Penyelesaian Sistem Persamaan Linier (SPL)

Binti Mamluatul Karomah, M.Kom

Definisi SPL

- Suatu sistem yang merupakan gabungan dari beberapa persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- SPL diatas mempunyai m persamaan dan n variabel
- SPL mempunyai minimal sebuah solusi, disebut konsisten, jika tidak mempunyai solusi disebut tidak konsisten

SPL

- Bentuk persamaan linier simultan dengan *n* persamaan dan *n* variabel bebas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bentuk Matrik SPL

- SPL dengan m persamaan dan n variabel

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- Bentuk SPL dapat ditulis dengan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

- Dapat ditulis Ax = B

Bentuk Matrik SPL

- Dimana $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$
- A adalah matrik koefisien dari SPL (matrik Jacobian).
- Vektor x disebut vektor variabel
- Vektor B disebut vektor konstanta

Augmented Matrik

- Matrik yang merupakan perluasan matrik A dengan dengan menambahkan vektor B pada kolom terakhirnya

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Contoh

$$x + 3y + 2z = 44$$

$$x + 4y + z = 49$$

$$2x + 5y + 5z = 83$$

- Bentuk matrik SPL

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 49 \\ 83 \end{bmatrix}$$

- Augmented Matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 44 \\ 1 & 4 & 1 & 49 \\ 2 & 5 & 5 & 83 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian SPL

- Berdasarkan penyelesaiannya, SPL dibedakan menjadi 3 macam:
  - Tidak mempunyai penyelesaian (*no solutions*)
  - Tepat satu penyelesaian (*exactly one solution*)
  - Banyak penyelesaian(*infinitely many solutions*)

Operasi-operasi Dasar (Elementary Operations)

- Terdapat dua tahap untuk menyelesaikan SPL yaitu:
  - Reduksi sistem (mengeliminasi variabel)
  - Mendeskripsikan himpunan penyelesaian
- Tujuan dari reduksi sistem adalah untuk menyederhanakan SPL dengan mengeliminasi variabel-variabel, sehingga sistem yang dihasilkan mempunyai himpunan penyelesaian yang sama dengan sistem aslinya.

Sistem *equivalent*

- Definisi

  Dua SPL dengan n variabel disebut *equivalent* jika SPL tersebut mempunyai himpunan penyelesaian yang sama

Operasi Baris Elementer

- Untuk reduksi sistem, SPL menggunakan operasi baris elementer (elementary row operations). Terdapat 3 operasi :
  - Menukar dua baris ($R_i \leftrightarrow R_j$)
  - Mengalikan sebuah baris dengan sebuah skalar ($k R_i$)
  - Menambah perkalian k dengan sebuah baris dengan baris lainnya. ($R_i + kR_j$)

Operasi Baris Elementer

- Menambah perkalian k dengan sebuah baris dengan baris lainnya. $(R_i + kR_j)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- B2 – 2B1 artinya elemen-elemen pada baris kedua dikurangi dengan dua kali elemen pada baris ke satu

- $-2B_1$: -2 -2 -4 18

  B_2 : 2 4 -3 1

  B2 – 2B1 : 0 2 -7 19 (menjadi elemen baris ke-2)

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + \ y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{aligned} x + \ y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3 - 3B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 3B_1}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \xrightarrow{1/2B_2} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2} z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \xrightarrow{-2B_3} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x \quad\quad + \tfrac{11}{2} z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow[\mathbf{B_2 + 7/2\ B_3}]{\mathbf{B_1 - 11/2\ B_3}} \begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{B_2 + 7/2\ B_3}]{\mathbf{B_1 - 11/2\ B_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- SPL diatas mempunyai penyelesaian tunggal x=1,y=2,z=3
- Proses reduksi pada contoh diatas disebut ***Eliminasi Gauss-Jordan***

Contoh

$2x_2 + x_3 = -2$

$3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1$

$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 3B_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_2}$$

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - 2B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 2B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1/3B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 + 5B_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- **SPL diatas mempunyai penyelesaian tunggal yaitu x1=7, x2=-2 dan x3=-2**

Penyelesaian dengan Metode Numerik

- Metode Eliminasi Gauss
- Metode Eliminasi Gauss-Jordan
- Metode Iterasi Gauss-Seidel

Metode Eliminasi Gauss

- Metode Eliminasi Gauss merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variable sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variable bebas
- matrik diubah menjadi augmented matrik :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Metode Eliminasi Gauss

- ubah matrik menjadi matrik segitiga atas atau segitiga bawah dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

- Sehingga penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(-c_{n-1,n}x_n + d_{n-1}\right)$$

....

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \ldots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \ldots - c_{1n}x_n\right)$$

Contoh :

- Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Contoh :

- Lakukan operasi baris elementer

$$\begin{array}{l} B_2 - B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 + B_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Contoh :

- Penyelesaian :

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(-4-(2)3\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}\left(6-2-3\right) = 1$$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss Naif (Biasa)

- Masukkan ukuran matrik N, matrik A dan vektor B
- Buat matrik augmented [A|B] namakan dengan a
- Untuk baris ke-i=0 s/d i<n-1

  Untuk baris ke-j=i+1 s/d j<n

  Lakukan Operasi Baris Elementer

  Hitung $c = \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$

  Untuk kolom k=0 s/d n

  Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c * a_{i,k}$
- Hitung akar untuk i=n s/d 1

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - -a_{i,n}x_n\right)$$

Contoh

- Selesaikan SPL berikut ini dengan metode Eliminasi Gauss

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\
3x_1 + 6x_2 \quad\quad &= 9 \\
2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}
\quad
\begin{matrix} B_2 - 3B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{matrix}
\quad
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\quad
B_2 \leftrightarrow B_3
\quad
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}
$$

Contoh

- Elemen a_{22} yang akan menjadi pivot pada operasi baris 2 ternyata sama dengan nol. Karena itu, pada operasi baris 2, elemen baris 2 dipertukarkan dengan elemen baris 3.
- Proses pertukaran baris terjadi akibat proses pivoting. Sekarang elemen $a_{22} = 4 \neq 0$ sehingga operasi baris elementer dapat diteruskan.

Masalah Pivoting

- Melakukan pertukaran baris untuk menghindari pivot yang bernilai nol adalah cara pivoting yang sederhana (*simple pivoting*)
- Masalah lain yang dapat timbul bila elemen pivot sangat dekat ke nol.

Strategy Pivoting

- Prinsip strategy pivoting adalah jika $a_{p,p}^{(p-1)} = 0$, cari baris k dengan $a_{k,p} \neq 0$ dan $k > p$, lalu pertukarkan baris p dan baris k.

Jenis pivoting (1)

- *Partial pivoting* (pivoting sebagian)
  - Pivot dipilih dari semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar.

    $|a_{k,p}| = \max\{|a_{p,p}|, |a_{p+1,p}|, \ldots, |a_{n-1,p}|, |a_{n,p}|\}$
  - Lalu pertukarkan baris ke-k dengan baris ke-p.
  - Misal setelah operasi baris pertama diperoleh matrik sbb:

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

  - Untuk operasi baris kedua, carilah elemen x pada kolom ke-2 mulai baris ke-2 s/d kolom ke-4 yang nilai mutlaknya terbesar, lalu pertukarkan barisnya dengan baris ke-2.
  - Elemen x yang nilai mutlaknya terbesar itu sekarang menjadi pivot untuk operasi baris selanjutnya.

Jenis pivoting (2)

- *Complete pivoting* (pivoting lengkap)
  - Disamping baris, kolom juga diikutkan dalam pencarian elemen terbesar dan kemudian dipertukarkan, maka strategi ini disebut pivoting lengkap.
  - Pivoting lengkap jarang dipakai dalam program sederhana karena pertukaran kolom mengubah urutan suku x dan akibatnya menambah kerumitan program secara berarti

Contoh

- Selesaikan SPL dengan metode Eliminasi Gauss dengan strategi pivoting

$$\begin{aligned} 0.0003x_1 + 1.566x_2 &= 1.569 \\ 0.3454x_1 - 2.436x_2 &= 1.018 \end{aligned}$$

- **Penyelesaian**
- Baris pertama dipertukarkan dengan baris ke-2 sehingga 0.3454 menjadi pivot

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0.3454 & -2.436 & 1.018 \end{bmatrix} \quad \mathrm{R}_2 \leftrightarrow \mathrm{R}_1 \quad \begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0.0003 & 1.566 & 1.569 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}_2 - \frac{0.0003}{0.3454}\mathrm{R}_1 \quad \begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0 & 1.568 & 1.568 \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss Jordan

- Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

- Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai d1,d2,d3,…,dn dan atau:

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \dots, x_n = d_n$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (1/1)

- Selesaikan persamaan linier simultan:

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B_2 - 2b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Lakukan operasi baris elementer

Penyelesaian persamaan linier simultan :
$x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (1/4)

$$\begin{aligned} x + \quad y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_2\text{-}2B_1} \begin{aligned} x + \quad y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3\text{-}3B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2\text{-}2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3\text{-}3B_1}$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (2/4)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \xrightarrow{\frac{1}{2} B_2} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (3/4)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2} z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \xrightarrow{-2\,B_3} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2\,B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{2} & -\tfrac{17}{2} \\ & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (4/4)

$$\begin{aligned} x \quad + \tfrac{11}{2} z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow[B_1 - 11/2\, B_3]{B_2 + 7/2\, B_3} \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_1 - 11/2\, B_3]{B_2 + 7/2\, B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Solusi x = 1, y=2 dan z=3

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier (SPL)

Binti Mamluatul Karomah, M.Kom

Definisi SPL

- Suatu sistem yang merupakan gabungan dari beberapa persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- SPL diatas mempunyai m persamaan dan n variabel
- SPL mempunyai minimal sebuah solusi, disebut konsisten, jika tidak mempunyai solusi disebut tidak konsisten

SPL

- Bentuk persamaan linier simultan dengan *n* persamaan dan *n* variabel bebas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bentuk Matrik SPL

- SPL dengan m persamaan dan n variabel

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- Bentuk SPL dapat ditulis dengan

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}
$$

- Dapat ditulis Ax = B

Bentuk Matrik SPL

- Dimana $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

- A adalah matrik koefisien dari SPL (matrik Jacobian).
- Vektor x disebut vektor variabel
- Vektor B disebut vektor konstanta

Augmented Matrik

- Matrik yang merupakan perluasan matrik A dengan dengan menambahkan vektor B pada kolom terakhirnya

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Contoh

x + 3y + 2z = 44

x + 4y + z = 49

2x + 5y + 5z = 83

- Bentuk matrik SPL

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 49 \\ 83 \end{bmatrix}$$

- Augmented Matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 44 \\ 1 & 4 & 1 & 49 \\ 2 & 5 & 5 & 83 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian SPL

- Berdasarkan penyelesaiannya, SPL dibedakan menjadi 3 macam:
  - Tidak mempunyai penyelesaian (*no solutions*)
  - Tepat satu penyelesaian (*exactly one solution*)
  - Banyak penyelesaian(*infinitely many solutions*)

Operasi-operasi Dasar (Elementary Operations)

- Terdapat dua tahap untuk menyelesaikan SPL yaitu:
  - Reduksi sistem (mengeliminasi variabel)
  - Mendeskripsikan himpunan penyelesaian
- Tujuan dari reduksi sistem adalah untuk menyederhanakan SPL dengan mengeliminasi variabel-variabel, sehingga sistem yang dihasilkan mempunyai himpunan penyelesaian yang sama dengan sistem aslinya.

Sistem *equivalent*

- Definisi

  Dua SPL dengan n variabel disebut *equivalent* jika SPL tersebut mempunyai himpunan penyelesaian yang sama

Operasi Baris Elementer

- Untuk reduksi sistem, SPL menggunakan operasi baris elementer (elementary row operations). Terdapat 3 operasi :
  - Menukar dua baris ($R_i \leftrightarrow R_j$)
  - Mengalikan sebuah baris dengan sebuah skalar ($k R_i$)
  - Menambah perkalian k dengan sebuah baris dengan baris lainnya. ($R_i + kR_j$)

Operasi Baris Elementer

- Menambah perkalian k dengan sebuah baris dengan baris lainnya. $(R_i + kR_j)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- B2 – 2B1 artinya elemen-elemen pada baris kedua dikurangi dengan dua kali elemen pada baris ke satu

- $-2B_1$: -2 -2 -4 18

  B_2 : 2 4 -3 1

  B2 – 2B1 : 0 2 -7 19 (menjadi elemen baris ke-2)

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3 - 3B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 3B_1}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \xrightarrow{1/2B_2} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 3B_2}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2} z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \xrightarrow{-2B_3} \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

Contoh Penggunaan Operasi Baris Elementer

$$\begin{aligned} x \qquad + \tfrac{11}{2} z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow[\mathbf{B_2 + 7/2\ B_3}]{\mathbf{B_1 - 11/2\ B_3}} \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{B_2 + 7/2\ B_3}]{\mathbf{B_1 - 11/2\ B_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- SPL diatas mempunyai penyelesaian tunggal `x=1,y=2,z=3`
- Proses reduksi pada contoh diatas disebut ***Eliminasi Gauss-Jordan***

Contoh

$2x_2 + x_3 = -2$

$3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1$

$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 3B_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_2}$$

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - 2B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - 2B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1/3B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 + 5B_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 2B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- **SPL diatas mempunyai penyelesaian tunggal yaitu x1=7, x2=-2 dan x3=-2**

Penyelesaian dengan Metode Numerik

- Metode Eliminasi Gauss
- Metode Eliminasi Gauss-Jordan
- Metode Iterasi Gauss-Seidel

Metode Eliminasi Gauss

- Metode Eliminasi Gauss merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variable sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variable bebas
- matrik diubah menjadi augmented matrik :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Metode Eliminasi Gauss

- ubah matrik menjadi matrik segitiga atas atau segitiga bawah dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \ldots & c_{3n} & d_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

- Sehingga penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(-c_{n-1,n}x_n + d_{n-1}\right)$$

....

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \ldots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \ldots - c_{1n}x_n\right)$$

Contoh :

- Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut :

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 6 \\
1 & 2 & -1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 10
\end{bmatrix}
$$

Contoh :

- Lakukan operasi baris elementer

$$\begin{array}{l} B_2 - B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 + B_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Contoh :

- Penyelesaian :

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(-4-(2)3\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}\left(6-2-3\right) = 1$$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss Naif (Biasa)

- Masukkan ukuran matrik N, matrik A dan vektor B
- Buat matrik augmented [A|B] namakan dengan a
- Untuk baris ke-i=0 s/d i<n-1

  Untuk baris ke-j=i+1 s/d j<n

  Lakukan Operasi Baris Elementer

  Hitung $c = \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$

  Untuk kolom k=0 s/d n

  Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c * a_{i,k}$

- Hitung akar untuk i=n s/d 1

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - -a_{i,n}x_n\right)$$

Contoh

- Selesaikan SPL berikut ini dengan metode Eliminasi Gauss

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\
3x_1 + 6x_2 \quad &= 9 \\
2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}
\quad
\begin{matrix} B_2 - 3B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{matrix}
\quad
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\quad B_2 \leftrightarrow B_3 \quad
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}
$$

Contoh

- Elemen a_{22} yang akan menjadi pivot pada operasi baris 2 ternyata sama dengan nol. Karena itu, pada operasi baris 2, elemen baris 2 dipertukarkan dengan elemen baris 3.
- Proses pertukaran baris terjadi akibat proses pivoting. Sekarang elemen $a_{22} = 4 \neq 0$ sehingga operasi baris elementer dapat diteruskan.

Masalah Pivoting

- Melakukan pertukaran baris untuk menghindari pivot yang bernilai nol adalah cara pivoting yang sederhana (*simple pivoting*)
- Masalah lain yang dapat timbul bila elemen pivot sangat dekat ke nol.

Strategy Pivoting

- Prinsip strategy pivoting adalah jika $a_{p,p}^{(p-1)} = 0$, cari baris k dengan $a_{k,p} \neq 0$ dan $k > p$, lalu pertukarkan baris p dan baris k.

Jenis pivoting (1)

- *Partial pivoting* (pivoting sebagian)
  - Pivot dipilih dari semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar.

    $|a_{k,p}| = \max\{|a_{p,p}|, |a_{p+1,p}|, \ldots, |a_{n-1,p}|, |a_{n,p}|\}$
  - Lalu pertukarkan baris ke-k dengan baris ke-p.
  - Misal setelah operasi baris pertama diperoleh matrik sbb:

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

  - Untuk operasi baris kedua, carilah elemen x pada kolom ke-2 mulai baris ke-2 s/d kolom ke-4 yang nilai mutlaknya terbesar, lalu pertukarkan barisnya dengan baris ke-2.
  - Elemen x yang nilai mutlaknya terbesar itu sekarang menjadi pivot untuk operasi baris selanjutnya.

Jenis pivoting (2)

- *Complete pivoting* (pivoting lengkap)
  - Disamping baris, kolom juga diikutkan dalam pencarian elemen terbesar dan kemudian dipertukarkan, maka strategi ini disebut pivoting lengkap.
  - Pivoting lengkap jarang dipakai dalam program sederhana karena pertukaran kolom mengubah urutan suku x dan akibatnya menambah kerumitan program secara berarti

Contoh

- Selesaikan SPL dengan metode Eliminasi Gauss dengan strategi pivoting

$$\begin{aligned} 0.0003x_1 + 1.566x_2 &= 1.569 \\ 0.3454x_1 - 2.436x_2 &= 1.018 \end{aligned}$$

- **Penyelesaian**
- Baris pertama dipertukarkan dengan baris ke-2 sehingga 0.3454 menjadi pivot

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0.3454 & -2.436 & 1.018 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_1 \quad \begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0.0003 & 1.566 & 1.569 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - \frac{0.0003}{0.3454} R_1 \quad \begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0 & 1.568 & 1.568 \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss Jordan

- Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

- Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai d1,d2,d3,…,dn dan atau:

$$0 \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad d_3$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \dots, x_n = d_n$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (1/1)

- Selesaikan persamaan linier simultan:

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

- Augmented matrik dari persamaan linier simultan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- Lakukan operasi baris elementer

$$B_2 - 2b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan linier simultan :
$x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (1/4)

$$\begin{aligned} x + \quad y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{B_2\text{-}2B_1} \quad \begin{aligned} x + \quad y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{B_3\text{-}3B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2\text{-}2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3\text{-}3B_1}$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (2/4)

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
2y - 7z &= -17 \\
3y - 11z &= -27
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{\text{½ } B_2} \quad
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\
3y - 11z &= 0
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{B_3 - 3B_2}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 2 & 9 \\
0 & 2 & -7 & -17 \\
0 & 3 & -11 & -27
\end{bmatrix}
\quad \xrightarrow{\text{½ } B_2} \quad
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 2 & 9 \\
0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\
 & 3 & -11 & -27
\end{bmatrix}
\quad \xrightarrow{B_3 - 3B_2}
$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (3/4)

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\
-\tfrac{1}{2} z &= -\tfrac{3}{2}
\end{aligned}
\xrightarrow{-2\,B_3}
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\
z &= 3
\end{aligned}
\xrightarrow{B_1 - B_2}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 2 & 9 \\
0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}
\end{bmatrix}
\xrightarrow{-2\,B_3}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 2 & 9 \\
0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\
 & 0 & 1 & 3
\end{bmatrix}
\xrightarrow{B_1 - B_2}
$$

Contoh Eliminasi Gauss Jordan (4/4)

$$\begin{aligned} x \quad + \tfrac{11}{2} z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2} z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow[\text{B}_1 - 11/2\ \text{B}_3]{\text{B}_2 + 7/2\ \text{B}_3} \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{B}_1 - 11/2\ \text{B}_3]{\text{B}_2 + 7/2\ \text{B}_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Solusi x = 1, y=2 dan z=3