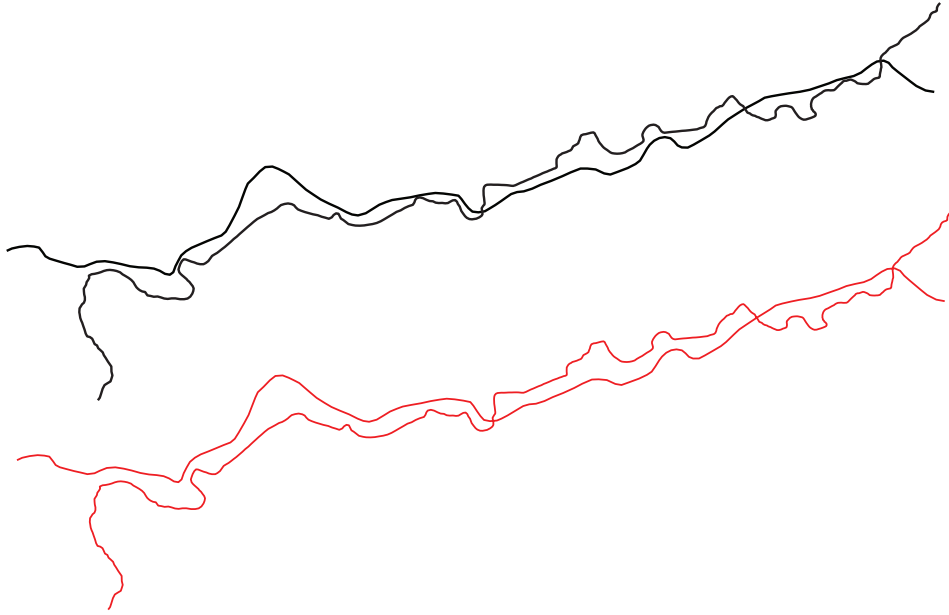


Figure 6: Částečná modifikace obou prvků v místech, kde dochází k jejich grafickému konfliktu.

kde  $d_j$  představuje vzdálenost mezi vrcholem  $q_j \in L'$  a nejbližšího vrcholem  $p_n \in L$

$$d_j = \sqrt{(x_j - x_n)^2 + (y_j - y_n)^2}.$$

Izočáry obou energetických funkcí jsou znázorněny na obr. 5. Proarciální derivace  $E_e(x_j, y_j)$  mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial x_j} &= -c \frac{x_j - x_n}{d_j \underline{d}}, \\ \frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial y_j} &= -c \frac{y_j - y_n}{d_j \underline{d}}. \end{aligned}$$

Vrcholy obou polylinií, pro které platí  $d_i < d$  nebo  $d_j < \underline{d}$  se od sebe vzájemně posunují ve směrech  $p_i \rightarrow q_n$  a  $q_j \rightarrow p_n$ . V kartografii tuto variantu použijeme v případě, kdy požadujeme, aby se měnil tvar i vzájemná poloha obou prvků. Typickým případem je silniční síť, komunikace, které jsou v cílovém měřítku mapy příliš blízko se mohou graficky slít. Ukázku této generalizační situace nalezneme na obr. 5.

**Vlastní algoritmus.** Výpočty parciálních derivací energetické funkce je nutné realizovat tak, aby na změny polohy vrcholů první polylinie mohla reagovat bezprostředně i polylinie druhá. Každá z polylinií bude mít také vlastní matici  $A$ , byť hodnoty jejich prvků budou podobné. Generalizovaný prvek  $L$  je popsán maticemi  $X(n, 1)$  a  $Y(n, 1)$ , generalizovaný prvek  $L'$  maticemi  $X'(m, 1)$  a  $Y'(n, 1)$ .

#### 1. Výpočet kroku $h$

Vypočteme souřadnicové rozdíly

$$\delta X = x_{i+1} - x_i, \quad \delta Y = y_{i+1} - y_i, \quad \delta X' = x_{j+1} - x_j, \quad \delta Y' = y_{j+1} - y_{ij},$$

a vzdálenosti mezi vrcholy obou generalizovaných polylinií

$$H = \sqrt{\|\delta X\|_2 + \|\delta Y\|_2}, \quad H' = \sqrt{\|\delta X'\|_2 + \|\delta Y'\|_2}.$$

Výsledné kroky  $h, h'$  určíme jako střední hodnoty  $H, H'$ .

## 2. Určení prvků matic $A$

Pro zadané hodnoty  $\alpha, \beta, \gamma$  a kroky  $h, h'$  určíme s využitím (1) hodnoty koeficientů  $a, b, c$  a naplníme matice  $A, A'$ ; obě jsou v průběhu iteračního procesu konstantní. Položíme  $B = A + \lambda I, B' = A' + \lambda I$  a předpočteme jejich inverze.

## 3. Iterační proces

Položme  $i = 0$  a inicializujeme hodnoty matic

$$X_{(0)} = X, \quad Y_{(0)} = Y \quad X'_{(0)} = X', \quad Y'_{(0)} = Y'.$$

Pro předem zadaný počet iterací provádíme níže uvedené kroky:

- (a) Vytvoříme matice  $E_x(n, 1), E_y(n, 1), E'_x(m, 1)$  a  $E'_y(m, 1)$  a spočteme hodnoty jejich prvků:
  - Pro každý bod  $p_i \in L, p_i = [x_i, y_i]$ , nalezneme nejbližší bod  $q_n \in B, q_n = [x_n, y_n]$ , a s využitím (5, 6) spočteme hodnoty parciálních derivací vnější energie  $\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial x_i}, \frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial y_i}$  v tomto bodě.
  - Pro každý bod  $q_j \in L', q_j = [x_j, y_j]$ , nalezneme nejbližší bod  $p_n \in L, p_n = [x_n, y_n]$  a spočteme hodnoty parciálních derivací vnější energie  $\frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial x_j}, \frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial y_j}$  v tomto bodě.
- (b) S využitím (2, 3) určíme hodnoty posunů  $\Delta X_{(i)}, \Delta Y_{(i)},$

$$\Delta X_{(i)} = B^{-1}(\lambda \Delta X_{(i-1)} - E_{e,x}), \quad \Delta Y_{(i)} = B^{-1}(\lambda \Delta Y_{(i-1)} - E_{e,y}),$$

posunů  $\Delta X'_{(i)}, \Delta Y'_{(i)}$

$$\Delta X'_{(i)} = B'^{-1}(\lambda \Delta X'_{(i-1)} - E'_{e,x}), \quad \Delta Y'_{(i)} = B'^{-1}(\lambda \Delta Y'_{(i-1)} - E'_{e,y}),$$

a vypočteme nové souřadnice vrcholů splinu

$$X_{(i)} = X + \Delta X_{(i)}, \quad Y_{(i)} = Y + \Delta Y_{(i)}, \quad X'_{(i)} = X' + \Delta X'_{(i)}, \quad Y'_{(i)} = Y' + \Delta Y'_{(i)}.$$

- (c) Inkrementujeme index  $i = i + 1$ . Pokud  $i < \text{max\_iters}$ , jdi na bod a), jinak ukonči iterační proces.

Následně je provedena konverze maticové reprezentace  $X, Y$ , a  $X', Y'$  na spojové seznamy vrcholů reprezentujících generalizované polylinie.

## References

- [1] Matthias Bader. *Energy minimization methods for feature displacement in map generalization*. PhD thesis, University of Zurich Zurich, 2001.
- [2] Dirk Burghardt and Siegfried Meier. Cartographic displacement using the snakes concept. *Semantic modeling for the acquisition of topographic information from images and maps, Basel, Birkhäuser Verlag*, pages 59–71, 1997.
- [3] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International journal of computer vision*, 1(4):321–331, 1988.