

# LECTURE NOTES

**Week ke - 06**

**Counting**

## LEARNING OUTCOMES

1. Peserta diharapkan mampu menjelaskan tentang teori himpunan, Fungsi, himpunan Fuzzy, metode-metode menghitung, dan teori bilangan.
2. Peserta diharapkan mampu menjelaskan mencari solusi penerapan teori himpunan, Fungsi, himpunan Fuzzy, metode-metode menghitung, dan teori bilangan.

### OUTLINE MATERI :

1. Kaidah Dasar Menghitung
2. Perluasan Kaidah Dasar Menghitung
3. Prinsip Inklusi-Eksklusi
4. Permutasi
5. Kombinasi
6. Koefisien Binomial

# Counting

**Counting/Kaidah pencacahan** adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

## 1. Kaidah Dasar Menghitung

Kaidah perkalian (*rule of product*)

Percobaan 1:  $p$  hasil

Percobaan 2:  $q$  hasil

Percobaan 1 **dan** percobaan 2:  $p \times q$  hasil

Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

Percobaan 1:  $p$  hasil

Percobaan 2:  $q$  hasil

Percobaan 1 **atau** percobaan 2:  $p + q$  hasil

**Contoh 1.** Ketua angkatan IF 2020 hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Jumlah pria IF2002 = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua angkatan?

Penyelesaian:  $65 + 15 = 80$  cara.

**Contoh 2.** Dua orang perwakilan IF2020 mendatangi Bapak Dosen untuk protes nilai ujian. Wakil yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tersebut?

Penyelesaian:  $65 \times 15 = 975$  cara.

## 2. Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

Misalkan ada  $n$  percobaan, masing-masing dengan  $p_i$  hasil .

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

$$p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \text{ hasil}$$

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n \text{ hasil}$$

**Contoh 3.** Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:

a. panjang *string* 5 bit

b. panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)

Penyelesaian:

$$(a) 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32 \text{ buah}$$

$$(b) 2^8 = 256 \text{ buah}$$

**Contoh 4.** Sandi-lewat (*password*) sistem komputer panjangnya 6 sampai 8 karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?

Penyelesaian :

Jumlah karakter password = 26 (A-Z) + 10 (0-9) = 36 karakter.

Jumlah kemungkinan sandi-lewat dengan panjang 6 karakter:  $(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336$

Jumlah kemungkinan sandi-lewat dengan panjang 7 karakter:

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096$$

umlah kemungkinan sandi-lewat dengan panjang 8 karakter:

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456$$

Jumlah seluruh sandi-lewat (kaidah penjumlahan) adalah

$$2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 = 2.901.650.833.888 \text{ buah.}$$

### 3. Prinsip Inklusi-Eksklusi

Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan “11” atau berakhir dengan “11”?

Penyelesaian:

Misalkan

$A$  = himpunan *byte* yang dimulai dengan “11”

$B$  = himpunan *byte* yang diakhiri dengan “11”

$A \cap B$  = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan “11”

maka

$A \cup B$  = himpunan *byte* yang berawal dengan “11” atau berakhir dengan “11”

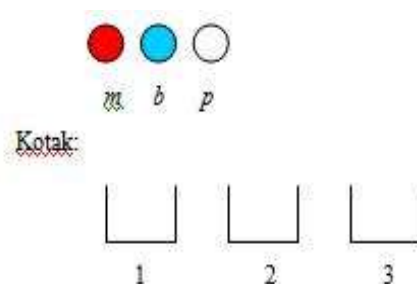
$$|A| = 2^6 = 64, |B| = 2^6 = 64, |A \cap B| = 2^4 = 16.$$

maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^6 + 2^6 - 16 = 64 + 64 - 16 = 112.$$

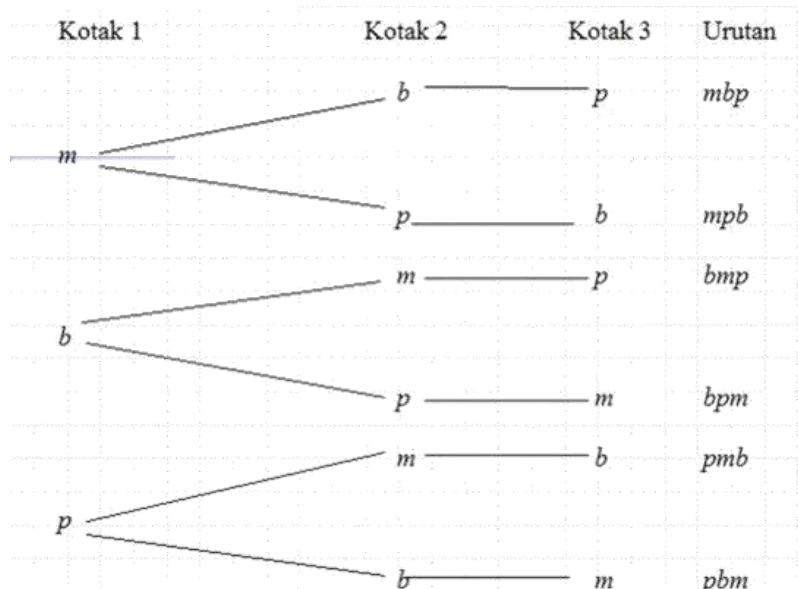
### 4. Permutasi

Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah

$$(3)(2)(1) = 3! = 6.$$



**Definisi:** Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.

Misalkan jumlah objek adalah  $n$ ,

maka urutan pertama dipilih dari  $n$  objek,

urutan kedua dipilih dari  $n - 1$  objek,

urutan ketiga dipilih dari  $n - 2$  objek,

...

urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari  $n$  objek adalah

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (2)(1) = n!$$

**Contoh 6.** Berapa banyak “kata” yang terbentuk dari kata “HAPUS”?

Penyelesaian:

Cara 1:  $(5)(4)(3)(2)(1) = 120$  buah kata

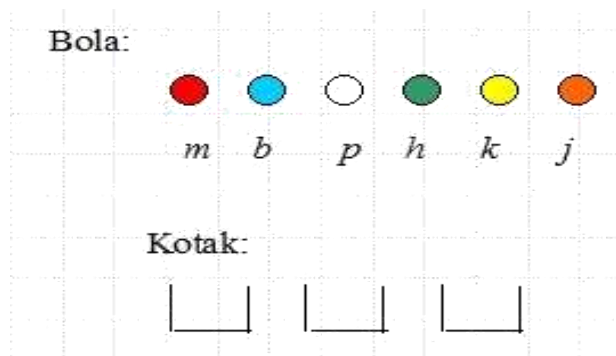
Cara 2:  $P(5, 5) = 5! = 120$  buah kata

**Contoh 7.** Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

Penyelesaian:  $P(25, 25) = 25!$

### Permutasi $r$ dari $n$ elemen

Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Penyelesaian:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola =  $(6)(5)(4) = 120$

**Definisi 2.** Permutasi  $r$  dari  $n$  elemen adalah jumlah kemungkinan urutan  $r$  buah elemen yang dipilih dari  $n$  buah elemen, dengan  $r \leq n$ , yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**Contoh 7.** Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4, 5, jika:

- tidak boleh ada pengulangan angka, dan
- boleh ada pengulangan angka.

Penyelesaian:

- Dengan kaidah perkalian:  $(5)(4)(3) = 120$  buah Dengan rumus permutasi  $P(5, 3) = 5!/(5 - 3)! = 120$
- Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.  
Dengan kiadah perkalian:  $(5)(5)(5) = 5^3 = 125$ .

**Contoh 8.** Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?

Penyelesaian:  $P(26, 4) \times P(10, 3) = 258.336.000$

## 5. Kombinasi

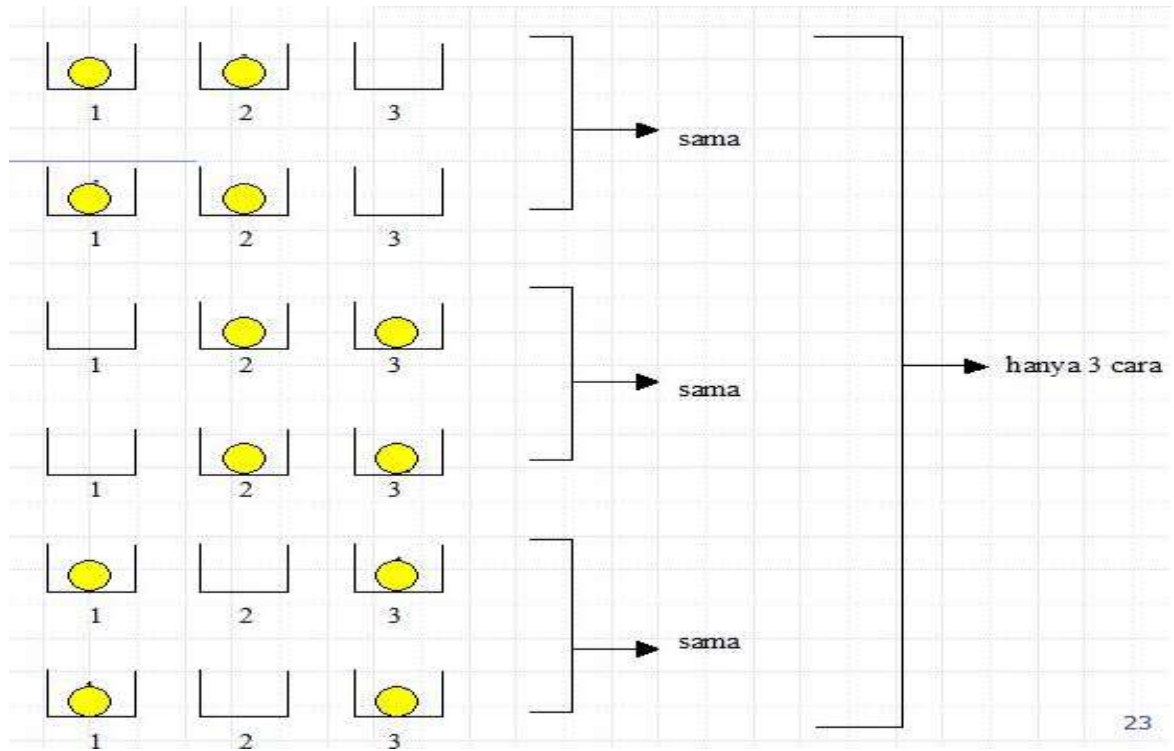
Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama dan 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak =

$$\frac{P(3,2)}{2!} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{3!/1!}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3$$





Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{10! / 7!}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada  $3!$  cara memasukkan bola yang warnanya sama.

Secara umum, jumlah cara memasukkan  $r$  buah bola yang berwarna sama ke dalam  $n$  buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{r!} \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

$C(n, r)$  sering dibaca " $n$  diambil  $r$ ", artinya  $r$  objek diambil dari  $n$  buah objek.

**Definisi 3.** Kombinasi  $r$  elemen dari  $n$  elemen, atau  $C(n, r)$ , adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut  $r$  elemen yang diambil dari  $n$  buah elemen.

### Interpretasi Kombinasi

$C(n, r)$  = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari  $r$  elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan  $n$  elemen.

Misalkan  $A = \{1, 2, 3\}$

Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}$$

$$\{1, 3\} = \{3, 1\}$$

$$\{2, 3\} = \{3, 2\}$$

$$\text{atau } \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

3 buah

$C(n, r)$  = cara memilih  $r$  buah elemen dari  $n$  buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh:

Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah  $C(25,5) = 53130$  cara.

**Contoh 9.** Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Informatika Angkatan 2002, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

- mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya;
- mahasiswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;
- mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;
- mahasiswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;
- mahasiswa bernama *A* dan *B* termasuk di dalamnya;
- setidaknya salah satu dari mahasiswa yang bernama *A* atau *B* termasuk di dalamnya.

Penyelesaian:

- $C(9, 4) = 126$  cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* selalu termasuk di dalamnya.
- $C(9, 5) = 126$  cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* tidak termasuk di dalamnya.
- $C(8, 4) = 70$  cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak.
- $C(8, 4) = 70$  cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *B* termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak.
- $C(8, 3) = 56$  cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* dan *B* selalu termasuk di dalamnya.
- Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari *A* atau *B* termasuk di dalamnya  

$$= \text{jumlah cara membentuk perwakilan sehingga } A \text{ termasuk di dalamnya, } B \text{ tidak}$$

$$+ \text{jumlah cara membentuk perwakilan sehingga } B \text{ termasuk di dalamnya, } A \text{ tidak}$$

$$+ \text{jumlah cara membentuk perwakilan sehingga } A \text{ dan } B \text{ termasuk di dalamnya}$$

$$= 70 + 70 + 56 = 196$$

Prinsip inklusi-eksklusi:

$X$  = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan  $A$

$Y$  = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan  $B$

$X \cap Y$  = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan  $A$   
dan  $B$ , maka

$$|X \cap Y| = C(8,3) = 56;$$

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 126 + 126 - 56 = 196$$

## Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada  $n$  buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

$n_1$  bola diantaranya berwarna 1,

$n_2$  bola diantaranya berwarna 2,

$n_k$  bola diantaranya berwarna  $k$ , dan  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Berapa jumlah cara pengaturan  $n$  buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maks. 1 buah bola)?

Jika  $n$  buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan  $n$  buah bola ke dalam  $n$  buah kotak adalah:

$$P(n, n) = n!.$$

Dari pengaturan  $n$  buah bola itu,

ada  $n_1!$  cara memasukkan bola berwarna 1

ada  $n_2!$  cara memasukkan bola berwarna 2

ada  $n_k!$  cara memasukkan bola berwarna  $k$

Permutasi  $n$  buah bola yang mana  $n_1$  diantaranya berwarna 1,  $n_2$  bola berwarna 2, ...,  $n_k$  bola berwarna  $k$  adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{P(n, n)}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n, n_1) C(n - n_1, n_2) C(n - n_1 - n_2, n_3) \dots C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \frac{(n - n_1 - n_2)!}{n_3!(n - n_1 - n_2 - n_3)!} \\ &\quad \frac{(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1})!}{n_k!(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1} - n_k)!} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} \end{aligned}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

**Contoh 10.** Berapa banyak “kata” yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

Penyelesaian:

$$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$$

huruf  $M = 1$  buah ( $n_1$ )

huruf  $I = 4$  buah ( $n_2$ )

huruf  $S = 4$  buah ( $n_3$ )

huruf  $P = 2$  buah ( $n_4$ )

$$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11 \text{ buah} = |S|$$

$$\text{Cara 1: Jumlah string} = \frac{P(11; 1, 4, 4, 2)}{11!}$$

$$= (1!)(4!)(4!)(2!) = 34650 \text{ buah.}$$

$$\text{Cara 2: Jumlah string} = C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)} \\ &= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} \\ &= 34650 \text{ buah} \end{aligned}$$

**Contoh 11.** Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah mangga.

Penyelesaian:

$$n = 8, n_1 = 4, n_2 = 2, n_3 = 2, \text{ dan } n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$$

$$\text{Jumlah cara membagi seluruh mangga} = \frac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420$$

**Contoh 12.** 12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

### Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat  $r$  buah bola yang semua warnanya sama dan  $n$  buah kotak.

Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola:  $C(n, r)$ .

Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)

Jumlah cara memasukkan bola:  $C(n + r - 1, r)$ .

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1).$$

**Contoh 13.** Pada persamaan  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ ,  $x_i$  adalah bilangan bulat  $\geq 0$ . Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini,  $n = 4$  dan  $r = 12$ ).

Bagilah kedua belas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya,

Kotak 1 diisi 3 buah bola ( $x_1 = 3$ )

Kotak 2 diisi 5 buah bola ( $x_2 = 5$ )

Kotak 3 diisi 2 buah bola ( $x_3 = 2$ )

Kotak 4 diisi 2 buah bola ( $x_4 = 2$ )

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$$

Ada  $C(4 + 12 - 1, 12) = C(15, 12) = 455$  buah solusi.

**Contoh 14.** 20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:

$n = 5$ ,  $r_1 = 20$  (apel) dan  $r_2 = 15$  (jeruk)

Membagi 20 apel kepada 5 anak:  $C(5 + 20 - 1, 20)$  cara,

Membagi 15 jeruk kepada 5 anak:  $C(5 + 15 - 1, 15)$  cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah :

$$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15)$$

## 6. Koefisien Binomial

$$(x + y)^0 = 1$$

$$1$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$1 \quad 1$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$(x + y)^n = C(n, 0) x^n + C(n, 1) x^{n-1} y^1 + \dots + C(n, k) x^{n-k} y^k + \dots +$$

$$C(n, n) y^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^{n-k} y^k$$

Koefisien untuk  $x^{n-k} y^k$  adalah  $C(n, k)$ . Bilangan  $C(n, k)$  disebut **koefisien binomial**.

**Contoh 15.** Jabarkan  $(3x - 2)^3$ .

Penyelesaian:

Misalkan  $a = 3x$  dan  $b = -2$ ,

$$(a + b)^3 = C(3, 0) a^3 + C(3, 1) a^2 b^1 + C(3, 2) a^1 b^2 + C(3, 3) b^3$$

$$1 (3x)^3 + 3 (3x)^2 (-2) + 3 (3x) (-2)^2 + 1 (-2)^3$$

$$27 x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$



**Contoh 16.** Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan  $(x - y)^5$ .

Penyelesaian:

$$(x - y)^5 = (x + (-y))^5.$$

$$\text{Suku keempat adalah: } C(5, 3) x^{5-3} (-y)^3 = -10x^2y^3.$$

**Contoh 17.** Buktikan bahwa  $\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$ .

Penyelesaian:

Dari persamaan (6.6), ambil  $x = y = 1$ , sehingga

$$\Leftrightarrow (x + y)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^{n-k} y^k$$

$$\Leftrightarrow (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n C(n, k)$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)$$

## KESIMPULAN

1. **Counting/Kaidah pencacahan** adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.
2. Misalkan ada  $n$  percobaan, masing-masing dengan  $p_i$  hasil,

maka

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

$$p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \text{ hasil}$$

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n \text{ hasil}$$

3. Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.

Misalkan jumlah objek adalah  $n$ ,

maka urutan pertama dipilih dari  $n$  objek,

urutan kedua dipilih dari  $n - 1$  objek,

urutan ketiga dipilih dari  $n - 2$  objek,

...

urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari  $n$  objek adalah

$$n(n-1)(n-2) \dots (2)(1) = n!$$

4. Permutasi  $r$  dari  $n$  elemen adalah jumlah kemungkinan urutan  $r$  buah elemen yang dipilih dari  $n$  buah elemen, dengan  $r \leq n$ , yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

5. Kombinasi adalah pengaturan objek-objek dimana urutan tidak diperhitungkan.

Secara umum, jumlah cara memasukkan  $r$  buah bola yang berwarna sama ke dalam  $n$  buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(r-1))}{r!} \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

$C(n, r)$  sering dibaca " $n$  diambil  $r$ ", artinya  $r$  objek diambil dari  $n$  buah objek.

6. Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

7. Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat  $r$  buah bola yang semua warnanya sama dan  $n$  buah kotak.

Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola:  $C(n, r)$ .

Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)

Jumlah cara memasukkan bola:  $C(n + r - 1, r)$ .

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1).$$

7. Bilangan  $C(n, k)$  disebut **koefisien binomial**.

$$C(n, n) y^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^{n-k} y^k$$

Koefisien untuk  $x^{n-k} y^k$  adalah  $C(n, k)$ .

## DAFTAR PUSTAKA

1. Kenneth H. Rosen, “Discrete Mathematics and its Applications”, 8<sup>th</sup> edition, 2019, McGraw-Hill Education, New York, ISBN 978-1-259-67651-2, Chapter 1.
2. Rinaldi Munir, “Matematika Diskrit”, edisi 6, 2016, Informatika Bandung, Indonesia, ISBN 978-602-6232-13-7
3. Jong Jek Siang, Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer, Andi Offset, Yogyakarta. 2009