Δεύτερο Σετ Ασκήσεων - Θεωρία Γραφημάτων

Στέφανος Μπαζιώτης - Λευτέρης Καλαϊτζίδης

Μάιος 2020

1 Πρόβλημα 1

1.1 Διατύπωση

Μπορεί ένα δέντρο να περιέχει πάνω από ένα τέλειο ταίριασμα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

1.2 Λύση (με Επαγωγή)

Έστω ότι η υπόθεση ισχύει για $|V(G)| \leq 2$. Τότε, και εφόσον το G είναι δέντρο, υπάρχει φύλλο που "τελειώνει" στο v. Το v συνδέεται με ακριβώς μία κορυφή u (εξ' ορισμού, εφόσον είναι δέντρο). Αν υπάρχει τέλειο ταίριασμα M, τότε το M πρέπει να περιέχει την ακμή uv γιατί το u είναι το μόνο πιθανό ταίρι του v.

Αν αφαιρέσουμε τις κορυφές u, v τότε αυτό που μένει είνα ένα δάσος, έστω T, το οποίο λόγω επαγωγικής υπόθεσης έχει το πολύ ένα τέλειο ταίριασμα, αφού αποτελείται από δέντρα μικρότερου μεγέθους (τα οποία το καθένα μπορούν να έχουν το πολύ ένα τέλειο ταίριασμα).

Άρα, τελικά ο G μπορεί να έχει το πολύ ένα τέλειο ταίριασμα - αυτό του T το οποίο συμπληρώνουμε με την ακμή uv (και τις κορυφές u, v).

Σημείωση: Η ακμή uv δε μπορεί να δημιουργήσει παραπάνω τέλεια ταιριάσματα εφόσον σε ένα τέλειο ταίρισμα, για την κορυφή v, υπάρχει μόνο ένα ταίρι, το u.

1.3 Εναλλακτική Λύση

Έστω πεπερασμένο δέντρο $T = (V, E)$ με 2 τέλεια ταιριάσματα $M_1 \neq M_2$. Ορίζω γράφο $G = (V, M_1 \cup M_2)$ και εξετάζω τις συνεκτικές συνιστώσες του:

- Αν κάθε ΣΣ είναι μία ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές, τότε $M_1 = M_2$, **άτοπο**
- Αν $\exists$ ΣΣ C που περιέχει πάνω από μια ακμή:
  Παίρνουμε κορυφή $v_1 \in C$. Γνωρίζουμε οτι η v_1 ενώνεται με κάποια κορυφή v_2 με ακμή στο M_1, η οποία δεν μπορεί να βρίσκεται στο M_2, εφόσον η C δεν αποτελείται από μια μόνο ακμή. Όμως η v_2 ενώνεται κι εκείνη με κάποια κορυφή v_3 με ακμή στο M_2, η οποία αντίστοιχα δεν μπορεί να 'ναι στο M_1. Συνεχίζοντας, θα μπορούσμαε να κατασκευάσουμε άπειρο μονοπάτι, το οποίο σημαίνει είτε πως έχουμε άπειρες κορυφές, είτε πως δημιουργήσαμε κύκλο. Και οι δύο περιπτώσεις όμως μας οδηγούν σε **άτοπο**.

2 Πρόβλημα 2

Έστω γράφημα G, σύνολα A και $B \subseteq V(G)$, τ.ώ. $|A| < |B|$. Αν υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει το A και ταίριασμα που καλύπτει το B να δειχθεί ότι υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει το A και τουλάχιστον μία κορυφή του $B \backslash A$.

Παρατηρήστε ότι παίρνουμε σαν πόρισμα το ακόλουθο. Αν ένα σύνολο κορυφών καλύπτεται από κάποιο ταίριασμα, τότε καλύπτεται και από κάποιο μέγιστο ταίριασμα.

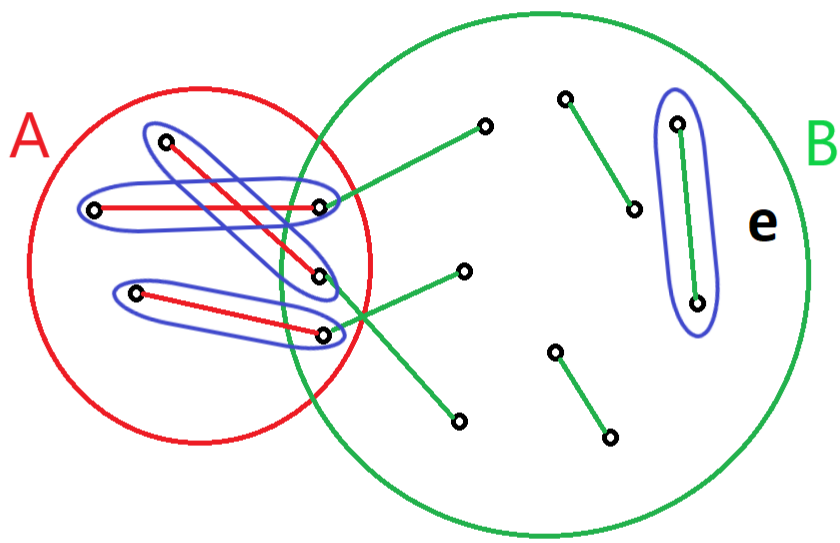
2.1 Λύση

Έστω M_A το ταίριασμα του A και M_B το ταίριασμα του B

Αρχικά αποδεικνύουμε πως $|B| \geq |A| + 2$:
Αν $|B| = |A| + 1$, τότε $|A|$ ή $|B|$ περιττός (εφόσον είναι διαδοχικοί ακέραιοι). Όμως αυτό είναι άτοπο, αφού τα A, B έχουν τέλειο ταίριασμα.
Άρα, γνωρίζοντας οτι $|B| > |A|$, συμπεραίνουμε οτι $|B| \geq |A| + 2$

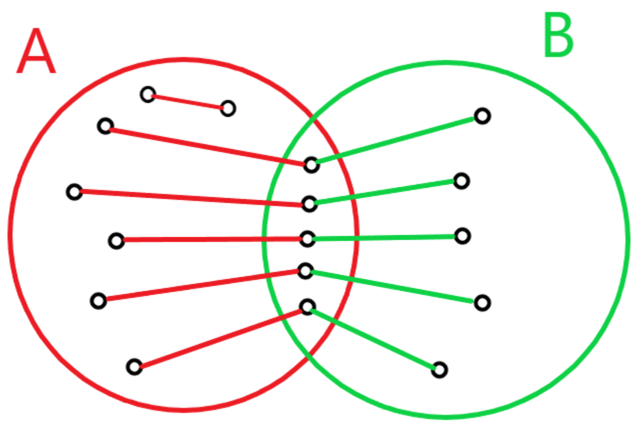
Για να αποδείξουμε το ζητούμενο παίρνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Υπάρχει $e = x_1x_2 : x_1 \in B - A \land x_2 \in B - A$. Τότε παίρνουμε ως το επιθυμητό ταίριασμα το $M^* = M_A \cup e$



ii)Δεν υπάρχει $e = x_1x_2 : x_1 \in B - A \land x_2 \in B - A$. Αρχικά θα αποδείξουμε πως υπάρχει τουλάχιστον μια ακμη $e = xy : x \in A \cap B \land y \in A \cap B$ σε κάποιο απο τα M_A, M_B:

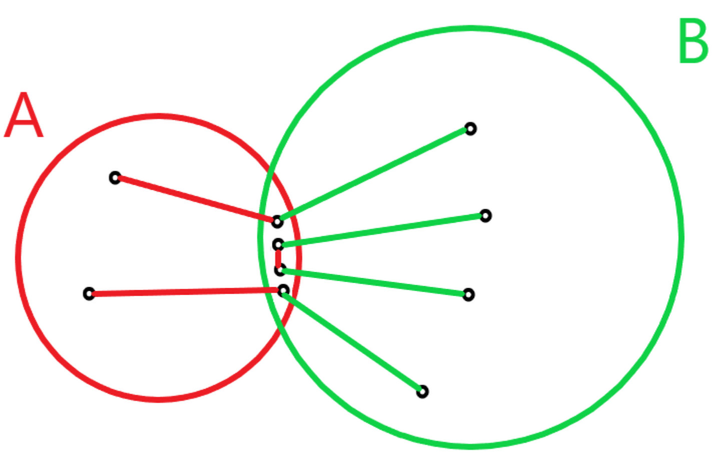
Έστω οτι δεν υπάρχει τέτοια ακμή:



Παρατηρούμε πως υπάρχει μια 1-1 αντιστοίχιση ανάμεσα στα στοιχεία του B και του A. Αυτό όμως θα σήμαινε πως $|A| \geq |B|$, άτοπο.

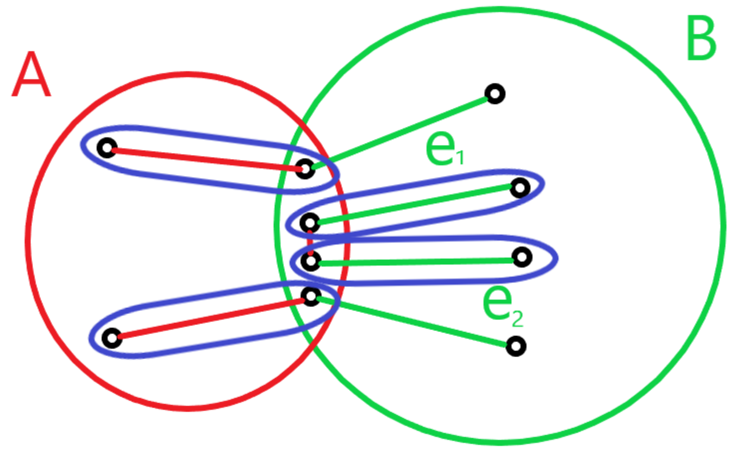
Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή $e = xy : x \in A \cap B \wedge y \in A \cap B$ σε κάποιο απο τα M_A, M_B. Τώρα θα δείξουμε πως τουλάχιστον μία απο αυτές τις ακμές ανήκει στο M_A και όχι στο M_B.
Άν όλες ανήκουν στο M_B, ή ολες ανήκουν και στο M_A και στο M_B τότε έχουμε πάλι $|A| \geq |B|$ (αφού συνεχίζουμε να έχουμε 1-1 αντιστοίχιση από το B στο A και στις δύο περιπτώσεις), άτοπο.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή $e = xy : x \in A \cap B \wedge y \in A \cap B$ που ανήκει στο M_A και όχι στο M_B:



Έστω τώρα e_1 η ακμή που ενώνει την κορυφή x με κάποια κορυφή στο $B - A$ (και $e_1 \in M_B$) και αντίστοιχα e_2

η ακμή που ενώνει την κορυφή y με κάποια κορυφή στο $B - A$ (και $e_2 \in M_B$). Παρατηρούμε πως διαλέγοντας $M^* = \{M_A - e\} \cup \{e_1\} \cup \{e_2\}$ παίρνουμε το επιθυμητό ταίριασμα.



3 Πρόβλημα 3

3.1 Διατύπωση

Δύο παίκτες, ο 1 και ο 2, παίζουν ένα παίγνιο σε ένα γράφημα G διαλέγοντας εναλλάξ ακμές. Στην αρχή όλες οι κορυφές του γραφήματος είναι ανεξερεύνητες. Ο παίκτης 1 ξεκινάει διαλέγοντας μία κορυφή x_1, η οποία πλέον έχει εξερευνηθεί. Αν x_i, $i \geq 1$, είναι η τελευταία κορυφή που έχει εξερευνηθεί ο επόμενος παίκτης πρέπει να διαλέξει μια ακμή που οδηγεί από τη x_i σε ανεξερεύνητη κορυφή.

Κερδίζει ο παίκτης που μπόρεσε να κινηθεί, δηλ. να διαλέξει ακμή, τελευταίος. Με άλλα λόγια, χάνει ο παίκτης που βρίσκεται μπλοκαρισμένος χωρίς δυνατότητα να μεταβεί σε ανεξερεύνητη κορυφή.

a) Δείξτε ότι αν το G έχει τέλειο ταίριασμα υπάρχει στρατηγική που επιτρέπει στον παίκτη 2 να νικήσει.

b) Δείξτε ότι αν το G δεν έχει τέλειο τέλειο ταίριασμα υπάρχει στρατηγική που επιτρέπει στον παίκτη 1 να νικήσει.

3.2 Λύση για το a)

Αν το γράφημα έχει τέλειο ταίριασμα, έστω M, τότε για κάθε κορυφή που επιλέγει ο παίκτης 1, έστω u, ο παίκτης 2 θα μπορεί να βρει κορυφή $v \in M$ που ταιριάζει το u (λόγω ορισμού του τέλειου ταιριάσματος).

Επίσης, αφού το ταίριασμα είναι τέλειο, τότε το γράφημα έχει ζυγό πλήθος κορυφών και άρα ο παίκτης 2 θα είναι ο τελευταίος που θα επιλέξει.

3.3 Λύση για το b)

Αν το γράφημα δεν έχει τέλειο ταίριασμα, υπάρχει μέγιστο ταίριασμα M το οποίο όμως δεν ταιριάζει όλες τις κορυφές του γραφήματος.

Ο παίκτης 1 μπορεί να επιλέξει μία κορυφή, έστω u, που δεν ταιριάζεται από το M. Ο παίκτης 2 τώρα επιλέγει κάποια κορυφή, έστω v. Παρατηρούμε ότι λόγω των κανόνων του παιχνιδιού, η v ενώνεται με την u.

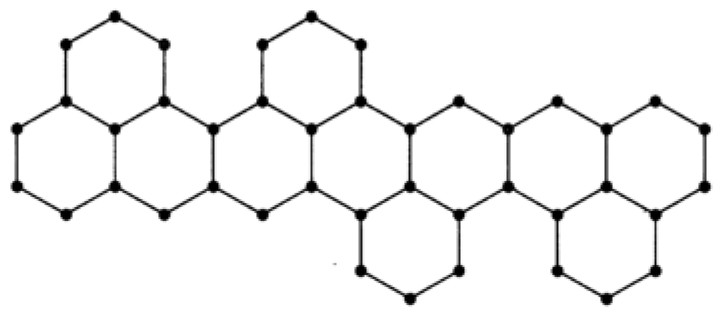
Η v θα πρέπει να έχει ταίρι στο M, γιατί αν και αυτή δεν είχε ταίρι στο M και εφόσον συνδέεται με τη u που επίσης δεν έχει ταίρι, η ακμή uv θα άνηκε στο M το οποίο είναι άτοπο λόγω υπόθεσης.

Τώρα, ο παίκτης 1 θα επιλέξει την κορυφή-ταίρι της v. Συνεχίζοντας έτσι, ο παίκτης 1 θα μπορεί πάντα να επιλέγει πάντα κορυφή-ταίρι για οποιαδήποτε κορυφή v επιλέγει ο παίκτης 2 γιατί αν δε μπορούσε, τότε θα υπήρχε $M - αυξητικ$ μονοπάτι. Το οποίο είναι άτοπο αφού το M είναι μέγιστο.

4 Πρόβλημα 4

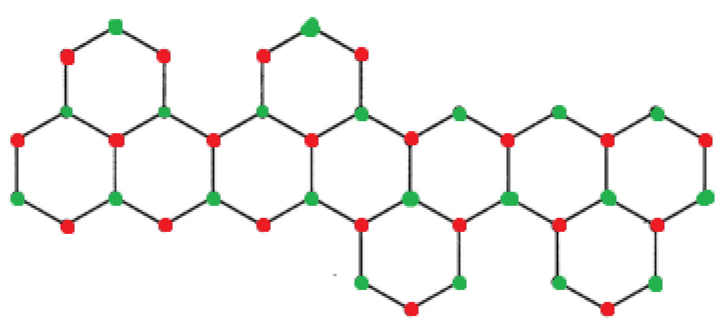
4.1 Διατύπωση

Δίνεται το παρακάτω γράφημα. Είτε βρείτε ένα τέλειο ταίριασμα, είτε δώστε μια σύντομη απόδειξη ότι δεν περιέχει τέτοιο.



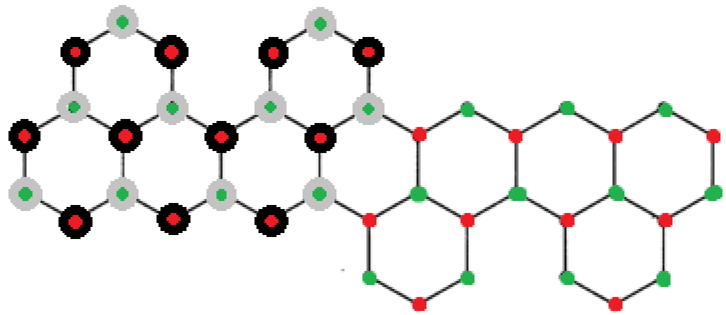
4.2 Λύση

Αρχικά δείχνουμε πως το γράφημα είναι διμερές:



Έστω $A := \{\text{κόκκινες κορυφές}\}$, $B := \{\text{πράσινες κορυφές}\}$

Τώρα από Θ. Hall αρκεί να βρούμε $S \subseteq A : |N(S)| < |S|$, για να αποδείξουμε πως το γράφημα δεν έχει τέλειο ταίριασμα. Παίρνουμε τώρα ως S το υποσύνολο των κορυφών του A που έχουμε σημειώσει με μαύρο κύκλο:



(Με γκρι κύκλο είναι σημειωμένες οι κορυφές-γείτονες του υποσυνόλου S)

Παρατηρούμε πως $|N(S)| = 10 < 11 = |S|$, επομένως το αρχικό γράφημα δεν έχει τέλειο ταίριασμα.

5 Πρόβλημα 5

5.1 Διατύπωση

Δείξτε ότι σε κάθε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές $\tau(G) \geq m/n$ και $\alpha(G) \leq \frac{n^2-m}{n}$

Για την ακρίβεια, ισχύει η αυστηρή ανισότητα, δηλ. $\tau(G) > m/n$. Σε κάποιες αποδείξεις προκύπτει χωρίς κόπο.

5.2 Λύση

Φυσικά για να ισχύουν αυτές οι ανισότητες, θα πρέπει το γράφημα να έχει τουλάχιστον μία κορυφή, δηλαδή $n > 0$.

Ορίζουμε ως το μέγιστο βαθμό κορυφής σε ένα γράφημα G ως $\Delta(G)$

Έστω ένα ανεξάρτητο σύνολο S μεγίστου μεγέθους, δηλαδή $|S| = \alpha(G)$.

Λόγω Παρατήρησης 7.1, το $V(G) - S$ είναι κάλυμμα κορυφών και αν αθροίσουμε τους βαθμούς των κορυφών σε αυτό το κάλυμμα, αυτοί θα είναι το πολύ $n(n - \alpha(G))$.

Στην πραγματικότητα θα είναι το πολύ $\Delta(G)(n - a(G))$ αλλά για τους σκοπούς αυτής της απόδειξης, θα χρησιμοποιήσουμε το πρώτο άνω φράγμα.

Όμως τότε έχουμε άνω φράγμα για τον αριθμό των κορυφών m του G, αφού μιλάμε για κάλυμμα κορυφών *για ακμές*.

Έτσι $m \leq n(n - \alpha(G)) \iff m \leq n^2 - n\alpha(G) \iff \alpha(G) \leq \frac{n^2-m}{n}$
και αποδείξαμε τη 2η ανισότητα.

Για την 1η ανισότητα, έστω ένα κάλυμμα κορυφών C του G ελαχίστου μεγέθους, δηλαδή $|C| = \tau(G)$.

Το C θα πρέπει να καλύπτει όλες τις ακμές του G, άρα $\tau(G) \geq m/\Delta(G)$.

Ισχύει $\Delta(G) < n$ άρα $\tau(G) > m/n$.