



ММО-61, III Даваа Сонгоогүй бодлогууд

Бодлого 1. a, b, c анхны тоонуудын хувьд $a^2 + b^2 = c^3$ байдаг бол $a + b + c$ нийлбэрийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: 18.

Бодлого 2. $a^3 + b^3 = c^3 + 2025$ байх бүх натурал тоон (a, b, c) гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $(a, b, c) = (28, 81, 82)$.

$$x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$$

$$(d^3 - 45)(d^3 + 45) = d^6 - 45^2 = c^3 - a^3 = (c - a)(c^2 + ca + a^2)$$

$$c - a = d^3 - 45, c^2 + ca + a^2 = d^3 + 45 \text{ гэе.}$$

$$c^2 + ca + a^2 - c + a = 90$$



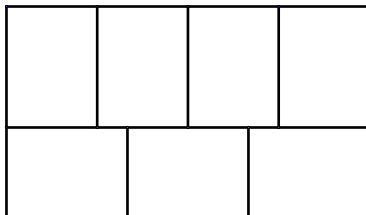
ММО-61, III Даваа С (5-6 анги)

Бодлого С1. Зөвхөн 1, 2, 5, 8 цифрүүдээр бичигддэг 4-д хуваагддаг бүх гурван оронтой тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 16.

Бодлого С2. Долоон ижил тэгш өнцөгтүүдээр 18900 нэгж квадрат талбай бүхий тэгш өнцөгт байгуулсан бол нэг жижиг тэгш өнцөгтийн периметрийг ол.



(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: 210.

Бодлого С3. Гурван оронтой, 3 гэсэн цифр агуулсан, 9 гэсэн цифр агуулаагүй хэдэн натурал тоо байгаа вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: 200.

Бодлого С4. Таван оронтой, $\overline{a2024b}$ хэлбэрийн 33-д хуваагдахгүй хэдэн тоо байгаа вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: 87.

Бодлого С5. $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 31 \times 32$ үржвэрээс хамгийн цөөндөө хэдэн үржигдэхүүн арилгавал бүхэл тооны квадрат болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: 6.

Бодлого С6. Дөрвөн оронтой тооны зүүн талд 5 гэсэн цифр залгахад үүссэн тоо нь уг дөрвөн оронтой тооны баруун талд 4 гэсэн цифр залгахад үүссэн тооноос 5 дахин их байх тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: 1020.



ММО-61, III Даваа

С (5-6 анги)

Бодлого С7. Бүх цифрүүд нь ялгаатай, аль ч дараалсан хоёр цифрээс бүтсэн тоо нь 17 эсвэл 31-д хуваагдах хамгийн их натурал тооны цифрүүдийн нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: 26.



ММО-61, III Даваа D (7-8 анги)

Бодлого D1. $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_5 - x_4 = x_6 - x_5$ байх $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ бодит тоонууд өгөгдөв. Хэрэв $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ ба $x_4 + x_5 + x_6 = 19$ бол $x_4 - x_1$ -ийг ол.
(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 4.

Бодлого D2. [5. D] $x^2y^3 = 7xy$ ба $-20 \leq x \leq 20$ ба $-20 \leq y \leq 20$ байх (x, y) эрэмбэлэгдсэн хосуудын тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 83.

Бодлого D3. [8.D] Зөв 21 өнцөгтийн оройнууд дээр оройтой адил хажуут биш гурвалжны тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 196.

Бодлого D4. $1 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 2024$ үржвэрийг $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot t$ хэлбэртэй бичсэн бол $x + y + z$ нийлбэрийн хамгийн их утгыг ол. (Энд x, y, z, t эерэг бүхэл тоонууд)

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: .

Бодлого D5. 100 хүртэлх натурал тоонууд дотор ялгаатай 3-ийн зэрэгтүүдийн нийлбэрт тавигдах хэдэн тоо байгаа вэ? Жишээлбэл $4 = 3^0 + 3^1$, $9 = 3^2$, $31 = 3^0 + 3^1 + 3^3$ тул нөхцөлийг хангана. Харин $7 = 3^0 + 3^1 + 3^1$, $18 = 3^2 + 3^2$, $32 = 3^0 + 3^0 + 3^1 + 3^3$ тул нөхцөлийг хангахгүй.

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: 23.

Бодлого D6. Адил талт ABC гурвалжны талын урт 7860-тэй тэнцүү. AB талыг A оройг цааш сунган уг цацраг дээр $AD = 2358$ байдаг D цэгийг авав. AC тал дээр E цэгийг $AE : EC = 3 : 7$ байхаар авав. E цэгээс BC тал руу буусан перпендикулярын суурийг F гэе. CF хэрчмийн уртыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. Хариу: 2751.



ММО-61, III Даваа Е (9-10 анги)

Бодлого Е1. Зөв арван есөн өнцөгт (эннеадекагон гэж нэрлэдэг) $P_1P_2 \dots P_{19}$ өгөгдөв. P_1P_5 ба P_3P_4 шулуунууд A цэгт огтлоцдог байг. $\angle P_7AP_5$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: $1170/19 = 13\pi/38$.

Бодлого Е2. [6. Е] $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_5 - x_4 = x_6 - x_5$ байх $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ бодит тоонууд өгөгдөв. Хэрэв $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ ба $x_4 + x_5 + x_6 = 32$ бол $x_2 - x_1$ -ийг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: $7/3$.

Бодлого Е3. [9. E.D] $10 + n$ ба $10n$ тоонууд бүтэн квадрат байх хамгийн бага натурал n -ийг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 90.

Бодлого Е4. 2^n болон 5^n тоонууд ижил цифрээр эхэлдэг бол n -ийн хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: .

Бодлого Е5. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(1) = 1$, $f(f(n)) = 3f(n) - 2n$, $f(n) - n \mid n - 1$ бол $f(2024)$ -ийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: .

Бодлого Е6. Хурц өнцөгт ABC гурвалжныг багтаасан тойрог, A болон B оройгоос буусан өндрүүдтэй дахин огтлолцохдоо харгалзан D , E цэгүүдэд огтлолцоно. Хэрэв $AB = DE$ бол $\angle ACB$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: 60.

Бодлого Е7. $ABCD$ $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 8$, $AD = 8\sqrt{3}$ урттай бол $AB - CD$ -ийн уртыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. Хариу: 16.



ММО-61, III Даваа F (11-12 анги)

Бодлого F9. Аравтын цифрүүдийн нийлбэр нь 9 байдаг натурал тооны дөрвөн зэрэгтийн аравтын цифрүүдийн нийлбэр хамгийн ихдээ ямар утга авах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: 2025.

Бодлого F1.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} = 5 \end{cases}$$

систем тэгшитгэлийн бод.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 49/36, 289/36.

Бодлого F2. [7.F] $p(x) = x(x+1)(x-2)^2$ байг.

$$\underbrace{p(p(p \dots (p(x)) \dots))}_{2024} = 0$$

тэгшитгэл хэдэн бүхэл шийдтэй вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

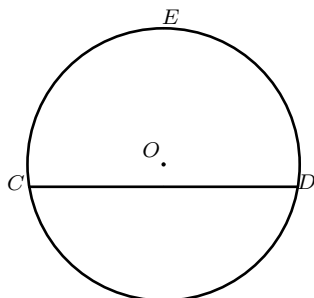
Бодолт. Хариу: 4.

Бодлого F3. [10.] $(p^3 + p^2 + 20)^{p^2 - p + 4} + 4(p^2 + p + 24)^{p^2 + p + 2}$ тоо p анхны тоонд хуваагддаг байх бүх p -ийн нийлбэрийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодолт. Хариу: 196.

Бодлого F4. Зурагт үзүүлсэн 6 нэгж радиустай дугуй нь тойргийн төвөөс 1 нэгж зайтай CD хөвчөөр хоёр хэсэгт хуваагдсан ба бага талбайтай хэсэг нь бохирдсон байв. Тэгвэл бохирдоогүй хэсэгт хоёр орой нь CED нум дээр, хоёр орой нь CD хөвч дээр оршдог байхаар хамгийн их талбайтай тэгш өнцөгтийг багтаасан бол энэ тэгш өнцөгтийн өргөн хэдэн нэгж вэ?





ММО-61, III Даваа F (11-12 анги)

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: 5.

Бодлого F5. Хэрэв $P(x)(x-1)^4 = (x^2+ax+1)^8 + (x^2+bx+c)^2$ бол $P(1)+a^2+b^2+c^2$ -ийн утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: .

Бодлого F6. a_1, a_2, \dots, a_5 тоонуудын хувьд $a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 31$ байдаг бол $\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \dots + \frac{a_5}{1+a_2+\dots+a_4}$ -ийн хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: .

Бодлого F7. $\angle A = 60^\circ$, талын урт нь 2-той байх $ABCD$ ромбын AB тал дээр P цэгийг, AD тал дээр Q цэгийг PQ шулуун $ABCD$ ромбд багтсан тойргийг шүргэдэг байхаар авав. $\triangle PCD$ -ийн талбайн бүхэл хэсгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

Бодолт. Хариу: .

Бодлого F8. $ABCD$ дөрвөн өнцөгт ω тойрогт багтаж байв. ω тойргийн C, D оройг агуулдаггүй AB нумын дундажыг F гэе. FD, AC шулуунууд P цэгт, FC, BD шулуунууд Q цэгт, FC, AB шулуунууд T цэгт тус тус огтлолцоно. Хэрэв $AP : PC = 2 : 3, BQ : QD = 1 : 4$ байсан бол $6BQ^2 - QC^2$ -ийн уртыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. Хариу: .