Polinomial Karakteristik Matriks

Ambillah persamaan eigenvalue:

$$Au = \alpha u\,,$$

dengan A adalah sebuah matriks $n \times n$, u matriks $n \times 1$ (matriks kolom / vektor), dan α suatu nilai. u merupakan eigenvector dari operator / matriks A, dengan eigenvalue α. Terdapat n buah u dan paling banyak ada n buah α. **Carilah semua (n buah) α tersebut**. Catatan, dalam bahasan ini dianggap tidak ada degenerasi[1].

Dengan I adalah matriks identitas, diperoleh:

$$\begin{aligned} Au &= \alpha u \\ &= \alpha I u \\ \rightarrow (\alpha I - A)u &= 0\,. \end{aligned}$$

Solusi trivial adalah bahwa $u = 0$. Solusi nontrivial $u \neq 0$.

Ambil kasus nontrivial, yang berarti $\alpha I - A$ matriks yang tidak dapat dibalik (*inverted*), tidak memiliki invers, determinannya sama dengan 0:

$$\begin{aligned} \det\left((\alpha I - A)u\right) &= 0 \\ \det(\alpha I - A)\det(u) &= 0 \\ \rightarrow \det(\alpha I - A) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Persamaan (1) merupakan **polinomial karakteristik matriks** A atau sebelumnya dikenal sebagai **persamaan sekuler**. Sisi kiri Pers. (1) merupakan fungsi polinomial berorde n dalam α. Dengan demikian, α **merupakan akar fungsi polinomial** $\det(\alpha I - A)$. Secara numerik α diperoleh dengan memanfaatkan metode-metode pencarian akar fungsi, contoh bisection, yang dikombinasikan dengan langkah-langkah lain, sehingga dapat mencari akar fungsi yang jumlahnya lebih dari satu.

Jika A merupakan matriks diagonal, maka α mudah diperoleh, yaitu α adalah elemen-

[1] Pada kasus degenerasi ada lebih dari satu eigenvector yang memiliki eigenvalue yang sama. Pada kasus tersebut terdapat n buah eigenvector u, tapi $< n$ buah eigenvalue α.

elemen diagonal A:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\
\alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha - a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & \alpha - a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \alpha - a_{nn} \end{pmatrix} \\
\det(\alpha I - A) &= \prod_{i=1}^{n} (\alpha - a_{ii}) \\
&= (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{11}) ... \left(\alpha - a_{(n-1)(n-1)}\right)(\alpha - a_{nn}) \\
&= 0 \\
\rightarrow \alpha &= a_{11}, a_{22}, ..., a_{(n-1)(n-1)}, a_{nn} \, .
\end{aligned}
$$

Jika A bukan matriks diagonal, maka mencari α lebih rumit. Berikut ini ditunjukkan fungsi polinomial $\det(\alpha I - A)$ untuk A sembarang matriks dan A matriks tridiagonal. α harus dicari sebagai akar fungsi polinomial tersebut.

Fungsi polinomial $\det(\alpha I - A)$:

A. A sembarang matriks

$n = 1$:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \\
\alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} \end{pmatrix} \\
\det(\alpha I - A) &= \alpha - a_{11}
\end{aligned}
$$

$n = 2$:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
\alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} \end{pmatrix} \\
\det(\alpha I - A) &= (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{22}) - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
\alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \alpha - a_{33} \end{pmatrix} \\
\det(\alpha I - A) &= (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{22})(\alpha - a_{33}) - (\alpha - a_{11}) a_{23}a_{32} - (\alpha - a_{22}) a_{13}a_{31} \\
&\quad - (\alpha - a_{33}) a_{12}a_{21} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{32}a_{21}
\end{aligned}$$

$n = 4$:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\
\alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \alpha - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \alpha - a_{44} \end{pmatrix} \\
\det(\alpha I - A) &= (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{22})(\alpha - a_{33})(\alpha - a_{44}) - (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{22}) a_{34}a_{43} \\
&\quad - (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{33}) a_{24}a_{42} - (\alpha - a_{11})(\alpha - a_{44}) a_{23}a_{32} \\
&\quad - (\alpha - a_{22})(\alpha - a_{33}) a_{14}a_{41} - (\alpha - a_{22})(\alpha - a_{44}) a_{13}a_{31} \\
&\quad - (\alpha - a_{33})(\alpha - a_{44}) a_{12}a_{21} - (\alpha - a_{11}) a_{23}a_{34}a_{42} \\
&\quad - (\alpha - a_{11}) a_{24}a_{43}a_{32} - (\alpha - a_{22}) a_{13}a_{34}a_{41} \\
&\quad - (\alpha - a_{22}) a_{14}a_{43}a_{31} - (\alpha - a_{33}) a_{12}a_{24}a_{41} \\
&\quad - (\alpha - a_{33}) a_{14}a_{42}a_{21} - (\alpha - a_{44}) a_{12}a_{23}a_{31} \\
&\quad - (\alpha - a_{44}) a_{13}a_{32}a_{21} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{43}a_{31} \\
&\quad - a_{13}a_{34}a_{42}a_{21} - a_{13}a_{32}a_{24}a_{41} - a_{14}a_{42}a_{23}a_{31} - a_{14}a_{43}a_{32}a_{21} \\
&\quad + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{31}a_{24}a_{42} + a_{14}a_{41}a_{23}a_{32}
\end{aligned}$$

B. A matriks tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\
0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & ... & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & ... & 0 & 0 & a_{(n-2)(n-3)} & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & 0 \\
0 & ... & 0 & 0 & 0 & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\
0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n(n-1)} & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

$n = 1$:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \\ \alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} \end{pmatrix} \\ \det(\alpha I - A) &= \alpha - a_{11} \end{aligned}$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} \end{pmatrix} \\ \det(\alpha I - A) &= (\alpha - a_{11})\,(\alpha - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= \det(\alpha I - A)_1\,(\alpha - a_{22}) - a_{12}a_{21}\,, \end{aligned}$$

dengan $\det(\alpha I - A)_1$ adalah determinan dari 1×1 bagian pertama (pojok kiri atas) matriks $\alpha I - A$.

$n = 3$:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & \alpha - a_{33} \end{pmatrix} \\ \det(\alpha I - A) &= \{(\alpha - a_{11})\,(\alpha - a_{22}) - a_{12}a_{21}\}\,(\alpha - a_{33}) - (\alpha - a_{11})\,a_{23}a_{32} \\ &= \det(\alpha I - A)_2\,(\alpha - a_{33}) - \det(\alpha I - A)_1 a_{23}a_{32}\,, \end{aligned}$$

dengan $\det(\alpha I - A)_2$ adalah determinan dari 2×2 bagian pertama (pojok kiri atas) matriks $\alpha I - A$.

$n = 4$:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\ \alpha I - A &= \begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} & -a_{23} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \alpha - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & -a_{43} & \alpha - a_{44} \end{pmatrix} \\ \det(\alpha I - A) &= [\{(\alpha - a_{11})\,(\alpha - a_{22}) - a_{12}a_{21}\}\,(\alpha - a_{33}) - (\alpha - a_{11})\,a_{23}a_{32}]\,(\alpha - a_{44}) \\ &\quad - \{(\alpha - a_{11})\,(\alpha - a_{22}) - a_{12}a_{21}\}\,a_{34}a_{43} \\ &= \det(\alpha I - A)_3\,(\alpha - a_{44}) - \det(\alpha I - A)_2 a_{34}a_{43}\,, \end{aligned}$$

dengan $\det(\alpha I - A)_3$ adalah determinan dari 3×3 bagian pertama (pojok kiri atas) matriks $\alpha I - A$.

Secara umum, untuk matriks tridiagonal B dengan $n > 2$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & b_{(n-2)(n-3)} & b_{(n-2)(n-2)} & b_{(n-2)(n-1)} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & b_{(n-1)(n-2)} & b_{(n-1)(n-1)} & b_{(n-1)n} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n(n-1)} & b_{nn} \end{pmatrix}$$

berlaku relasi rekursi berikut:

$$\det(B)_n = \det(B)_{n-1} b_{nn} - \det(B)_{n-2} b_{(n-1)n} b_{n(n-1)} \,.$$

Dalam hal polinomial karakteristik matriks, matriks B adalah $\alpha I - A$.