

文章编号: 1002—1566(2003) 02—0053—03

意料之外,“数理”之中!<sup>\*</sup>

刘乐平

(东华理工学院, 江西 344000; 中国人民大学统计学系 2000 级博士生, 北京 100872)

**摘要:** 本文首先介绍“Parade Magazine”杂志 1990 年第 9 期上刊登的| 则“有奖竞猜”游戏, 然后用图形的方式给出此游戏的直观解释。

**关键词:** 有奖竞猜; 统计学

**中图分类号:** O211

**文献标识码:** A

## Unexpected but in statistics

LIU Le-ping

(East China Institute of Technology, Jiangxi, 344000; Department of Statistics, Renmin University of China, Beijing, 100872)

**Abstract:** In this paper the author first introduce the game that publish in the “Parade Magazine” (1990, 9), then the fundamental ideas and solution methods of the game are discussed in graph.

**Key words:** Game; Statistics

玛利亚(Marilyn vos Savant), 一位被载入“吉尼斯世界记录丛书”——“超级智商卷”的美国妇女, 她在美国一家名叫“Parade Magazine”的杂志上开辟了一个每月专栏, 取名为“请问玛利亚”(Ask Marilyn), 专门登载诸如猜字、脑筋急转弯等有关提高智力技能的游戏。

在“Parade Magazine”1990 年的第 9 期上, 玛利亚给出了这样一个十分简单(人人都能回答)但又非常复杂(让许多数学博士做错), 且特别吸引人(引发成千上万的读者参与争论)的问题:

“有奖竞猜”问题: 假若你有幸参加一个电视台主办的有奖竞猜节目, 台上有三扇门, 在其中一扇门后停着一辆豪华轿车, 另外两扇门后则各站着一只羊。规则很简单: 你从三扇门中任意选中一扇, 确认后打开, 门后的奖品就归你!

竞猜游戏分两步进行: 主持人先让你选中一扇门, 选好后告诉他是哪一扇(便于说明, 假设你选中的是第 1 号门)。这时, 主持人再给你一次机会, 他从剩余的两扇门中打开一扇, 比如第 2 号门(或 3 号门), 里面是一只羊, 这时, 主持人问你, 你是否改变主意, 换选第 3 号门(或 2 号门)。“换”还是“不换”? 换了你, 面对豪华轿车和小山羊, 你怎么“决择”? (考虑一分钟!)

绝对意料中的回答——“不换”! 笔者至少问过十位数学系的研究生, 结果都是“英雄所见略同”: 逻辑十分清楚, 主持人给你打开了第 2 号门, 只剩下两扇门可供选择, 轿车在每扇门后的概率都是  $1/2$ , 从概率观点来说, 从长远角度(多次实验)来看, 无论你坚持第 1 号门还是改变去选择第 2 号门, 都有 50% 的机会开走轿车, 50% 的机会牵走山羊。“换”与“不换”是一样的!

但是, 玛利亚给出了“意料之外”的答案——“换, 你应该换”! 因为你第一次猜中轿车的概率是  $1/3$ , 而你第二次赢得轿车的概率为  $2/3$ (不是  $1/2$ )。

\* 收稿日期: 2001-09-27

这“不可思议”的答案一经公布,立即引发了美国全国性的争论,数以千记的批评信件蜂拥而至,其中许多是来自美国各高等院所的数学博士们,玛利亚从中摘录了一些有趣的信件刊登在“Parade Magazine”1991 年第 2 期她的专栏里:

- “我是否可以建议您在重新回答这个问题之前去找一本标准的概率书参考参考”? (University of Florida)
- “您的逻辑是错误的,我可以肯定您一定收到了许多高中生和大学生关于这个问题的来信,希望你尽快更正,我想这会对您的专栏有帮助的”。 (Georgia State University)
- “你关于 有奖竞猜 的解答是完全错误的,我希望这场争论能引起公众对我国如此严重的数学教育危机给予重视。如果你能改正你的错误观点,将会对这种可悲现状的解决起着积极的作用。你知道有多少愤怒的数学家在等待你的道歉吗?” (Georgetown University)
- “在与至少三位数学家讨论后,我感到震惊,你竟然还没发现你的错误。” (Dickinson State University)
- “您就是那只羊!” (Western State University)
- “您肯定是错误的。换个角度,如果您是错的,而其他博士们都是错误的,那我们的国家该是怎样一种可悲情景啊!” (U.S.Army Research Institute)

谁是正确的? 玛利亚还是博士们? 不幸的是“可悲情景”发生了!

为便于直观理解,我们用图形分以下步骤来解释:

1、在节目录制之前,主持人随机地将轿车放在三扇门中的任意一扇门后,其余两扇留给羊。所有的放法如右图所示:

此时,你(第一次)选择中车的概率为  $1/3$  (假定你对 A、B、C 主观认识相同)。

2、现在考虑你第二次选择: 假设(不妨假设)你第一次选择的是 1 号门,那么你中车的可能只有 A 情形发生,而 B 和 C 出现时你只有牵走羊了。选择结果如下图:(注: 颜色较深表示你选择的目标。)

这时,主持人给你打开一扇门,注意!

A 情形时: 他随便开 2 号或 3 号(假定主持人此时是随机打开一扇门),

B 情形时: 他只能开 3 号,

C 情形时: 他只能开 2 号。

(原因很简单, B 和 C 时,主持人当然知道车在哪扇门后,也自然不会有意把“车门”给你打开,所以他只有唯一的选择! ——这就是本问题的关键!)

此时,若你坚持“不换”,你面对的情形如下(无标记图表示主持人已打开的门):  
中车的概率还是  $1/3$ 。

1 号 轿车	2 号 羊	3 号 羊
1 号 羊	2 号 轿车	3 号 羊
1 号 羊	2 号 羊	3 号 轿车
1 号 轿车	2 号 羊	3 号 羊
1 号 羊	2 号 轿车	3 号 羊
1 号 羊	2 号 羊	3 号 轿车
1 号 轿车		3 号 羊
1 号 羊	2 号 轿车	
1 号 羊		3 号 轿车

但是,若你灵活改变策略——“换”,你选择的结果如下:

A	1号 轿车		3号 羊
B	1号 羊	2号 轿车	
C	1号 羊		3号 轿车

中车的概率就变成  $2/3$  了。因为只有 A 发生时,你才不幸“换”错了,而 B 和 C 出现时,你就“换”的英明果断了。

同理,当你第一次选择 2 号门或 3 号门时,结果完全同上。

原因是什么呢?

我认为可以从以下几个方面考虑:

1、你坚持“不换”,你所选择的样本空间还是开始时的三种情况——三个样本点,一个有利场合。没有利用主持人给你的机会,所以“中车”的概率还是  $1/3$ 。

2、你改变选择——“换”,那么,你所选择的样本空间就变化了——三个样本点,二个有利场合(如上图所示)。

3、为什么不是许多人想象的  $1/2$  呢?表面上看,主持人打开了一扇门,剩下了两扇门,一扇门里有车,另一扇门里有羊,车在每扇门后的概率都是  $1/2$ 。但是仔细想想,此时,车和羊并不是“随机地”放在每个门后的,“机会”不是均等的,主持人这时给你的不是两扇门,而是三次机会,其中两次对你“改变选择”有利。仔细研究主持人给你打开门这个条件,你会发现,因为他事先已经知道车在哪扇门里,所以,你应该充分利用这个信息。

最后声明一点虽然  $2/3$  比  $1/3$  大,但是这并不能保证你一定能把车开走。不过,在希望着中大奖之前,尽量了解一些“数理统计”的知识,一定会增大你获奖的机会。祝你好运!

下转第 63 页

### 规范英文摘要的质量标准(“数理统计与管理”编辑部)

国家标准 GB7713-87 指出:“为了国际交流,科学技术报告、学位论文和学术论文应附有外文(多用英文)摘要。”在促进中文学术论文进入国际交流的问题上,当前的任务是要充分发挥英文摘要的作用。从调研情况看,目前学术期刊中的英文摘要绝大多数比较粗糙,离参与国际交流的要求相距甚远。为了让中文学术期刊学术论文以更高的质量走向国际,以利于国际科技界对中国科技事业的了解和交流,有必要规范英文摘要的质量标准,促进提高英文摘要的质量。具体事项通知如下:

一、英文摘要应用符合英文语法的文字语言,以提供文献内容梗概为目的,不加评论和补充解释,简明、确切地论述文献重要内容的短文。

二、英文摘要必须符合“拥有与论文同等量的主要信息”的原则。为此,英文摘要应重点包括 4 个要素,即研究目的、方法、结果和结论。在这 4 个要素,后 2 个是最重要的。在执行上述原则时,在有些情况时,英文摘要可包括研究工作的主要对象和范围,以及具有情报价值的其它重要的信息。当前学术期刊上英文摘要的主要问题是要素不全,繁简失当。

三、英文摘要的句型力求简单,通常应有 10 个左右意义完整,语句顺畅的句子。

四、英文摘要不应有引言中出现的内容,也不要对论文内容作诠释和评论,不得简单重复题名中已有的信息;不用非公知公用的符号和术语,不用引文(除非该论文证实或否定了他人已发表的论文),缩略语、略称、代号,除了相邻专业的读者也能清楚理解的以外,在首次出现时必须加以说明;科技论文写作时应注意的其他事项,如采用法定计量单位,正确使用语言文字和标点符号等,也同样适用于英文摘要的编写。

这四条同样适应中文摘要。因为实际上中、英文摘要互为“译文”。请给本刊投稿的作者照此执行。并请各位作者注意:本刊从 2003 年开始逐步采用此规范。中、英文摘要合乎此规范的文章本刊将优先录用,不符合此规范的文章将被退回修改而耽误刊登的时间、甚至不被采用。

后关系,但  $Y_{(3)}$  在  $Y_{(1)}, Y_{(2)}$  之后:  $Y_{(3)}$  与  $Y_{(1)}, Y_{(2)}$  有关,而不能说  $Y_{(1)}, Y_{(2)}$  与  $Y_{(3)}$  有关。

先考虑这样的情况:  $Y = (Y_{(1)}, \dots, Y_{(m)})'$ , 都有次序,  $Y_{(j)}$  依赖  $Y_{(1)}, \dots, Y_{(j-1)}$ , 但反之不然,  $j = 2, \dots, m$ , 利用

$$\begin{aligned} & P(Y_{(1)} = y_{(1)}, \dots, Y_{(m)} = y_{(m)} | x) = P(Y_{(1)} = y_{(1)} | x) \\ & \cdot P(Y_{(2)} = y_{(2)} | Y_{(1)} = y_{(1)}, x) \\ & \dots\dots \\ & \cdot P(Y_{(m)} = y_{(m)} | Y_{(1)} = y_{(1)}, \dots, Y_{(m-1)} = y_{(m-1)}, x) \end{aligned}$$

然后对乘积的每一项建模:

$$P(Y_{(j)} = r | Y_{(1)} = y_{(1)}, \dots, Y_{(j-1)} = y_{(j-1)}, x) = h_{jr}(Z_j' \beta_j), j = 1, \dots, m \quad (1.139)$$

$r = 1, \dots, q_j = k_j - 1$ ,  $k_j$  为  $Y_{(j)}$  取值的数目。 $k_j$  可为  $\infty$

$Z_j$  是一个依赖于  $j$  和  $x$  及  $y_{(1)}, \dots, y_{(j-1)}$  的向量。

( $j = 1$  表示  $P(Y_{(1)} = r | x)$ )

在  $Y_{(j)}$  只取 0, 1 两值时, 模型形式上可能有

$$P(Y_{(1)} = 1 | x) = h(\beta_{01} + Z_1' \beta_1, Z_1 \text{ 依赖 } x) \quad (1.140)$$

$$P(Y_{(j)} = 1 | Y_{(1)} = y_{(1)}, \dots, Y_{(j-1)} = y_{(j-1)}, x) = h(\beta_{0j} + Z_j' \beta_j + w_j' y_j) \quad (1.141)$$

$Z_j$  依赖  $x$ , 而  $w_j$  依赖  $y_{(1)}, \dots, y_{(j-1)}$

例如, 取  $h(t) = e^t / (1 + e^t)$ , 得到常见的 logit 模型。

若各  $Y_{(j)}$  取的值本身有序, 则可按(四)“状态有序的状况”那一段解释的方法建模。设

$m = 2$ ,  $Y_{(1)}, Y_{(2)}$  分别取值  $1, \dots, k_1$  和  $1, \dots, k_2$ ,

$$P(Y_{(1)} \leq r | x) = F_1(\theta_r + Z'(x) \beta_{1r}), r = 1, \dots, q_1 = k_1 - 1 \quad (1.142)$$

$$P(Y_{(2)} \leq s | Y_{(1)} = r, x) = F_2(\theta_{rs} + Z'(x) \beta_{2rs}) \quad (1.143)$$

$$r = 1, \dots, k_1, s = 1, \dots, q_2 = k_2 - 1$$

这里  $F_1, F_2$  是已知的分布函数。

这个模型比(1.72)更一般一些。例如, (1.142)中  $\beta_{1r}$  可与  $r$  有关, 而(1.72)中的  $\beta$  则不依赖  $r$ 。

#### [参考文献]

- [1] L. Fahrmeir. Multivariate Statistical Modeling Based on Generalized Linear Models[M]. New York, Springer-Verlag, 1994.
- [2] McCullagh. Generalized Linear Models [M]. London/New York, Chapman & Hill, 1989 2<sup>nd</sup> edition.
- [3] L. Fahrmeir. Consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimator in generalized linear models[J]. Ann. Statist., 1985, 342-368.

上接第 55 页

#### [参考文献]

- [1] McClave, James T., Benson, P. George, and Sincich, Terry. Statistics for Business and Economics[M]. Eighth Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 2001.