Homework One

颜铂林
数学与应用数学　3210101536

2022 年 6 月 28 日

导言：多项试是一类比较简单的函数，在理论上，如果能用多项式近似的代替某些复杂的函数去研究他们的某些性态，无疑会带来很大的方便。而在实际计算中，由于多项式只涉及加，减，乘三种运算，且人们已设计出不少针对多项式的高效快速运算方法，因此用多项式作为复杂函数的近似去参与运算将有效的节省运算量。因此就有了 Taylor 定理的提出与应用。

1　问题描述

（带 pean 余项的 Taylor 公式）

设 f(x) 在 x_0 处有 n 阶导数，则存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任意一点 x，成立：

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x) \tag{1}$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足：

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n) \tag{2}$$

2　证明

证：考虑 $r_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$，只要证明 $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ 即可。

显然：$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r^{(n-1)}(x_0) = 0$

反复应用 L'Hospital 法则:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\cdots=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\dots2(x-x_0)}=\frac{1}{n!}\lim\limits_{x\to x_0}[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}]=\frac{1}{n!}\lim\limits_{x\to x_0}[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)]=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)]=0$

因此

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

即(2)成立，则(1)得证!