

POLINOMIAL KARAKTERISTIK DAN NILAI EIGEN MATRIKS ANTIKETETANGGAAN DARI GRAF POT BUNGA BERARAH UNISIKLIK

Bayu Utama Aji, Kiki Ariyanti Sugeng, Siti Aminah

1. Departemen Matematika, FMIPA UI, Kampus UI Depok, 16424, Indonesia
2. Departemen Matematika, FMIPA UI, Kampus UI Depok, 16424, Indonesia
3. Departemen Matematika, FMIPA UI, Kampus UI Depok, 16424, Indonesia

Email: bayu.hutama@sci.ui.ac.id

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas mengenai polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik. Entri-entri pada matriks antiketetanggaan dari suatu graf berarah merepresentasikan ada atau tidaknya suatu busur berarah dari suatu simpul ke simpul lainnya. Bentuk umum koefisien-koefisien polinomial karakteristik matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik didapatkan dengan menghitung jumlah determinan dari matriks antiketetanggaan dari semua subgraf terinduksi siklik dan subgraf terinduksi asiklik dari graf tersebut. Metode faktorisasi polinomial dilakukan untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik. Hasil penelitian ini adalah diperolehnya koefisien-koefisien polinomial karakteristik dan nilai-nilai eigen dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik yang dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi yang bergantung pada banyaknya simpul.

Kata Kunci:

Graf pot bunga, graf unisiklik, matriks antiketetanggaan, polinomial karakteristik, nilai eigen.

Charcteristic Polynomial and Eigenvalues of Antiadjacency Matrix of Directed Unicyclic Flower Vase Graph

Abstract

In this research, we discussed the characteristic polynomial and eigenvalues of antiadjacency matrix of directed unicyclic flower vase graph. The entries of the antiadjacency matrix of a directed graph represent the presence or the absence of directed arc from one vertex to the others. If A is the adjacency matrix of a graph \vec{G} then the antiadjacency matrix B of graph \vec{G} is $B = J - A$, where J is the square matrix with all entries equal to one. The general form of characteristic polynomial coefficients of the antiadjacency matrix of directed unicyclic flower vase graph can be obtained by calculating the sum of determinants of the antiadjacency matrices of all induced cyclic and acyclic subgraphs, while the eigenvalues were obtained by using polynomial factorization and Horner's method. In this skripsi, we give the characteristic polynomial coefficients and eigenvalues of antiadjacency matrix of directed unicyclic flower vase graph. The characteristic polynomial can be considered as a function that depends on the number of vertex.

Keywords: Flower vase graph, unicyclic graph, antiadjacency matrix, characteristic polynomial, eigenvalues.

1. Pendahuluan

Graf biasanya digunakan untuk merepresentasikan hubungan suatu objek dengan objek lainnya. Teori graf pertama kali dikenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk memecahkan masalah jembatan Königsberg. Perkembangannya mulai pesat pada tahun 1852 saat Francis Guthrie memperkenalkan masalah empat warna. Pada abad ke-19 teori graf menjadi area teoritis dari matematika melalui riset oleh Julius Petersen. Perkembangan paling pesat dari teori graf terjadi setelah perang dunia ke-2. Semenjak itu, teori graf berkembang ke area yang memiliki banyak masalah menarik dan memiliki banyak bidang aplikasi berbeda (Chartrand, Lesniak & Zhang, 2016). Graf masih memiliki relatif banyak hal yang belum diteliti. Salah satu penelitian yang sedang berkembang adalah menentukan polinomial karakteristik dan nilai eigen dari graf berarah.

Graf berarah \vec{G} dapat didefinisikan sebagai suatu pasangan terurut dari dua himpunan V dan E , dengan V adalah himpunan berhingga yang tak kosong dan E adalah himpunan dari pasangan terurut anggota dari V . Himpunan V disebut himpunan simpul dan himpunan E disebut himpunan busur berarah. Jika $a = (u, v)$ adalah busur dari graf berarah \vec{G} , maka u disebut bertetangga ke v dan v bertetangga dari u (Chartrand, Lesniak & Zhang, 2016).

Matriks ketetanggaan suatu graf G adalah matriks $A = [a_{ij}]$ yang berukuran $n \times n$ dengan $a_{ij} = 1$ jika terdapat busur berarah dari simpul v_i ke simpul v_j dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya. Sedangkan matriks antiketetanggaan dari G adalah $B = J - A$ dengan J merupakan matriks berukuran $n \times n$ dengan semua entrinya bernilai 1 (Bapat, 2010).

Pada penelitian ini dibahas secara spesifik satu graf sederhana yaitu graf pot bunga yang diberi arah sehingga menjadi graf berarah yang siklik. Graf pot bunga $C_n S_m$ dibangun dari graf bintang dan graf lingkaran yang dihubungkan oleh busur dari simpul pusat graf bintang S_m dengan satu simpul pada graf lingkaran C_n (Ahmad, 2012). Graf pot bunga berarah merupakan salah satu graf yang dapat bersifat siklik dengan memberikan arah yang sesuai pada setiap busur pada graf lingkarannya seperti yang dapat dilihat pada Gambar 2.1.

Matriks ketetanggaan suatu graf G adalah matriks $A = [a_{ij}]$ yang berukuran $n \times n$ dengan $a_{ij} = 1$ jika terdapat busur berarah dari simpul v_i ke simpul v_j dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya. Sedangkan matriks antiketetanggaan dari G adalah $B = J - A$ dengan J merupakan matriks berukuran $n \times n$ dengan semua entrinya bernilai 1 (Bapat, 2010). Penelitian tentang matriks antiketetanggaan dari beberapa kelas graf asiklik telah dilakukan oleh Firmansyah (2014), kemudian Wildan (2015) membahas polinomial karakteristik dari matriks ketetanggaan dan matriks antiketetanggaan graf berarah yang siklik secara umum dan Putra (2015) membahas polinomial karakteristik matriks antiketetanggaan dari graf lingkaran berarah. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang koefisien polinomial karakteristik dan nilai-nilai eigen dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik.

2. Tinjauan Teoritis

2.1 Graf

Pada bagian ini dibahas tentang definisi-definisi dasar graf yang diambil dari buku Chartrand, Lesniak & Zhang (2016) kecuali disebutkan berbeda.

Graf berarah \vec{G} dapat didefinisikan sebagai suatu pasangan terurut dari dua himpunan V dan E , dengan V adalah himpunan berhingga yang tak kosong dan E adalah himpunan dari pasangan terurut anggota dari V . Himpunan V disebut sebagai himpunan simpul dan himpunan E disebut sebagai **himpunan busur berarah**. Jika $a = (u, v)$ adalah busur dari graf berarah \vec{G} , maka u disebut **bertetangga** ke v dan v bertetangga dari u . **Jalan berarah** \vec{W} pada graf berarah \vec{G} adalah barisan simpul pada \vec{G} , dimulai dari u dan berakhir di v sedemikian sehingga urutan simpul pada \vec{W} bertetangga pada \vec{G} .

Jalan berarah pada graf \vec{G} yang simpulnya tidak berulang disebut **lintasan berarah**. Jalan berarah $u - v$ **tertutup** jika $u = v$ dan **terbuka** jika $u \neq v$ (Putra, 2015). Sebuah lintasan berarah pada graf berarah \vec{G} yang mengandung semua simpul dari \vec{G} disebut dengan **lintasan Hamilton**. Jalan berarah tertutup dengan panjang minimal dua dan tidak ada simpul yang berulang kecuali simpul awal dan simpul akhir disebut **lingkaran berarah** (Putra, 2015). Lingkaran berarah dengan banyak simpul n dinotasikan sebagai \vec{C}_n .

Suatu graf tak berarah G disebut graf yang **mendasari** graf berarah \vec{G} , jika graf G diperoleh dari graf \vec{G} dengan mengganti setiap busur berarah (u, v) atau pasangan simetris $(u, v), (v, u)$ dari busur berarah dengan busur uv . Graf berarah \vec{G} **terhubung (atau terhubung lemah)** jika graf yang mendasari \vec{G} terhubung. Sebuah busur $e = uv$ pada graf terhubung \vec{G} yang jika dihilangkan menghasilkan graf yang tidak terhubung disebut **jembatan**.

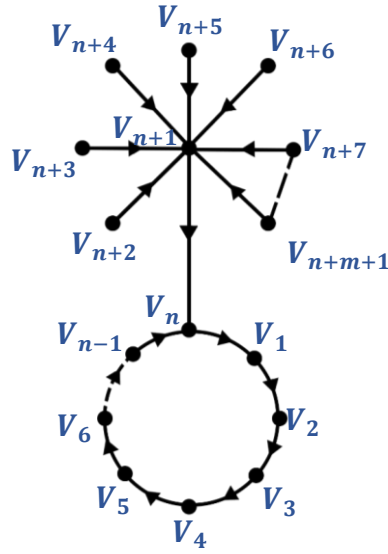
Suatu graf dikatakan **subgraf** dari graf berarah \vec{G} jika $V(\vec{H}) \subseteq V(\vec{G})$ dan $E(\vec{H}) \subseteq E(\vec{G})$. Jika $U(\vec{G})$ adalah subhimpunan tak kosong dari himpunan simpul graf berarah \vec{G} , maka subgraf berarah $\langle U \rangle$ dari \vec{G} yang **terinduksi** oleh $U(\vec{G})$ adalah graf berarah yang mempunyai himpunan simpul $U(\vec{G})$ dan himpunan busur berarah terdiri dari semua busur berarah dari \vec{G} yang menghubungkan simpul-simpul dari $U(\vec{G})$ (Wildan, 2015).

Graf berarah yang memiliki subgraf lingkaran dan disebut **graf berarah siklik**. Graf berarah yang tidak memiliki subgraf lingkaran dan disebut **graf berarah asiklik**. **Derajat keluar** $od\ v$ dari simpul v pada graf berarah \vec{G} adalah banyak simpul yang bertetangga dari v . **Derajat masuk** $id\ v$ dari simpul v pada graf berarah G adalah banyak simpul yang bertetangga ke v . **Lingkungan tetangga luar** $N^+(u)$ dari simpul u pada graf berarah \vec{G} adalah himpunan simpul yang bertetangga dari u , sedangkan **lingkungan tetangga dalam** $N^-(u)$ adalah himpunan simpul yang bertetangga ke u . Sebuah simpul berderajat 0 pada graf berarah \vec{G} disebut dengan **simpul terisolasi** dan sebuah simpul berderajat 1 disebut **simpul ujung** atau **daun**.

Graf G adalah **graf bipartit komplit** jika V dapat dipartisi menjadi dua himpunan U dan W sehingga uw adalah busur dari G jika dan hanya jika $u \in U$ dan $w \in W$. jika $|U| = s$ dan $|W| = t$, maka derajat dari graf bipartit ini adalah $s + t$ dan berukuran st dan dinotasikan dengan $K_{s,t}$. Graf bipartit komplit $K_{1,t}$ disebut sebagai **graf bintang**. Simpul berderajat t pada graf bintang disebut **simpul pusat bintang**. Untuk mempermudah selanjutnya graf bintang akan dinotasikan dengan S_m dengan $m = t$.

Graf pot bunga $C_n S_m$ dibangun dari graf bintang dan graf lingkaran yang dihubungkan oleh busur dari simpul pusat graf bintang S_m dengan satu simpul pada graf lingkaran C_n (Ahmad,

2012). Pada penelitian ini, graf pot bunga berarah unisiklik diperoleh dengan memberikan arah. Ilustrasi dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$ dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.1 Graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$

Subgraf terinduksi T_2 adalah sebuah subgraf yang berbentuk graf $pC_n \cup P_q$, dengan $0 \leq p \leq (m-1)$ dan $0 < q < n$, dengan p adalah banyak graf lingkaran dan q adalah banyak simpul pada graf lintasan yang tergabung dalam suatu subgraf T_2 (Solihin, 2019). Subgraf ini dapat disebut bentuk lebih umum dari subgraf tipe 3.

Teorema 2.1.1. Determinan dari matriks antiketetanggaan graf T_2 adalah $(-1)^p$, atau $\det B(T_2) = (-1)^p$, dengan p adalah banyak graf lingkaran yang tergabung dalam suatu subgraf T_2 (Solihin, 2019).

2.2 Matriks Antiketetanggaan

Pada bagian ini dibahas tentang matriks antiketetanggaan, polinomial karakteristik dan teorema-teorema yang akan digunakan pada penelitian ini yang diambil dari buku Bapat (2010) kecuali disebutkan berbeda.

Matriks ketetanggaan suatu graf \vec{G} adalah matriks $A = [a_{ij}]$ yang berukuran $n \times n$ dengan $a_{ij} = 1$ jika terdapat busur berarah dari v_i ke v_j , dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya. Sedangkan **matriks antiketetanggaan** dari \vec{G} adalah $B = J - A$ dengan J merupakan matriks berukuran $n \times n$ dengan semua entrinya bernilai 1.

Misalkan A sebuah matriks $n \times n$. Determinan $\det(A - \lambda I)$ adalah polinomial dengan variabel λ dan berderajat n dan disebut **polinomial karakteristik** dari A . Persamaan $\det(A - \lambda I) = 0$ disebut **persamaan karakteristik** dari A . Dengan menggunakan teorema dasar aljabar, persamaan ini mempunyai n akar dan akar-akar ini disebut dengan **nilai eigen** dari A .

Teorema 2.2.1. Misalkan \vec{G} graf berarah asiklik dengan $V(\vec{G}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ dan B adalah matriks antiketetanggaan dari \vec{G} , maka $\det(B) = 1$, jika \vec{G} punya lintasan Hamilton dan $\det(B) = 0$ jika \vec{G} tidak mempunyai lintasan Hamilton.

Teorema 2.2.2. Misalkan B adalah matriks antiketetanggaan dari graf berarah siklik \vec{C}_n , maka $\det(B(\vec{C}_n)) = n - 1$ (Putra, 2015).

Teorema 2.2.3. Misalkan \vec{G} suatu graf berarah yang memiliki dua simpul, u dan v , dengan $u \neq v$ yang memenuhi $N^-(u) = N^-(v)$ maka $\det(B(\vec{G})) = 0$ (Wildan, 2015).

Teorema 2.2.4. Misalkan $P(B(\vec{G})) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n$ adalah polinomial karakteristik dari matriks antiketetanggaan $B(\vec{G})$ dari graf berarah, misal $|B(\langle U \rangle_{acyclic})_i^{(j_1)}|$ determinan dari matriks antiketetanggaan dari subgraf terinduksi asiklik dengan i simpul dan $j_1 = 1, 2, \dots, w_1$ dengan w_1 adalah banyak subgraf terinduksi asiklik $\langle U \rangle_{acyclic}$ dengan i simpul dari graf berarah siklik \vec{G} dan misal $|B(\langle U \rangle_{cyclic})_i^{(j_2)}|$ merupakan determinan dari matriks antiketetanggaan dari graf terinduksi siklik dengan i simpul dan $j_2 = 1, 2, \dots, w_2$ dengan w_2 adalah banyak graf terinduksi siklik $\langle U \rangle_{cyclic}$ dengan i simpul dari graf berarah siklik \vec{G} , maka

$$b_i = (-1)^i \left(\sum_{j_1=1}^{w_1} |B(\langle U \rangle_{acyclic})_i^{(j_1)}| + \sum_{j_2=1}^{w_2} |B(\langle U \rangle_{cyclic})_i^{(j_2)}| \right)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$ (Wildan, 2015).

Teorema 2.2.5. Jika $P(B(\vec{G})) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n$ adalah polinomial karakteristik dari matriks antiketetanggaan $B(\vec{G})$ dari suatu graf berarah dengan n simpul dan m busur, maka $b_1 = -n$ dan $b_2 = m$ (Wildan, 2015).

2.3 Metode Penelitian

Dalam penelitian digunakan metodologi penelitian berupa studi literatur dan pembuktian teorema. Studi literatur dilakukan dengan mencari materi-materi dari makalah, buku, tesis atau jurnal yang berkaitan dengan permasalahan yang akan dibahas, yang dapat menunjang penelitian. Kemudian dilakukan proses pembuktian dengan menggunakan teorema-teorema yang berhubungan dengan polinomial karakteristik dan nilai eigen matriks antiketetanggaan dari suatu graf berarah.

3. Hasil Penelitian

3.1 Matriks *Adjacency* Graf Matahari Berarah Siklik

Graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$, mempunyai matriks antiketetanggaan yang diilustrasikan pada gambar berikut.

	v_1	v_2	v_3	\dots	v_{n-1}	v_n	v_{n+1}	v_{n+2}	v_{n+3}	v_{n+4}	\dots	v_{n+m}	v_{n+m+1}
v_1	1	0	1	\dots	1	1	1	1	1	1	\dots	1	1
v_2	1	1	0	\dots	1	1	1	1	1	1	\dots	1	1
v_3	1	1	1	\ddots	1	1	1	1	1	1	\dots	1	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
v_{n-1}	1	1	1	\dots	1	0	1	1	1	1	\dots	1	1
v_n	0	1	1	\dots	1	1	1	1	1	1	\dots	1	1
v_{n+1}	1	1	1	\dots	1	0	1	1	1	1	\dots	1	1
v_{n+2}	1	1	1	\dots	1	1	0	1	1	1	\dots	1	1
v_{n+3}	1	1	1	\dots	1	1	0	1	1	1	\dots	1	1
v_{n+4}	1	1	1	\dots	1	1	0	1	1	1	\dots	1	1
v_{n+5}	1	1	1	\dots	1	1	0	1	1	1	\dots	1	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
v_{n+m}	1	1	1	\dots	1	1	0	1	1	1	\dots	1	1
v_{n+m+1}	1	1	1	\dots	1	1	0	1	1	1	\dots	1	1

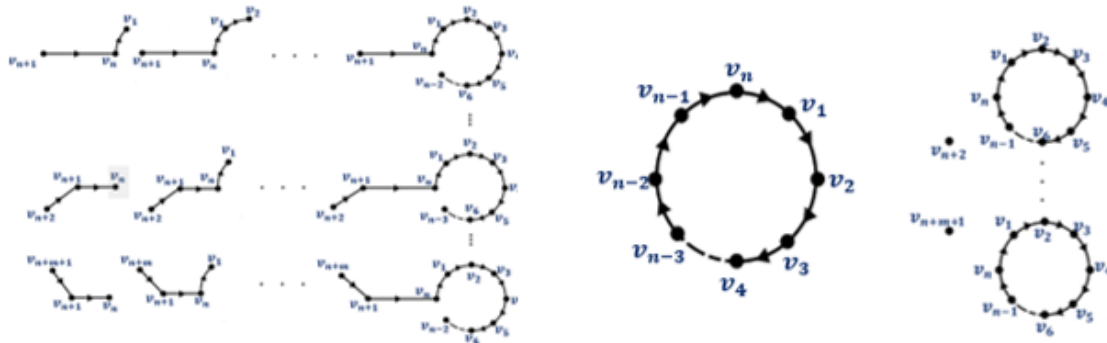
Gambar 3.1. Matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$.

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n-1, j = i+1 \\ \text{untuk } i = n, j = 1 \\ \text{untuk } i = n+1, j = n \\ \text{untuk } i = n+2, \dots, n+m, j = n+1, m \leq n \in \mathbb{N} \\ 1, \text{ untuk yang lain} \end{cases}$$

3.2 Tipe-Tipe Subgraf Terinduksi

Untuk menentukan bentuk umum dari koefisien polinomial karakteristik matriks antiketetanggaan diperlukan banyaknya subgraf berarah terinduksi siklik beserta asiklik dan determinannya. Oleh karena itu pada subbab ini dibahas tipe-tipe subgraf terinduksi dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$.

Subgraf terinduksi dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$ dibagi menjadi 5 tipe berdasarkan sifat dari subgraf adalah siklik atau asiklik. Subgraf tipe 1 merupakan subgraf terinduksi asiklik yang memuat lintasan Hamilton. Subgraf tipe 2 merupakan subgraf terinduksi siklik yang memuat lintasan Hamilton. Subgraf tipe 3 merupakan subgraf terinduksi siklik yang memiliki simpul terisolasi yang memuat lintasan Hamilton. Subgraf tipe 4 merupakan subgraf terinduksi asiklik yang tidak memuat lintasan Hamilton. Subgraf tipe 5 merupakan subgraf terinduksi siklik yang tidak memuat lintasan Hamilton.



Gambar 3.3. Subgraf berarah terinduksi yang mengandung lintasan Hamilton (dari kiri ke kanan: tipe 1, tipe 2, tipe 3)

Lema 3.2.1. Misal \vec{G} adalah graf pot bunga berarah unisiklik, maka banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton pada subgraf tipe 1 adalah sebanyak

- $m + n + 1$ lintasan untuk $1 \leq i \leq n - 1$ simpul,
- $m + 1$ lintasan untuk n simpul,
- m lintasan untuk $n + 1$ simpul.

Lema 3.2.2. Misalkan $B(T1)$ adalah matriks antiketetanggaan dari subgraf tipe 1, maka

$$\det(B(T1)) = 1$$

Bukti Subgraf tipe 1 merupakan subgraf terinduksi asiklik dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$ yang memiliki lintasan Hamilton di dalamnya. Maka menurut **Teorema 2.2.1** $\det(B(T1)) = 1$. ■

Lema 3.2.3. Misal \vec{G} adalah graf pot bunga berarah unisiklik, maka banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton pada subgraf tipe 2 adalah sebanyak 1 lintasan untuk n simpul.

Lema 3.2.4. Misalkan $B(T2)$ adalah matriks antiketetanggaan dari subgraf tipe 2, maka

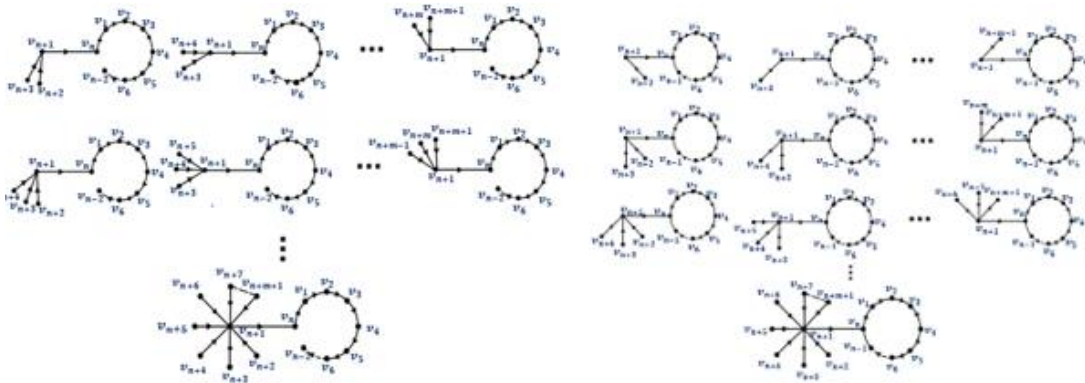
$$\det(B(T2)) = n - 1$$

Bukti Subgraf tipe 2 merupakan subgraf terinduksi siklik dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$ yang memiliki lintasan Hamilton di dalamnya. Maka menurut Teorema 2.2.2 $\det(B(T2)) = n - 1$. ■

Lema 3.2.5. Misal \overrightarrow{G} adalah graf pot bunga berarah unisiklik, maka banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton pada subgraf tipe 3 adalah sebanyak m lintasan.

Lema 3.2.6. Misalkan $B(T3)$ adalah matriks antiketetanggaan dari subgraf tipe 3, maka $\det(B(T3)) = -1$

Bukti Subgraf tipe 3 adalah subgraf terinduksi siklik dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$ yang memiliki lintasan Hamilton dan berbentuk graf lingkaran berarah dengan sebuah simpul terisolasi. Artinya subgraf tipe 3 adalah subgraf T_2 dari gabungan graf lingkaran dengan $p = 1$, maka menurut Teorema 2.1.1 $\det(B(T3)) = (-1)^1 = -1$. ■



Gambar 3.5. Subgraf berarah terinduksi yang tidak mengandung lintasan Hamilton (dari kiri ke kanan: tipe 4, tipe 5)

3.3 Polinomial Karakteristik dan Nilai Eigen dari Matriks Antiketetanggaan Graf Pot Bunga Berarah Unisiklik

Pada bagian ini dibahas mengenai polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$ beserta buktinya.

Teorema 3.3.2. Jika $P(B(\overrightarrow{C_n S_m})) = \lambda^{m+n+1} + b_1 \lambda^{m+n} + b_2 \lambda^{m+n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda^m + b_n \lambda^{m+1} + \dots + b_{n+m} \lambda + b_{n+m+1}$ adalah polinomial karakteristik dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik, maka:

- a) $b_i = (-1)^i (m + n + 1)$, untuk $1 \leq i < n$,
- b) $b_i = (-1)^i (m + n)$, untuk $i = n$,
- c) $b_i = 0$, untuk $n + 1 \leq i \leq n + m + 1$.

Bukti :

a) Untuk kasus $b_i, 1 \leq i < n$

- Untuk kasus b_1

Karena $P\left(B(\overrightarrow{C_n S_m})\right) = \lambda^{m+n+1} + b_1 \lambda^{m+n} + b_2 \lambda^{m+n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda^m + b_n \lambda^{m+1} + \dots + b_{n+m} \lambda + b_{n+m+1}$ adalah polinomial karakteristik dari matriks antiketetanggaan graf \pot bunga berarah dengan $m + n + 1$ simpul, maka berdasarkan **Teorema 2.2.5**, $b_1 = m + n + 1$.

- Untuk kasus b_2

Karena $P\left(B(\overrightarrow{C_n S_m})\right) = \lambda^{m+n+1} + b_1 \lambda^{m+n} + b_2 \lambda^{m+n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda^m + b_n \lambda^{m+1} + \dots + b_{n+m} \lambda + b_{n+m+1}$ adalah polinomial karakteristik dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah dengan $m + n + 1$ busur, maka berdasarkan **Teorema 2.2.5**, $b_2 = m + n + 1$.

- Untuk kasus $b_i, 3 \leq i < n$

- Kasus asiklik

Menurut **Lema 3.2.1** terdapat subgraf berarah tipe 1 sebanyak $m + n + 1$ subgraf berarah terinduksi yang membentuk lintasan Hamilton. Maka, berdasarkan **Lema 3.2.2** $\det(B) = 1$ dan menurut **Teorema 2.2.4** didapat $\sum_{j_1}^{w_1} \left| B(\langle U \rangle_{acyclic})_i^{(j_1)} \right| = (m + n + 1) \cdot 1 = m + n + 1$.

- Kasus siklik

Tidak terdapat subgraf siklik untuk $b_i, 3 \leq i < n$, karena untuk membuat subgraf lingkaran harus memenuhi syarat $3 \geq n$. Sehingga $\sum_{j_1}^{w_1} \left| B(\langle U \rangle_{acyclic})_i^{(j_2)} \right| = 0$.

Jadi dapat disimpulkan

$$b_i = (-1)^i (m + n + 1), \text{ untuk } 3 \leq i < n. \quad (3.1)$$

b) Untuk kasus $b_i, i = n$

- Kasus asiklik

Menurut **Lema 3.2.1** terdapat subgraf berarah tipe 1 sebanyak $m + 1$ subgraf berarah terinduksi yang membentuk lintasan Hamilton. Maka, berdasarkan **Lema 3.2.2** $\det(B) = 1$ dan menurut **Teorema 2.2.4** didapat $\sum_{j_1}^{w_1} \left| B(\langle U \rangle_{acyclic})_n^{(j_1)} \right| = (m + 1) \cdot 1 = m + 1$.

- Kasus siklik

Menurut **Lema 3.2.3** terdapat subgraf berarah tipe 2 sebanyak 1 subgraf berarah terinduksi siklik. Karena pada setiap subgraf berarah terinduksi siklik terdapat \vec{C}_n , maka berdasarkan **Lema 3.2.4** $\det(B) = n - 1$ dan menurut **Teorema 2.2.4** didapat $\sum_{j_2}^{w_2} \left| B(\langle U \rangle_{cyclic})_n^{(j_2)} \right| = 1 \cdot (n - 1) = n - 1$.

Jadi dapat disimpulkan

$$b_i = (-1)^i [(m + 1) + (n - 1)] = (-1)^i (m + n). \quad (3.2)$$

- c) Untuk kasus $b_i, i > n$

- Untuk kasus $b_i, i = n + 1$

- Kasus asiklik

Menurut **Lema 3.2.1** terdapat subgraf berarah tipe 1 sebanyak m subgraf berarah terinduksi yang membentuk lintasan Hamilton. Maka, berdasarkan **Lema 3.2.2** $\det(B) = 1$ dan menurut **Teorema 2.2.4** didapat $\sum_{j_1}^{w_1} \left| B(\langle U \rangle_{acyclic})_i^{(j_1)} \right| = m \cdot 1 = m$.

- Kasus siklik

Menurut **Lema 3.2.5** terdapat subgraf berarah tipe 3 sebanyak m subgraf berarah terinduksi siklik. Karena pada setiap subgraf berarah terinduksi siklik terdapat \vec{C}_n , **Lema 3.2.6** $\det(B) = -1$ dan menurut **Teorema 2.2.4** didapat $\sum_{j_2}^{w_2} \left| B(\langle U \rangle_{cyclic})_i^{(j_2)} \right| = m \cdot (-1) = -m$.

Jadi dapat disimpulkan

$$b_i = (-1)^i (m - m) = 0 \quad (3.3)$$

- Untuk kasus $b_i, n + 2 \leq i \leq n + m + 1$

- Kasus asiklik

Subgraf berarah tipe 4 tidak mempunyai lintasan Hamilton sebanyak i -simpul, untuk $n + 2 \leq i \leq n + m + 1$. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.1** dan **2.2.4**,

$$\sum_{j_1}^{w_1} \left| B(\langle U \rangle_{acyclic})_i^{(j_1)} \right| = 0.$$

- Kasus siklik

Subgraf berarah tipe 5 tidak mempunyai lintasan Hamilton sebanyak i -simpul, untuk $n + 2 \leq i \leq n + m + 1$, maka dapat disimpulkan berdasarkan **Teorema**

2.2.1 dan 2.2.4:

$$b_i = (-1)^i(0 + 0) = 0, \text{ untuk } n + 2 \leq i \leq n + m + 1.$$

Jadi dapat disimpulkan

$$b_i = (-1)^i(0 + 0) = 0. \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.1) dan (3.2) berdasarkan **Teorema 2.2.4** dapat disimpulkan

$$b_i = (-1)^i(0 + 0) = 0, \text{ untuk } n + 1 \leq i \leq n + m + 1. \quad (3.5)$$

Dari Persamaan (3.1), (3.2) dan (3.5) dapat disimpulkan polinomial karakteristik dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$ adalah $P\left(B\left(\overrightarrow{C_n S_m}\right)\right) = \lambda^{m+n+1} + b_1 \lambda^{m+n} + b_2 \lambda^{m+n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda^m + b_n \lambda^{m+1} + \dots + b_{n+m} \lambda + b_{n+m+1}$, dengan:

- a) $b_i = (-1)^i(m + n + 1)$, untuk $1 \leq i < n$,
- b) $b_i = (-1)^i(m + n)$, untuk $i = n$,
- c) $b_i = 0$, untuk $n + 1 \leq i \leq n + m + 1$. ■

Teorema 3.4.3. Jika $P\left(B\left(\overrightarrow{C_n S_m}\right)\right) = \lambda^{m+n+1} - (m + n + 1)\lambda^{m+n} + (m + n + 1)\lambda^{m+n-1} - (m + n + 1)\lambda^{m+n-2} + \dots + (-1)^n(m + n)\lambda^{m+1}$ adalah polinomial karakteristik dari suatu graf pot bunga berarah unisiklik, maka :

a) untuk $n = 2k$ dengan $k = 2, 3, 4, \dots$

- $\lambda_l = 0; l = 1, 2, \dots, m + 1;$
- $\lambda_{m+2} = m + n;$
- $\lambda_{m+3} = 1;$
- $\lambda_l = e^{i\frac{2j\pi}{n}}; l = m + 4, m + 5, \dots, m + n + 1; j = 1, 2, 3, \dots, n - 2; j \neq \frac{n}{2}$
dan $j \neq 0$.

b) untuk $n = 2k+1$ dengan $k = 1, 2, 3, \dots$

- $\lambda_l = 0; l = 1, 2, \dots, m + 1;$
- $\lambda_{m+2} = m + n;$
- $\lambda_l = e^{i\pi\left(\frac{2j+1}{n}\right)}; l = m + 3, m + 4, \dots, m + n + 1; j = 0, 1, 2, \dots, n - 1; j \neq \frac{n-1}{2}.$

Bukti

a) Untuk kasus $n = 2k$, $k = 2, 3, 4, \dots$, dari **Teorema 3.3.2** diketahui persamaan karakteristik dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik sebagai berikut.

$$P\left(B(\overrightarrow{C_n S_m})\right) = \lambda^{m+n+1} - (m+n+1)\lambda^{m+n} + (m+n+1)\lambda^{m+n-1} \\ - (m+n+1)\lambda^{m+n-2} + \dots + (-1)^n(m+n)\lambda^{m+1}$$

$$\lambda^{m+1}(\lambda^{2k} - (m+2k+1)\lambda^{2k-1} + (m+2k+1)\lambda^{2k-2} - (m+2k+1)\lambda^{2k-3} + \dots + (m+2k)) = 0 \quad (3.6)$$

Lalu digunakan metode Horner untuk memfaktorkan persamaan (3.6)

Sehingga didapat

$$\lambda^{m+1}[\lambda - (m+2k)][\lambda - 1][1 + \sum_{i=1}^{k-1}(\lambda^2)^i] = 0 \quad (3.7)$$

Dengan menggunakan rumus deret geometri dari persamaan (3.7) didapat

$$1 + \sum_{i=1}^{k-1}(\lambda^2)^i = \frac{\lambda^{2k}-1}{\lambda^2-1} \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.7) dan (3.8) didapat:

$$\lambda^{m+1} = 0, \lambda - (m+2k) = 0, \lambda - 1 = 0, \text{ atau } \frac{\lambda^{2k}-1}{\lambda^2-1} = 0.$$

Untuk $\lambda^{m+1} = 0$, didapat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m+1} = 0$.

Untuk $\lambda - (m+2k) = 0$, didapat $\lambda_{m+2} = (m+2k) = m+n$.

Untuk $\lambda - 1 = 0$, didapat $\lambda_{m+3} = 1$.

$$\text{Untuk } \frac{\lambda^{2k}-1}{\lambda^2-1} = 0, \text{ didapat } \lambda^{2k} = 1, \text{ dengan } \lambda \neq 1 \text{ dan } \lambda \neq -1. \quad (3.9)$$

Dengan menggunakan persamaan bilangan kompleks dari persamaan (3.9) didapat

$$\lambda_{m+4} = \lambda_{m+5} = \dots = \lambda_{m+2k+1} = e^{i\frac{j\pi}{k}}, \text{ untuk } j \neq \frac{n}{2} \text{ dan } j \neq 0.$$

Jadi untuk $n = 2k$, $k = 2, 3, 4, \dots$, nilai-nilai eigen matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik adalah:

- $\lambda_l = 0$; $l = 1, 2, \dots, m+1$;
- $\lambda_{m+2} = m+n$;
- $\lambda_{m+3} = 1$;
- $\lambda_l = e^{i\frac{2j\pi}{n}}$; $l = m+4, m+5, \dots, m+n+1$; $j = 1, 2, \dots, n-2$; $j \neq \frac{n}{2}$ dan $j \neq 0$.

b) Untuk kasus $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, dari **Teorema 3.3.2** diketahui persamaan karakteristik dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik sebagai berikut.

$$P\left(B(\overrightarrow{C_n S_m})\right) = \lambda^{m+n+1} - (m+n+1)\lambda^{m+n} + (m+n+1)\lambda^{m+n-1} - (m+n+1)\lambda^{m+n-2} + \dots + (-1)^n(m+n)\lambda^{m+1}$$

$$\lambda^{m+1}(\lambda^{2k+1} - (m+2k+2)\lambda^{2k} + (m+2k+2)\lambda^{2k-1} - (m+2k+2)\lambda^{2k-2} + \dots - (m+2k)) = 0$$

$$2k + 1)) = 0 \quad (3.10)$$

Lalu digunakan metode Horner untuk memfaktorkan persamaan (3.10)

Sehingga didapat

$$\lambda^{m+1}[\lambda - (m + 2k + 1)][1 + \sum_{i=1}^{2k} (-\lambda)^i] = 0 \quad (3.11)$$

Dengan menggunakan rumus deret geometri dari persamaan (3.11) didapat

$$1 + \sum_{i=1}^{2k} (-\lambda)^i = \frac{-\lambda^{2k+1}-1}{-\lambda-1} \quad (3.12)$$

Dari persamaan (3.11) dan (3.12) didapat:

$$\lambda^{m+1} = 0, \lambda - (m + 2k + 1) = 0, \text{ atau } \frac{-\lambda^{2k+1}-1}{-\lambda-1} = 0.$$

Untuk $\lambda^{m+1} = 0$, didapat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m+1} = 0$.

Untuk $\lambda - (m + 2k + 1) = 0$, didapat $\lambda_{m+2} = (m + 2k + 1) = m + n$

$$\text{Untuk } \frac{-\lambda^{2k+1}-1}{-\lambda-1} = 0, \text{ didapat } \lambda^{2k+1} = -1, \text{ dengan } \lambda \neq -1. \quad (3.13)$$

Dengan menggunakan persamaan bilangan kompleks dari persamaan (3.13) didapat

$$\lambda_{m+3} = \lambda_{m+4} = \dots = \lambda_{m+n+1} = e^{i\pi\left(\frac{2j+1}{n}\right)}, j \neq \frac{n-1}{2}$$

Jadi untuk $n = 2k + 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, nilai-nilai eigen matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik adalah:

- $\lambda_l = 0; l = 1, 2, \dots, m + 1;$
- $\lambda_{m+2} = m + n;$
- $\lambda_l = e^{i\pi\left(\frac{2j+1}{n}\right)}; l = m + 3, m + 4, \dots, m + n + 1; j = 0, 1, 2, \dots, n - 1;$
 $j \neq \frac{n-1}{2}.$

■

4. Kesimpulan

Dari hasil penelitian yang sudah dibahas pada Bab 3, didapat beberapa kesimpulan mengenai koefisien-koefisien dari polinomial karakteristik dan nilai-nilai eigen dari matriks antiketetanggaan dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$.

Misalkan $B(\overrightarrow{C_n S_m})$ adalah matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$. Misalkan $P(B(\overrightarrow{C_n S_m})) = \lambda^{m+n+1} + b_1 \lambda^{m+n} + b_2 \lambda^{m+n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda^m + b_n \lambda^{m+1} + \dots + b_{n+m} \lambda + b_{n+m+1}$ adalah polinomial karakteristik dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$ maka nilai-nilai koefisien dari polinomial karakteristiknya dapat dilihat pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Koefisien-Koefisien Polinomial Karakteristik Matriks $B(\overrightarrow{C_n S_m})$	
i	Nilai koefisien
$i = 1, 2, \dots, n - 1$	$b_i = (-1)^i(m + n + 1)$
$i = n$	$b_i = (-1)^i(m + n)$
$i = n + 1, n + 2, \dots, m + n + 1$	$b_i = 0$

Nilai-nilai eigen dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$ dapat dilihat pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Nilai-Nilai Eigen Matriks $B(\overrightarrow{C_n S_m})$		
n	Nilai eigen real	Nilai eigen kompleks
Genap	$\lambda_l = 0, l = 1, 2, \dots, m + 1$	$\lambda_l = e^{i\frac{2j\pi}{n}},$ $j \neq \frac{n}{2} \text{ dan } j \neq 0,$ $l = m + 4, m + 5, \dots, m + n + 1.$
	$\lambda_{m+2} = m + n$	
	$\lambda_{m+3} = 1$	
Ganjil	$\lambda_l = 0, l = 1, 2, \dots, m + 1$	$\lambda_l = e^{i\pi(\frac{2j+1}{n})},$ $j \neq \frac{n-1}{2},$ $l = m + 4, m + 5, \dots, m + n + 1.$
	$\lambda_{m+2} = m + n$	

5. Saran

Pada penelitian ini didapat beberapa hasil yaitu bentuk umum polinomial karakteristik dan nilai-nilai eigen dari matriks antiketetanggaan graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$. Untuk pengembangannya dapat dilakukan penelitian mengenai matriks ketetanggaan dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$. Kemudian dapat dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai polinomial karakteristik dan nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan dari graf pot bunga berarah unisiklik $\overrightarrow{C_n S_m}$.

6. Daftar Referensi

- Ahmad, M. (2012). *Pelabelan Graceful dan Pelabelan ρ pada Graf Pot Bunga dan Graf Pohon Palem*. Tesis: Universitas Indonesia.
- Bapat, R. B. (2010). *Graphs and Matrices*. London. Springer London.
- Brown, J. W. & Churchill R. V. (2009). *Complex Variables and Applications Eighth Edition*. New York. McGraw-Hill.
- Chartrand, G., Lesniak, L. & Zhang. P. (2016). *Graph and Digraphs (6th ed.)*. London. Chapman & Hall.
- Putra, A. P. (2015). *Polinomial Karakteristik Matriks Antiketetanggaan dari Graf Lingkaran Berarah $\overrightarrow{C_n}$ dan Graf Lingkaran Berarah dengan Penambahan Satu Chord $\overrightarrow{C_n^t}$* . Skripsi: Universitas Indonesia.

- Solihin, M. S. R. (2019). *Polinomial Karakteristik dan Nilai Eigen Matriks Anti-Ketetanggaan dari Gabungan Graf Lingkaran Berarah*. Skripsi: Universitas Indonesia.
- Wildan. (2015). *Polinomial Karakteristik dari Matriks Antiketanggaan dan Ketetanggaan dari Graf Berarah yang Diberi Orientasi*. Tesis: Universitas Indonesia.