Teoria dos Jogos Cooperativos: Conceitos Fundamentais

“Se o importante é competir, o fundamental é cooperar” [Fábio Otuzi Brotto, Jogos Cooperativos, 3ª edição, 1999]

1. O que é um jogo cooperativo? Introdução aos conceitos
2. Formulação matemática de um jogo cooperativo
3. Como resolver um jogo cooperativo
    a. *Nucleolus*
    b. Valor de Shapley
4. Estudos de caso
    a. Jogo da árvore geradora mínima
    b. Jogo da árvore de Steiner
5. Conclusões
6. Referências Bibliográficas

1. O que é um jogo cooperativo? Introdução aos conceitos

Uma velha estória contava que ao morrer, um homem chegou ao inferno e viu uma mesa com um banquete servido. Sentados à mesa estavam várias pessoas que se debatiam famintas não conseguindo pegar a comida, pois seus cotovelos eram para dentro, e, portanto, suas mãos não alcançavam a própria boca. Sem conseguirem se alimentar, todos ficavam insatisfeitos e brigavam uns com os outros numa guerra eterna. Tendo a oportunidade também de conhecer o céu, o homem ao chegar lá sentiu se extremamente surpreendido. Havia também um enorme banquete servido e as pessoas também apresentavam os cotovelos para dentro, porém lá, ninguém passava fome. Num simples ato de cooperação, cada um alimentava seus vizinhos e vice-versa, ficando todos satisfeitos e vivendo em harmonia. Esta metáfora descreve uma situação na qual todos ganham juntos, ninguém ganha sozinho. Esta é uma das principais características de um jogo cooperativo. Os jogos nos quais os participantes devem cooperar entre si para alcançar um objetivo comum da melhor forma possível, são conhecidos como jogos cooperativos.

Várias situações do dia a dia podem ser abordadas como um jogo cooperativo para serem resolvidas, como o exemplo, estudado por Moreira (2001), na distribuição dos custos de construção de estruturas comuns para vários usuários de um certo tipo de serviço. Dentre estas podemos citar redes de informação, aplicação publicada por Moreira, Luna e Guedes (2002), ou qualquer outra rede de abastecimento local. Nestes exemplos, os usuários devem cooperar entre si para que a estrutura comum seja construída a um "custo mínimo". Para isso, a distribuição deste "custo mínimo" deve ser satisfatória a todos os participantes, de forma que, nenhum encontre outra forma mais barata que a estrutura de menor custo total para obter o mesmo serviço. Resolver este problema pode servir também como base para políticas públicas de taxação de serviços, ou mesmo para políticas de definição de preços de produtos ou serviços, já que o valor cobrado a cada usuário deve sempre cobrir o custo associado a ele, e o valor total deve cobrir o custo total da estrutura. Existem também exemplos em cooperativas de trabalho, ou em serviços dependentes de muitas organizações, em que surge a necessidade de distribuição também de lucros, que só puderam ser obtidos através da cooperação de todos. Esta alocação deve ser feita de uma forma que todos considerem "justa", ou que ninguém encontre outra forma melhor de adquirir o mesmo serviço/produto, deixando de participar da rede de menor custo total. A teoria dos jogos cooperativos, segundo Curiel (1997), representa uma valiosa ferramenta matemática de modelagem e solução para problemas com estas características.

Podem ser citadas interessantes antecipações da teoria dos jogos verificadas desde 500 anos A.C.. Um exemplo pode ser encontrado no livro Babilônico Talmud que contém a compilação de antigas leis e tradições e serve de base para a religião, leis criminais e civis Judaicas. Um problema discutido no Talmud é o chamado problema do contrato de casamento: um homem possui três mulheres cujos contratos de casamento especificam que, no caso de sua morte, elas recebam 100, 200 e 300 unidades monetárias respectivamente. O Talmud recomenda que, caso o homem morra e deixe apenas 100 unidades monetárias, que seja repartido igualmente entre as três. Caso ele deixe 300, que seja uma distribuição proporcional (50, 100, 150) e, caso ele deixe 200, a divisão recomendada é (50, 75, 75). Somente em 1985 foi reconhecido que cada solução destas corresponde ao *nucleolus* de um jogo cooperativo apropriadamente definido. A seguir serão vistos os conceitos envolvidos na formulação desta teoria, definidos por Owen (1982), os métodos de solução pelo *nucleolus,* discutido por Granot e Huberman (1984), e pelo valor de Shapley, proposto pelo próprio Shapley (1953), estudos para os casos de árvores geradoras mínimas, destacando as observações de Granot e Huberman (1981), e de Steiner, com observações importantes feitas por Meggido (1978) e as conclusões.

2. Formulação de um jogo cooperativo

A abordagem matemática desta teoria é dada usando dois conjuntos, o de jogadores *N*, e o das funções características associadas a cada combinação possível entre jogadores (coalizão) $c(S), \forall S \subseteq N$. Denominamos este jogo então de (*N,c*), sendo que sua função característica é dada pelos valores das estruturas de custo total mínimo para cada coalizão possível.

A todo jogo está associado um núcleo, que representa o conjunto de soluções "justas", ou seja, nas quais ninguém encontraria outra forma melhor de alcançar o mesmo objetivo. Este conjunto é definido matematicamente pelas seguintes restrições:

$$\begin{cases} \{x \in \Re^n \mid f(x,S) \le c(S), \forall S \subseteq N\} \\ \text{sendo } f(x,S) = \sum_{j \in S} x_j \text{ e } x_j \text{ o valor alocado ao jogador } j,\ \forall j \in N \\ f(x,N) = c(N) \text{ é o custo total mínimo que deve ser coberto por todos} \end{cases}$$

Por esta formulação, o valor x_j, alocado a cada jogador $j \in N$, sempre somará o custo total das possíveis coalizões das quais ele poderá fazer parte, de forma que este custo seja menor ou igual ao custo mínimo de uma estrutura formada apenas com os jogadores participantes de cada coalizão. Com isso garante se que os jogadores tenham sempre incentivos para continuar participando da solução de menor custo total para todos. Apesar de ser um bom critério de "justiça", existem situações em que o núcleo pode ser vazio [2, 12, 42], e necessitam de outras definições para o que é "justo", como a de ε - núcleo menos ponderado. Este se diferencia do primeiro pela definição da variável $\varepsilon \in \Re$, associada à maior diferença, entre todas as existentes nas restrições do núcleo, necessária para que o ε-núcleo menos ponderado nunca seja vazio. Valores negativos de ε podem ser vistos como formas de subsídios para os quais continua valendo a pena para todos, continuar a participar da solução de custo total mínimo. Matematicamente pode ser definido como:

$$\begin{cases} \{x \in \Re^n \mid f(x,S) + \varepsilon \le c(S), \forall S \neq \emptyset \text{ e } S \subset N\} \\ f(x,N) = c(N) \end{cases}$$

Um exemplo numérico será apresentado para facilitar o entendimento da definição de um jogo cooperativo. Considere que um conjunto de usuários de um certo tipo de serviço que se unem para construir uma rede que os interconecte a um fornecedor comum. Esta rede pode ser vista na Figura 2.1 na forma de um grafo onde os nós representam os pontos de demanda (nós pretos) e o de fornecimento (nó verde), e os arcos, as possíveis conexões entre os jogadores e o fornecedor valorados com os custos associados a elas.

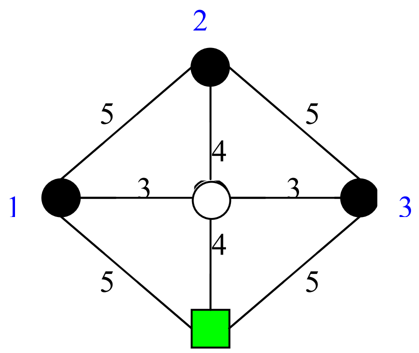

Figura 1.1-Grafo de Caminhos e Custos

O conjunto de jogadores é dado por N = {1,2,3}e o núcleo do jogo (N,c) associado a este exemplo é o conjunto de todos os vetores de alocação $x \in \Re^n$, n = $|N|$ = 3 que atendam às restrições:

$$x_1 \le 5, \text{e } x_2 \le 8,\ x_3 \le 5,$$
$$x_1 + x_2 \le 10,\ x_1 + x_3 \le 10,\ x_2 + x_3 \le 10,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 14$$

Os vetores x = [4,6,4] e x = [4.5,5,4.5] pertencem ao núcleo pois atendem todas as restrições ao mesmo tempo, já x = [6,4,4], apesar de cobrir o custo total de 14, não atende a primeira restrição. Neste caso o jogador 1 poderá preferir se ligar sozinho pois, desta forma, ele pagará menos.

Como pode ser visto, podem existir vários vetores de alocação viáveis, porém alguns podem ser mais interessantes que outros, dependendo da situação problema, sendo necessária a escolha de um vetor dentre todos considerados “justos”. Vários conceitos foram propostos para esta escolha. Dentre eles serão estudados os conceitos de *nucleolus*, abordados por Granot e Huberman (1984) e de valor de Shapley, dado por Shapley (1953), ambos conceitos com referências de aplicações, como será visto.

3. Como resolver um jogo cooperativo

"*Dois beduínos caminhavam pelo deserto quando encontraram, caído na estrada, um pobre viajante rôto e ferido. Socorreram o infeliz e dele próprio ouviram que se tratava de Salém Nasair, um dos mais ricos mercadores de Bagdá. Ao regressar, poucos dias antes, de Bássora, com grande caravana, fôra atacado por uma chusma de nômades persas do deserto. A caravana foi saqueada e quase todos os seus componentes pereceram na mãos dos beduínos. Ele – o chefe – conseguira, milagrosamente, escapar, oculto na areia, entre os cadáveres de seus escravos. E, ao concluir a narrativa de sua desgraça, perguntou-os com voz angustiosa:*

- Trazeis, por acaso, ó mulçumanos! Alguma coisa que se possa comer? Estou quase a morrer de fome!

Um deles possuía três pães e o outro cinco. O cheique sugeriu então que juntassem os pães e fizessem uma sociedade única, pois quando eles chegassem a Bagdá ele pagaria com oito moedas de ouro o pão que comesse. Assim foi feito. Ao chegar em Bagdá, ao encontrar um amigo vizir, o cheique contou o ocorrido e seu amigo sem perda de trempo mandou que pagassem aos forasteiros o combinado, e, tirando de sua bolsa oito moedas de ouro e entregou cinco a Beremiz, pelos cinco pães que este possuía, e três ao outro, pelos seus três pães. Beremiz se dirigiu ao cheique e disse:

- Perdão, ó cheique! A divisão, feita deste modo, pode ser muito simples, mas não é matematicamente certa! Se eu dei cinco pães devo receber sete moedas e meu companheiro, que deu três pães, deve receber apenas uma moeda.

Diante a surpresa de todos, Beremiz explicou cautelosamente sua afirmação:

- Quando, durante a viagem, tínhamos fome, eu tirava um pão da caixa em que estavam guardados e repartia-o em três pedaços, comendo cada um de nós um desses três pedaços. Se eu dei cinco pães, dei, é claro, quinze pedaços; se o meu companheiro deu três pães, contribuiu com nove pedaços. Houve assim um total de vinte e quatro pedaços, cabendo, portanto, oito pedaços para cada um. Dos quinze pedaços que eu dei, comi oito; dei, na realidade, sete; o meu companheiro deu, como disse, nove pedaços e comeu, também oito, logo deu apenas um. Os sete que eu dei e o restante que o Bagdali forneceu formaram os oito que couberam ao cheique. Logo, é justo que eu receba sete moedas e o meu companheiro, apenas uma.

O grão vizir, depois de fazer os maiores elogios ao Homem que Calculava, ordenou que as moedas fossem divididas segundo aquela lógica perfeita.

- Esta divisão – retorquiu o calculista – de sete moedas para mim e uma para meu amigo, conforme provei, é matematicamente certa, mas não é perfeita aos olhos de Deus!

E, tomando as moedas na mão dividiu-as em duas partes iguais. Deu ao seu amigo uma destas partes (quatro moedas), guardando, para si, as quatro restantes." [Malba Tahan, O Homem que Calculava, 22ª edição, 1965]

Esta passagem mostra como o conceito de justiça é relativo, dependendo sempre das condições do problema a ser resolvido. Por isso, várias propostas de solução de jogos cooperativos são encontradas na teoria, cada uma chegando a uma resposta que prioriza alguma característica em particular. O foco deste texto será dado às propostas do *nucleolus* e do valor de Shapley que serão definidas a seguir.

3.1. *Nucleolus*

Esta proposta usa o conceito de excesso relativo (e) a cada restrição pertencente ao núcleo do jogo. A idéia de justiça abordada pelo *nucleolus* é baseada na tentativa de deixar os mais insatisfeitos, o mais satisfeitos possível. Para isso, começa a maximizar os excessos relativos às restrições que estão com as menores folgas. Representa uma tentativa de distribuição mais igualitária, dentro do possível, do ganho obtido com a cooperação entre todos os participantes. Sua formulação matemática é dada a seguir:

Dado um jogo cooperativo (N, c) e um vetor de alocação de custos $x \in \Re^n$,
seja $e(x,S) = c(S) - f(x,S)$ o excesso de S relativo a x, $\forall S \neq \emptyset$ e $S \subset N$ e
$e(x) \in \Re^{(2n-2)}$ cujos elementos são $e(x,S)$, $\forall S \neq \emptyset$ e $S \subset N$, em ordem não decrescente,
ou seja:

$$e(x) = \begin{bmatrix} e(x,S_1) \\ \dots \\ e(x,S_{2^n}) \end{bmatrix} \text{ onde } S_1, S_2, \dots, S_{2^n} \text{ estão arranjados de forma que } e(x,S_k) \leq e(x,S_{k+1})$$

O núcleo do jogo é o conjunto de todos os vetores de alocação de custos x para os quais todas as coalizões possuem um excesso maior que zero. O *nucleolus* é o conjunto de vetores x que maximizam $e(x)$ lexicograficamente. A ordem lexicográfica pode ser definida da seguinte forma:

Dados dois vetores $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$,
dizemos que a é estritamente maior lexicograficamente que b $(a \underset{lo}{>} b)$,
se $\exists q \in \Im, 1 \leq q \leq n$, tal que:
$a_i = b_i, \forall i \geq 1$ e $i < q$
$a_q > b_q$

A relação de estritamente maior lexicograficamente introduz a relação de maior ou igual lexicograficamente $\left\langle \underset{LO}{\geq} \right\rangle$ que pode ser definida como:

$$a \underset{LO}{\geq} b \text{ se } a \underset{LO}{\rangle} b \text{ ou } a = b$$

Portanto, o *nucleolus*, sobre o conjunto de alocações de entrada $X = \{x \mid \sum_{i \in N} x_i = c(N)\}$, é o conjunto definido por:

$$\left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{c} x \in X \\ \forall\, m \in X, \text{então } e(x) \underset{LO}{\geq} e(m) \end{array} \right\}$$

Vários algoritmos foram propostos para a determinação do *nucleolus,* dentre eles destacaremos o algoritmo proposto por Granot e Huberman (1984). Basea-se na resolução de uma seqüência de problemas de programação linear onde, a idéia é inicialmente selecionar os vetores de alocação x que possuem os maiores excessos mínimos. O primeiro problema a se resolver será então:

$$LP\ (1) \begin{cases} Max \quad \varepsilon_1 \\ \sum_{i \in N} x_i = c(N) \\ \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon_1 \leq c(S) \begin{cases} \forall\, S \subset N \\ S \neq \emptyset;\ S \neq N \end{cases} \\ x_i \geq 0, \forall\, i; \quad \varepsilon_1 \geq 0 \end{cases}$$

O conjunto solução de $LP(1)$ será usado para resolver $LP(2)$. Isso é feito usando o conjunto de coalizões mais 'insatisfeito', que será denominado $OPT(1)$, como espaço de busca para o próximo problema linear a ser resolvido. Este conjunto é formado pelas restrições que alcançam igualdade no ótimo de LP(1).

Denotaremos de ε_1^*, o excesso ótimo, e x^*, a alocação que maximiza o excesso.

O segundo problema de programação linear fica então:

$$LP\ (2) \begin{cases} Max \quad \varepsilon_2 \\ \sum_{i \in N} x_i = c(N) \\ \sum_{i \in S} x_i = c(S) - \dot{\varepsilon}_1 \quad \forall\, S \in OPT(1) \\ \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon_2 \leq c(S) \begin{cases} \forall\, S \subset \{1,\ldots,n\};\ S \notin OPT\ (1) \\ S \neq \emptyset;\ S \neq N \end{cases} \\ x_i \geq 0, \forall\, i; \quad \varepsilon_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolve-se sempre um novo problema de programação linear, modelado seguindo estas regras, até que todas as restrições tenham atingido a igualdade. Este algoritmo, apesar de ser exato, cresce exponencialmente com o número de jogadores, não sendo portanto, um algoritmo eficiente. O problema de encontrar o *nucleolus* pertence à classe NP-difícil, visto que ainda não se encontrou nem um algoritmo não-determinístico que o resolva em tempo polinomial. Deste modo, para um número grande de jogadores, vários trabalhos podem ser encontrados usando técnicas de decomposição de jogos e/ou heurísticas para efetuar seu cálculo [referenciar]. Para o exemplo dado, o *nucleolus* é $x = [4.5,5,4.5]$, cujo menor excesso relativo é 0.5.

3.2. O valor de Shapley

O valor de Shapley, segundo Shapley (1953), prima por alocar a cada jogador uma média ponderada de todos os custos marginais associados a sua participação em todas as possíveis coalizões, considerando que estas se formam de maneira aleatória. Quem incrementa mais no custo total deve, segundo este critério, pagar mais (ou receber mais, no caso de distribuição de lucros). O valor alocado a cada jogador $i \in N$, x_i, é dado então por:

$$x_i = \sum_{S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S-i)]$$

Sendo $s = |S|$, $\forall\ S \neq \varnothing$ e $S \subset N$.

O número de termos desta equação também cresce exponencialmente com o número de jogadores, o que dificulta seu cálculo à medida que este cresce. Foram encontradas na literatura várias propostas de uso do valor de Shapley em situações reais entre elas, a distribuição de lucros no serviço nacional de identificação de chamadas (BINA) dos Estados Unidos, a alocação da taxa de pouso de aeronaves, a distribuição do custo de bens e serviços entre outros em um trabalho desenvolvido por Linhart, Radner, Ramakrishnan e Steinberg (1995). Mais recentemente tem sido proposto também para alocar os subsídios de cooperação entre a rede de telecomunicações internacional por Clark (1995). Para o exemplo apresentado o valor de Shapley é dado por:

$$x_1 = \frac{0!2!}{3!}(c(\{1\}) - c(\varnothing)) + \frac{1!1!}{3!}(c(\{1,2\}) - c(\{2\})) + \frac{1!1!}{3!}(c(\{1,3\}) - c(\{3\})) + \frac{2!0!}{3!}(c(\{1,2,3\}) - c(\{2,3\}))$$

$$x_1 = \frac{2}{6}(5-0) + \frac{1}{6}(10-8) + \frac{1}{6}(10-5) + \frac{2}{6}(14-10)$$

$$x_1 = \frac{25}{6} \cong 4{,}1667$$

$$x_2 = \frac{0!2!}{3!}(c(\{2\}) - c(\varnothing)) + \frac{1!1!}{3!}(c(\{1,2\}) - c(\{1\})) + \frac{1!1!}{3!}(c(\{2,3\}) - c(\{3\})) + \frac{2!0!}{3!}(c(\{1,2,3\}) - c(\{1,3\}))$$

$$x_2 = \frac{2}{6}(8-0) + \frac{1}{6}(10-5) + \frac{1}{6}(10-5) + \frac{2}{6}(14-10)$$

$$x_2 = \frac{34}{6} \cong 5{,}6667$$

$$x_3 = \frac{0!2!}{3!}(c(\{3\}) - c(\varnothing)) + \frac{1!1!}{3!}(c(\{1,3\}) - c(\{1\})) + \frac{1!1!}{3!}(c(\{2,3\}) - c(\{2\})) + \frac{2!0!}{3!}(c(\{1,2,3\}) - c(\{1,2\}))$$

$$x_3 = \frac{2}{6}(5-0) + \frac{1}{6}(10-5) + \frac{1}{6}(10-8) + \frac{2}{6}(14-10)$$

$$x_3 = \frac{25}{6} \cong 4{,}1667$$

O vetor solução de alocação é:

$$x = \left(\frac{25}{6}; \frac{34}{6}; \frac{25}{6}\right) \text{onde} \sum_{i=1}^{3} x_i = 14 = c(N)$$

$$x \cong (4{,}1667; 5{,}6667; 4{,}1667)$$

que pode ser aproximado para :

$x = (4{,}1; 5{,}7; 4{,}1)$ ou $(4{,}2; 5{,}6; 4{,}2)$ dependendo da situação que mais interessar.

Em contraste com o *nucleolus,* o jogador 2, que tem um custo maior para se conectar sozinho, é favorecido na primeira solução, que torna a distribuição mais igualitária, independente de quem custa mais ou menos, fazendo com quem pode ganhar muito contribuir com quem ganha pouco com a cooperação. Em situações reais poderão surgir as mais diversas características a serem consideradas. Cabe um bom entendimento do problema para decidir qual método de solução mais apropriado.

4. Estudos de caso

4.1. Jogos de árvores geradoras mínimas (AGM)

Quando pensamos em uma infra-estrutura comum que conecta vários usuários de um certo tipo de serviço/produto, a estrutura mais simples que vem a mente é uma rede de acesso em forma de árvore geradora mínima (AGM), cuja definição pode ser encontrada em Goldbarg e Luna (2000). Neste caso, o grafo associado só possui nós de demanda e de fornecimento, como pode ser visto um exemplo na Figura 4.1.

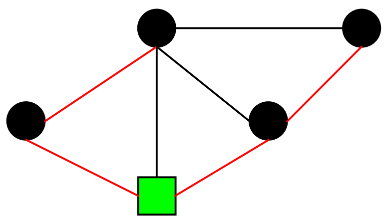

Figura 4.1 – Exemplo de rede em forma de AGM

Conside uma rede com estrutura de AGM com n nós de clientes, a forma da função característica c para um conjunto $N = \{1, ..., n\}$ de jogadores, onde $P = \{S \mid S \subseteq N\}$ é o conjunto formado por todos os subconjuntos de N, representando as possíveis articulações entre os clientes e possuindo 2^n elementos, e um conjunto E de ligações, será dada por:

$$c : P \rightarrow \Re;$$
$$c(S) = \sum_{(i,j)\in E_S} c_{ij} \; \forall S \neq \emptyset, S \subset N$$
$$\text{sendo } c(\emptyset) = 0;$$

Sendo E_S os arcos da AGM calculada quando apenas a coalizão S de jogadores for considerada. Vale a pena observar que o problema de encontrar uma árvore geradora mínima em um grafo é considerado bem resolvido, alguns, encontrados em Christofides (1975), apresentam complexidades polinomiais, ou seja, são algoritmos eficientes.

O núcleo do jogo de AGM fica definido pelas restrições que definem o conjunto de alocações de custos viáveis ou "justas" $X = (x_1, ..., x_n)$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x_1,..,x_n) \in \Re^n / \\ \sum_{i\in N} x_i = c(N); \\ \sum_{i\in S} x_i \leq c(S),\ \forall S \subset N \end{array} \right\}$$

Estudos feitos por Granot e Huberman (1981), comprovam que o núcleo deste jogo nunca será vazio. Resultado importante visto que, sempre teremos a certeza de que ao menos uma solução "justa" existe. Além disso, uma solução pertencente ao núcleo do jogo pode ser lida diretamente do grafo em questão. Essa solução foi proposta por Bird, citado por Curiel (1997), e ganha méritos pela sua simplicidade de obtenção. Segundo Bird, uma solução para o jogo de AGM se baseia na idéia de que cada jogador pague pela conexão a ele incidente. No grafo da Figura 4.1 teríamos cada nó preto pagando o custo associado ao arco vermelho que chega a ele. Esta solução, denominada solução de árvore de Bird, também é um ponto extremo do núcleo do jogo. Portanto, os jogos de árvores geradoras mínimas apresentam certas facilidades de uso, porém são poucas as situações práticas que se enquadram neste contexto.

4.2. Jogos em árvores de Steiner (AS)

Steiner, em seus estudos, considerou a possibilidade, bastante comum em situações reais, da existência de pontos de transbordo, ou esquinas, para a passagem do fluxo do recurso em questão. Estes pontos podem ser representados em grafos pelos chamados nós de Steiner (ou nós brancos), não possuindo oferta, ou demanda, associada. O exemplo usado para o cálculo do *nucleolus* e do valor de Shapley constitui-se um jogo em árvore de Steiner, sendo o nó central (branco), um nó de Steiner.

Segundo Maculan (1987), a inclusão de apenas um nó de Steiner em um grafo, torna o problema de encontrar a infra-estrutura comum que conecta todos os nós de demanda um problema NP, ou seja, não existe ainda um algoritmo determinístico polinomial que o resolva. Esta representa a primeira dificuldade com este tipo de modelo. Além disso, em contraste com os jogos de AGM, Meggido (1978) mostrou que neste caso o núcleo do jogo pode ser vazio. Este resultado limita o uso da teoria dos jogos nesta instância de problema, já que não pode ser assegurado que exista uma solução "justa" para todos os jogadores. Em conseqüência, poderá não existir uma distribuição de custo que garanta a formação e estabilidade da rede ótima, dada pela árvore de Steiner. Através do exemplo proposto por Meggido pode ser mostrada a veracidade deste resultado.

O exemplo considera uma situação no plano euclidiano, porém de fácil associação ao problema em grafos. Basta para isso considerar que existem os nós de esquina que serão utilizados na solução ótima. Considere o caso de cinco consumidores, nós pretos localizados simetricamente num plano Euclidiano em torno de um fornecedor central como na Figura 4.2. A função característica *c*, dada pelo custo da estrutura ótima para se conectar qualquer subconjunto de clientes, foi considerada proporcional à distância entre os pontos das soluções para todas as coalizões $S,\ \forall S \neq \emptyset,\ S \subset N$.

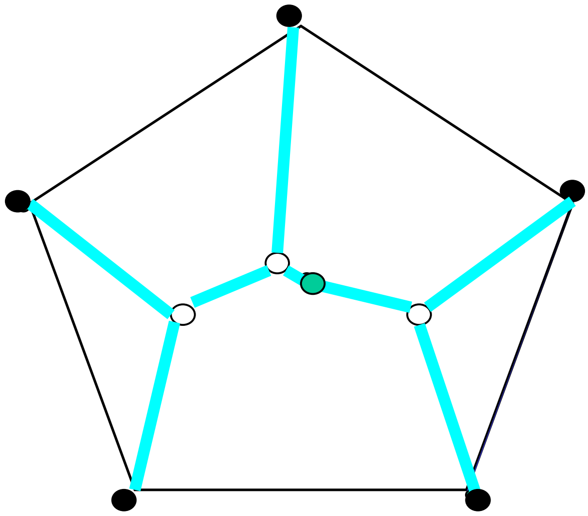

Figura 4.2 – Exemplo de jogo em AS

A solução ótima, dada pela árvore de Steiner, está destacada em azul, sendo os vértices brancos, os nós de Steiner. Notamos que a solução é dada por duas componentes, uma árvore de Steiner ligando, ao fornecedor, dois clientes adjacentes, e outra, ligando os outros três clientes adjacentes. O custo total *c*, que é o valor da função característica para a grande coalizão, é dado por:

$$c(\{1,2,3,4,5\}) = c(\{1,2\}) + c(\{3,4,5\})$$

Pela simetria dos pontos de consumidores em relação ao ponto central de abastecimento, devemos esperar que a distribuição de custos igual entre os clientes pertença ao núcleo. Porém, os cálculos mostram que, se considerarmos a distância entre consumidores adjacentes sendo 1, então os valores da função característica c para as coalizões formadas por 2 e por 3 clientes, calculado por Meggido (1978), são respectivamente: c({1, 2})=1,5542 e c({3, 4, 5})=2,3928. O custo mínimo total é dado por c({1, 2, 3, 4, 5})=3,9524, que repartido igualmente entre os clientes daria 0,79048 para cada um. Estes valores definem as seguintes restrições do núcleo:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_i = 3{,}9524 \\ \sum_{i=1}^{2} x_i \leq 1{,}5542 \\ \sum_{i=3}^{5} x_i \leq 2{,}3928 \end{cases}$$

Sendo que numeramos os nós para simplificar as equações, mas subentende-se que a coalizão {1, 2} seja formada por quaisquer dois usuários adjacentes que queiram se articular. Segue disso que na solução igualitária do custo entre clientes, a coalizão{1, 2}, está mais carregada que c({1, 2}), o que contradiz a segunda restrição implicando que esta solução não pertence ao núcleo do jogo, e portanto, este é vazio.

Como era de se esperar, à medida que tentamos aproximar os modelos da realidade, maior o grau de dificuldade encontrados. Portanto, dependendo da aproximação necessária, outras definições e teorias deverão ser utilizadas para efetuar os cálculos numéricos.

5. Conclusões

A teoria dos jogos cooperativos representa uma poderosa ferramenta matemática de modelagem e solução de problemas de distribuição de custos, lucros, e/ou recursos em situações de cooperação. Considera diferentes relações entre jogadores e também trabalha com definições maleáveis de "justiça", podendo se adequar a diversas situações de cooperação, o que representa um diferencial em relação às teorias econômicas clássicas.

Este texto trouxe uma abordagem dos conceitos fundamentais envolvidos nesta teoria, assim como exemplos simples de aplicação. O objetivo foi o de difusão da teoria de jogos cooperativos no meio científico, para que mais trabalhos, com características de jogos cooperativos, possam ser desenvolvidos usando seus conceitos.

Apesar de ser uma teoria bem fundamentada matematicamente, trabalha sempre com todos os subconjuntos possíveis do conjunto de jogadores, o que é sabido, somar um montante de 2^n para um conjunto de n jogadores. Isto a torna inviável de ser aplicada e implementada à medida que n cresce. Apenas problemas com até 25 jogadores têm sido resolvidos com sucesso, de forma exata, como pôde ser verificado em jogos de árvores geradoras mínimas por Clauss e Kleitman (1973), assim como por Moreira (2001) e em redes capacitadas, por Kapov (1993) e por Kapov e Beltran (1994), entre outros.

Daí a importância de mais pessoas trabalhando em comum-unidade, aplicando os conceitos, e desenvolvendo técnicas e heurísticas que possam viabilizar o uso desta teoria, independente do número de jogadores, já que "*Nenhum de nós é tão bom, e inteligente quanto todos nós...*" *[Marilyn Ferguson, A Conspiração Aquariana, 1980].*

6. Referências Bibliográficas

1. Brotto, F. O. (1999). *Jogos Cooperativos*. Projeto Cooperação, Santos, SP.

2. Clauss, A. & Kleitman, D. J. (1973). Cost-allocation for a Spanning Tree. *Networks,* 3, 289-304.

3. Curiel, I. (1997). *Cooperative Game Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

4. Goldbarg, M. C. & Luna, H. P. L. (2000). *Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos*. Campus, Rio de Janeiro.

5. Granot, D. & Huberman, G. (1981). Minimum Cost Spanning Tree Games. *Mathematical Programming* , 21, 1-18.

6. Granot, D. & Huberman, G. (1984). On the Core and Nucleolus of a Minimum Cost Spanning Tree Games. *Mathematical Programming* , 29, 323-347.

7. Kapov, D. S. (1993). On a Cost Allocation Problem Arising from a Capacitated Concentrator Covering Problem. *Operations Research Letters*, 13, 315-323.

8. Kapov, D. S. & Beltrán, H. F. (1994). An Efficient Characterization of Some Cost Allocation Solutions Associated with Capacitated Network Design Problems. *Telecommunication Systems* , 3, 91-107.

9. Linhart, P., Radner, R., Ramakrishnan, K. G. & Steinberg, R. (1995). The Allocation of Value for Jointly Provided Services. *Telecommunication Systems* , 4, 151-175.

10. Meggido, N. (1978). Cost allocation for Steiner Trees. *,* 8, 1-6.

11. Moreira, R. C. (2001). Estudo dos problemas de alocação de custos em redes de acesso. Tese de Mestrado, DCC-Icex/UFMG.

12. Moreira, R. C., Luna, H. P. L. & Guedes, P. G. S. (2002). Um estudo comparativo entre a teoria dos jogos cooperativos e uma heurística aplicados a um problema real de alocação de custos. *Pesquisa Operacional* , 22#1, 73-86.

13. Owen, G. (1982). *Game Theory*. Academic Press Inc..

14. Shapley, L. S. (1953). A Value for N-person Games. *In Contributions to the Theory of Games,* 2, 307-317, Princeton Univrsity Press, Princeton, NJ.

15. Tahan, M. (1965). *O Homem que Calculava*. Copyright de CONQUISTA, Rio de Janeiro.