People
Innovation
Excellence

LECTURE NOTES

Week ke - 02

Kuantor

LEARNING OUTCOMES

1. Peserta diharapkan mampu menjelaskan konsep dasar logika, dan kalimat berkuantor dan metode-metode pembuktian.

2. Peserta diharapkan mampu mengeksplore penerapan konsep dasar logika pada masalah nyata

OUTLINE MATERI :

1. Pernyataan Berkuantor
2. Ingkaran Suatu Pernyataan Berkuantor
3. Kuantor Ganda

Kuantor

1. Pernyataan Berkuantor

Kuantor merupakan suatu lambang yang apabila dibubuhkan pada suatu kalimat terbuka akan mengubah kalimat terbuka tersebut menjadi suatu kalimat tertutup atau pernyataan. Macam-macam kuantor adalah sebagai berikut :

1. Kuantor Universal

   Kuantor universal menunjukkan bahwa setiap/semua obyek dalam semestanya mempunyai sifat kalimat yang menyatakannya.

   Notasi: "$\forall$ ", dibaca " semua atau setiap"

   jika p(x) merupakan suatu kalimat terbuka maka:

   $(\forall x)$ p(x) dibaca "untuk semua/setiap x berlaku p(x)" bernilai benar jika dan hanya jika p(x) benar untuk semua x dalam semestanya.

   Contoh 1a. $(\forall x \in R)\ x^2 \geq 0$ Dapat dibaca sebagai:

   - ✓ Kuadrat semua bilangan real tidak ada yang negatif
   - ✓ Semua bilangan real mempunyai kuadrat tak negatif
   - ✓ Setiap bilangan real mempunyai kuadrat tak negatif
   - ✓ Semestanya adalah himpunan bilangan bulat,

   Pernyataan ini adalah bernilai benar, karena untuk semua x bilangan Real, maka kuadrat bilangan tersebut pasti non negative ($x \geq 0$).

   Sebaliknya jika ada satu saja nilai x yang tidak memenuhi, sehingga p(x) bernilai salah. Nilai x yang menyebabkan suatu kuantor universal bernilai salah disebut dengan contoh penyangkal atau counter example.

Contoh 1b. Benar atau salahkah pernyataan berkuantor berikut:($\forall x \in$ Bulat) $x^2 + x - 2 = 0$

Penyelesaian:

Meskipun ada nilai x yang memenuhi persamaan $x^2 + x - 2 = 0$, tetapi tidak semua bilangan bulat x yang memenuhi persamaan tersebut, misalkan kita ambil nilai x = 2, maka persamaannya 22 + 2 – 2 = 4 ≠ 0, maka ini jelas merupakan pernyataan yang salah (S), sehingga x=2 sebagai counter example.

2. Kuantor Eksistensial

Kuantor eksistensial berarti ada/beberapa obyek dalam semestanya mempunyai sifat kalimat yang menyatakannya. notasi: "∃", dibaca "ada/beberapa/terdapat/paling sedikit satu". Jika p(x) merupakan suatu kalimat terbuka maka: (∃x) p(x), dibaca "ada suatu x sehingga berlaku p(x)" bernilai benar jika dan hanya jika paling sedikit ada satu nilai x dalam semestanya yang menyebabkan p(x) benar, dan akan bernilai salah jika untuk semua x dalam semestanya menyebabkan p(x) salah.

Contoh:

1a. ($\exists x \in$ Bulat) $x^2 = x$ artinya :

- ✓ Ada bilangan bulat yang kuadratnya sama dengan bilangan itu sendiri
- ✓ Beberapa bilangan bulat yang kuadratnya sama dengan bilangan itu sendiri
- ✓ Terdapat paling sedikit satu bilangan bulat yang kuadratnya sama dengan bilangan itu sendiri.

Pernyataan tersebut bernilai benar bahwa terdapat minimal satu bilangan bulat dimana kuadrat nya adalah sama dengan bilangan itu sendiri yaitu jika x=1.

1b. Semestanya adalah himpunan bilangan bulat, benar atau salahkah pernyataan berkuantor berikut: ($\exists x \in$ Bulat) $x^2 + x - 2 = 0$?

Penyelesaian:

$x^2 + x - 2 = 0$ dapat difaktorkan: (x+2)(x-1) = 0 Jadi persamaan itu dapat dipenuhi untuk x1= -2 dan x2 = 1. Sehingga memang benar ada x yang memenuhi persamaan $x^2 + x - 2 = 0$ yaitu -2 atau 1 sehingga pernyataan bernilai benar (B)

2. Ingkaran Suatu Pernyataan Berkuantor

1. Ingkaran Kuantor Universal

Ingkaran dari: “untuk semua/setiap x berlaku p(x): adalah

“ada(paling sedikit satu) x yang tidak berlaku p(x)” atau

$\sim(\forall x)\ p(x) \equiv (\exists x) \sim p(x)$,

Misalkan ada pernyataan

p: Semua siswa telah pulang dari sekolah

jika kita dapat menemukan paling sedikit 1 siswa yang belum pulang, maka pernyataan dari p bernilai salah (S).

Contoh:

a. $(\forall x \in \text{Bulat})\ x^2 + x - 2 = 0$

b. Semua ikan hiu telah musnah

c. $(\forall x \in \text{Cacah})\ x^2 + 1 > 0$

Penyelesaian:

a. $(\exists x \in \text{Bulat})\ x^2 + x - 2 \neq 0$

b. Kalimat mula-mula : ($\forall x \in$Ikan Hiu) (x telah musnah) Ingkaran : ($\exists$x Ikan Hiu) (x belum musnah) Dalam bahasa sehari-hari: “ Ada Ikan Hiu yang belum musnah”

c. $(\exists x \in \text{Cacah})\ x^2 + 1 \leq 0$ 2.

2. Ingkaran Kuantor eksistensial

Ingkaran dari “ada suatu x sehingga berlaku p(x): adalah “untuk semua/setiap x tidak berlaku p(x)”

Ingkaran kalimat berkuantor universal adalah kalimat berkuantor eksistensial, sedangkan ingkaran kalimat berkuantor eksistensial adalah kalimat berkuantor universal. Jika terdapat kalimat kuantor universal $(\forall x)\ p(x)$ dan kalimat berkuantor eksistensial $(\exists x)\ p(x)$, ingkaran dari keduanya dapat ditulis sebagai berikut:

People
Innovation
Excellence

$\sim(\exists x)\ p(x) \equiv (\forall x) \sim p(x)$,

Contoh:

Tentukan Ingkaran dari Pernyataan Berkuantor berikut:

a. $(\exists x \in \text{Bulat})\ x^2 + x - 1 > 0$

b. Terdapat bilangan bulat x sedemikian hingga $x^2 = 9$

c. Ada Hewan yang berkaki empat

Penyelesaian:

a. $(\forall x \in \text{Bulat})\ x^2 + x - 1 \leq 0$

b. Kalimat awal : $(\exists x \in \text{Bulat})\ x^2 = 9$

Ingkaran : $(\forall x \in \text{Bulat})\ x^2 \neq 9$. Dalam bahasa sehari-hari: “Kuadrat semua bilangan bulat tidak sama dengan 9 ”

c. Semua Hewan tidak berkaki empat

3. Kuantor Ganda

Domain atau semesta pembicaraan penafsiran kuantor sangat penting untuk menentukan jenis kuantor yang akan digunakan serta mempengaruhi penulisan simbolnya. Misal pernyataan “Setiap orang mencintai Jogjakarta” . Selanjutnya, dapat ditulis simbolnya dengan logika predikat $(\forall x)C(x,j)$. Simbol tersebut dapat dibaca “Untuk semua y, y mencintai Jogjakarta”. Persoalan yang terjadi adalah domain penafsiran seseorang untuk y bisa berbeda-beda. Ada orang yang menganggap y adalah manusia, tetapi mungkin orang lain menganggap y bisa mahluk hidup apa saja dan mungkin y bisa menjadi benda apa saja. Tentu saja domain penafsiran semacam ini kacau karena yang dimaksudkan pasti hanya orang atau manusia. Oleh karena itu, untuk memastikan bahwa domain penafsiran hanya orang, penulisan simbol harus diperbaiki seperti berikut :

$$(\forall y)(O(y) \Rightarrow C(y,j)$$

Sekarang simbol tersebut dapat dibaca ”Untuk semua y jika y adalah orang, maka y mencintai Jogjakarta”.

Untuk menulis simbol yang tepat, memang harus menempatkan terlebih dahulu domain penafsiran karena domain penafsiran Sangat mempengaruhi penulisan dan sekaligus menghindari terjadinya ambiguitas. Contoh domain penafsiran yang bersifat umum antara lain manusia, binatang, tumbuh-tumbuhan, bilangan prima, bilangan asli, dan sebagainya, yang nantinya akan menggunakan kuantor universal. Akan tetapi jika tidak semuanya, misalnya beberapa manusia, atau satu manusia saja, akan memakai kuantor yang berbeda yaitu kuantor eksisitensial. Untuk dua kuantor yang berbeda pada satu penulisan simbol yang berasal dari satu pernyataan dapat dilihat pada contoh berikut:

Misal "Setiap orang dicintai oleh seseorang"

Dengan notasi simbol logika predikat, akan ditulis seperti berikut

$$(\forall x)(\exists y)C(y,x)$$

Yang dapat dibaca "Untuk semua x, terdapat y dimana y mencintai x"

Misal H(x): x hidup , M(x): x mati

$(\forall x)(H(x) \vee M(x))$ dibaca "Untuk semua x, x hidup atau x mati" Akan tetapi jika ditulisnya $((\forall x)(H(x)) \vee M(x)$ maka dibaca "Untuk semua x hidup, atau x mati". Pada "x mati", x tidak terhubung dengan kuantor universal, yang terhubung hanya"x hidup". Perhatikan penulisan serta peletakan tanda kurungnya. Sehingga secara umum, hubungan antara penempatan kuantor ganda adalah sebagai berikut :

$$(\forall x)(\forall y)\, P(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)\, P(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)\, P(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)\, P(x,y)$$

$$(\exists x)(\forall y)\, P(x,y) \equiv (\forall y)(\exists x)\, P(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)\, P(x,y) \equiv (\forall y)(\exists x)\, P(x,y)$$

Ingkaran kalimat berkuantor ganda dilakukan dengan cara yang sama seperti ingkaran pada kalimat berkuantor tunggal.

$$\neg[(\exists x)(\forall y)\, P(x,y)] \equiv (\forall x)(\exists y)\, \neg P(x,y)$$

$$\neg[(\forall x)(\exists y)\, P(x,y)] \equiv (\exists x)(\forall y)\, \neg P(x,y)$$

Contoh:

Misal : “Ada seseorang yang mengenal setiap orang”. Untuk menentukan bentuk simbolnya.

1. Jadikan potongan pernyataan ”x kenal y”, maka akan menjadi K(x,y) yang berarti “ x kenal y”.
2. Jadikan potongan pernyataan ”x kenal semua y”, sehingga menjadi $(\forall y)\ K(x,y)$.
3. Jadikan pernyataan “ada x, yang x kenal semua y”, sehingga menjadi $(\exists x)(\forall y)\ K(x,y)$

KESIMPULAN

1. Kuantor merupakan suatu lambang yang apabila dibubuhkan pada suatu kalimat terbuka akan mengubah kalimat terbuka tersebut menjadi suatu kalimat tertutup atau pernyataan.
2. Ada 2 macam kuantor yaitu:
    1. Kuantor Universal, symbol $\forall$ yang menyatakan tanda untuk keseluruhan obyek yang dibicarakan
    2. Kuantor Eksistensial, symbol $\exists$ yang menyatakan tanda untuk sebagian dari obyek yang dibicarakan.
3. Negasi dari kuantor adalah:
    1. Ingkaran Kuantor Universal

        $\sim(\forall x)\ p(x) \equiv (\exists x) \sim p(x)$,

    2. Ingkaran kuantor Eksistensial

        $\sim(\exists x)\ p(x) \equiv (\forall x) \sim p(x)$
4. Macam-macam kuantor ganda adalah:

    $(\forall x)(\forall y)\ P(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)\ P(x,y)$

    $(\exists x)(\exists y)\ P(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)\ P(x,y)$

    $(\exists x)(\forall y)\ P(x,y) \equiv (\forall y)(\exists x)\ P(x,y)$

    $(\forall x)(\exists y)\ P(x,y) \equiv (\forall y)(\exists x)\ P(x,y)$

DAFTAR PUSTAKA

1. Wibisono S, (2008), ***Matematika Diskrit,*** 2th edition, Graha Ilmu, Yogyakarta.
2. Jong Jek Siang, Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer, Andi Offset, Yogyakarta.2009