

Partial displacement, energetické spliny

Stručný návod na cvičení.

November 30, 2022

1 Energetické spliny

Energetický spline [3], nazývaný také anglickým termínem “snake”, je reprezentovaný parametrickou křivkou $v(s) = (x(s), y(s))$, kde s je parametr, $s \in \langle 0, 1 \rangle$. Příslušný energetický model

$$E(s) = \int_0^1 E_i(s) ds + \int_0^1 E_e(s) ds + \int_0^1 E_r(s) ds,$$

zahrnuje vnitřní energii splinu E_i (internal energy) a vnější energii E_e (external energy), které ovlivňují tvar splinu. Výsledný spline zaujímá rovnovážnou polohu, která je zohledňuje jak vnitřní energii (tj. mechanické vlastnosti), tak i působení vnějších sil. Vnitřní energie splinu zajišťuje, aby tento nebyl být nepřírozeně modifikován vnějšími silami. Situace je znázorněna obr. x.

Vnitřní energie Vnitřní energie splinu definovaná vztahem [1]

$$E_i(s) = \frac{1}{2} \left(\alpha(s) \|v(s)\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{dv(s)}{ds} \right\|^2 + \gamma(s) \left\| \frac{d^2v(s)}{ds^2} \right\|^2 \right),$$

ovlivňuje průběh splinu a jeho tvar. První člen měří vzdálenost splinu od původního elementu, druhý napětí (elasticitu) splinu, poslední pak tuhost (křivost) splinu. Vliv těchto faktorů je modelován s využitím trojice parametrů $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s) \in \mathbb{R}^+$. Spline tedy může více či méně sledovat původní prvek, více či méně kopírovat jeho tvar, [3], [2]. Ukázku vlivu těchto parametrů vidíme na obr. 2.

Vnější energie. Vnější energie řídí deformaci splinu způsobenou vnějšími silami. Energetická funkce popisující silový model může mít mnoho podob. Z matematického pohledu by měla být spojitá v bodě, diferencovatelná a mít jednoduchý průběh bez zbytečných oscilací. její minimum je blízko svislé osy bufferu. Rozhodující faktory ovlivňující míru deformace představují gradient (strmost) a omezenost funkce shora. Čím větší jsou funkční hodnoty, tím silnější je jejich vliv na deformaci tvaru. Existuje mnoho způsobů, jak navrhnout přidruženou energetickou funkci. Z pohledu kartografické generalizace, jejíž cílem je realizace generalizační operace partial displacement, při které se snažíme nepřiblížit se k jinému prvku na vzdálenost menší než \underline{d} , viz kap. 2.

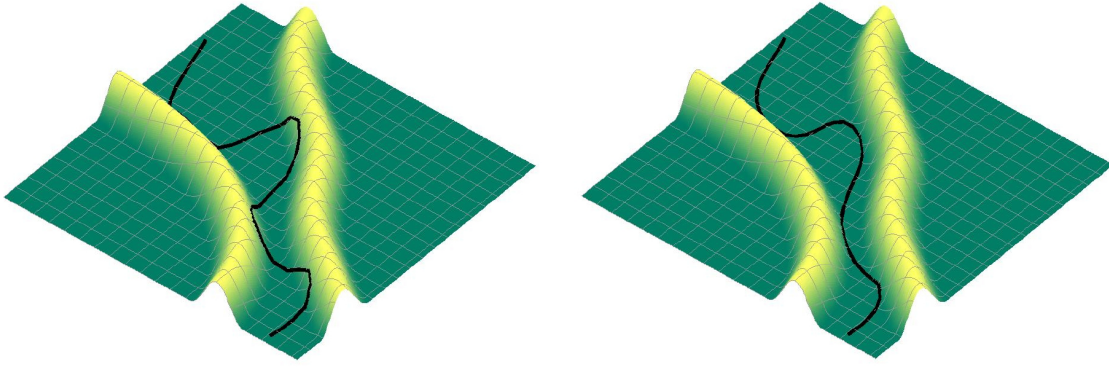


Figure 1: Ukázka formování tvaru energetického splinu vlivem vnější energie.

Diskretizace problému. Požadavek minimalizace celkové energie splinu

$$\min_v \int_0^1 F(s, v, v', v'', v) ds,$$

vede k řešení s využitím Eulerovy-Lagrangovy rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial F}{\partial v''} = 0, \quad (1)$$

is given by the Euler-Lagrange's theorem (1). Protože α, β, γ představují konstanty a

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \alpha v(s) + \nabla E_e + \nabla E_r, \quad \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial v'} = \beta \frac{\partial v^2(s)}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial F}{\partial v''} = -\gamma \frac{\partial v^4(s)}{\partial s^4},$$

optimální řešení má tvar

$$\alpha v(s) + \beta \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} - \gamma \frac{\partial^4 v(s)}{\partial s^4} + \nabla E_e = 0.$$

Vliv parametrů β, γ na tvar splinu je znázorněn na obr. 2. S využitím metody konečných prvků, kde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_i}{\partial s^2} &= \frac{1}{h^2} (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \\ \frac{\partial^4 x_i}{\partial s^4} &= \frac{1}{h^4} (x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}), \end{aligned}$$

h představuje zvolený krok (odpovídá průměrné vzdálenosti mezi vrcholy), lze problém přepsat do diskrétního tvaru. Příslušná soustava lineárních rovnic má tvar

$$\begin{aligned} A\Delta x + E_{e,x} &= 0, \\ A\Delta y + E_{e,y} &= 0. \end{aligned}$$

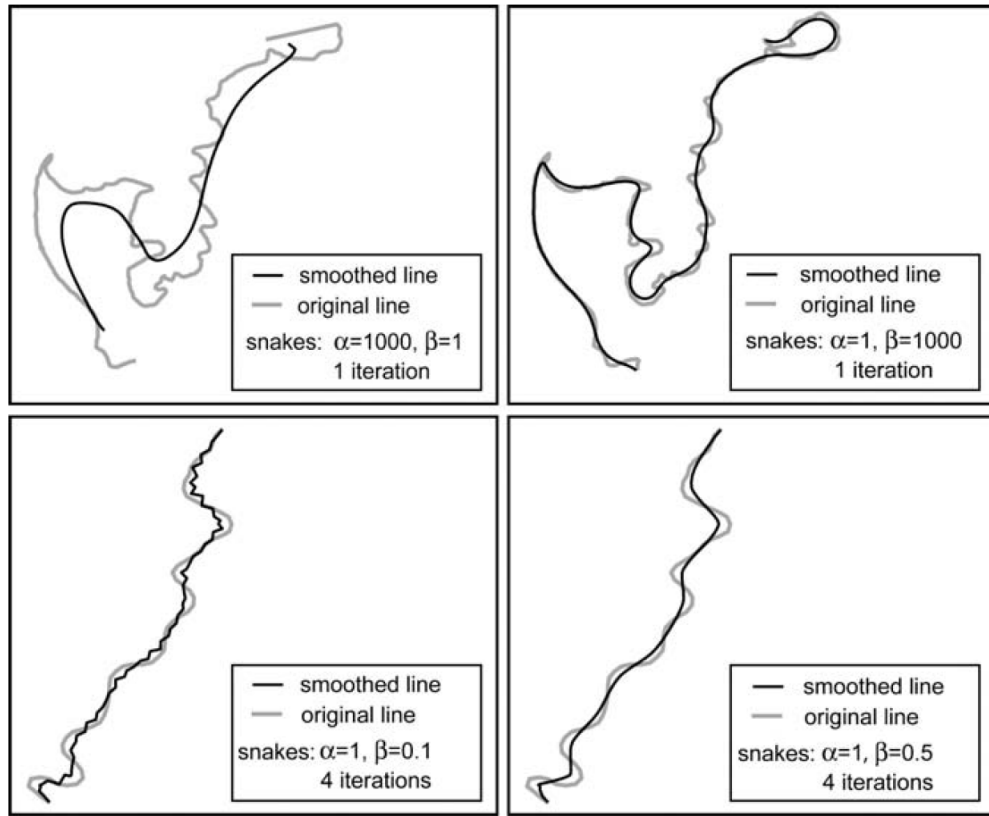


Figure 2: Vliv parametrů β, γ na průběh splinu.

Hodnoty $E_{e,x}, E_{e,y}$ představují parciální derivace vnější energie podle proměnných x, y , A je pentadiagonální matice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & b & a \end{bmatrix},$$

jejíž prvky mají tvar

$$a = \alpha + \frac{2\beta}{h^2} + \frac{6\gamma}{h^4}, \quad b = -\frac{\beta}{h^2} - \frac{4\gamma}{h^4}, \quad c = \frac{\gamma}{h^4}. \quad (2)$$

Jelikož matice A je singulární, soustavu lineárních rovnic řešíme iterací

$$\Delta X_{(i)} = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda \Delta X_{(i-1)} - E_{e,x}), \quad (3)$$

$$\Delta Y_{(i)} = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda \Delta Y_{(i-1)} - E_{e,y}), \quad (4)$$

kde

$$\Delta X_{(i)} = X_{(i)} - X_{(0)},$$

$$\Delta Y_{(i)} = Y_{(i)} - Y_{(0)},$$

představují souřadnicové rozdíly vrcholů splinu v i -té iteraci a počáteční aproximace představované lomenou čarou. Pro $i = 0$, platí

$$\Delta X_{(0)} = \Delta Y_{(0)} = 0.$$

Matici A chápeme jako konstantní v průběhu celého iteračního procesu. Nezohledňujeme tak změny vzdálenosti mezi jednotlivým vrcholy polylinie, hodnota h se nemění.

Aby bylo diskretizované řešení funkční, předpokládáme, že generalizovaná polylinie by měly mít co nejhladší průběh s dostatečně hustým a pokud možno konstantním krokem vzorkování. Parametr λ ovlivňuje rychlost konvergence iteračního procesu, větší hodnoty λ vedou k “rychlejším” posunům $\Delta x_{(i)}, \Delta y_{(i)}$ vrcholů splinu.

2 Operace Partial Displacement

Tato generalizační operace, jejíž český ekvivalent je “částečná modifikace”, provádí komplexní korekci tvaru a geometrické polohy generalizovaného prvku. Zahrnuje posun a změnu tvaru takových částí prvku, které se přiblíží k jinému prvku pod určitou mez danou hodnotou \underline{d} . Tento generalizační operátor se často používá u prvků, které se v generalizované mapě ocitnou příliš blízko, a může tak dojít k jejich vzájemnému grafickému konfliktu (slití). Existuje několik základních generalizačních schémat, u kterých je tato operace v praxi používána:

1. Částečná modifikace jednoho prvku

Model pevného prvku, tzv. bariéry (překážky), jehož poloha se nesmí měnit, generalizovaného prvku, který je modifikovatelný.

2. Částečná modifikace obou prvků

Oba prvky mohou měnit svoji polohu a tvar, žádný z nich není pevný.

3. Kombinace obou případů

Model pevného prvku (bariéry) a generalizovaných prvků. Poloha a tvar generalizovaných prvků vůči sobě i vůči překážce se může měnit.

Energetická funkce. Energetická funkce

$$E_e(x, y) = \begin{cases} c(1 - \frac{d}{\underline{d}}), & d < \underline{d}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (5)$$

je navržena tak, aby zabránila přiblížení dvou prvků na vzdálenost menší než \underline{d} . Vrstevnice funkce jsou znázorněny na obr. x. Z kartografického pohledu můžeme \underline{d} chápat jako minimální vzdálenost prvků, při které nedojde k jejich grafickému slití v měřítku generalizované mapy. Vzdálenost je měřena mezi vrcholy p_i jednoho prvku a liniovými segmenty druhého prvku.

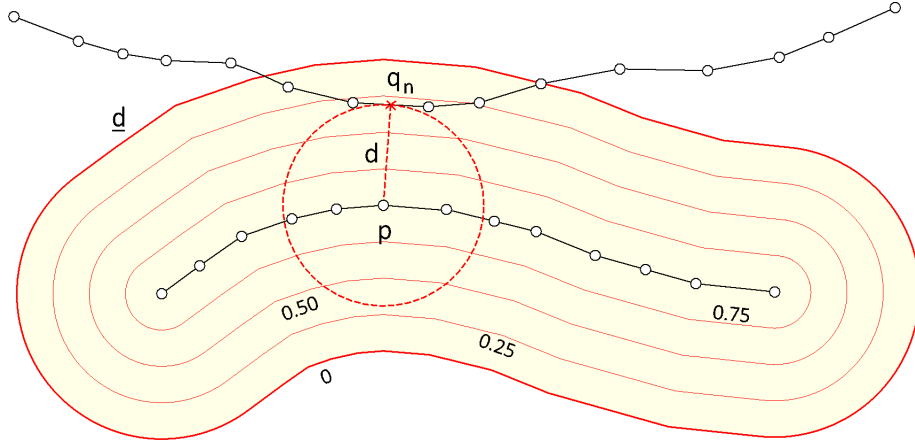


Figure 3: Energetická funkce $E_e(x, y)$ se znázorněnými vrstevnicemi.

Konstanta $c, c \in \mathbb{R}^+$, ovlivňuje hodnotu gradientu, a reguluje “spád” funkce. Jinak řečeno, ovlivňuje míru, jakou tento člen přispívá do tvaru splinu. Iterativní řešení diskretizované varianty splinu využívá parciální derivace $E_e(x, y)$ dle x, y . Pokud pro $d < \underline{d}$ funkci přepíšeme do tvaru

$$E_e(x, y) = c(1 - \frac{\sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}}{\underline{d}}),$$

kde $q_n = [x_n, y_n]$ je nejbližší vrchol k vrcholu $p = [x, y]$, parciální derivace mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_e(x, y)}{\partial x} &= -c \frac{x - x_n}{d}, \\ \frac{\partial E_e(x, y)}{\partial y} &= -c \frac{y - y_n}{d}. \end{aligned}$$

Pro $d \geq \underline{d}$, parciální derivace mají tvar

$$\frac{\partial E_e(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial E_e(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Změna polohy vrcholů splinu, ovlivňující tvar splinu, probíhá pouze ve směru $p \rightarrow q_n$. Výsledné posuny vrcholy vycházejí z požadavku vyrovnaného stavu mezi vnitřní a vnější energií.

2.1 Částečná modifikace jednoho prvku

Tato varianta generalizace modeluje kartografickou situaci, kdy jeden z prvků je pevný, a jeho poloha ani tvar se nemění. Generalizovaný prvek je představován polynií $L = \{p_1, \dots, p_n\}$ s n vrcholy $p_i = [x_i, y_i]$, bariéra je polylinie $B = \{q_1, \dots, q_m\}$ s m vrcholy $q_j = [x_j, y_j]$. Z širšího pohledu je bariéra chápána jako překážka, které by se měl generalizovaný prvek vyhnout. Částečná změna tvaru a polohy jsou tedy aplikovány pouze na generalizovaný prvek. Energetická funkce

$$E_e(x_i, y_i) = \begin{cases} c(1 - \frac{d_i}{\underline{d}}), & d_i < \underline{d}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

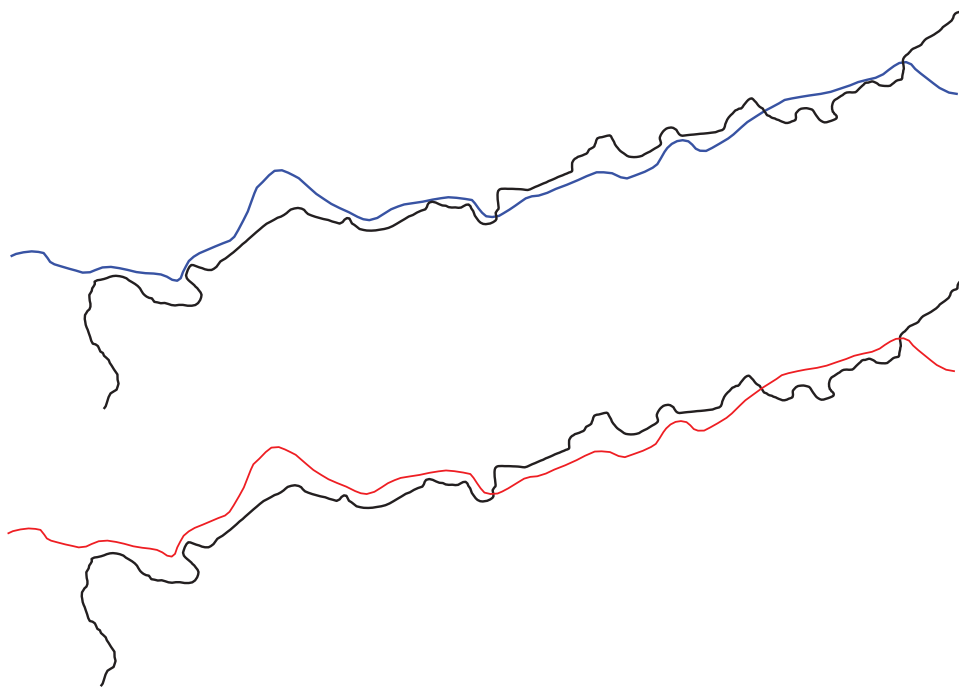


Figure 4: Částečná modifikace jednoho prvku v místech, kde dochází ke konfliktu s bariérou, poloha bariéry se nemění.

tedy zohledňuje pouze vzdálenost vrcholů splinu p_i od překážky B , tento model je reprezentován obr. 4. Vzdálenost d_i je měřena mezi vrcholem $p_i \in L$ a nejbližším bodem $q_n \in B$.

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2}.$$

Pro $d_i < \underline{d}$, parciální derivace $E_e(x_i, y_i)$ mají tvar

$$\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial x_i} = -c \frac{x_i - x_n}{d_i \underline{d}}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial y_i} = -c \frac{y_i - y_n}{d_i \underline{d}}, \quad (7)$$

jinak

$$\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial y_i} = 0.$$

V kartografii tuto variantu použijeme v případě, kdy požadujeme, aby tvar a polohu měnil pouze generalizovaný prvek. Typickým případem je vztah silniční sítě a vodstva, kdy by poloha ani tvar vodního toku by neměly být generalizační operací dotčeny.

Vlastní algoritmus. V rámci předzpracování je provedena konverze spojové reprezentace polylinie na reprezentaci maticovou. Generalizovaný prvek L je popsán maticemi $X(n, 1)$ a $Y(n, 1)$, bariéra B maticemi $X'(m, 1)$ a $Y'(n, 1)$.

1. Výpočet kroku h

Vypočteme souřadnicové rozdíly

$$\delta X = x_{i+1} - x_i, \quad \delta Y = y_{i+1} - y_i,$$

a vzdálenosti mezi vrcholy generalizované polylinie

$$H = \sqrt{\|\delta X\|_2 + \|\delta Y\|_2}.$$

Výpočet normy lze realizovat s využitím násobení po složkách $\|\delta X\|_2 = \delta X \cdot \delta X$. Výsledný krok h určíme jako střední hodnotu H .

2. Určení prvků matice A

Pro zadané hodnoty α, β, γ a krok h určíme s využitím (2) hodnoty koeficientů a, b, c a naplníme matici A . Matice A je v průběhu iteračního procesu konstantní. Pokud položíme $B = A + \lambda I$, můžeme si předpočítat inverzi B^{-1} .

3. Iterační proces

Položme $i = 0$ a inicializujeme hodnoty matic $X_{(0)} = X$ a $Y_{(0)} = Y$. Pro předem zadaný počet iterací (alternativně, pokud je změna vrcholů mezi dvěma iteracemi menší než zadaný krok), provádíme níže uvedené kroky:

- (a) Vytvoříme matice $E_x(n, 1)$ a $E_y(n, 1)$ a spočteme hodnoty jejich prvků: Pro každý bod $p_i \in L, p_i = [x_i, y_i]$, nalezneme nejbližší bod $q_n \in B, q_n = [x_n, y_n]$, a s využitím (6, 7) spočteme hodnoty parciálních derivací vnější energie $\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial x_i}, \frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial y_i}$ v tomto bodě.
- (b) S využitím (3, 4) určíme hodnoty posunů $\Delta X_{(i)}, \Delta Y_{(i)}$

$$\Delta X_{(i)} = B^{-1}(\lambda \Delta X_{(i-1)} - E_{e,x}), \quad \Delta Y_{(i)} = B^{-1}(\lambda \Delta Y_{(i-1)} - E_{e,y}),$$

a vypočteme nové souřadnice vrcholů splinu

$$X_{(i)} = X + \Delta X_{(i)}, \quad Y_{(i)} = Y + \Delta Y_{(i)}.$$

- (c) Inkrementujeme index $i = i + 1$. Pokud $i < \text{max_iters}$, jdi na bod a), jinak ukonči iterační proces.

Následně je provedena konverze maticové reprezentace X, Y na spojový seznam vrcholů reprezentujících generalizovanou polylinii. Iterační proces konverguje zpravidla poměrně pomalu, v praxi je potřeba realizovat nižší stovky iterací.

2.2 Částečná modifikace obou prvků

V tomto případě není ani jeden z prvků chápán jako pevný, jejich vzájemná poloha a tvar se mohou měnit. Z kartografického pohledu jsou tedy oba prvky předmětem generalizačního operátoru. První prvek je představován polynií $L = \{p_1, \dots, p_n\}$ tvořenou n vrcholy p_i , druhý prvek polylinií $L' = \{q_1, \dots, q_m\}$ tvořenou m vrcholy q_j . Energetická funkce zohledňuje vzájemný vliv obou prvků. V praxi tedy řešíme (34) pro oba prvky. Energetická funkce pro

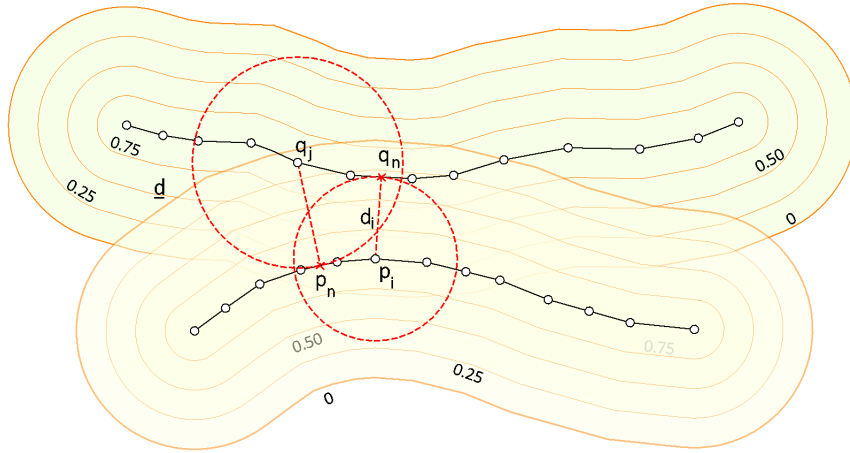


Figure 5: Izočáry energetických funkcí $E_e(x_i, y_i)$ a $E_e(x_j, y_j)$.

polylinii L' má tvar

$$E_e(x_j, y_j) = \begin{cases} c(1 - \frac{d_j}{\underline{d}}), & d_j < \underline{d}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde d_j představuje vzdálenost mezi vrcholem $q_j \in L'$ a nejbližšího vrcholem $p_n \in L$

$$d_j = \sqrt{(x_j - x_n)^2 + (y_j - y_n)^2}.$$

Izočáry obou energetických funkcí jsou znázorněny na obr. 5. Proarciální derivace $E_e(x_j, y_j)$ mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial x_j} &= -c \frac{x_j - x_n}{d_j \underline{d}}, \\ \frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial y_j} &= -c \frac{y_j - y_n}{d_j \underline{d}}. \end{aligned}$$

Vrcholy obou polylinií, pro které platí $d_i < d$ nebo $d_j < \underline{d}$ se od sebe vzájemně posunují ve směrech $p_i \rightarrow q_n$ a $q_j \rightarrow p_n$. V kartografii tuto variantu použijeme v případech, kdy požadujeme, aby se měnil tvar i vzájemná poloha obou prvků. Typickým případem je silniční síť, komunikace, které jsou v cílovém měřítku mapy příliš blízko se mohou graficky slít. Ukázku této generalizační situace nalezneme na obr. 5.

Vlastní algoritmus. Výpočty parciálních derivací energetické funkce je nutné realizovat tak, aby na změny polohy vrcholů první polylinie mohla reagovat bezprostředně i polylinie druhá. Každá z polylinií bude mít také vlastní matici A , byť hodnoty jejich prvků budou podobné. Generalizovaný prvek L je popsán maticemi $X(n, 1)$ a $Y(n, 1)$, generalizovaný prvek L' maticemi $X'(m, 1)$ a $Y'(n, 1)$.

1. Výpočet kroku h

Vypočteme souřadnicové rozdíly

$$\delta X = x_{i+1} - x_i, \quad \delta Y = y_{i+1} - y_i, \quad \delta X' = x_{j+1} - x_j, \quad \delta Y' = y_{j+1} - y_{ij},$$

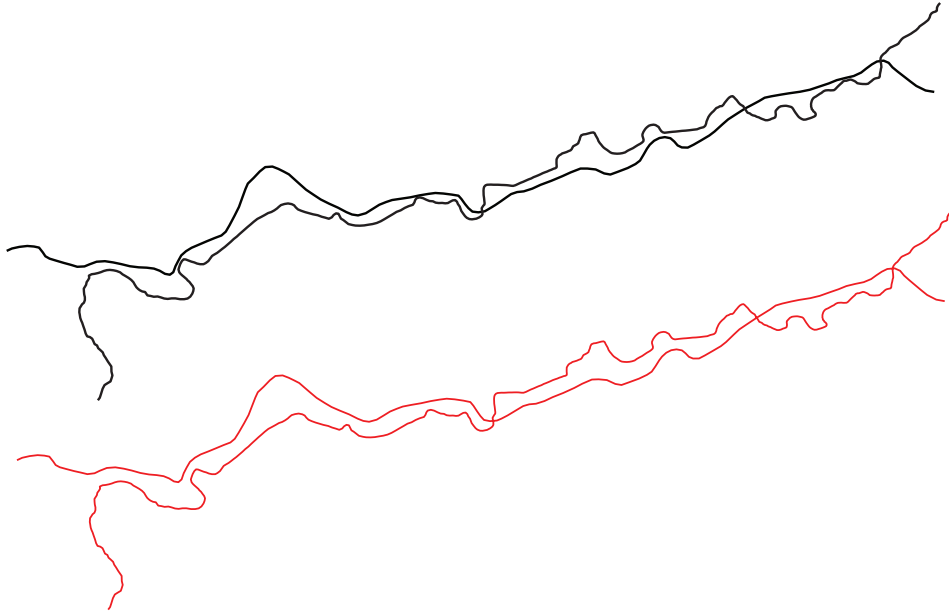


Figure 6: Částečná modifikace obou prvků v místech, kde dochází k jejich grafickému konfliktu.

a vzdálenosti mezi vrcholy obou generalizovaných polyliníí

$$H = \sqrt{\|\delta X\|_2 + \|\delta Y\|_2}, \quad H' = \sqrt{\|\delta X'\|_2 + \|\delta Y'\|_2}.$$

Výsledné kroky h, h' určíme jako střední hodnoty H, H' .

2. Určení prvků matic A

Pro zadané hodnoty α, β, γ a kroky h, h' určíme s využitím (2) hodnoty koeficientů a, b, c a naplníme matice A, A' ; obě jsou v průběhu iteračního procesu konstantní. Položíme $B = A + \lambda I, B' = A' + \lambda I$ a předpočteme jejich inverze.

3. Iterační proces

Položíme $i = 0$ a inicializujeme hodnoty matic

$$X_{(0)} = X, \quad Y_{(0)} = Y, \quad X'_{(0)} = X', \quad Y'_{(0)} = Y'.$$

Pro předem zadaný počet iterací provádíme níže uvedené kroky:

(a) Vytvoříme matice $E_x(n, 1), E_y(n, 1), E'_x(m, 1)$ a $E'_y(m, 1)$ a spočteme hodnoty jejich prvků:

- Pro každý bod $p_i \in L, p_i = [x_i, y_i]$, nalezneme nejbližší bod $q_n \in B, q_n = [x_n, y_n]$, a s využitím (6, 7) spočteme hodnoty parciálních derivací vnější energie $\frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial x_i}, \frac{\partial E_e(x_i, y_i)}{\partial y_i}$ v tomto bodě.
- Pro každý bod $q_j \in L', q_j = [x_j, y_j]$, nalezneme nejbližší bod $p_n \in L, p_n = [x_n, y_n]$ a spočteme hodnoty parciálních derivací vnější energie $\frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial x_j}, \frac{\partial E_e(x_j, y_j)}{\partial y_j}$ v tomto bodě.

(b) S využitím (3, 4) určíme hodnoty posunů $\Delta X_{(i)}$, $\Delta Y_{(i)}$,

$$\Delta X_{(i)} = B^{-1}(\lambda \Delta X_{(i-1)} - E_{e,x}), \quad \Delta Y_{(i)} = B^{-1}(\lambda \Delta Y_{(i-1)} - E_{e,y}),$$

posunů $\Delta X'_{(i)}$, $\Delta Y'_{(i)}$

$$\Delta X'_{(i)} = B'^{-1}(\lambda \Delta X'_{(i-1)} - E'_{e,x}), \quad \Delta Y'_{(i)} = B'^{-1}(\lambda \Delta Y'_{(i-1)} - E'_{e,y}),$$

a vypočteme nové souřadnice vrcholů splinu

$$X_{(i)} = X + \Delta X_{(i)}, \quad Y_{(i)} = Y + \Delta Y_{(i)}, \quad X'_{(i)} = X' + \Delta X'_{(i)}, \quad Y'_{(i)} = Y' + \Delta Y'_{(i)}.$$

(c) Inkrementujeme index $i = i + 1$. Pokud $i < \text{max_iters}$, jdi na bod a), jinak ukonči iterační proces.

Následně je provedena konverze maticové reprezentace X, Y , a X', Y' na spojové seznamy vrcholů reprezentujících generalizované polylinie.

References

- [1] Matthias Bader. *Energy minimization methods for feature displacement in map generalization*. PhD thesis, University of Zurich Zurich, 2001.
- [2] Dirk Burghardt and Siegfried Meier. Cartographic displacement using the snakes concept. *Semantic modeling for the acquisition of topographic information from images and maps*, Basel, Birkhäuser Verlag, pages 59–71, 1997.
- [3] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International journal of computer vision*, 1(4):321–331, 1988.