Πανεπιστημιο Αθηνων, Θεωρια Γραφηματων
Δευτερο σετ εαρινο εξαμηνο 2019-20
Δημοσιευση: 22.04.2020, Παραδοση: μεχρι 05.05.2020, ωρα 17:00.

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.
Μπορείτε να δουλέψετε ατομικά ή σε ομάδες των δύο. Οι ασκήσεις παραδίδονται σε ηλεκτρονική μορφή σε ένα αρχείο pdf. Καμία άλλη μορφή δεν θα γίνει δεκτή.

Γράψιμο έστω και ενός σετ σε LaTeX πριμοδοτείται με +15% για το πρώτο σετ (που θα γράψετε σε LaTeX, όποιο κι αν είναι αυτό) και +5% για κάθε επόμενο.

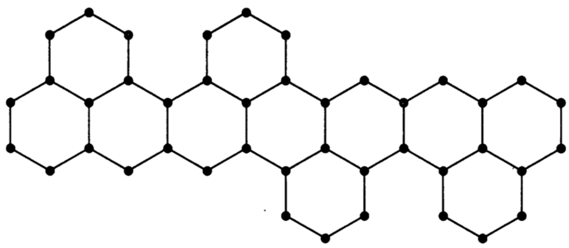
Πρόβλημα 1 [4 μονάδες]. Μπορεί ένα δέντρο να περιέχει πάνω από ένα τέλειο ταίριασμα; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

Πρόβλημα 2 [4 μονάδες]. Έστω γράφημα G, σύνολα A και $B \subseteq V(G)$, τ. ώ. $|A| < |B|$. Αν υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει το A και ταίριασμα που καλύπτει το B να δειχθεί ότι υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει το A και τουλάχιστον μία κορυφή του $B \setminus A$.

Παρατηρήστε ότι παίρνουμε σαν πόρισμα το ακόλουθο. Αν ένα σύνολο κορυφών καλύπτεται από κάποιο ταίριασμα, τότε καλύπτεται και από κάποιο μέγιστο ταίριασμα.

Πρόβλημα 3 [6 μονάδες]. Δύο παίκτες, ο 1 και ο 2, παίζουν ένα παίγνιο σε ένα γράφημα G διαλέγοντας εναλλάξ ακμές. Στην αρχή όλες οι κορυφές του γραφήματος είναι *ανεξερεύνητες*. Ο παίκτης 1 ξεκινάει διαλέγοντας μία κορυφή x_1, η οποία πλέον έχει *εξερευνηθεί*. Αν x_i, $i \geq 1$, είναι η τελευταία κορυφή που έχει εξερευνηθεί ο επόμενος παίκτης πρέπει να διαλέξει μια ακμή που οδηγεί από τη x_i σε ανεξερεύνητη κορυφή. Κερδίζει ο παίκτης που μπόρεσε να κινηθεί, δηλ. να διαλέξει ακμή, τελευταίος. Με άλλα λόγια, χάνει ο παίκτης που βρίσκεται μπλοκαρισμένος χωρίς δυνατότητα να μεταβεί σε ανεξερεύνητη κορυφή.
(α) Δείξτε ότι αν το G έχει τέλειο ταίριασμα υπάρχει στρατηγική που επιτρέπει στον παίκτη 2 να νικήσει.
(β) Δείξτε ότι αν το G δεν έχει τέλειο τέλειο ταίριασμα υπάρχει στρατηγική που επιτρέπει στον παίκτη 1 να νικήσει.

Πρόβλημα 4 [4 μονάδες]. Δίνεται το παρακάτω γράφημα. Είτε βρείτε ένα τέλειο ταίριασμα, είτε δώστε μια σύντομη απόδειξη ότι δεν περιέχει τέτοιο.



Πρόβλημα 5 [4 μονάδες]. Δείξτε ότι σε κάθε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές $\tau(G) \geq m/n$ και $\alpha(G) \leq \frac{n^2-m}{n}$.
Για την ακρίβεια, ισχύει η αυστηρή ανισότητα, δηλ. $\tau(G) > m/n$. Σε κάποιες αποδείξεις προκύπτει χωρίς κόπο.