

AlphaGeometry

Доклад Георгия Караваева

Введение

Особенности геометрических задач

1

AlphaGeometry – система, сочетающая в себе символьные вычисления и нейросетевой подход для решения задач по геометрии.

Автоматизация решения геометрических задач – непростой вызов сразу по нескольким причинам.

1. Их нельзя или сложно записать с помощью систем проверки доказательств (например, Lean), поэтому нет объёмных датасетов с задачами, на которых можно обучать нейросети.
2. Пространство действий на каждом шаге бесконечно велико из-за дополнительных построений.
3. Количество возможных путей решений даже с самыми простыми построениями огромно.

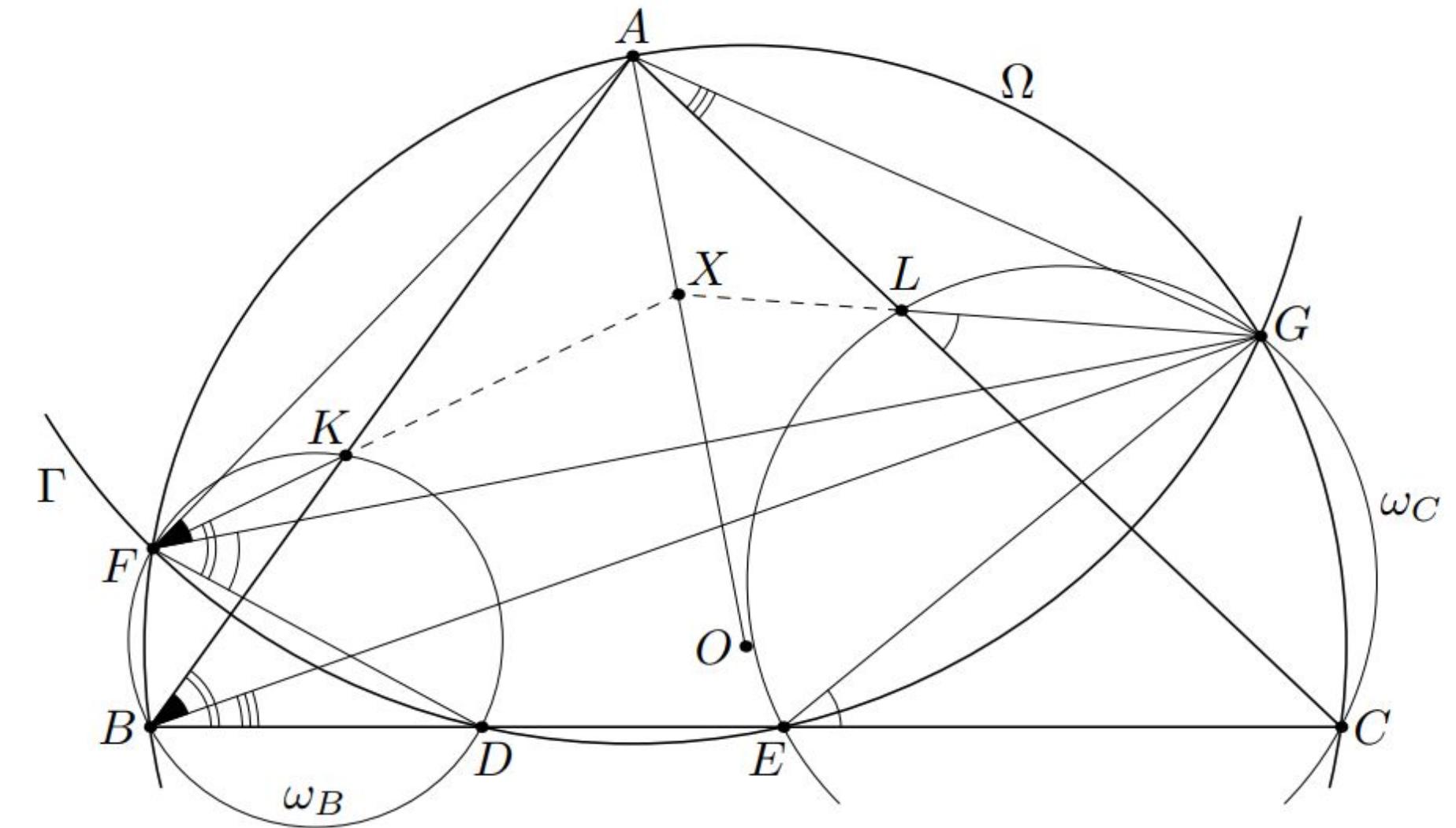
Искусственный набор данных

Как уже было сказано ранее, подходящих наборов данных для обучения нейросетей решению геометрических задач не существовало до написания данной статьи, поэтому авторы сгенерировали свой, искусственный набор данных для обучения.

Для этого они использовали уже существующий геометрический движок: авторы сгенерировали 100 миллионов искусственных задач с доказательствами, 9 миллионов из которых требовали дополнительных построений. Самые длинные из доказательств содержали более 200 шагов, что вчетверо длиннее среднего решения задачи с олимпиады.

Сравнение методов

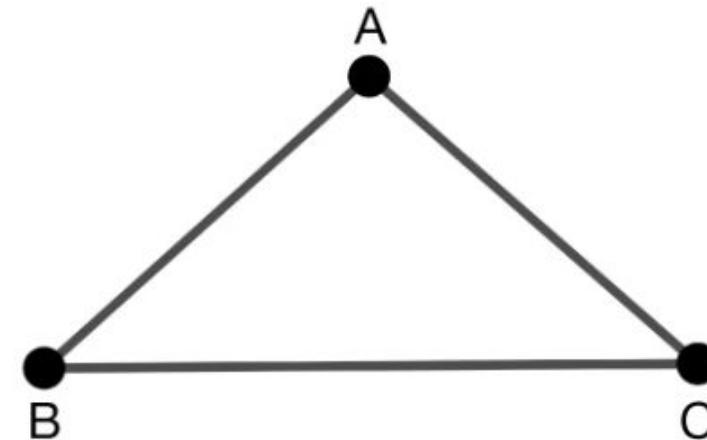
Для сравнения различных методов используется датасет из геометрических задач IMO (международной математической олимпиады), из которого убрали задачи про геометрические неравенства и комбинаторную геометрию (автоматизировать решение таких задач куда труднее). Получился набор из 30 задач, который авторы назвали IMO-AG-30.



Задача 4 из IMO 2015, иллюстрация из решения этой задачи, данного в шортлисте.

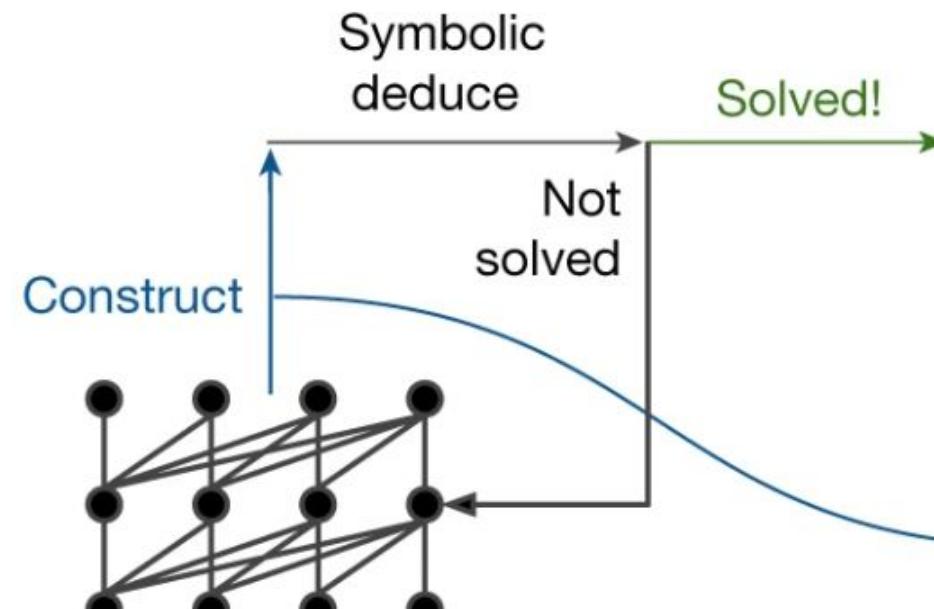
Обзор архитектуры

a A simple problem



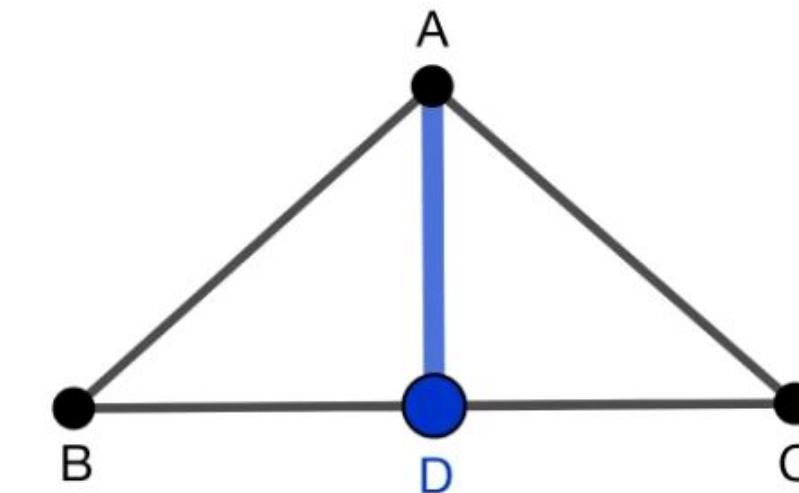
"Let ABC be any triangle with $AB = AC$.
Prove that $\angle ABC = \angle BCA$."

b AlphaGeometry



c Language model

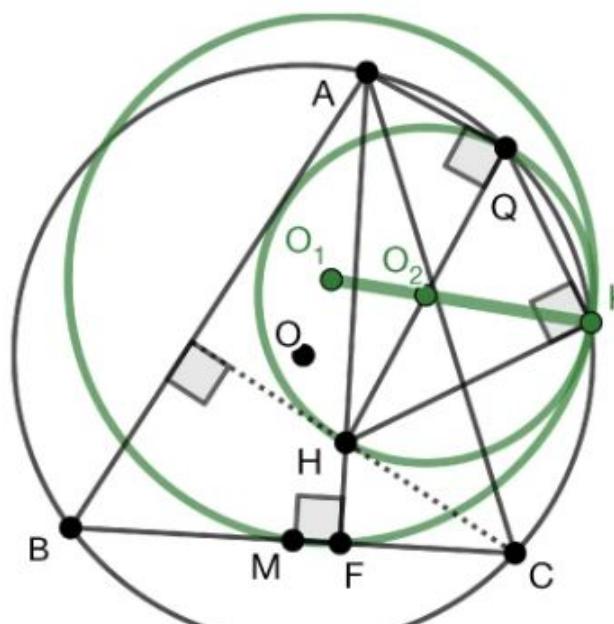
d Solution



Construct D: midpoint BC,
 $AB=AC, BD = DC, AD=AD \Rightarrow \angle ABD=\angle DCA [1]$
 $[1], B C D \text{ collinear} \Rightarrow \angle ABC=\angle BCA$

e IMO 2015 P3

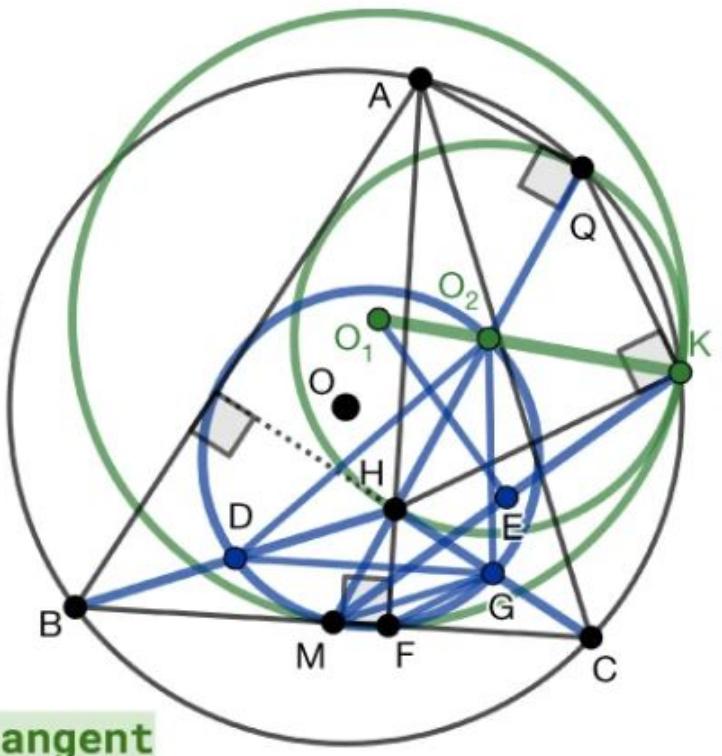
"Let ABC be an acute triangle. Let (O) be its circumcircle, H its orthocenter, and F the foot of the altitude from A . Let M be the midpoint of BC . Let Q be the point on (O) such that $QH \perp QA$ and let K be the point on (O) such that $KH \perp KQ$. Prove that the circumcircles (O_1) and (O_2) of triangles FKM and KQH are tangent to each other."



Alpha-
Geometry

f Solution

Construct D: midpoint BH [a]
[a], O_2 midpoint HQ $\Rightarrow BQ \parallel O_2D$ [20]
...
Construct G: midpoint HC [b] ...
 $\angle GMD = \angle GO_2D \Rightarrow M O_2 G D$ cyclic [26]
[a], [b] $\Rightarrow BC \parallel DG$ [30]
...
Construct E: midpoint MK [c]
..., [c] $\Rightarrow \angle KFC = \angle KO_1E$ [104]
...
 $\angle FKO_1 = \angle FKO_2 \Rightarrow K_01 \parallel K_02$ [109]
[109] $\Rightarrow O_1 O_2 K$ collinear $\Rightarrow (O_1)(O_2)$ tangent



Метод обучения

5

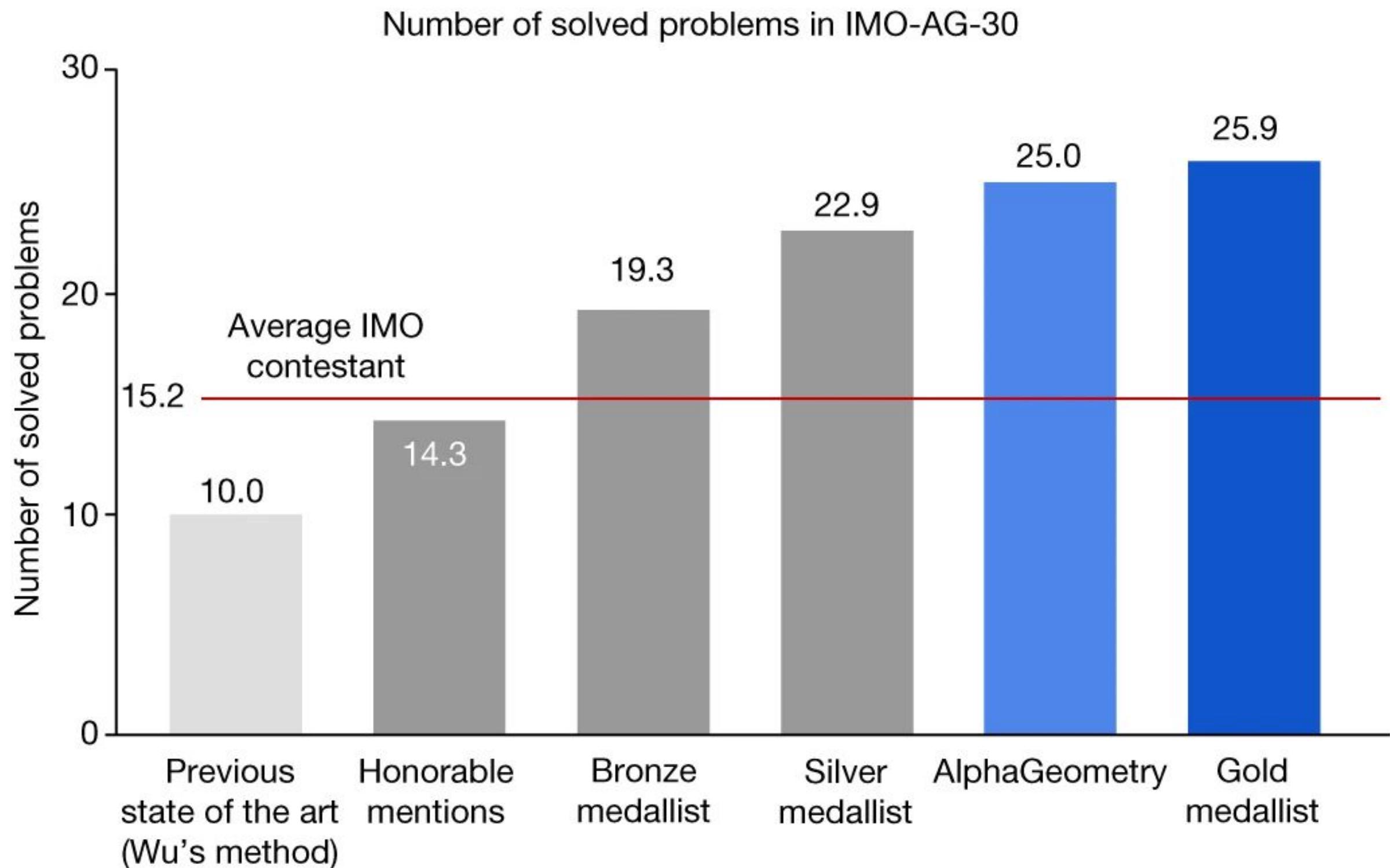
Языковую модель обучили на всём наборе данных, а затем провели fine-tuning только на задачах, требующих дополнительных построений, предоставив остальные шаги доказательства символным системам.

Это позволяет скомбинировать лучшие черты двух систем: языковой и символьной – для построения гарантированно верных и вместе с тем понятных человеку доказательств.

Результаты AlphaGeometry

Модель AlphaGeometry справилась с 25 задачами из 30 за 4.5 часа, что примерно соответствует уровню золотого медалиста.

Предыдущий SoTA алгоритм (метод Ву) справился только с 10.



Набор данных

Описание задач

Адаптация языков наподобие Lean для геометрических теорем – очень непростая задача, поэтому авторы использовали для описания более специфический язык, использованный во многих фреймворках для работы с геометрией (таких как GEX, JGEX, ММР/Geometer и GeoLogic) и дополнили его необходимым функционалом для геометрических вычислений.

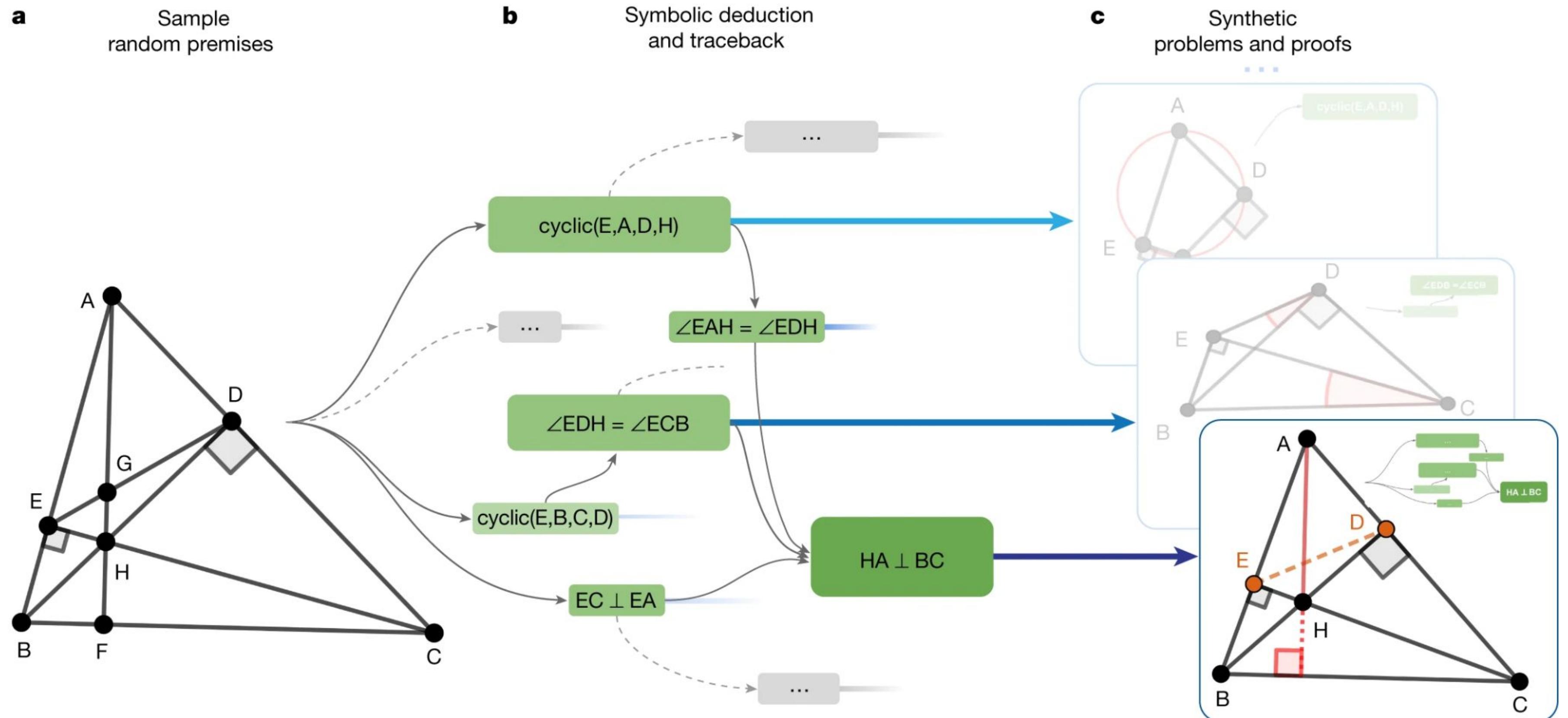
Этого функционала хватило для описания 75% задач IMO, попавших в тестовый датасет.

Генерация задач

В искусственном наборе данных не использовалось ни одной задачи, созданной вручную!

Конструкции для анализа генерировались постепенно, дабы избежать невозможных конструкций. На каждом шаге добавлялся новый объект, удовлетворяющий некоторому свойству из заранее заготовленного списка (например, ортоцентр, луч под углом 9° к уже построенной прямой или равносторонний треугольник).

Генерация набора данных

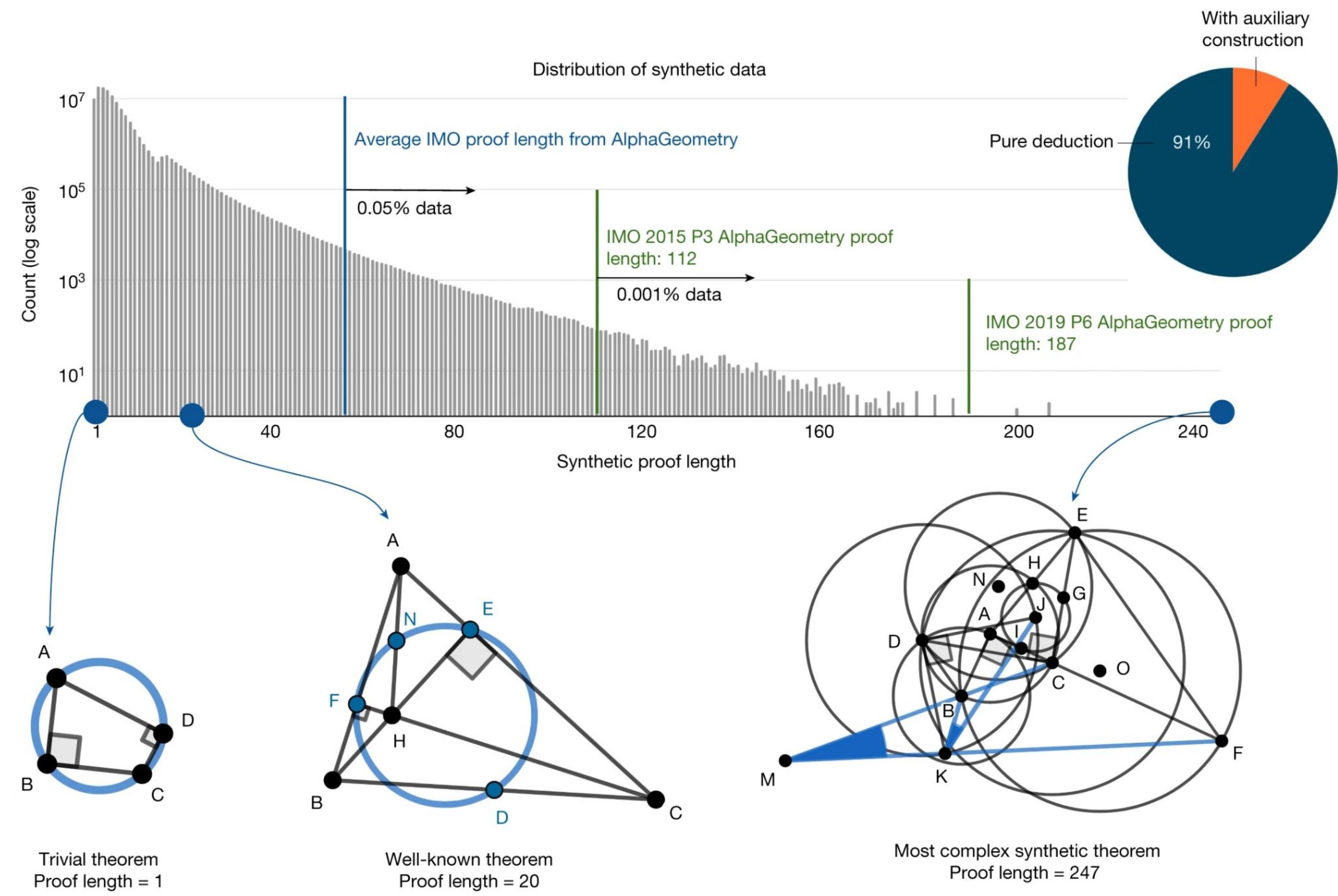


Генерация задач

10

Для генерации датасета в течение 72 часов использовались 100000 CPU с разными сидами для уменьшения дублирования. За это время было сгенерировано 500 миллионов задач, после удаления дубликатов среди них осталось всего 100 миллионов задач, 9 миллионов из которых требовали дополнительных построений.

Среди сгенерированных задач встретилось 20 известных теорем, но ни одной из 30 тестовых задач там не было.



Дедуктивные методы

Дедуктивные методы

12

Наверное, самый прямолинейный метод решения геометрических задач подобного рода – вывод одних признаков из других с помощью символьических вычислений с помощью аксиом и простых теорем.

Такие методы действенны без дополнительных построений только в случае, если задача достаточно простая, либо если список базовых теорем очень обширный.

Дедуктивные методы позволили решить лишь 7 задач из 30 из тестового датасета.

Поиск решения

13

После того, как ациклический граф выводов построен, нам нужно найти кратчайшее решение. В силу того, что одно утверждение может опираться на несколько предпосылок, задача становится NP-полной, поэтому авторы используют жадный алгоритм для минимизации.

Если в решении все утверждения опираются лишь на одну предпосылку, задача вырождается в граф и можно использовать поиск в ширину.

Алгебраические методы

Алгебраические методы

Геометрические задачи можно решать и алгебраически, задавая объекты с помощью уравнений. Алгоритм, опирающийся на базисы Грёбнера позволил решить 4 задачи из 30, а предыдущий SoTA алгоритм, тоже алгебраический, – 10 из 30. Такие алгоритмы очень затратны по времени и памяти при объёмных условиях, а их решения почти невозможно интерпретировать!

Тем не менее, более слабые алгебраические методы позволяют значительно расширить функционал дедуктивных методов, не жертвуя при этом скоростью или понятностью! Комбинация из алгебраических и дедуктивных методов решает 14 задач из 30, если применять их попарно!

Алгебраические методы

Разберёмся подробнее в том, как работают алгебраические методы, описанные ранее. Все геометрические ограничения можно описать в виде $a - b = c - d \Leftrightarrow a - b - c + d = 0$. Например, равенство углов $\angle ABC = \angle XYZ$ можно записать как $s(AB) - s(BC) = s(XY) - s(YZ)$, где $s(DE)$ – угол между DE и осью абсцисс по модулю π , а равенство отношений $AB:CD = EF:GH$ – как $\log(AB) - \log(CD) = \log(EF) - \log(GH)$. Сводя все такие ограничения в матрицу, получим СЛУ. Также добавим в СЛУ константы: единицу и π .

Диагонализовав систему уравнений, мы можем проверить полученные переменные на равенство, и в случае совпадений, получить новые факты для дедуктивного метода, который, в свою очередь, даст новые ограничения для алгебраического метода!

Поиск решения

Аналогично дедуктивным методам, мы хотим найти как можно более короткую цепочку рассуждений, приводящих к одному итоговому уравнению за шаг. Для этого мы формируем СЛУ, как описано ранее, транспонируем матрицу СЛУ и ищем такой целочисленный вектор, что при умножении на него транспонированной матрицы мы получим вектор коэффициентов искомого уравнения, при этом из всех таких векторов с наименьшей L1 метрикой.

Заметим, что у нас получилась задача смешанного целочисленного линейного программирования, а значит, мы можем решить её с помощью солвера, предназначенного для таких задач.

Type	Problem	Proof
Angle chasing	Let ABCD be a cyclic quadrilateral. Let E and F be the intersection of AD & BC, and AB & CD. Let X be the intersection of the angle bisectors of $\angle AEB$ and $\angle AFD$. Prove that $\angle EXF = \pi/2$.	<p>Denote the 4 angles of the quadrilateral ABCD as $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$. We have:</p> <p><AR></p> $\begin{aligned}\angle EXF &= \angle EAF - \angle AEX - \angle AFX \\ &= \angle A - \frac{1}{2}\angle DEC - \frac{1}{2}\angle BFC \\ &= \angle A - \frac{1}{2}(\angle DEC + \angle BFC) \\ &= \angle A - \frac{1}{2}(\pi - \angle C - \angle D) - \frac{1}{2}(\pi - \angle B - \angle C) \\ &= \angle A - \pi + \angle C + \frac{1}{2}(\angle B + \angle D) \\ &= \angle A - \pi + (\pi - \angle A) + \frac{1}{2}(\angle B + \pi - \angle B) \\ &= \frac{1}{2}\pi\end{aligned}$ <p></AR></p>
Distance chasing	Triangle ABC has incircle (D) touching sides AB, BC, CA at E, F, G. Similarly, excenter (H) with respect to $\angle A$ touches the same three sides at I, J, K. Prove that CJ = FB.	<p><DD></p> <p>Since H is the excenter, CJ = KC, BJ = BI, AK = AI</p> <p>Since I is the incenter, CF = CG, FB = BE, GA = EA</p> <p></DD></p> <p><AR></p> $\begin{aligned}AB + BC + CA &= AB + CJ + JB + CA \\ &= (AB + BI) + (JC + AK) = AI + AK \\ &= 2AK \\ \Rightarrow (AB + BC + CA)/2 &= AK = AC + CK = AC + CJ \\ \Rightarrow CJ &= (AB + BC - CA)/2\end{aligned}$ <p>Also,</p> $\begin{aligned}AB + BC - CA &= AB + BC - (CG + GA) \\ &= (AB - GA) + (BC - CG) \\ &= AB - EA + BC - CF \\ &= BE + CF \\ &= 2BF \\ \Rightarrow BF &= (AB + BC - CA)/2 = CJ.\end{aligned}$ <p></AR></p>

Нейросетевые методы

Дополнительные построения

18

До использования нейросетей для предсказания дополнительных построений использовались эвристики: простые правила, предлагающие дополнительные построения в типичных ситуациях (например, удвоение медианы). Такие эвристики позволяют увеличить количество задач, решаемых дедуктивным методом, с 7 до 9, а комбинацией алгебраического и дедуктивного методов – с 14 до 18, что и составило основной бейзлайн для AlphaGeometry, который исследователи старались преодолеть.

Исследователи попытались использовать для решения задачи ChatGPT. В одиночку он не справился ни с одной задачей.

Когда его использовали для генерации дополнительных построений в сочетании с дедуктивной и алгебраической системами, он помог решить одну задачу ($14 \rightarrow 15$), что меньше, чем результат набора эвристик, отобранных вручную ($14 \rightarrow 18$).

Нейросетевые методы AlphaGeometry

20

Вместо ChatGPT или эвристик, разработчики AlphaGeometry использовали языковую модель. Для начала они обучили её генерировать любые доказательства, вне зависимости от того, есть ли в нём дополнительные построения, или же нет, на искусственном наборе данных.

Для этого они использовали трансформер со 151 миллионом параметров, на вход которому подавался токенизованный по словам текст в формате «<Условие> <Цель> <Доказательство>».

Затем они провели fine-tuning на задачах с дополнительными построениями.

Нейросетевые методы AlphaGeometry

21

В результате, полученная модель предлагала по одному новому построению за одну итерацию, например, построение точки X такой, что ABCX – параллелограмм. Для формирования предложения использовался beam search ширины 512 и глубины 16.

Такие построения передавались для анализа дедуктивному и алгебраическому методам. Попеременные применения нейросети и символьных методов проводились до нахождения решения или до достижения максимального количества итераций.

В результате такая модель справилась с 25 задачами. Если использовать не весь датасет, а только задачи с дополнительными построениями, решить получится лишь 21 задачу, а если не использовать fine-tuning, то результат составит 23 задачи.

Сокращение доказательств

22

Полученные на этом этапе доказательства при корректном завершении алгоритма оказывались правильными, но иногда содержали очень много лишних шагов и построений там, где этого не требовалось, поэтому авторы также разработали простой алгоритм сокращения доказательств. Для этого они использовали метод проб и ошибок, поочерёдно пробуя удалять разные дополнительные построения и проверяя уменьшенную конструкцию на решаемость с помощью символьных систем.

Результаты

23

AlphaGeometry обнаружила избыточное условие в одной из задач!

IMO 2004 P1:

"Let ABC be an acute-angled triangle with $AB \neq AC$. The circle with diameter BC intersects the sides AB and AC at M and N respectively. Denote by O the midpoint of the side BC. The bisectors of the angles $\angle BAC$ and $\angle MON$ intersect at R. Prove that the circumcircles of the triangles BMR and CNR have a common point lying on the side BC."

↓
Translate

Premise

A B C O M N R P : Points

mid_point(0, B, C) [--]

- same_line(B, M, A) [00] OM=OB [01]
- same_line(N, C, A) [02] ON=OB [03]
- $\angle BAR = \angle RAC$ [04] $\angle MOR = \angle RON$ [05]
- circle(B, M, R, P) [06] circle(C, N, R, P) [07]

Goal

same_line(P, B, C)

↓
Solve

Proof

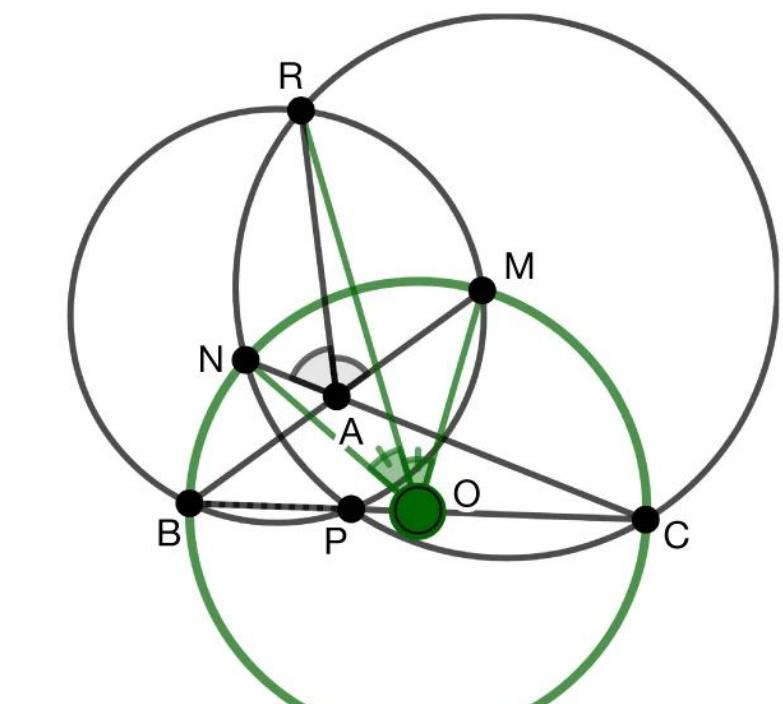
- [01][03] $\Rightarrow \angle ONM = \angle NMO$ [08]
- [01][03][05] $\Rightarrow RN = RM$ [09]
- [01][03][09] $\Rightarrow NM \perp OR$ [10]
- AUXILIARY POINT K : KM = KN**
- [01][03] $KM = KN \Rightarrow MN \perp KO$ [12]
- AUXILIARY POINT L : KL = KA, OL = OA**
- $KL = KA, OL = OA \Rightarrow KO \perp AL$ [15] $\angle AKO = \angle OKL$ [16]
- [15][12][10][16][13] $\Rightarrow RA = RL$ [17]
- $OL = OA \Rightarrow \angle OAL = \angle ALO$ [18]
- angle-chase: [12][15][08][18] $\Rightarrow \angle NOA = \angle LOM$ [19]
- [01][03] $OL = OA$ [19] $\Rightarrow AN = LM$ [21]
- [17][21][09] $\Rightarrow \angle NAR = \angle RLM$ [22]
- [02][04][00][22] $\Rightarrow \text{circle}(L, M, A, R)$ [23]
- similar $\Rightarrow \text{circle}(R, L, N, A)$ [24]
- [23][24] $\Rightarrow \angle RMA = \angle RNA$ [25]
- [06] $\Rightarrow \angle BPR = \angle BMR$ [26]
- [07] $\Rightarrow \angle NCP = \angle NRP$ [27]
- [00][02][25][26][27] $\Rightarrow PC \parallel BP$
- $\Rightarrow \text{same_line}(B, P, C)$

ABC Unused premise

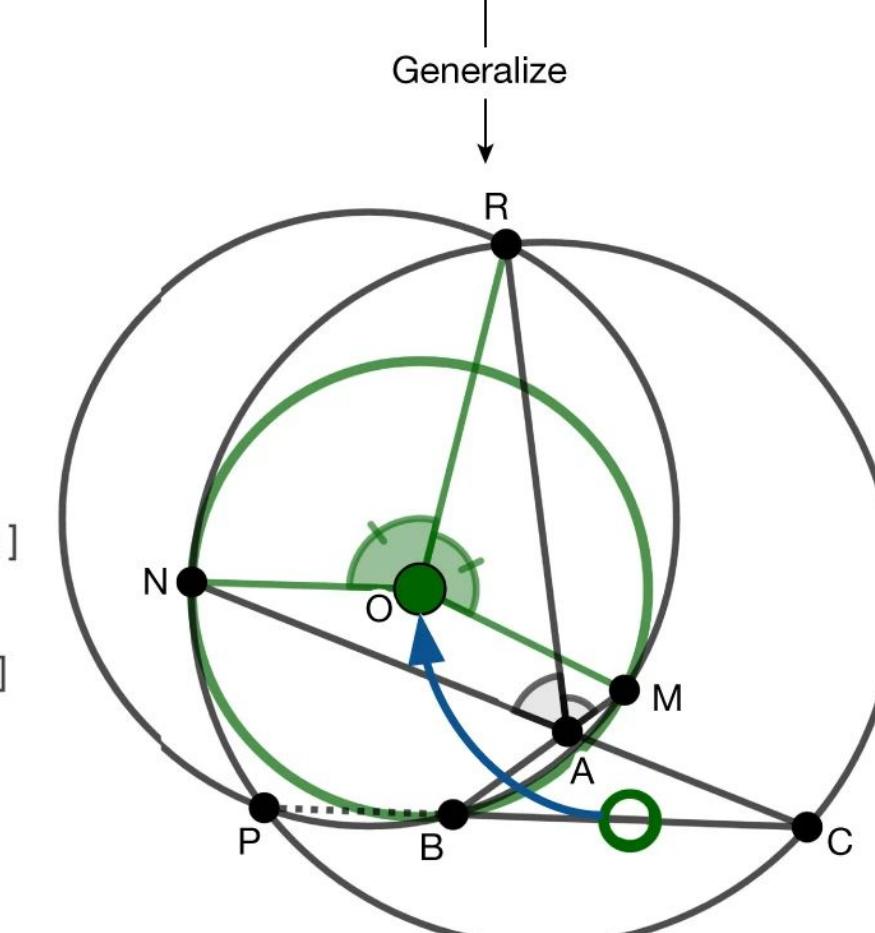
ABC Used premises

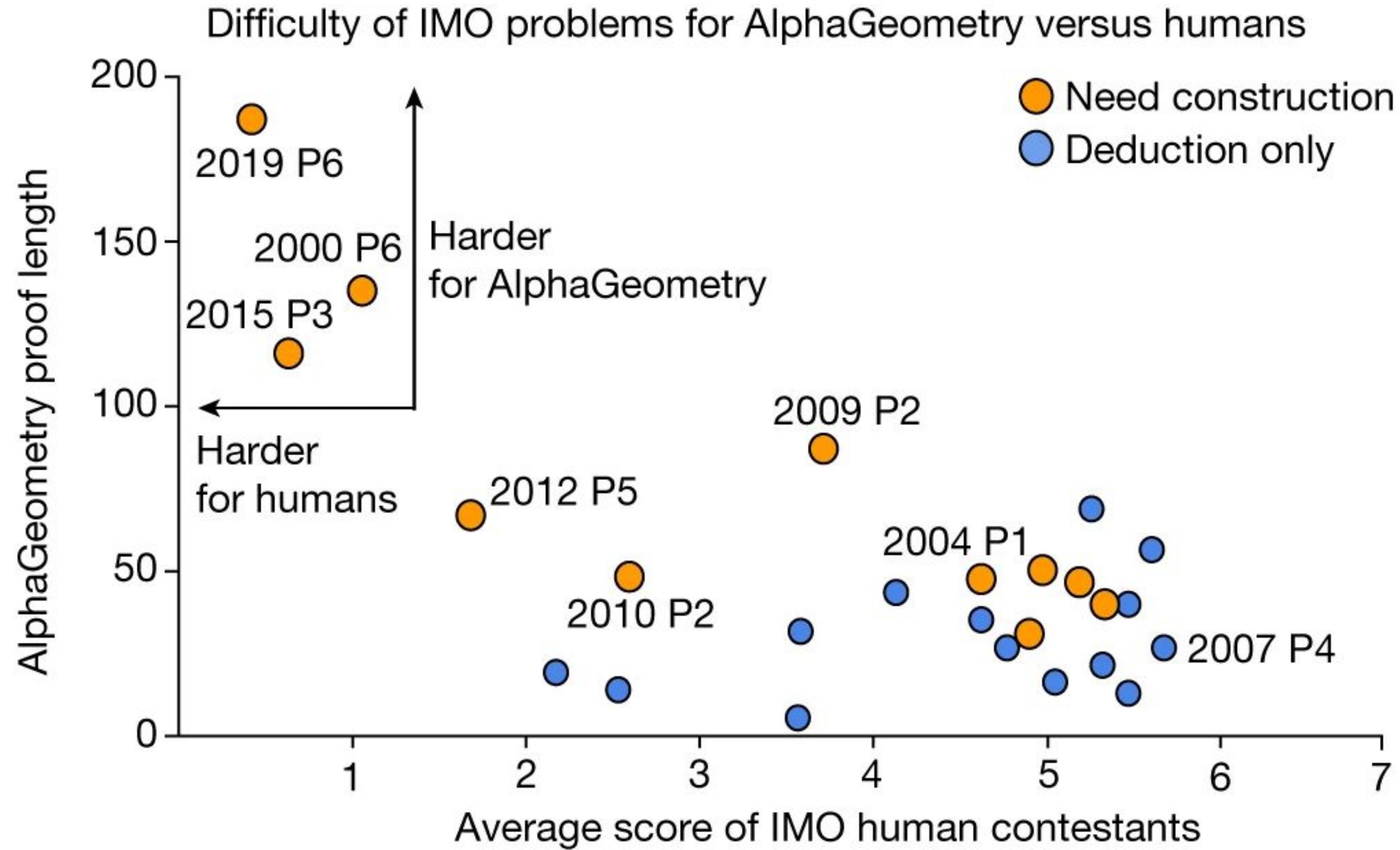
ABC Neural net output

ABC Symbolic solver output



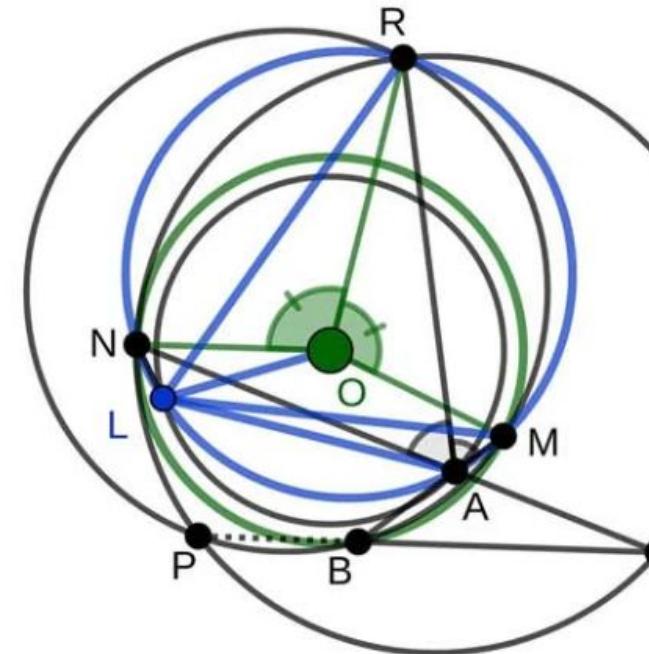
Traceback





Original problem statement:

Let ABC be an acute-angled triangle with $AB \neq AC$. Let O be any point. The circle with diameter BC intersects the sides AB and AC at M and N respectively. Denote by O the midpoint of the side BC . The bisectors of the angles $\angle BAC$ and $\angle MON$ intersect at R . Prove that the circumcircles of the triangles BMR and CNR have a common point lying on the side BC .

**Human proof:**

Let L be the reflection of A about OR

$$\begin{aligned} \angle RLM &= \angle NAR \quad (\text{LN is the reflection of AM about OR}) \\ &= \angle RAM \quad (\text{AR is bisector of } \angle NAM) \\ \Rightarrow L, M, A, R \text{ is cyclic} \end{aligned}$$

Similarly, $ANLR$ is cyclic

$$\begin{aligned} \Rightarrow RMNA \text{ is cyclic} \\ \text{So } BPR = BMR \quad (\text{BMRP is cyclic}) \\ &= AMR \\ &= ANR \quad (\text{RMNA is cyclic}) \\ &= CNR \\ &= CPR \quad (\text{CNRP is cyclic}) \\ \Rightarrow BP // CP \end{aligned}$$

$\Rightarrow B, P, \text{ and } C \text{ is collinear.}$

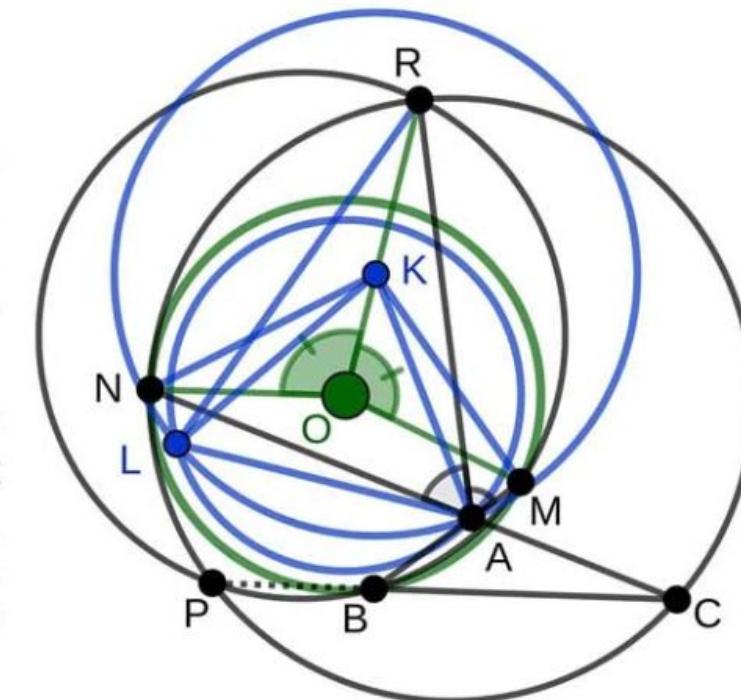
Minimal construction

} Short, high-level deductions

Readable algebraic steps

Adapted problem statement:

Let ABC be a triangle. Let O be any point. Define point M as the intersection of circle (O, B) and line AB . Define point N as the intersection of circle (O, B) and line AC . Define point R such that AR is the bisector of $\angle BAC$ and OR is the bisector of $\angle MON$. Define point O_1 as the circumcenter of triangle BRM . Define point O_2 as the circumcenter of triangle NRC . Define point P as the intersection of circles (O_1, R) and (O_2, R) . Prove that B, C, P are collinear.

**AlphaGeometry proof:**

AUXILIARY POINT K : $KM=KN$
AUXILIARY POINT L : $KL=KA$, $OL=OA$

$$\begin{aligned} [01][03] &\Rightarrow \angle ONM=\angle NMO \quad [08] \\ [01][03][05] &\Rightarrow RN=RM \quad [09] \\ [09][01][03] &\Rightarrow NM \perp OR \quad [10] \\ [01][03][KM=KN] &\Rightarrow MN \perp KO \quad [12] \\ [KL=KA][OL=OA] &\Rightarrow KO \perp AL \quad [15] \quad \angle AKO=\angle OKL \quad [16] \\ [15][12][10][16][KL=KA] &\Rightarrow RA=RL \quad [17] \\ [OL=OA] &\Rightarrow \angle OAL=\angle ALO \quad [18] \\ \text{angle-chase:} &[12][15][08][18] \Rightarrow \angle NOA=\angle LOM \quad [19] \\ [19][01][03][OL=OA] &\Rightarrow AN=LM \quad [21] \\ [17][21][09] &\Rightarrow \angle NAR=\angle RLM \quad [22] \\ [22][02][04][00] &\Rightarrow \text{circle}(L, M, A, R) \quad [23] \end{aligned}$$

similar $\Rightarrow \text{circle}(R, L, N, A) \quad [24]$

$$\begin{aligned} [23][24] &\Rightarrow \angle RMA=\angle RNA \quad [25] \\ [06] &\Rightarrow \angle BPR=\angle BMR \quad [26] \\ [07] &\Rightarrow \angle NCP=\angle NRP \quad [27] \\ \text{angle-chase:} &[25][00][02][26][27] \Rightarrow PC // BP \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{same_line}(B, P, C)$

Redundant

Verbose, low-level steps

Low readability

a.

Training data size	Solved / 30
100M	25
80M	24
60M	23
40M	23
20M	21

b.

Method	Solved / 231
Wu	173
DD	152
DD+human heuristics	160
DD+AR	198
DD+AR+human heuristics	213
AlphaGeometry	228

c.

Beam size	Solved / 30
512	25
128	25
32	24
8	21
2	16

d.

Search depth	Solved / 30
16	25
8	25
4	25
2	21
1	16

AlphaGeometry – первая программа, превзошедшая среднестатистического участника IMO в решении геометрических задач, а также показавшая лучший результат, чем мощные системы компьютерной алгебры и дедуктивные системы символьических вычислений. Авторы продемонстрировали новый нейро-символьный метод доказательства теорем, проведённый с помощью крупномасштабного изучения искусственных данных, тем самым избавившись от необходимости использования вручную аннотированных и отобранных данных. Метод обучения лингвистической модели на искусственных данных может быть переиспользован и в других областях математики, испытывающих аналогичные трудности с количеством данных.

Источники

Краткий обзор на сайте DeepMind:

<https://deepmind.google/discover/blog/alphageometry-an-olympiad-level-ai-system-for-geometry/>

Trinh, T.H., Wu, Y., Le, Q.V. et al. Solving olympiad geometry without human demonstrations.

<https://www.nature.com/articles/s41586-023-06747-5>

Архив задач IMO:

<https://www.imo-official.org/problems.aspx>