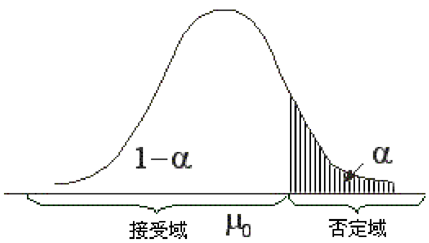
T 检验的几何解释*

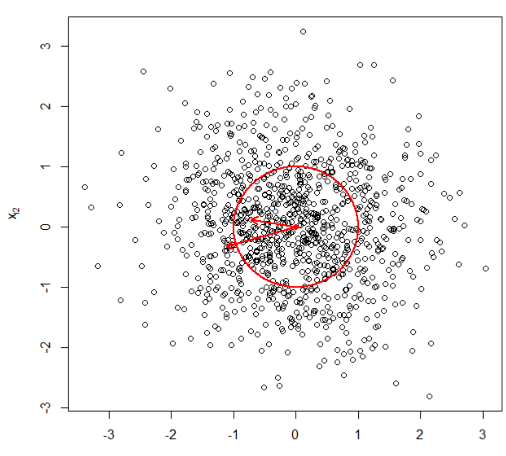
学生 t 检验是威廉·戈塞特 1908 年所提出的，“学生”是他的笔名。T 检验有很好的几何解释，通过几何解释，我们会对 t 检验有更深刻的理解。下面举一个简单例子，说明如何从几何角度来解释学生 T 检验。注意，这里的几何解释并不是划分拒绝域和接受域。



划分拒绝域和接受域不属于几何解释

假设我们手头有一个样本，样本中有两个观测（假定这两个观测独立，并服从相同正态分布），我们想判断该样本是否来自于标准正态分布。这是经典的假设检验问题：单样本均值是否为 0。原假设是样本来自于均值为 0 方差为 1 的标准正态分布，备择假设是样本来自于均值大于 0 的正态分布（方差为 1）。

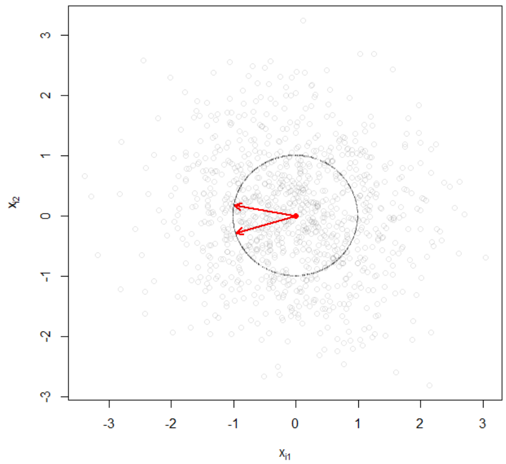
我们从原假设出发考虑这个问题。按照原假设，我们利用随机数生成器生成多组满足标准正态分布的样本。将这些样本描绘如下图，图中每一个点代表一个样本（只含两个观测，分别对应于横轴纵轴）。可以把每个样本看做一个二维向量，如图中红色的箭头所示。



*本文作者高磊

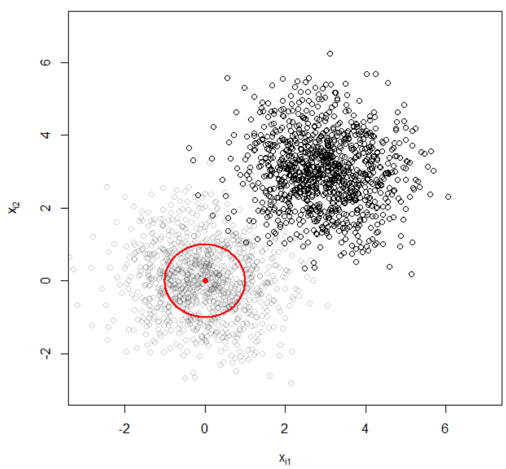
在原假设下生成的多组样本

在上图中，我们还描绘了一个单位圆（半径为 1），接下来，把每一个样本所对应的向量单位化，从而变为从原点出发，终点落在单位圆上的一个向量，如下图。不难想象，这些终点在单位圆上均匀分布。这一点极其重要，正如 t 统计量服从 T 分布，不同的是，这里的解释更加直观。



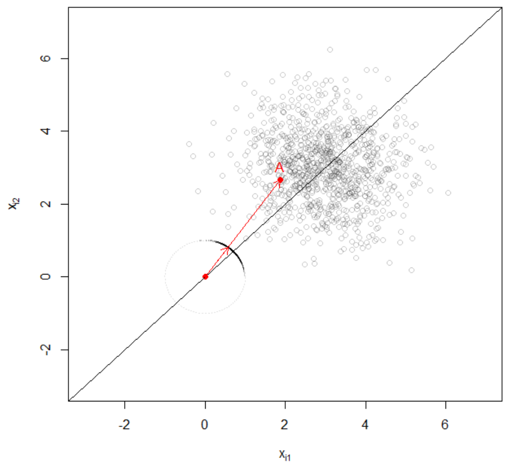
将每个样本向量映射到单位圆上

既然在原假设下，按照上述步骤，会得到在圆周上的均匀分布。那么我们不仅要问，如过备择假设成立，仍然按照如上的步骤进行处理，会得到什么结果？以备择假设是均值为 3、方差为 1 的正态分布为例，下图为备择假设下样本与原假设下样本的对比。



备择假设下的样本

把备择假设下的样本向量也转换到单位圆上，结果如下图，由图可以发现，这些向量的终点在圆周上不再满足均匀分布，它们在一个扇形边缘分布较密，最密的地方在斜率为 1 的直线附近，向两侧延伸，分布变得稀疏。



备择假设下映衬到单位圆，不再是均匀分布

对照备择假设下和原假设下的结果，我们可以得到如下判断方法：当我们观测到一个样本后，首先将样本向量单位化，并映射到单位圆上，然后观察其终点的位置，如果离斜率为 1 的直线很近，我们就有理由怀疑原假设，认为该样本更有可能来自于备择假设。此时的 p 值该如何计算呢？很简单，只需要计算映射向量与斜率为 1 的直线的夹角，然后计算夹角占 2π 的比值，这个比值就是 p 值。

以 A 点代表的样本为例，两个观测分别为（1.883863 2.666793），将这个样本映射到单位圆上，映射向量为（0.5769737 0.8167627）。该向量与斜率为 1 的直线的夹角为 0.1703795，占圆周 2π 的比例为 0.05423349，从而 p 值即为 0.05423349。利用 R 软件直接对 A 样本进行单边 T 检验，得到结果如下，计算的 p 值与我们从几何角度得到的 p 值一致。

```
> t.test(X.bei[63,],alternative = "greater")

        One Sample t-test

data:  X.bei[63, ]
t = 5.8123, df = 1, p-value = 0.05423
alternative hypothesis: true mean is greater than 0
95 percent confidence interval:
 -0.1962823        Inf
sample estimates:
mean of x
 2.275328
```