Partial displacement, energetické spliny

November 29, 2022

Stručný návod na cvičení.

1 Energetické spliny

Energetický spline [3], nazývaný také anglickým termínem "snake", je reprezentovaný parametrickou křivkou $v(s) = (x(s), y(s))$, kde s je parametr, $s \in \langle 0, 1\rangle$. Příslušný energetický model

$$E(s) = \int_0^1 E_i(s)ds + \int_0^1 E_e(s)ds + \int_0^1 E_r(s)ds,$$

zahrnuje vnitřní energii splinu E_i (internal energy) a vnější energii E_e (external energy), které ovlivňují tvar splinu. Výsledný spline zaujímá rovnovážnou polohu, která je zohledňuje jak vnitřní energii (tj. mechanické vlastnosti), tak i působení vnějších sil. Vnitřní energie splinu zajišťuje, aby tento nebyl být nepřirozeně modifikován vnějšími silami. Situace je znázorněna obr. x.

Vnitřní energie Vnitřní energie splinu definovaná vztahem [1]

$$E_i(s) = \frac{1}{2}\left(\alpha(s)\left\|v(s)\right\|^2 + \beta(s)\left\|\frac{dv(s)}{ds}\right\|^2 + \gamma(s)\left\|\frac{d^2v(s)}{ds^2}\right\|^2\right),$$

ovlivňuje průběh splinu a jeho tvar. První člen měří vzdálenost splinu od původního elementu, druhý napětí (elasticitu) splinu, poslední pak tuhost (křivost) splinu. Vliv těchto faktorů je modelován s využitím trojice parametrů $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s) \in \mathbb{R}^+$. Spline tedy může více či méně sledovat původní prvek, více či méně kopírovat jeho tvar, [3], [2]. Ukázku vlivu těchto parametrů vidíme na obr. xxx.

Vnější energie. Vnější energie řídí deformaci splinu způsobenou vnějšími silami. Energtická funkce popisující silový model může mít mnoho podob. Z matematického pohledu by měla být spojitá v bodě, diferencovatelná a mít jednoduchý průběh bez zbytečných oscilací. její minimum je blízko svislé osy bufferu. Rozhodující faktory ovlivňující míru deformace představují gradient (strmost) a omeznost funkce shora. Čím větší jsou funkční hodnoty, tím silnější je jejich vliv na deformaci tvaru. Existuje mnoho způsobů, jak navrhnout přidruženou energetickou funkci. Z pohledu kartografické genealizace, jejíž cílem je realizace generalizační operace partial diplacement, při které se snažíme nepřiblížit se k jinému prvku na vzdálenost menší než $\underline{d}$, viz kap. 2.

Diskretizace problému. Požadavek minimalizace celkové energie splinu

$$\min_v \int_0^1 F(s, v, v', v'', v)ds,$$

vede k řešení s využitím Eulerovy-Lagrangovy rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\partial F}{\partial v''} = 0, \tag{1}$$

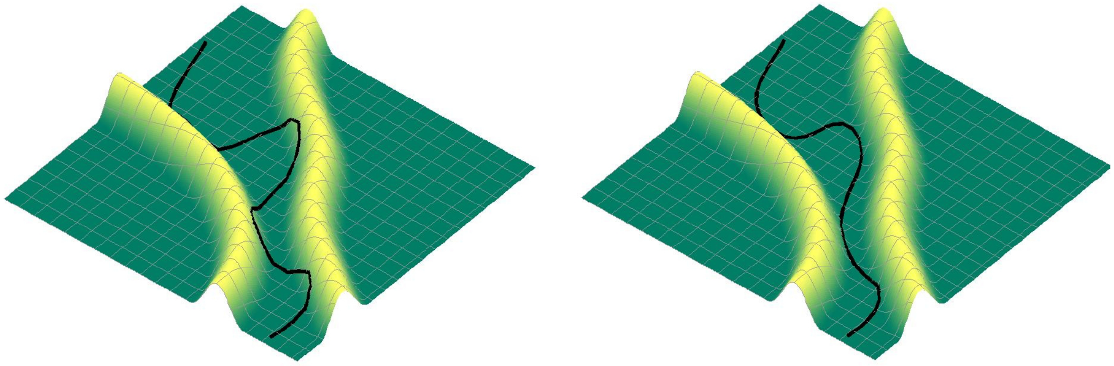

Figure 1: Ukázka formování tvaru energetického splinu vlivem vnější energie.

is given by the Euler-Lagrange's theorem (1). Protože α, β, γ představují konstanty a

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \alpha v(s) + \nabla E_e + \nabla E_r, \qquad \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial F}{\partial v'} = \beta \frac{\partial v^2(s)}{\partial s^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\partial F}{\partial v''} = -\gamma \frac{\partial v^4(s)}{\partial s^4},$$

optimální řešení má tvar

$$\alpha v(s) + \beta \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} - \gamma \frac{\partial^4 v(s)}{\partial s^4} + \nabla E_e = 0.$$

Vliv paramtrů β, γ na tvar splinu je znázorněn na obr. x. S využitím metody konečných prvků, kde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_i}{\partial s^2} &= \frac{1}{h^2}(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \\ \frac{\partial^4 x_i}{\partial s^4} &= \frac{1}{h^4}(x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}), \end{aligned}$$

h představuje zvolený krok (odpovídá průměrné vzdálenosti meti vrcholy), lze problém přepsat do diskrétní formy

$$A\Delta x + E_{e,x} = 0, \qquad A\Delta y + E_{e,y} = 0.$$

Hodnoty $E_{e,x}, E_{e,y}$ představují parciální derivace vnější energie podle proměnných x, y, A je pentadiagonální matice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & b & a \end{bmatrix},$$

jejíž prvky mají tvar

$$a = \alpha + \frac{2\beta}{h_2} + \frac{6\gamma}{h_4}, \qquad b = -\frac{\beta}{h_2} - \frac{4\gamma}{h_4}, \qquad c = \frac{\gamma}{h_4}.$$

h_2, h_4. Soustavu lineárních rovnic řešíme iterací

$$\Delta x_{(i)} = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda \Delta x_{(i-1)} - E_{e,x}), \tag{2}$$

$$\Delta y_{(i)} = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda \Delta y_{(i-1)} - E_{e,y}), \tag{3}$$

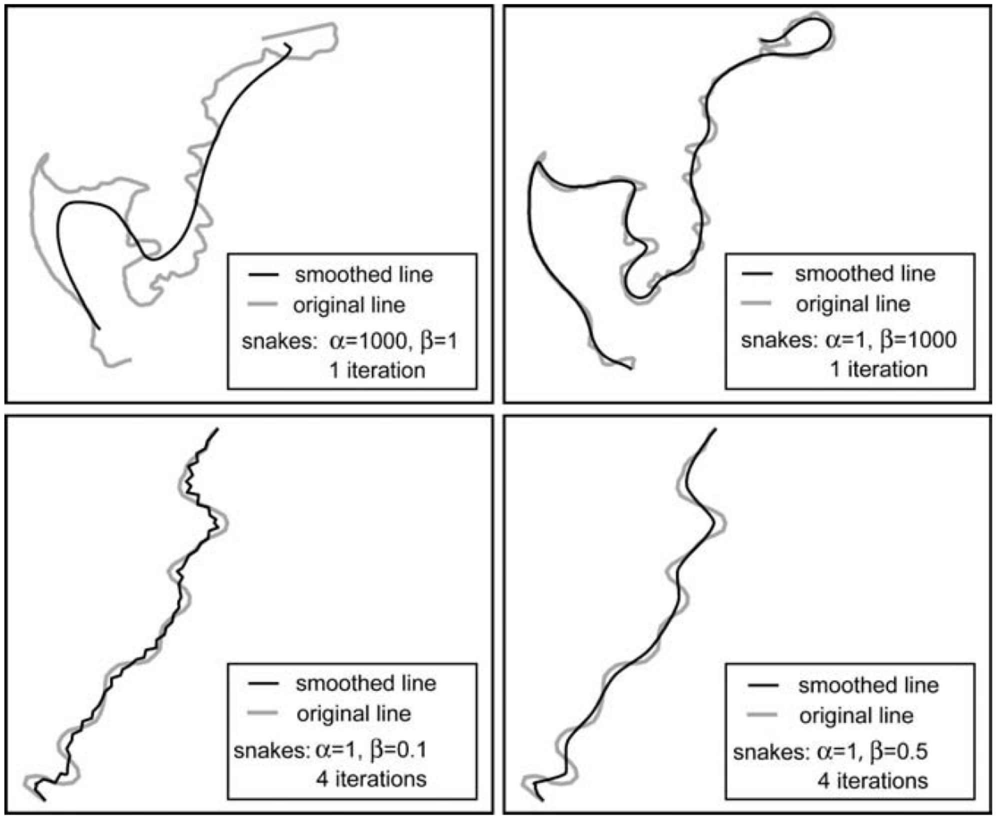

Figure 2: Vliv parametrů β, γ na průběh splinu.

kde

$$\Delta x_{(i)} = x_{(i)} - x_{(0)}, \qquad \Delta y_{(i)} = y_{(i)} - y_{(0)},$$

představují souřadnicové rozdíly vrcholů splinu v i-té iteraci. Parametr λ ovlivňuje rychlost konvergence iteračního procesu, větší hodnoty λ vedou k "rychlejším" posunům $\Delta x_{(i)}, \Delta y_{(i)}$ vrcholů splinu. Pro $i = 0$, platí $\Delta x_{(0)} = \Delta y_{(0)} = 0$.

Aby bylo diskretizované řešení funkční, předpokládáme, že polylinie by měly mít co nejhladší průběh s dostatečně hustým a pokud možno konstantním krokem vzorkování.

2 Operace Partial Displacement

Tato generalizační operace, jejíž český ekvivalent je "částečná modifikace", provádí komplexní korekci tvaru a geometrické polohy generalizovaného prvku. Zahrnuje posun a změnu tvaru takových částí prvku, které se přiblíží k jinému prvku pod určitou mez danou hodnoutou $\underline{d}$. Tento generalizační operátor se často používá u prvků, které se v generalizované mapě ocitnou příliš blízko, a může tak dojít k jejich vzájemnému grafickému konfliktu (slití). Existuje několik základních generlizačních schémat, u kterých je tato operace v praxi používána:

1. *Částečná modifikace jednoho prvku*

   Model pevného prvku, tzv. bariéry (překážky), jehož poloha se nesmí měnit, generalizovaného prvku, který je modifikovatelný.

2. *Částečná modifikace obou prvků*

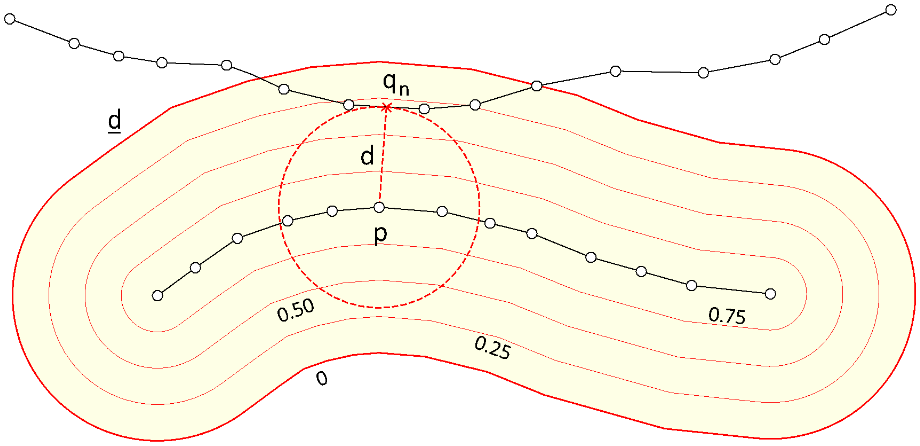

Figure 3: Energetická funkce $E_e(x, y)$ se znázorněnými vrstevnicemi.

Oba prvky mohou měnit svoji polohu a tvar, žádný z nich není pevný.

3. *Kombinace obou případů*

   Model pevného prvku (bariéry) a generalizovaných prvků. Poloha a tvar generalizovaných prvků vůči sobě i vůči překážce se může měnit.

Energetická funkce. Energetická funkce

$$E_e(x, y) = \begin{cases} c(1 - \frac{d}{\underline{d}}), & d < \underline{d}, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{4}$$

je navržena tak, aby zabránila přiblížení dvou prvků na vzdálenost menší než $\underline{d}$. Vrstevnice funkce jsou znázorněny na obr. x. Z kartografického pohledu můžeme $\underline{d}$ chápat jako minimální vzdálenost prvků, při které nedojde k jejich grafickému slití v měřítku generalizované mapy. Vzdálenost je měřena mezi vrcholy p_i jednoho prvku a liniovými segmenty druhého prvku. Konstanta c,$c \in \mathbb{R}^+$, ovlivňuje hodnotu gradientu, a reguluje "spád" funkce. Jinak řečeno, ovliňuje míru, jakou tento člen přispívá do tvaru splinu. Iterativní řešení diskretizované varianty splinu využívá parciální derivace $E_e(x, y)$ dle x, y. Pokud pro $d < \underline{d}$ funkci přepíšeme do tvaru

$$E_e(x, y) = c(1 - \frac{\sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}}{\underline{d}}),$$

kde $q_n = [x_n, y_n]$ je nejbliží vrchol k vrcholu $p = [x, y]$, parciální derivace mají tvar

$$\frac{\partial E_e(x, y)}{\partial x} = -c\frac{x - x_n}{d\underline{d}},$$
$$\frac{\partial E_e(x, y)}{\partial y} = -c\frac{y - y_n}{d\underline{d}}.$$

Změna polohy vrcholů splinu probíhá, ovlivňující tvar splinu, probíhají pouze ve směru $p \rightarrow q_n$.

2.1 Částečná modifikace jednoho prvku

Tato varianta generalizace modeluje kartografickou situaci, kdy jeden z prvků je pevný, a jeho poloha ani tvar se nemění. Generalizovaný prvek je představován polynií $L = \{p_1, ..., p_n\}$ s n vrcholy p_i, bariéra

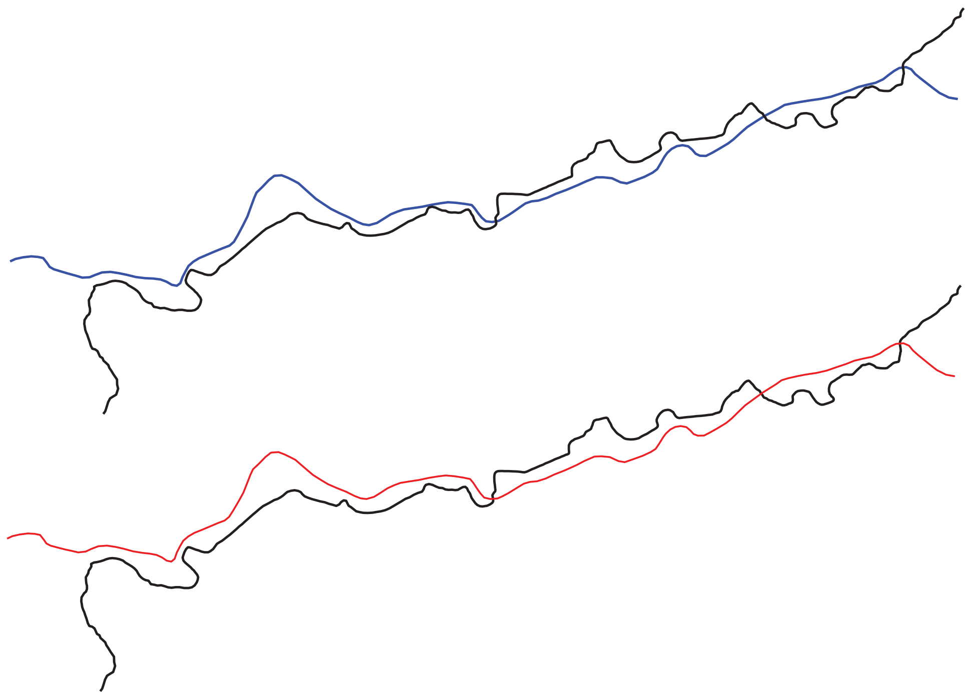

Figure 4: Částečná modifikace jednoho prvku, poloha bariéry se nemění.

je polylinie $B = \{q_1, ..., q_m\}$ s m vrcholy q_j. Z širšího pohledu je bariéra chápána jako překážka, které by se měl generalizovaný prvek vyhnout. Částečná změna tvaru a polohy jsou tedy aplikovány pouze na generalizovaný prvek. Energetická funkce

$$E_e(x_i, y_i) = \begin{cases} c(1 - \frac{d_i}{\underline{d}}), & d_i < \underline{d}, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

tedy zohledňuje pouze vzdálenost vrcholů splinu p_i od překážky B, tento model je reprezentován obr. 4. Vzdálenost d_i je měřena mezi vrcholem $p_i \in L$ a nejbližším bodem $q_n \in B$

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2}.$$

Parciální derivace $E_e(x_i, y_i)$ mají tvar

$$\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial x_j} = -c\frac{x_i - x_n}{d_i\underline{d}},$$
$$\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial y_i} = -c\frac{y_i - y_n}{d_i\underline{d}}.$$

V kartografii tuto variantu použijeme v případě, kdy požadujeme, aby tvar a polhu měnil pouze generalizovaný prvek. Typickým případem je vztah silniční sítě a vodstva, kdy poloha ani tvar vodního toku by neměly být generalizační operací dotčeny.

2.2 *Částečná modifikace obou prvků*

V tomto případě není ani jeden z prvků chápán jako pevný, jejich vzájemná poloha a tvar se mohou měnit. Z kartografického pohledu jsou tedy oba prvky předmětem generalizačního operátoru. První prvek je představován polynií $L = \{p_1, ..., p_n\}$ tvořenou n vrcholy p_i, druhý prvek polylinií $L' =$

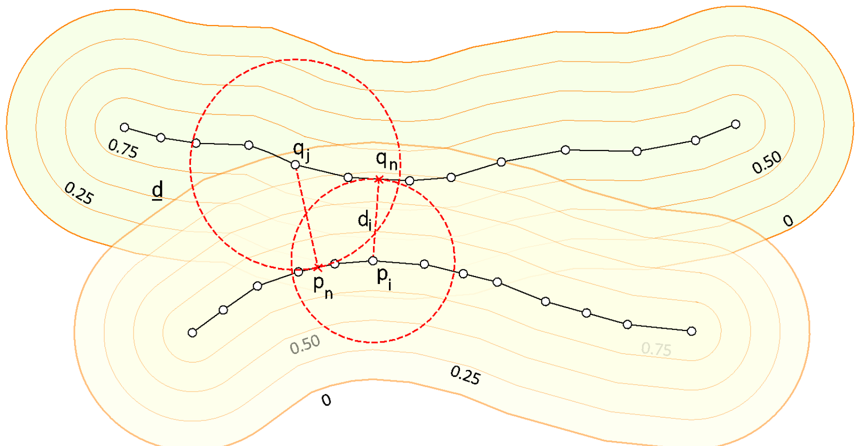

Figure 5: Izočáry energetických funkcí $E_e(x_i, y_i)$ a $E_e(x_j, y_j)$.

$\{q_1, ..., q_m\}$ tvořenou m vrcholy q_j. Energetická funkce zohledňuje vzájemný vliv obou prvků. V praxi tedy řešíme (23) pro oba prvky. Energetická funkce pro polylinii L' má tvar

$$E_e(x_j, y_j) = \begin{cases} c(1 - \frac{d_j}{\underline{d}}), & d_j < \underline{d}, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde d_j představuje vzdálenost mezi vrcholem $q_j \in L'$ a nejbližšího vrcholem $p_n \in L$

$$d_j = \sqrt{(x_j - x_n)^2 + (y_j - y_n)^2}.$$

Izočáry obou energetických funkcí jsou znázorněny na obr. 5. Parciální derivace $E_e(x_j, y_j)$ mají tvar

$$\frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial x_j} = -c\frac{x_j - x_n}{d_j \underline{d}},$$
$$\frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial y_j} = -c\frac{y_j - y_n}{d_j \underline{d}}.$$

Vrcholy obou polylinií, pro které platí $d_i < d$ nebo $d_j < \underline{d}$ se od sebe vzájemně posunují ve směrech $p_i \rightarrow q_n$ a $q_j \rightarrow p_n$. V kartografii tuto variantu použijeme v případě, kdy požadujeme, aby se měnil tvar i vzájemná poloha obou prvků. Typickým případem je silniční sít, komunikace, které jsou v cílovém měřítku mapy příliš blízko se mohou graficky slít. Ukázku této generalizační situace nalezneme na obr. 5.

Z praktického pohledu je potřeba výpočty parciálních derivací energetické funkce realizovat tak, aby na změny polohy vrcholů první polylinie mohla reagovat bezprostředně i polylinie druhá. Každá z polxlinií bude mít také vlastní matici A, byť hodnoty jejich prvků budou podobné.

Literatura

References

[1] Matthias Bader. *Energy minimization methods for feature displacement in map generalization.* PhD thesis, University of Zurich Zurich, 2001.

[2] Dirk Burghardt and Siegfried Meier. Cartographic displacement using the snakes concept. *Semantic modeling for the acquisition of topographic information from images and maps, Basel, Birkhäuser Verlag*, pages 59–71, 1997.

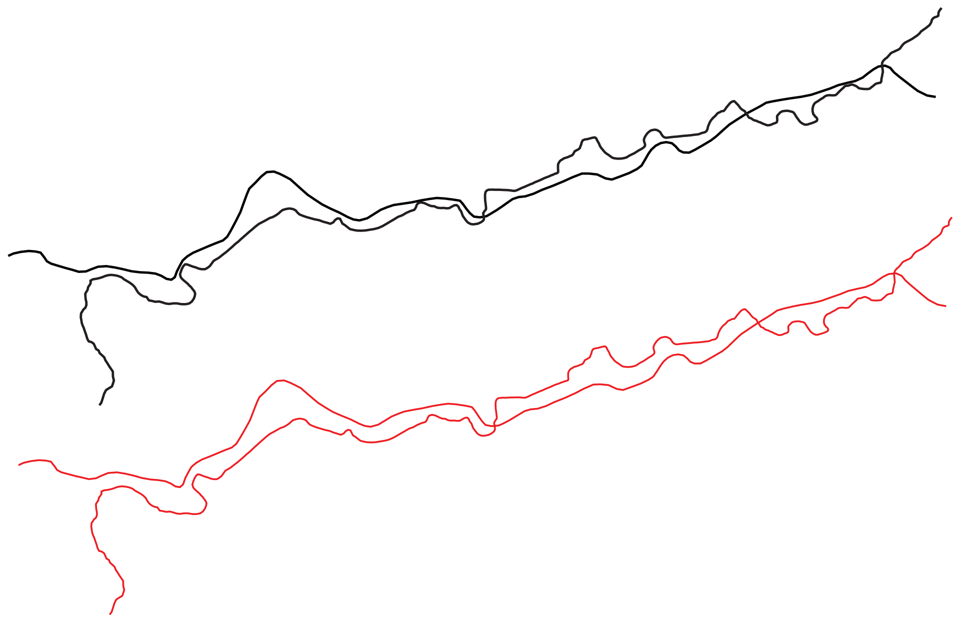

Figure 6: Částečná modifikace obou prvků.

[3] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International journal of computer vision*, 1(4):321–331, 1988.