Rekursi Lanjut

Tim Olimpiade Komputer Indonesia

Bagian 1

Fibonacci

Soal: Fibonacci

Deskripsi:

- Deret Fibonacci merupakan deret yang mana suatu anggota adalah penjumlahan dari dua anggota sebelumnya, kecuali dua anggota pertama.
- Jika f_N adalah bilangan Fibonacci ke-N, maka $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, dan $f_N = f_{N-1} + f_{N-2}$ untuk $N > 1$.
- Beberapa bilangan pertama dari deret Fibonacci adalah 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
- Carilah bilangan Fibonacci ke-N.
- Contoh: Bilangan Fibonacci ke-6 adalah 8. Perhatikan bahwa indeks dimulai dari 0.

Soal: Fibonacci (lanj.)

Format masukan:

- Sebuah baris berisi sebuah bilangan N.

Format keluaran:

- Sebuah baris berisi bilangan Fibonacci ke-N.

Batasan:

- $0 \leq N \leq 20$

Solusi

- Bagaimana cara mendapatkan nilai dari dua bilangan Fibonacci sebelum bilangan Fibonacci ke-N?
- Apakah kita bisa melakukan rekursi untuk mencari bilangan Fibonacci ke-$(N-1)$ dan ke-$(N-2)$?

Penjelasan Solusi Rekursif

Base Case

- Pada batasan soal, nilai N berkisar antara 0 sampai 20.
- Dari batasan tersebut, kasus terkecil yang sudah pasti diketahui jawabannya adalah f_0 dan f_1.
- Nilai dari $f_0 = 0$ dan $f_1 = 1$, atau dapat dituliskan $f_N = N$, untuk $0 \leq N \leq 1$.
- Sehingga, $N = 0$ dan $N = 1$ adalah *base case*.

Penjelasan Solusi Rekursif (lanj.)

Recurrence Relation

- Bagaimana jika $N > 1$?
- Seperti yang sudah didefinisikan, $f_N = f_{N-1} + f_{N-2}$ untuk $N > 1$
- Contoh: $f_5 = f_4 + f_3$.
- Mencari f_4 dan f_3 sendiri juga memunculkan permasalahan yang lebih kecil, yaitu:
  - $f_4 = f_3 + f_2$
  - $f_3 = f_2 + f_1$
- Hal ini akan terus diulang sampai tercapai *base case*, yaitu f_0 atau f_1.
- Dengan ini, kita menemukan hubungan rekursif dari f_N.

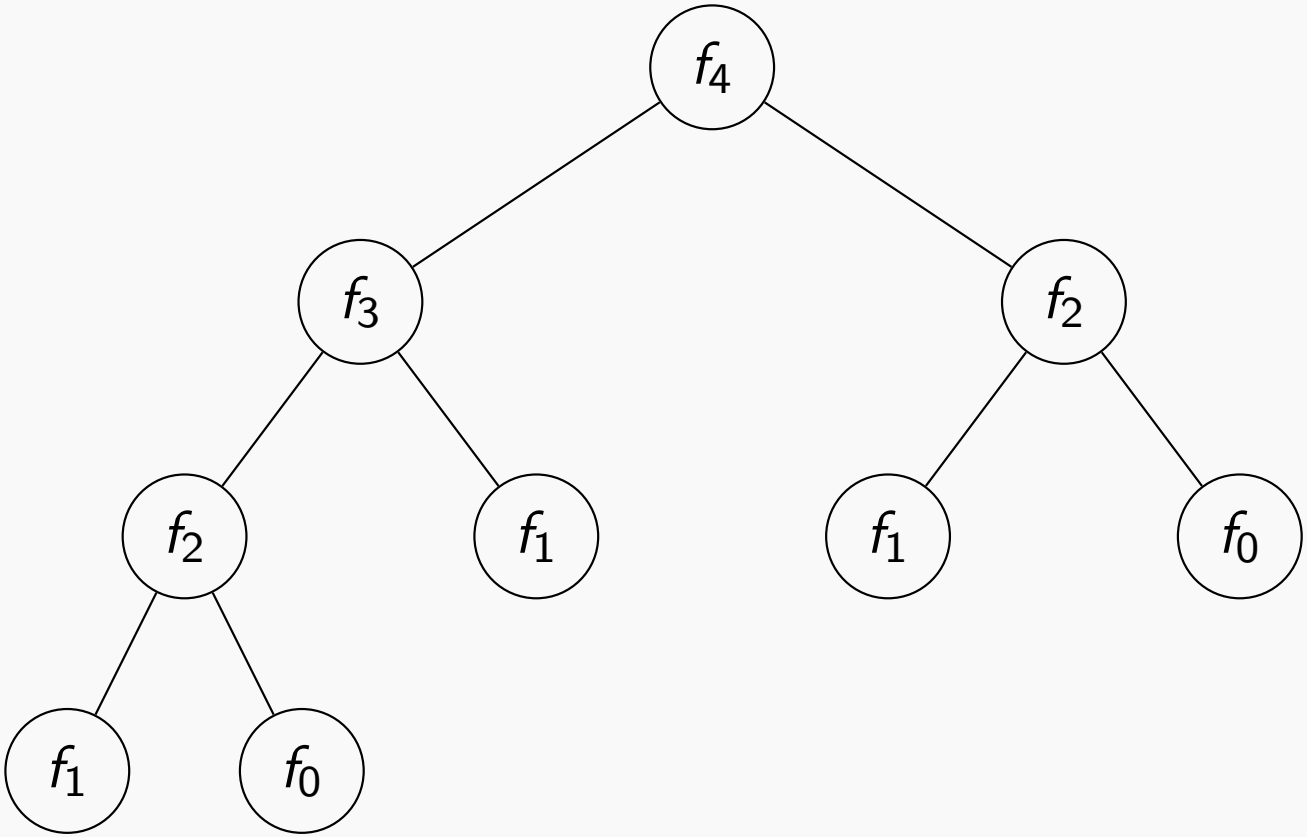
Contoh Solusi: fibonacci_rekursi.cpp

Perhatikan contoh berikut:

```
int fibonacci(int N) {
 if (N <= 1) {
   return N;
 } else {
   return fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2);
 }
}
```

Penjelasan Solusi Rekursif

Alur eksekusi rekursi dapat dimodelkan dengan pohon rekursi. Berikut adalah contoh pohonnya untuk f_4.



Penjelasan Solusi Rekursif (lanj.)

Yang terjadi pada program ketika menghitung f_4:

- Panggil fibonacci(4).
- fibonacci(4) akan memeriksa, apakah $N = 4$ adalah *base case*.
- Ternyata bukan, karena baru *base case* jika N ≤ 1.
- Dijalankanlah "`return fibonacci(3) + fibonacci(2)`".
- Alur rekursi berjalan berurutan, sehingga fibonacci(3) dieksekusi lebih dulu.

Penjelasan Solusi Rekursif (lanj.)

- fibonacci(3) akan menjalankan "`return fibonacci(2) + fibonacci(1)`".
- fibonacci(2) akan menjalankan "`return fibonacci(1) + fibonacci(0)`".
- Ternyata ketika fibonacci(1), 1 termasuk *base case* sehingga fibonacci(1) = 1.
- Ternyata ketika fibonacci(0), 0 termasuk *base case* sehingga fibonacci(0) = 0.
- Kembali ke fibonacci(2), nilai dari fibonacci(2) menjadi 1 + 0 = 1.

Penjelasan Solusi Rekursif (lanj.)

- Kembali ke fibonacci(3), nilai fibonacci(2) sudah ada nilainya tetapi fibonacci(1) belum sehingga akan dipanggil dan langsung menghasilkan 1 (karena sudah *base case*). Nilai dari fibonacci(3) menjadi $1 + 1 = 2$.
- Kembali ke fibonacci(4), nilai fibonacci(3) sudah ada nilainya tetapi fibonacci(2) belum sehingga akan dipanggil dan akan menghasilkan 1 (alur yang terjadi sama seperti sebelumnya). Nilai dari fibonacci(4) menjadi $2 + 1 = 3$.

Tantangan: Cobalah membuat pohon rekursi dan alurnya untuk menghitung f_5!

Kompleksitas Solusi

- Perhatikan pohon rekursi yang sebelumnya. Berapa kali fungsi akan dipanggil?
- Setiap pemanggilan fungsi akan bercabang 2 dan kedalaman maksimalnya adalah N.
- Sebagai pendekatan, bisa dikatakan fungsi dipanggil 2^N kali.
- Kompleksitasnya menjadi $O(2^N)$.

Masalah

- Perhatikan kembali pohon rekursi yang sebelumnya. Terlihat f_2 dihitung dua kali.
- Ketika f_N cukup besar, ada banyak fungsi dengan parameter yang sama namun dihitung berkali-kali. Hal ini berakibat program berjalan lambat.
- Kita dapat mereduksi kompleksitas rekursi Fibonacci menjadi $O(N)$ dengan teknik yang akan kita pelajari pada pemrograman lanjut.
- Kita juga bisa membuat solusi $O(N)$ dengan menghitung nilai Fibonacci secara iteratif. Dapatkah Anda membuatnya?

Bagian 2

Permutasi

Soal: Permutasi

Deskripsi:

- Pak Dengklek lupa password akun TLX-nya!
- Yang ia ingat hanyalah passwordnya terdiri dari N angka, dan mengandung masing-masing angka dari 1 sampai N.
- Misalnya $N = 3$, bisa jadi password Pak Dengklek adalah 123, 132, 312, dst
- Bantu Pak Dengklek menuliskan semua kemungkinan passwordnya!

Soal: Permutasi (lanj.)

Format masukan:

- Sebuah baris berisi sebuah bilangan N.

Format keluaran:

- Beberapa baris yang merupakan semua kemungkinan password, satu pada setiap barisnya.
- Urutkan keluaran secara leksikografis (seperti pada kamus).

Batasan:

- $1 \leq N \leq 8$

Soal: Permutasi (lanj.)

Contoh masukan:

```
3
```

Contoh keluaran:

```
123
132
213
231
312
321
```

Solusi

- Sebelum merancang solusi untuk persoalan sebenarnya, mari kita sederhanakan persoalan.
- Misalkan digit-digit boleh berulang, sehingga untuk $N = 3$, keluarannya adalah:

```
111
112
113
121
122
123
131
...
333
```

Solusi (lanj.)

- Jika N selalu 3, terdapat solusi iteratif yang sederhana:

```
for (int i = 1; i <= 3; i++) {
  for (int j = 1; j <= 3; j++) {
    for (int k = 1; k <= 3; k++) {
      printf("%d%d%d\n",i, j, k);
    }
  }
}
```

Solusi (lanj.)

- Namun bagaimana jika $N = 2$? Atau $N = 4$?
- Kedalaman **for loop** tidak bisa diatur untuk memenuhi kebutuhan N yang beragam!
- Untuk itu, solusi rekursif lebih mudah digunakan untuk persoalan yang disederhanakan ini.

Ide Rekursif

- Setiap kedalaman **loop** bisa diwujudkan oleh sebuah pemanggilan rekursif.

```
for 1..N
  for 1..N
    for 1..N
      ...
    end
  end
end
```

- Dengan menambahkan parameter "kedalaman" pada pemanggilan rekursif, kedalaman dari **loop** dapat diatur.

Ide Rekursif (lanj.)

```
void tulis(int kedalaman) {
  if (kedalaman >= N) {
    // Cetak password
    ...
  } else {
    // Masuk ke lapisan lebih dalam
    for (int i = 1; i <= N; i++) {
      tulis(kedalaman + 1);
    }
  }
}
```

Ide Rekursif (lanj.)

- Prosedur **tulis** dapat dipanggil dengan perintah:

```
N = 3;
tulis(0);
```

- Nilai **kedalaman** akan terus bertambah selama kedalaman saat ini belum mencapai N.
- Hal ini menjadi memicu pemanggilan rekursif lebih dalam.
- Setelah **kedalaman** melebihi N, artinya tidak perlu lagi menambah "lapisan **loop**", sehingga dicapai *base case* dan dicetak password.

Ide Rekursif (lanj.)

- Masalah berikutnya adalah bagaimana mencatat password yang sejauh ini telah dibentuk.
- Salah satu solusinya adalah membuat array global yang mencatat digit password dari 1 sampai **kedalaman**.
- Ketika *base case* tercapai, kita bisa mencetak isi array tersebut.
- Kita namakan array tersebut **catat**.

Ide Rekursif (lanj.)

```
void tulis(int kedalaman) {
  if (kedalaman >= N) {
    // Cetak password
    for (int i = 0; i < N; i++) {
      printf("%d", catat[i]); // Cetak
    }
    printf("\n");
  } else {
    // Masuk ke lapisan lebih dalam
    for (int i = 1; i <= N; i++) {
      catat[kedalaman] = i; // Catat di sini
      tulis(kedalaman + 1);
    }
  }
}
```

Solusi untuk Permutasi

- Kita berhasil menyelesaikan masalah yang disederhanakan, saatnya menarik solusi tersebut ke masalah sebenarnya.
- Perbedaan dari masalah yang baru kita selesaikan dengan yang sebenarnya adalah: tidak boleh ada digit yang berulang.
- Sebagai contoh, 122, 212, 311 bukan password yang benar, sementara 123, 213, dan 321 merupakan password yang benar.
- Artinya, jika kita bisa menghindari mencetak password dengan digit berulang, masalah selesai.

Menghindari Digit Berulang

Solusi yang mungkin:

- Sebelum mencetak, periksa apakah ada digit yang berulang.
- Sebelum melakukan pemanggilan rekursif yang lebih dalam, periksa apakah ada digit berulang yang tercatat.

Menghindari Digit Berulang (lanj.)

- Solusi pertama kurang cocok digunakan.
- Misalkan untuk $N = 8$, dan kedalaman saat ini adalah 2.
- Diketahui bahwa array **catat** sejauh ini berisi [1, 1, ...].
- Tidak ada gunanya untuk meneruskan pemanggilan rekursif lebih dalam, sebab kemungkinan ini sudah pasti tidak dicetak (ada digit '1' berulang).

Menghindari Digit Berulang (lanj.)

- Mengindari perulangan digit sebelum pemanggilan rekursif lebih efisien untuk digunakan.
- Oleh karena itu kita akan menggunakan cara kedua.
- Hal ini dapat dilakukan dengan menandai digit-digit yang sudah pernah digunakan, dan jangan mencatat digit-digit tersebut.

Menghindari Digit Berulang (lanj.)

- Kita akan menggunakan array global bertipe **boolean**, yaitu **pernah**.
- Awalnya, seluruh isi array **pernah** adalah **false**.
- **pernah[i]** bernilai **true** jika digit **i** berada di dalam array **catat**.
- Setiap sebelum masuk ke kedalaman rekursif berikutnya, periksa apakah digit yang akan digunakan sudah pernah digunakan.
- Jika belum pernah, baru boleh digunakan.

Implementasi

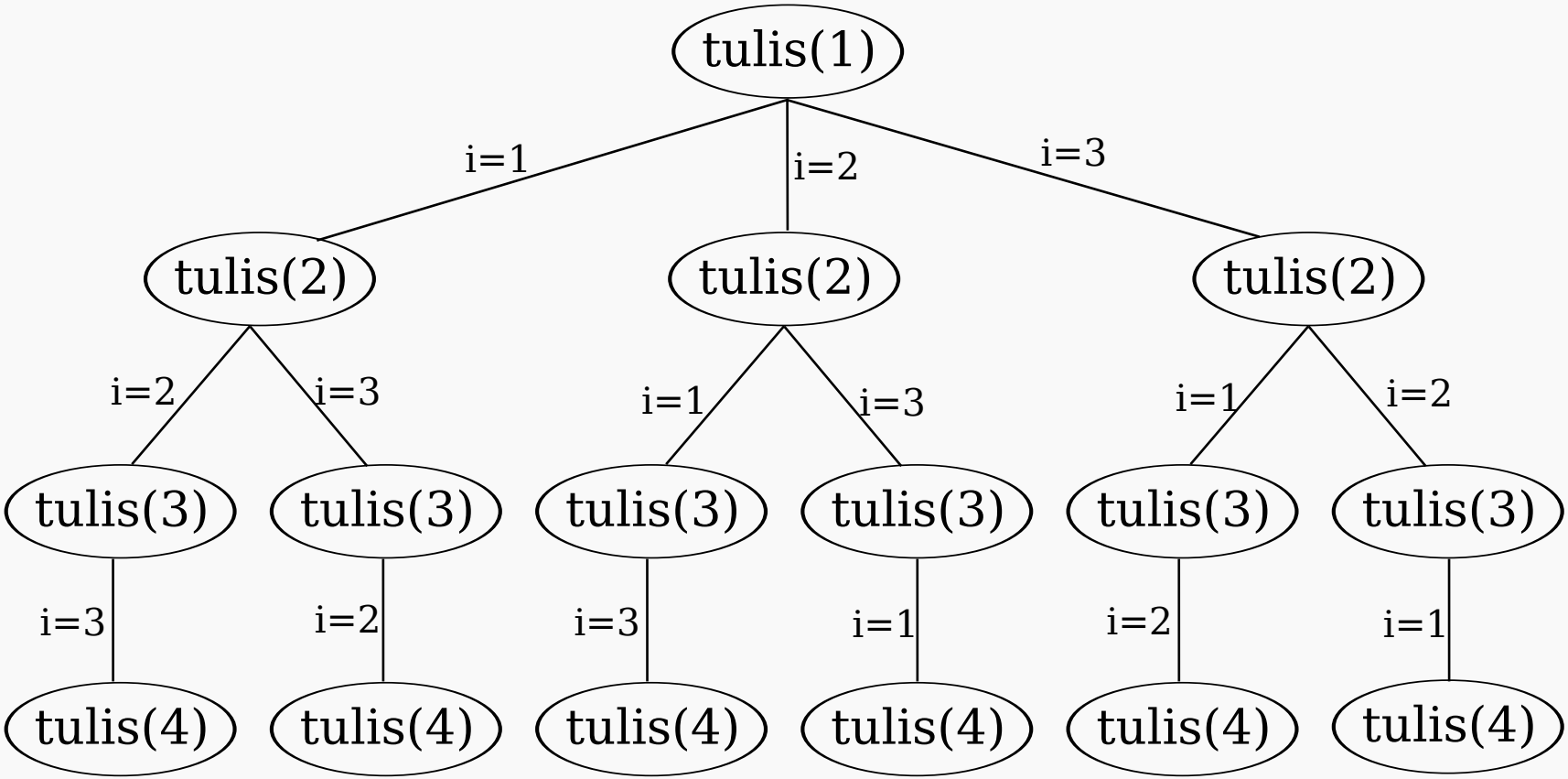
```
void tulis(int kedalaman) {
  if (kedalaman >= N) {
    // Cetak password
    for (int i = 0; i < N; i++) {
      printf("%d", catat[i]); // Cetak
    }
    printf("\n");
  } else {
    // Masuk ke lapisan lebih dalam
    for (int i = 1; i <= N; i++) {
      if (!pernah[i]) {          // i belum pernah?
        pernah[i] = true;        // Gunakan
        catat[kedalaman] = i; // Catat di sini
        tulis(kedalaman + 1);
        pernah[i] = false;       // Selesai menggunakan
      }
    }
  }
}
```

Menghindari Digit Berulang (lanj.)

- Setelah perintah "tulis(kedalaman + 1)", nilai **pernah[i]** perlu dikembalikan menjadi **false**.
- Sebab setelah keluar dari pemanggilan rekursif tersebut, digit **i** dianggap tidak lagi ada pada **catat**.
- Namun digit **i** bisa saja digunakan untuk beberapa pemanggilan rekursif ke depannya.
- Dengan cara ini, kita memastikan tidak ada digit berulang yang dicetak.

Kompleksitas

- Jika $N = 3$, maka berikut pohon rekursif yang menggambarkan pemilihan **i** untuk setiap pemanggilan:



Kompleksitas

- Dapat diperhatikan bahwa pada kedalaman pertama, terdapat N cabang rekursif.
- Pada kedalaman kedua, terdapat $N - 1$ cabang rekursif.
- Seterusnya hingga kedalaman terakhir yang tidak lagi bercabang.
- Kompleksitasnya adalah $N \times (N-1) \times (N-2) \times ... \times 1$, atau dengan kata lain $O(N!)$.

Penutup

- Rekursi merupakan topik yang luas untuk dibicarakan.
- Jika Anda belum terbiasa dengan berpikir rekursif, maka latihan yang banyak adalah solusinya.
- Selamat berlatih dengan soal-soal yang ada!