Е. В. Дюкова, Ю. И. Журавлёв, К. В. Рудаков, Об алгебро-логическом синтезе корректных процедур распознавания на базе элементарных алгоритмов, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1996, том 36, номер 8, 215–223

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 36, 1996 № 8

УДК 519.712

© 1996 г. Е.В. ДЮКОВА, Ю.И. ЖУРАВЛЁВ, К.В. РУДАКОВ

(*Москва*)

ОБ АЛГЕБРО-ЛОГИЧЕСКОМ СИНТЕЗЕ КОРРЕКТНЫХ ПРОЦЕДУР РАСПОЗНАВАНИЯ НА БАЗЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АЛГОРИТМОВ[1)]

Изучается проблема построения минимальных по сложности корректных алгоритмов для задач распознавания. Для ее решения предложены методы, родственные применяемым при синтезе логических процедур распознавания. Работа ориентирована на распространение сферы применения алгебраических и логических методов распознавания на задачи типа обработки изображений и сигналов.

Построение корректных (точных на материале обучения) алгоритмов методами алгебраического подхода [1]–[3] сводится в основном к решению следующих проблем:

1) выбор информационной эвристической модели алгоритмов (например, какого-либо варианта модели алгоритмов вычисления оценок);

2) выбор семейства корректирующих операций, которое в частном случае может быть и алгеброй (например, таким семейством может быть множество полиномов, монотонных булевых функций, функций с ограниченной производной и т. п.);

3) построение в рамках выбранной информационной эвристической модели набора базисных алгоритмов для имеющейся (заданной) совокупности прецедентов;

4) построение корректора (операции, результат применения которой к построенным на шаге 3) базисным алгоритмам будет являться корректным алгоритмом).

Особенностью получаемых описанным выше способом алгоритмов оказывается обычно их сложная внутренняя структура, что выражается в большом количестве машинных операций, необходимых для вычисления результата для каждого распознаваемого объекта. Указанная особенность может не учитываться при решении таких задач, как медицинская диагностика, геологическое прогнозирование и т. п., т. е. задач, в которых число применений построенных алгоритмов относительно невелико. При решении же задач типа обработки изображений или сигналов количество вычислений при однократном применении корректного алгоритма становится важным фактором, определяющим возможность практического использования полученных результатов.

Настоящая работа посвящена начальному исследованию методов построения принципиально простейших в некотором смысле корректных алгоритмов. При этом техническая основа решения базируется на методах, родственных тем, которые используются при построении логических процедур распознавания [4]–[8].

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-00457).

§1. Основные определения и постановка задачи

Задача распознавания решается для случая стандартного типа описания объектов и задания начальной информации о классах [1].

Рассматривается некоторое множество допустимых объектов M, про каждый из которых известно, что он принадлежит одному из l подмножеств (классов) $K_1,\ldots,K_l$. В качестве исходной информации I_0 задана (в виде таблицы T) выборка мощности m объектов из M (обучающая выборка). Каждая строка в T является описанием одного из объектов в некоторой системе целочисленных признаков $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Про каждый объект из обучающей выборки известно, какому из классов $K_1,\ldots K_l$ он принадлежит.

Задача распознавания состоит в построении алгоритма, вычисляющего по информации I_0 и описанию S в системе признаков $\{x_1,\ldots,x_n\}$ произвольного объекта из M (про который, вообще говоря, неизвестно, какому из классов $K_1,\ldots K_l$ он принадлежит) значений свойств $S \in K$, $S \notin K$, где $K \in \{K_1,\ldots,K_l\}$.

Зададим пару $(w, \bar{a})$, где $w \subseteq \{1, 2,\ldots,n\}$, $w = \{j_1,\ldots j_r\}$, $j_1 <\ldots< j_r$, $\bar{a}$ – упорядоченный набор целых чисел $\{a_1,\ldots,a_r\}$. Элементарным распознающим алгоритмом (э.р.а.) называется предикат $P_{(w,\bar{a})}(S)$, определенный на описаниях S объектов из M в системе признаков $\{x_1,\ldots,x_n\}$ и принимающий значение 1 в том и только том случае, если для строки $S = (b_1,\ldots,b_n)$ имеет место $a_{j_i} = b_i$ при $i = 1, 2,\ldots,r$.

Набор э.р.а.

$$\text{(1.1)} \qquad \mathfrak{U} = \{P^{(1)}(S),\ldots,P^{(q)}(S)\}$$

назовем (монотонным) корректным набором э.р.а. для класса K, если существует (монотонная) функция алгебры логики F_K от q переменных такая, что $F_K(P^{(1)}(S'),\ldots$ $\ldots,P^{(q)}(S')) = 1$ для любой строки S' таблицы T, описывающей объект из класа K, и $F_K(P^{(1)}(S''),\ldots,P^{(q)}(S'')) = 0$ для любой строки S'', описывающей объект из любого другого класса. Функцию F_K будем называть (монотонным) корректором для класса K.

Очевидным является следующее утверждение. Набор э.р.а. вида (1.1) является монотонным корректным набором для класса K тогда и только тогда, когда для любых двух строк S' и S'' таблицы T таких, что $S' \in K, S'' \overline{\in} K$, можно указать i в $\{1, 2,\ldots, q\}$ такое, что

$$\text{(1.2)} \qquad P^{(i)}(S') = 1 \text{ и } P^{(i)}(S'') = 0.$$

Требование монотонности можно убрать, если в предыдущем утверждении условие (1.2) заменить условием

$$P^{(i)}(S') \neq P^{(i)}(S'').$$

Пусть $\mathfrak{U}$ – корректный набор э.р.а. для класса K. Набор $\mathfrak{U}$ назовем тупиковым, если из условия $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ следует, что набор э.р.а. $\mathfrak{U}'$ не является корректным для K. Набор $\mathfrak{U}$ назовем минимальным, если не существует корректного набора э.р.а. для K меньшей длины.

Пусть L – произвольная булева матрица. Набор столбцов H матрицы L назовем покрытием, если каждая строка матрицы L в пересечении хотя бы с одним из столбцов, входящих в H, дает 1 (т. е. в подматрице матрицы L, образованной столбцами из H, не должно быть строки вида $(0,\ldots,0)$). Покрытие назовем тупиковым, если никакое его собственное подмножество не является покрытием. Свойство тупиковости означает, что в подматрице матрицы L, образованной столбцами набора H, должна быть каждая из строк (1, 0, 0,...,0, 0), (0, 1, 0,...,0, 0),..., (0, 0, 0,...,0, 1), т. е. набор столбцов H должен содержать подматрицу, в каждой строке и в каждом столбце которой в точности один элемент равен 1. Такую подматрицу назовем единичной. Покрытие, содержащее минимальное число столбцов, назовем минимальным.

Покажем, что задачи построения тупикового и минимального корректора сводятся, соответственно, к построению тупикового и минимального покрытия для булевой матрицы, специальным образом построенной по таблице T.

Случай 1 (построение монотонных корректных наборов э.р.а.). Обозначим через W совокупность всевозможных подмножеств множества $\{1, 2,\dots,n\}$. Для каждого w из W, $w = \{j_1,\dots j_r\}$, выпишем всевозможные э.р.а. для класса K, порождаемые столбцами таблицы T с номерами $j_1,\dots,j_r$, т. е. все различные подописания объектов из K, порождаемые указанными столбцами. Пусть это будет набор э.р.а. $\mathfrak{U}_w$. Рассмотрим множество $\mathfrak{U}_K$ всех э.р.а. для K:

$$\mathfrak{U}_K = \bigcup_{w\in W} \mathfrak{U}_w.$$

Пусть $\mathfrak{U}_K = \{P^{(1)}(S),\dots,P^{(n')}(S)\}$. Паре строк S' и S'' таблицы T поставим в соответствие строку $\mathfrak{B}(S', S'') = (c_1,\dots,c_{n'})$, в которой

$$c_j = \begin{cases} 1, \text{ если } P^{(j)}(S') = 1 \text{ и } P^{(j)}(S'') = 0, \\ 0 \text{ в противном случае}, \ j = 1, 2,\dots n'. \end{cases}$$

Составим булеву матрицу L_K из всех строк $\mathfrak{B}(S', S'')$ таких, что $S' \in K$, $S'' \overline{\in} K$.По построению каждому столбцу в L_K соответствует некоторый э.р.а. для K.

Нетрудно видеть, что набор э.р.а. является монотонным тупиковым (минимальным) корректным набором для K тогда и только тогда, когда соответствующий набор столбцов матрицы L_K является тупиковым (минимальным) покрытием.

Случай 2 (построение немонотонных корректных наборов э.р.а.). В этом случае множество всех э.р.а. $\mathfrak{U}'_K$ образуется как подописаниями объектов из K, так и подописаниями объектов из других классов. Пусть $\mathfrak{U}'_K = \{P^{(1)}(S),\dots,P^{(n'')}(S)\}$. Паре строк S' и S'' таблицы T поставим в соответствие строку $\mathfrak{D}(S', S'') = (d_1,\dots,d_{n''})$, в которой

$$d_j = \begin{cases} 1, \text{ если } P^{(j)}(S') \neq P^{(j)}(S''), \\ 0 \text{ в противном случае}, \ j = 1, 2,\dots, n''. \end{cases}$$

Составим булеву матрицу из всех строк $\mathfrak{D}(S', S'')$ таких, что $S' \in K$, $S'' \overline{\in} K$. Дальнейшие рассуждения те же, что и в случае 1. Ниже будут рассматриваться только монотонные корректоры.

Как правило, даже для задач небольшой размерности число э.р.а. велико и процедура построения минимального корректного набора с использованием матрицы L_K требует значительных вычислительных ресурсов, в связи с чем встает вопрос о разработке эффективных методов решения задач алгебро-логической коррекции э.р.а. как в общем случае, так и в следующих практически важных случаях:

1) э.р.а. порождается парой (j, a), где j – элемент множества $\{1, 2,\dots,n\}$, a – одно из допустимых значений признака с номером j (заметим, что если $w = \{j_1,\dots,j_r\}$, $\bar{a} = \{a_1,\dots,a_r\}$, то $P_{(w,\bar{a})}(S) = P_{(j_1,a_1)}(S) \ \& \ \dots \ \& \ P_{(j_r,a_r)}(S)$);

2) в условиях задачи 1) э.р.а. определяется как предикат $P_{(w,a)}(S)$, который принимает

значение 1 в том и только том случае, если для объекта S значение признака с номером j не меньше a.

В каждом из перечисленных случаев требуется разработка не только точных, но и приближенных методов решения задачи, что может оказаться необходимым для увеличения скорости ее решения.

Обычно для точного построения минимального покрытия булевой матрицы используются процедуры, основанные на переборе ее покрытий.

Поиск минимального покрытия может быть осуществлен и на основе перебора тупиковых покрытий.

К настоящему моменту разработан ряд точных и приближенных методов построения множества всех тупиковых покрытий булевой матрицы. Эти алгоритмы используются в логических процедурах распознавания, таких как тестовые процедуры, процедуры голосования по тупиковым представительным наборам и ряд других. Особый интерес представляет алгоритм из [7], [8], решающий задачу построения множества всех тупиковых покрытий булевой матрицы почти всегда с асимптотически минимальной сложностью. Данный алгоритм основан на поиске таких наборов столбцов, для которых выполняется свойство тупиковости (фактически строятся все единичные подматрицы заданной булевой матрицы). В [7], [8] указаны условия, при которых почти всегда число единичных подматриц асимптотически совпадает с числом тупиковых покрытий и, следовательно, набор столбцов, содержащий единичную подматрицу, является почти всегда покрытием. С помощью указанного алгоритма достаточно эффективно решены задачи детерминированного (точного) и стохастического (приближенного) построения тупиковых тестов и тупиковых представительных наборов. Построены соответствующие процедуры распознавания. Реализации этих процедур на ЭВМ используются в ряде пакетов прикладных программ, разработанных в ВЦ РАН.

§ 2. Построение монотонного корректора в случае бинарной информации

Пусть T – бинарная таблица и э.р.а. порождается парой (j, a), где j – элемент множества $\{1, 2,\dots,n\}$, a – одно из допустимых значений признака x_j.

Будем считать, что первые m_1 строк таблицы T являются описаниями объектов из класса K, а последующие $m_2 = m - m_1$ строк описывают объекты из других классов. Обозначим через T_K и $T_{\overline{K}}$ подтаблицы таблицы T, образованные, соответственно, первыми m_1 и последующими m_2 строками.

Пусть $i \in \{1, 2,\dots,m_1\}$, S_i – строка таблицы T с номером i. Через L_K^i будем обозначать подматрицу матрицы L_K, образованную строками вида $\mathfrak{B}(S_i, S)$, где $S \in K$.

Нетрудно видеть, что если j-й элемент строки S_i равен 0, то в L_K^i столбец, соответствующий э.р.а. $(j, 0)$, совпадает с j-м столбцом таблицы $T_{\overline{K}}$, а столбец, соответствующий э.р.а. $(j, 1)$, является нулевым. И, наоборот, если j-й элемент строки S_i равен 1, то в L_K^i столбец, соответствующий э.р.а. $(j, 0)$, является нулевым, а столбец, соответствующий э.р.а. $(j, 1)$, противоположен j-му столбцу таблицы $T_{\overline{K}}$.

Будем говорить, что э.р.а. (j, a) является пустым для S_i, если j-й элемент строки S_i не равен a.

Удалим из L_K^i все нулевые столбцы, соответствующие пустым э.р.а. Получим булеву матрицу M_K^i размера $m_2 \times n$.

Пусть $S_i = (a_{i1},\ldots,a_{in})$. Тогда, очевидно, матрица M_K^i состоит из всех строк вида $(a_{i1} \oplus b_1,\ldots,a_{in} \oplus b_n)$, где $(b_1,\ldots,b_n)$ –строка таблицы $T_{\overline{K}}$, а $\oplus$ означает сложение по $\mathrm{mod}\,2$. По построению каждому единичному элементу e в M_K^i вида $a_{ij} \oplus b_j$ соответствует э.р.а. для класса K вида (j, a_{ij}), который будем обозначать через $R(e)$.

В каждой из подматриц $L_K^1,\ldots,L_K^{m_1}$ матрицы L_K удалим все нулевые столбцы, соответствующие пустым э.р.а. В результате матрица L_K преобразуется в матрицу M_K размера $m_1 m_2 \times n$.

В данном случае (см. § 1) задача построения множества $\mathfrak{M}(K)$ всех монотонных тупиковых корректных наборов э.р.а. для класса K сводится к построению множества всех тупиковых покрытий для матрицы L_K размера $m_1 m_2 \times 2n$. Покажем, что последнюю задачу можно свести к поиску специальных наборов из единичных элементов построенной выше матрицы M_K. Указанная сводимость задач позволяет значительно уменьшить объем вычислений, так как число столбцов в матрице M_K в 2 раза меньше числа столбцов в матрице L_K. Решение проводится на основе модификации алгоритма построения множества всех тупиковых покрытий из [7], [8].

Два единичных элемента матрицы L_K, расположенные, соответственно, в строках с номерами i_1 и i_2 и столбцах с номерами j_1 и j_2, назовем совместимыми, если $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ и подматрица матрицы L_K, образованная строками с номерами i_1 и i_2 и столбцами с номерами j_1 и j_2 является единичной, т. е. состоит из двух строк (1,0) и (0,1). Набор E из r единичных элементов матрицы L_K назовем совместимым, если имеет место один их следующих двух случаев: 1) $r = 1$; 2) $r > 1$ и любые два элемента в E совместимы.

Нетрудно видеть, что набор H из r столбцов матрицы L_K является тупиковым покрытием тогда и только тогда, когда, во-первых, в L_K можно указать r совместимых элементов, расположенных в столбцах набора H, и, во-вторых, H является покрытием, т. е. каждая строка матрицы L_K в пересечении хотя бы с одним из столбцов набора H дает 1.

Пусть $i \in \{1, 2,\ldots,m_1 m_2\}$. Тогда число i можно однозначно представить в виде

(2.1) $$i = (t_1 - 1)m_2 + t_2,\ \ t_1 \in \{1,2,\ldots,m_1\},\ \ t_2 \in \{1,2,\ldots,m_2\}.$$

Числа t_1 и t_2 в представлении (2.1) числа i будем обозначать, соответственно, через $x(i)$ и $y(i)$.

Два элемента матрицы M_K, расположенные в одном столбце и в строках с номерами i_1 и i_2, назовем эквивалентными, если $x(i_1) \neq x(i_2)$, $y(i_1) = y(i_2)$, т. е. $i_1 = i_2$ $(\mathrm{mod}\, m_2)$.

Пусть единичные элементы e_1 и e_2 матрицы M_K расположены, соответственно, в подматрицах M_K^p и M_K^q $(p, q \in \{1,2,\ldots,m_1\})$ – в строках с номерами i_1 и i_2 и в столбцах с номерами j_1 и j_2. Элементы e_1 и e_2 назовем сходными, если выполнено одно из следующих условий:

1) e_1 и e_2 совместимы;

2) e_1 и e_2 не совместимы, $p \neq q$ и выполнено одно из условий:

а) e_1 имеет нулевой эквивалентный элемент в M_K^q, а e_2 имеет нулевой эквивалентный элемент в M_K^p (возможно, что $j_1 = j_2$);

б) $j_1 \neq j_2$ и либо на пересечении строки с номером i_2 и столбца с номером j_1 стоит 0 и e_2 имеет нулевой эквивалентный элемент в M_K^p, либо, наоборот, на пересечении строки с номером i_1 и столбца с номером j_2 стоит 0 и e_1 имеет нулевой эквивалентный элемент в M_K^q.

Набор Q из r единичных элементов матрицы M_K назовем сходным, если имеет место один из следующих двух случаев: 1) $r = 1$; 2) $r > 1$ и любые два элемента в Q сходны.

Совокупность всех сходных наборов из единичных элементов в M_K обозначим через S_K.

Через $\Omega(Q)$, $Q \in S_K$, будем обозначать набор тех столбцов матрицы M_K, в которых расположены элементы множества Q.

Далее покажем, что задача построения множества $\mathfrak{M}(K)$ всех тупиковых покрытий для матрицы L_K сводится к задаче построения множества всех таких ноборов Q из S_K, для которых набор столбцов $\Omega(Q)$ является покрытием.

Описанное выше преобразование матрицы L_K в матрицу M_K очевидным образом определяет взаимно однозначное соответствие между единичными элементами этих матриц, при этом каждому единичному элементу e матрицы L_K соответствует единичный элемент $\Pi(e)$ матрицы M_K.

Т е о р е м а 1. *Два единичных элемента e_1 и e_2 совместимы в L_K тогда и только тогда, когда соответствующие им единичные элементы $\Pi(e_1)$ и $\Pi(e_2)$ в M_K сходны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в матрице L_K единичный элемент e_1 расположен в подматрице L_K^p в строке с номером i_1 и в столбце, соответствующем э.р.а. (j_1, a_1), а единичный элемент e_2 – в подматрице L_K^q в строке с номером i_2 и в столбце, соответствующем э.р.а. (j_2, a_2).

I. Пусть элементы e_1 и e_2 совместимы в L_K. Рассмотрим возможные случаи.

Если $p = q$, то, очевидно, $\Pi(e_1)$ и $\Pi(e_2)$ совместимы в M_K, а следовательно, и сходны в M_K.

Пусть $p \neq q$ и строки S_p и S_q таблицы T имеют, соответственно, вид $(a_{p1},\dots,a_{pn})$ и $(a_{q1},\dots,a_{qn})$. Тогда $a_{pj_1} = a_1$, $a_{qj_2} = a_2$.

Предположим, что имеют место равенства

(2.2) $$a_{qj_1} = a_1, \; a_{pj_2} = a_2.$$

Тогда столбцы, соответствующие э.р.а. (j_1, a_1) и (j_2, a_2), не являются нулевыми ни в L_K^p, ни в L_K^q, т. е. $\Pi(e_1)$ и $\Pi(e_2)$ совместимы в M_K.

Если же имеет место только одно из равенств (2.2), например первое, то из $a_{pj_1} = a_{qj_1} = a_1$ следует, что в L_K^p столбец, соответствующий э.р.а. (j_1, a_1), не является нулевым и совпадает с таким же столбцом в L_K^q. Из $a_{qj_2} = a_2$, $a_{pj_2} = \bar{a}_2$ следует, что в L_K^q столбец, соответствующий э.р.а. (j_2, a_2) противоположен столбцу в L_K^q, соответствующему э.р.а. $(j_2, \bar{a}_2)$. Отсюда получаем, что $\Pi(e_1)$ и $\Pi(e_2)$ сходны в M_K согласно п. б) определения сходности двух элементов.

Наконец, если не выполнены оба равенства (2.2), то из равенств

$$a_{pj_1} = a_1, \; a_{qj_1} = \bar{a}_1, \; a_{pj_2} = \bar{a}_2, \; a_{qj_2} = a_2$$

следует, что столбец в L_K^p, соответствующий э.р.а. (j_1, a_1), противоположен столбцу в L_K^q, соответствующему э.р.а. $(j_1, \bar{a}_1)$. Аналогично, столбец в L_K^q, соответствующий э.р.а. (j_2, a_2), противоположен столбцу в L_K^p, соответствующему э.р.а. $(j_2, \bar{a}_2)$. Из сказанного следует, что $\Pi(e_1)$ и $\Pi(e_2)$ сходны в M_K согласно п. а) определения сходности двух элементов.

II. Предположим, что элементы e_1 и e_2 не являются совместимыми в L_K.

Обозначим через e_3 элемент подматрицы L_K^q, расположенный в строке с номером i_2 и в столбце, соответствующем э.р.а. (j_1, a_1), через e_4 – элемент подматрицы L_K^p, расположенный в строке с номером i_1 и в столбце, соответствующем э.р.а. (j_2, a_2). Так как e_1 и e_2 несовместимы в L_K, то имеет место хотя бы одно их двух равенств: $e_3 = 1$, $e_4 = 1$. Пусть, например, $e_3 = 1$. Тогда столбцы, соответствующие в L_K^p и L_K^q э.р.а. (j_1, a_1), совпадают и, значит, в M_K элемент, эквивалентный $\Pi(e_1)$, равен 1 и элемент $\Pi(e_3)$ равен 1. Отсюда следует, что $\Pi(e_1)$ и $\Pi(e_2)$ не являются сходными в M_K. Теорема доказана.

Пусть Q – набор элементов матрицы M_K, $Q = \{e_1,\ldots,e_r\}$. Из теоремы 1 следует, что набор э.р.а. $\{R(e_1),\ldots,R(e_r)\}$ принадлежит $\mathfrak{M}(K)$ тогда и только тогда, когда, во-первых, $Q \in S_K$ и, во-вторых, набор столбцов $\Omega(Q)$ является покрытием для M_K.

Перейдем к описанию алгоритма $\mathfrak{A}$ построения множества $\mathfrak{M}(K)$ на основе нахождения наборов из S_K.

Совокупность всех единичных элементов в M_K обозначим через E_K.

Элементу e матрицы M_K, расположенному в строке с номером i и в столбце с номером j, присвоим номер $N[e] = (j-1)m_1m_2 + i$. Элементы с наименьшим и наибольшим номерами в произвольном множестве E, $E \subseteq E_K$, будем обозначать, соответственно, $q_1(E)$ и $q_2(E)$.

На множестве S_K введем линейный порядок. Для каждого набора Q, $Q \in S_K$ и $Q \neq$ $\neq \{q_2(E_K)\}$, определим следующий за ним набор $\square Q$ из S_K.

Предположим, что $Q = \{e_1,\ldots,e_r\}$ и $N[e_{u+1}] > N[e_u]$ при $u = 1,2,\ldots,r-1$.

Пусть $u \in \{1,2,\ldots,r\}$. Обозначим через E_u совокупность всех элементов в E_K, номера которых больше $N[e_u]$. Выделим в E_u подмножество G_u элементов, сходных с каждым из элементов $e_1,\ldots,e_u$.

Перечислим возможные случаи и в каждом из них укажем $\square Q$:

1) $G_r \neq \varnothing$, тогда $\square Q = Q \cup \{q_1(G_r)\}$;

2) $G_r = \varnothing$;

а) $r = 1$, тогда $\square Q = \{q_1(E_1)\}$;

б) $r > 1$ и $G_{r-1} \cap E_r \neq \varnothing$, тогда $\square Q = (Q \setminus \{e_r\}) \cup \{q_1(G_{r-1} \cap E_r)\}$;

в) $r > 1$ и $G_{r-1} \cap E_r = \varnothing$, тогда если $r = 2$, то $\square Q = \{q_1(E_1)\}$, и если $r > 2$, то $\square Q =$ $= (Q \setminus \{e_{r-1}, e_r\}) \cup \{q_1(G_{r-2} \cap E_{r-1})\}$.

Заметим, что $G = G_{r-2} \cap E_{r-1} \neq \varnothing$ при $r > 2$, так как $e_r \in G$.

Для принадлежности $\{R(e_1),\ldots,R(e_r)\}$ к $\mathfrak{M}(K)$ необходимо, очевидно, выполнение условия $G_r = \varnothing$. Достаточными условиями являются следующие: $G_r = \varnothing$ и набор столбцов $\Omega(Q)$ матрицы M_K является покрытием.

Набор $\{e_1, \ldots,e_r\}$назовем верхним, если не существует набора $\{e'_1,\ldots,e'_r\}$, принадлежащего S_K, со следующими свойствами:

1) элемент e'_u расположен в том же столбце матрицы M_K, что и элемент e_u, $u =$ $= 1,2,\ldots,r$;

2) хотя бы для одного u из $\{1,2,\ldots,r\}$ имеет место $N[e'_u] < N[e_u]$, $R(e'_u) = R(e_u)$ (условие $R(e'_u) = R(e_u)$ означает, что либо элементы e'_u и e_u принадлежат одной и той же подматрице $M_K^{p_u}$, $p_u \in \{1,2,\ldots,m_1\}$, либо эти элементы эквивалентны в M_K).

Обозначим через S_K^* множество всех верхних наборов в S_K.

Алгоритм $\mathfrak{A}$ строит множество $\mathfrak{M}(K)$ за $|S_K|$ шагов. На шаге i алгоритм $\mathfrak{A}$ выбирает в M_K сходный набор элементов $\mathfrak{A}[i, M_K] = \{e_1,\ldots,e_r\}$. Для того чтобы исключить повторения проверяется при $i \geqslant 2$ и $G_r = \varnothing$, условие $\mathfrak{A}[i, M_K] \in S_K^*$. Если это условие выполнено и набор столбцов $\Omega(Q)$ матрицы M_K является покрытием, то набор э.р.а. $\{R(e_1),\ldots,R(e_r)\}$ заносится в искомое множество тупиковых корректных наборов э.р.а. В противном случае множество тупиковых корректных наборов, построенное на предыдущих шагах, не пополняется.

Выбор сходных наборов происходит по следующим правилам:

1) $\mathfrak{A}[1, M_K] = \{q_1(E_K)\}$;

2) если $\mathfrak{A}[i, M_K] \neq \{q_2(E_K)\}$, то $\mathfrak{A}[i+1, M_K] = \square\, \mathfrak{A}[i, M_K]$;

3) если $\mathfrak{A}[i, M_K] = \{q_2(E_K)\}$, то алгоритм $\mathfrak{A}$ заканчивает работу.

Пусть $Q \in S_K$. Рассмотрим подматрицу $M(Q)$, образованную теми строками и теми столбцами, в которых расположены элементы множества Q. Нетрудно видеть, что в каждой строке подматрицы $M(Q)$ в точности один элемент равен 1 и в каждом столбце максимум два элемента равны 1. Заметим, что если в некотором столбце указанной подматрицы два единичных элемента и они принадлежат M_K^i и M_K^j, то $i \neq j$. Подматрицу $M(Q)$ назовем квазиединичной.

Поиск квазиединичных подматриц матрицы M_K может быть осуществлен на основе поиска ее единичных подматриц. С этой целью напрямую может быть применен алгоритм из [7], [8].

Для сокращения перебора при построении тупиковых покрытий в булевой матрице обычно удаляют так называемые "охватывающие" строки.

Пусть две строки булевой матрицы L имеют вид $(b_1,\ldots,b_n)$ и $(c_1,\ldots c_n)$, где $c_j \geqslant b_j$ при $j = 1,2,\ldots,n$. Будем говорить, что вторая строка охватывает первую и обозначать это через $(b_1,\ldots,b_n) \prec (c_1,\ldots,c_n)$, если $c_j > b_j$ хотя бы для одного j из $\{1,2,\ldots,n\}$. При удалении охватывающих строк из L множество ее покрытий не меняется.

Предположим, что в матрице M_K строки с номерами i_1 и i_2 в пересечении со столбцом с номером j дают 1. Обозначим через Λ_{i_1} и Λ_{i_2} строки матрицы L_K, имеющие, соответственно, номера i_1 и i_2. Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Включение $\Lambda_{i_1} \prec \Lambda_{i_2}$ имеет место в том и только том случае, если выполнены следующие два условия*:

1) *в матрице M_K строка с номером i_2 охватывает строку с номером i_1*;

2) *в матрице T_K строки с номерами $x(i_1)$ и $x(i_2)$ в пересечении со столбцом с номером j совпадают.*

Доказательство. Пусть в T_K строки с номерами $x(i_1)$ и $x(i_2)$ в пересечении со столбцом с номером j дают, соответственно, a и a'.

Если $a = a'$, то строки S' и S'' матрицы T_K, имеющие, соответственно, номера $y(i_1)$ и $y(i_2)$, в пересечении со столбцом с номером j дают $\bar{a}$ и в матрице L_K стобец, соответствующий э.р.а. (j, a), в пересечении со строками Λ_{i_1} и Λ_{i_2} дает 1.

Отсюда следует достаточность сформулированных в теореме условий.

Необходимость условия 1) очевидна. Нетрудно убедиться и в необходимости условия 2). Действительно, если $a' = \bar{a}$, то строки S' и S'' матрицы T_K в пересечении со столбцом с номером j дают, соответственно, $\bar{a}$ и a. Следовательно, в матрице L_K столбец, соответствующий э.р.а. (j, a), в пересечении со строками Λ_{i_1} и Λ_{i_2} дает, соответственно, 1 и 0 и, наоборот, столбец, соответствующий э.р.а $(j, \bar{a})$, в пересечении со строками Λ_{i_1} и Λ_{i_2} дает, соответственно, 0 и 1. Отсюда следует, что в L_K строка Λ_{i_2} не охватывает строку Λ_{i_1}. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть в матрице M_K строка с номером i_2 охватывает строку с номером i_1. Тогда если $x(i_1) = x(i_2)$, то $\Lambda_{i_1} \prec \Lambda_{i_2}$.

Следствие 2. Пусть в матрице M_K строка с номером i_2 охватывает строку с номером i_1. Тогда если $x(i_1) \neq x(i_2)$ и $y(i_1) = y(i_2)$, т. е. строки с номерами i_1 и i_2 в матрице M_K являются эквивалентными, то $\Lambda_{i_1} \prec \Lambda_{i_2}$.

Отметим, что предлагаемый подход к построению множества всех тупиковых корректных наборов э.р.а. применим и в более общем случае, когда информация является целочисленной. В данном случае мы будем иметь еще более существенное сокращение перебора.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев Ю.И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. М.: Наука, 1978. Вып. 33. С. 5–68.
2. *Журавлев Ю.И.* Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5–17; II // № 6. С. 21–27; III // 1978. № 2. С. 35–43.
3. *Рудаков К.В.* Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации // Распознавание, классификация, прогноз (матем. методы и их применение). М.: Наука, 1988. Вып. 1. С. 250–273.
4. *Дмитриев А.И., Журавлев Ю.И., Кренделев Ф.П.* О математических принципах классификации предметов или явлений // Дискретный анализ. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1966. Вып. 7. С. 3–17.
5. *Вайнцвайг М.Н.* Алгоритм обучения распознаванию образов "Кора" // Алгоритмы обучения распознаванию образов. М.: Сов. радио, 1973. С. 82–91.
6. *Баскакова Л.В., Журавлёв Ю.И.* Модель распознающих алгоритмов с представительными наборами и системами опорных множеств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 5. С. 1264–1275.
7. *Дюкова Е.В.* Асимптотически оптимальные тестовые алгоритмы в задачах распознавания // Пробл. кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 165–199.
8. *Дюкова Е.В.* Алгоритмы распознавания типа "Кора": сложность реализации и метрические свойства // Распознавание, классификация, прогноз (матем. методы и их применение). М.: Наука, 1989. Вып. 2. С. 99–125.

Поступила в редакцию 29.05.95