Πανεπιστημιο Αθηνων, Θεωρια Γραφηματων
Πρωτο σετ ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2019-20
Δημοσιευση: 18.03.2020, Παραδοση: μεχρι τις 19:00 στις 26.03.2020

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.
Μπορείτε να δουλέψετε ατομικά ή σε ομάδες των δύο. Οι ασκήσεις παραδίδονται σε ηλεκτρονική μορφή σε ένα αρχείο pdf. Καμία άλλη μορφή δεν θα γίνει δεκτή. Πού θα γίνει η παράδοση, θα καθοριστεί σύντομα.

Γράψιμο έστω και ενός σετ σε LaTeX πριμοδοτείται με +15% για το πρώτο σετ (που θα γράψετε σε LaTeX, όποιο κι αν είναι αυτό) και +5% για κάθε επόμενο.

Αν έχετε σχήματα (που θα έπρεπε), μην τα θυσιάσετε, να τα συμπεριλάβετε και αυτά στην ηλεκτρονική μορφή. Υπάρχουν πολλοί τρόποι. Ο σκοπός του LaTeX είναι να παραδώσετε κάτι αισθητικά βελτιωμένο, όχι κάτι πιο δυσνόητο.

**Πρόβλημα 1 [4 μονάδες].** Να δειχθεί ότι σε κάθε γράφημα με $b$ τεμάχια και $a$ συνεκτικές συνιστώσες

$$b - a = \sum_{v \in V(G)} (t(v) - 1)$$

όπου $t(v)$ είναι ο αριθμός των τεμαχίων που περιέχουν την κορυφή $v$.

**Πρόβλημα 2 [4 μονάδες].** Δίνεται δισυνεκτικό γράφημα $G$. Να δειχθεί ότι αν τα άκρα μιας ακμής $e \in E(G)$ αποτελούν διαχωριστή, τότε $\kappa(G - e) = 2$, δηλαδή η αφαίρεση της ακμής δεν πλήττει τη δισυνεκτικότητα.

**Πρόβλημα 3 [2 μονάδες].** Δίνεται $k$-συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ και $A, B \subseteq V$. Έστω $|A| \geq |B|$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Menger (Θεώρ. 4.2 στις σημειώσεις) δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον $\min\{k, |B|\}$ διακεκριμένα $A$-$B$ μονοπάτια.

**Πρόβλημα 4 [4 μονάδες].** Δίνεται δισυνεκτικό γράφημα $G$ στο οποίο δεν υπάρχουν κορυφές $u$, $v \in V(G)$ που να συνδέονται με τρία εσωτερικά διακεκριμένα μονοπάτια (ισοδύναμα: το $G$ δεν περιέχει το $K_{2,3}$ ως τοπολογικό έλασσον). Να αποδείξετε ότι για κάθε τρεις κορυφές του $G$ υπάρχει κύκλος που περνάει και από τις τρεις.

**Πρόβλημα 5 [5 μονάδες].** Έστω $k \geq 2$. Δείξτε ότι σε ένα $k$-συνεκτικό γράφημα οποιεσδήποτε $k$ κορυφές βρίσκονται πάνω σε κύκλο. (Ο κύκλος μπορεί βέβαια να περιέχει και άλλες κορυφές).

*Υπόδειξη:* Μπορεί να λυθεί με επαγωγή στο $k$ και χρήση του Πορίσματος 5.2 από τις σημειώσεις.

*Παρατήρηση:* η αντίστροφη πρόταση δεν ισχύει. Στο $C_n$, για $2 \leq k \leq n$, οποιεσδήποτε $k$ κορυφές βρίσκονται πάνω σε κύκλο. Δείτε και το προηγούμενο πρόβλημα.