Method of Proof

Metode Pembuktian
- Langsung
- Tak Langsung (Kontradiksi)

: Kontraposisi — $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ ✓
: Kontradiksi

6) Contoh : jika n genap maka n^2 juga genap

jika n genap maka $(2 \cdot 17)$ bilangan bulat

$n^2 = (2k)^2$

$n^2 = 4k^2$

$= 2(2k^2)$ $\quad n = 2k^2$ juga integer

$= m$

genap

$p \to q$ ekuivalen dengan $\sim q \to \sim p$

Jadi, terbukti bahwa jika n genap maka n^2 genap

4) jika n^2 genap maka n juga genap $(p \to q)$

n^2 genap genap $\quad n^2$ ✗

kontraposisi : $\sim q \to \sim p$

n ganjil $\quad n^2$ ganjil

maka $n = 2k+1$ ← bilangan bulat

$n^2 = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

m : bilangan bulat

$= 2m + 1$

ganjil

Jadi benar bahwa jika n ganjil maka n^2 juga ganjil.
Sebaliknya terbukti jika n^2 genap maka n juga genap.

Metode Langsung : Contoh Eksplisit
Hanya contoh untuk kesimpulan

Contoh : Untuk semua bilangan bulat a dan b,
jika $a|b$ dan $b|a$ maka $a=b$

Misal $(a=1)$, $(b=1)$ maka benar bahwa $1|-1$ dan $-1|1$
benar $\quad 1=-1$

3. Induksi Matematika

Langkah :
1) Base step : $P(n_0)$ benar, nilai pertama
2) Hypothesis step : $P(x,k)$: asumsi benar
3) Inductive step : $P(x+1)$ membuktikan pernyataan benar

Contoh : Buktikan dengan induksi matematika bahwa
$1+2+\cdots+n = n\frac{(n+1)}{2}$, untuk semua $n \geq 1$

1) Base step : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$1 = \frac{1(2)}{2} \Rightarrow 1 = 1$ (benar)

2) Hypothesis step : $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, asumsi benar

3) IS : $1+2+3+\cdots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\underbrace{1+2+3+\cdots+k}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$ terbukti benar

misal : $n^2 - 3$ habis dibagi

Set Theory & Function

I. Set Theory / Teori Himpunan

1) Himpunan : kumpulan dimana? yang kita teorisir

a. Simbol : $\in, \notin, \{\}, \subseteq, \supseteq$

$\in$: anggota himpunan
$x \in S$: x anggota himpunan S
$x \notin S$: x bukan anggota himpunan S
$\emptyset$: $\{\}$: himpunan hampa

Contoh : $A = \{1,2,3\}$
$B = \{1,2,2,2,3,3,3\}$
$C = \{1,3,1\}$

Apakah $A = B$? yes
$A = C$ ...? yes
$A = B = C$

$\subseteq$: Subset (himpunan bagian)
$\supseteq$: Superset (himpunan pemuat)
$A \subseteq B \rightarrow B \supseteq A$

Contoh :
1) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ ✓
2) $\emptyset \subseteq \{1,2,3\}$ ✓
3) $\emptyset \in \{1,2,3\}$ ✗
4) $\emptyset \subseteq \{\emptyset,1,2,3\}$ ✓
5) $\emptyset \subseteq \{\emptyset,1,2,3\}$ ✓

Cara Himpunan Himpunan
1) Cara Eksplisit : (tentukan semua)
Contoh $A = \{1,2,3,4,5\}$
$B = \{a,i,u,e,o\}$
2) Secara Implisit
Contoh $A = \{1,2,3,\ldots\}$ → himpunan bilangan asli
$B = \{2,3,5,7,\ldots\}$ → himpunan bilangan prima
3) Notasi Himpunan Himpunan
Contoh : $A = \{x \mid x$ adalah bilangan prima$\}$
$B = \{x \mid x$ adalah bilangan genap$\}$

Cardinalitas

Untuk menyatakan jumlah anggota himpunan
Simbol : $|A|$: jml anggota dlm A
Contoh :
$A = \{1,1,1,2,2,2,3,3,3\} \rightarrow |A| = 3$
$B = \{a,a,a,a\} \rightarrow |B| = 1$
$C = \{\}$ $\rightarrow |C| = 0$
$D = \{0,1,2,3,\ldots\}$ $\rightarrow |D| = \infty$ (tak terhingga)

Power Set (Himpunan Kuasa)

Merupakan kelompokan semua hasil yang dari suatu himpunan.
Simbol : $P(S)$: himpunan kuasa dari himpunan S
$|P(S)| = 2^{|S|}$

contoh : $S = \{a\}$, $P(S) = \{\emptyset, \{a\}\}$ $\quad 2^1 = 2$
$S = \{a,b\}$, $P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ $\quad 2^2 = 4$
$S = \emptyset$ $\quad P(S) = \{\emptyset\}$ $\quad 2^0 = 1$

Operasi Himpunan → Aljabar

Contoh : Aplikasi Operasi Elemen

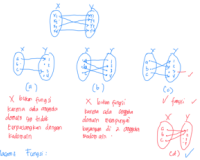
Eg) 1) Diketahui banyaknya bilangan bulat dari 1 sd 1000 yang habis dibagi 3 adalah 333 (A)
2) Diketahui banyaknya bilangan bulat dari 1 sd 1000 yang habis dibagi 5 adalah 200 (B)

A : bilangan kelipatan dari 3 dari 1 sd 1000 → $n(A) = 333$
B : " " " 5 " 1 sd 1000 → $n(B) = 200$
$A \cap B$: " " " 3 dan 5 → $n(A \cap B) = 66$

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 333 + 200 - 66 = 467$
b) $n[(A \cup B)^c] = n(A^c \cap B^c) = 1000 - 467 = 533$

Function

Bentuk $f : X \to Y$ (fungsi dari X ke Y)
Aturan yang menghubungkan setiap satu anggota X (domain) ke anggota Y (kodomain) tunggal



(a) ✗ bukan fungsi
karena ada anggota domain yg tidak terpasangkan dengan kodomain

(b) ✗ bukan fungsi
karena ada anggota domain mempunyai bayangan di 2 anggota kodo sih

(c) ✓ fungsi ✓

(d) ✓

Macam2 Fungsi :

1. Fungsi satu2 / injektif / one-to-one
memenuhi bahwa setiap anggota domain mempunyai bayangan yang berbeda ≠ jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ ✓satu2
jika $x_1 \neq x_2$ → $x_1 \neq x_2$

Contoh : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan definisi
$f(x) = 4x - 1$, untuk semua $x \in \mathbb{R}$
$g(x) = n^2$, untuk $n \in \mathbb{Z}$
Apakah f & g fungsi satu2 ?

Jawab :
$f(x) = 4x - 1$
Jadi bayangan $x \in \mathbb{R}$ maka $y = 4x - 1$ berbeda.

✗ misal $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ terhingga
$f(x_1) = f(x_2)$
$4x_1 - 1 = 4x_2 - 1$
$4x_1 = 4x_2$
$x_1 = x_2$ ✓

$\therefore f(x)$ fungsi satu1

✗ Misal $n_1 = 2 \rightarrow g(2) = 2^2 = 4$
$n_2 = -2 \rightarrow g(-2) = (-2)^2 = 4$

Karena $g(n_1) = g(n_2)$ ada $n_1 \neq n_2$, sehingga g bukan fungsi satu2

$\mathbb{R}$: bilangan (x) ✓, bilangan (x) ✓, bilangan (x) ✓, real ✓

$\mathbb{Z}$: bil bulat (F), bil bulat (F), 0

2) Fungsi Pada / Onto / Surjektif
memenuhi bahwa setiap bilangan bulatnya berpasangan dengan daerah kodomain

$\boxed{\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ sdg } f(x) = y}$

contoh
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan definisi
$f(x) = 4x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ & $h(x) = 4x - 1$, $\forall x \in \mathbb{Z}$
Apakah f dan h fungsi onto ?

✗

$f(x) = 4x - 1 \rightarrow y = \frac{x+1}{4}$

$\boxed{\text{untuk } \forall y \in \mathbb{R} \text{ , apakah dapat dikemukakan } x = \frac{y+1}{4} \in \mathbb{R}}$

misal $y = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$
$y = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$
$y = 12 \rightarrow x = \frac{13}{4} \in \mathbb{R}$
$y = -100 \rightarrow x = -\frac{99}{4} \in \mathbb{R}$
$y = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{5/2}{4} = \frac{5}{8} \in \mathbb{R}$

Untuk $\forall y \in \mathbb{R}$
$f(x)$ $y = f\left(\frac{x+1}{4}\right)$
$= 4\left(\frac{x+1}{4}\right) - 1$
$= x + 1 - 1$
$= x$

Jadi $f(x)$ fungsi surjektif

✗ $h(x) = 4x - 1 \rightarrow y \in \mathbb{Z}$
$\left(x = \frac{y+1}{4}\right)$

misal $y = h(x) = 12 \rightarrow x = \frac{12+1}{4} = \frac{13}{4} \notin \mathbb{Z}$
$h(x) \in \mathbb{Z} \rightarrow x = -\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$

Jadi $h(x)$ bukan fungsi onto