Disciplina: Matemática Discreta
Prof. Me. Reginaldo César Izelli

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Matemática Discreta

Prof. Me. Reginaldo César Izelli

E-mail: reginaldo.izelli@fatec.sp.gov.br

Relações e Funções

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Disciplina: Matemática Discreta
Prof. Me. Reginaldo César Izelli

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

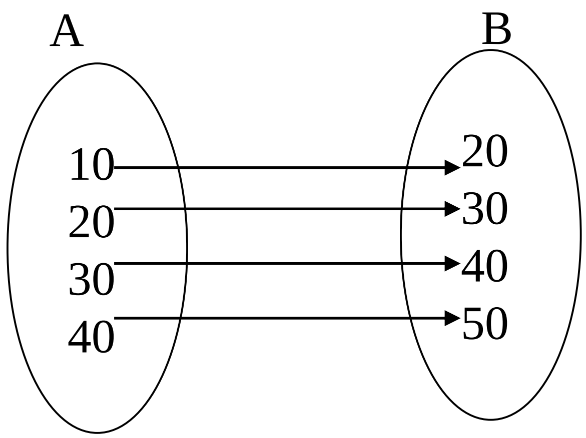
Relação

- É uma correspondência dada em forma de pares ordenados, entre dois conjuntos não vazios A e B;

- Onde o primeiro elemento do par ordenado procede do conjunto de partida e o segundo elemento procede do conjunto de chegada

Relação

- Distinguimos determinados pares de objetos dos demais porque seus elementos satisfazem alguma relação que os elementos dos demais pares, não satisfazem.



- Uma relação entre dois conjuntos é chamada de relação binária.

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Produto Cartesiano

- Produto cartesiano de dois conjuntos X e Y é definido como

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \; e \; y \in Y\}$$

Para n conjuntos (A_i) o produto cartesiano é definido como

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \, , i = 1..n\}$$

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Produto Cartesiano

- **Exemplo:** Sejam A= {1,2} e B = {x, y, z}.

  Então A x B = {(1,x), (1,y), (1, z), (2,x), (2,y), (2,z)}

Em um par ordenado (a,b) o primeiro elemento do par é a e o segundo é b.

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

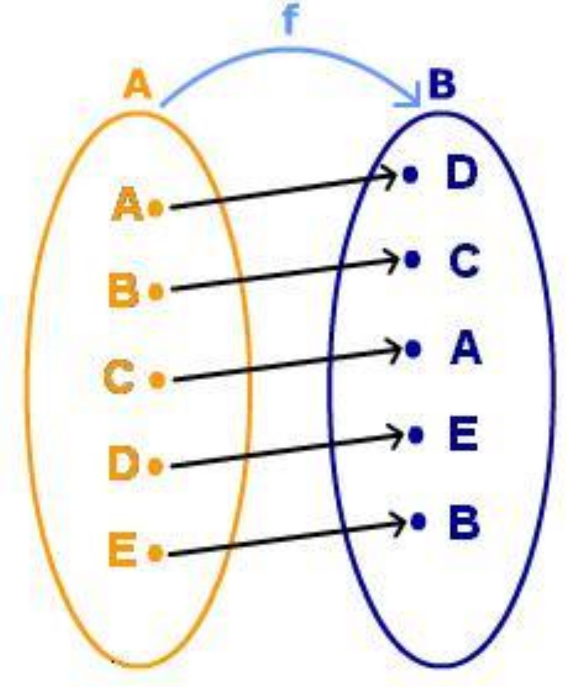
Produto Cartesiano

https://www.youtube.com/watch?v=Uw24jbXmb7c

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Funções

- Dados dois conjuntos A e B, uma função *f* de A em B é toda relação que a cada elemento de A corresponde um único elemento de B.



FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Funções

- O conjunto A é chamado domínio e o B de contradomínio.

- Um elemento genérico do domínio é indicado por x e seu correspondente no contradomínio é indicado por y ou por f(x); ao elemento y damos o nome de imagem de x e ao conjunto das imagens damos o nome conjunto imagem da função.

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Funções

- O domínio costuma ser representado por D e o conjunto imagem por Im. Dizemos também que x é a variável independente e y a variável dependente.

Funções

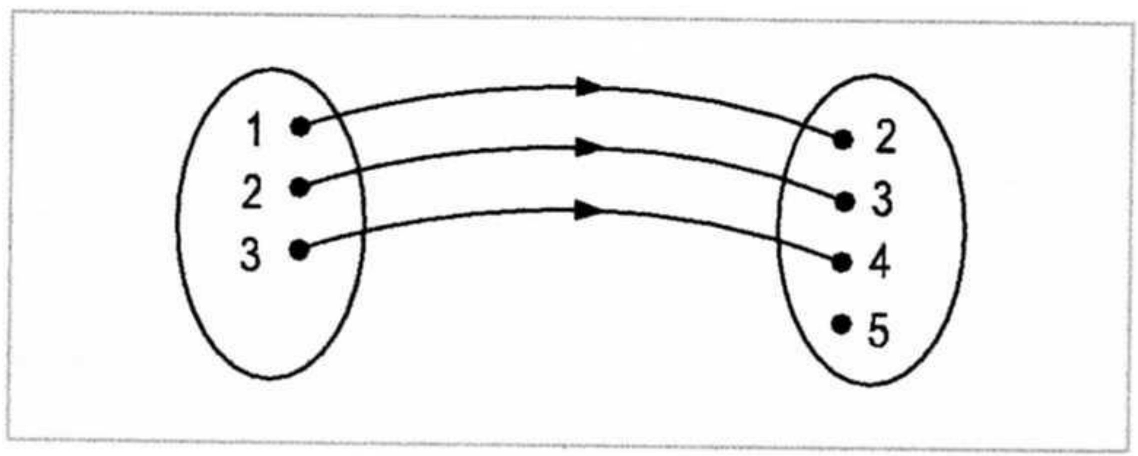
Exemplo: Sejam A={1,2,3} e B={2,3,4,5}, e considere que y = x+1.

- Ao elemento x=1 se associa o elemento y=1+1=2;
- Ao elemento x=2 se associa o elemento y=2+1=3;
- Ao elemento x=3 se associa o elemento y=3+1=4.

D={1,2,3} e Im={2,3,4}

Funções

FIGURA 2.1 Diagrama de flechas da função $y = x + 1$



Disciplina: Matemática Discreta
Prof. Me. Reginaldo César Izelli

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Funções

- Vídeos:

https://www.youtube.com/watch?v=r8gj2eqAIOQ

https://www.youtube.com/watch?v=SPZqQ5qn3P0

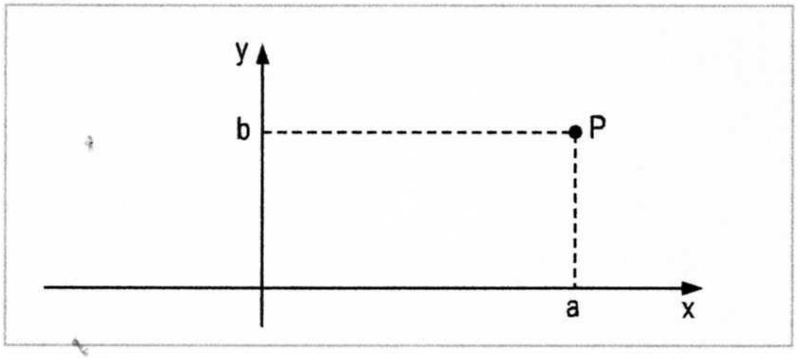
https://www.youtube.com/watch?v=G3zjNRYbDv8

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Funções

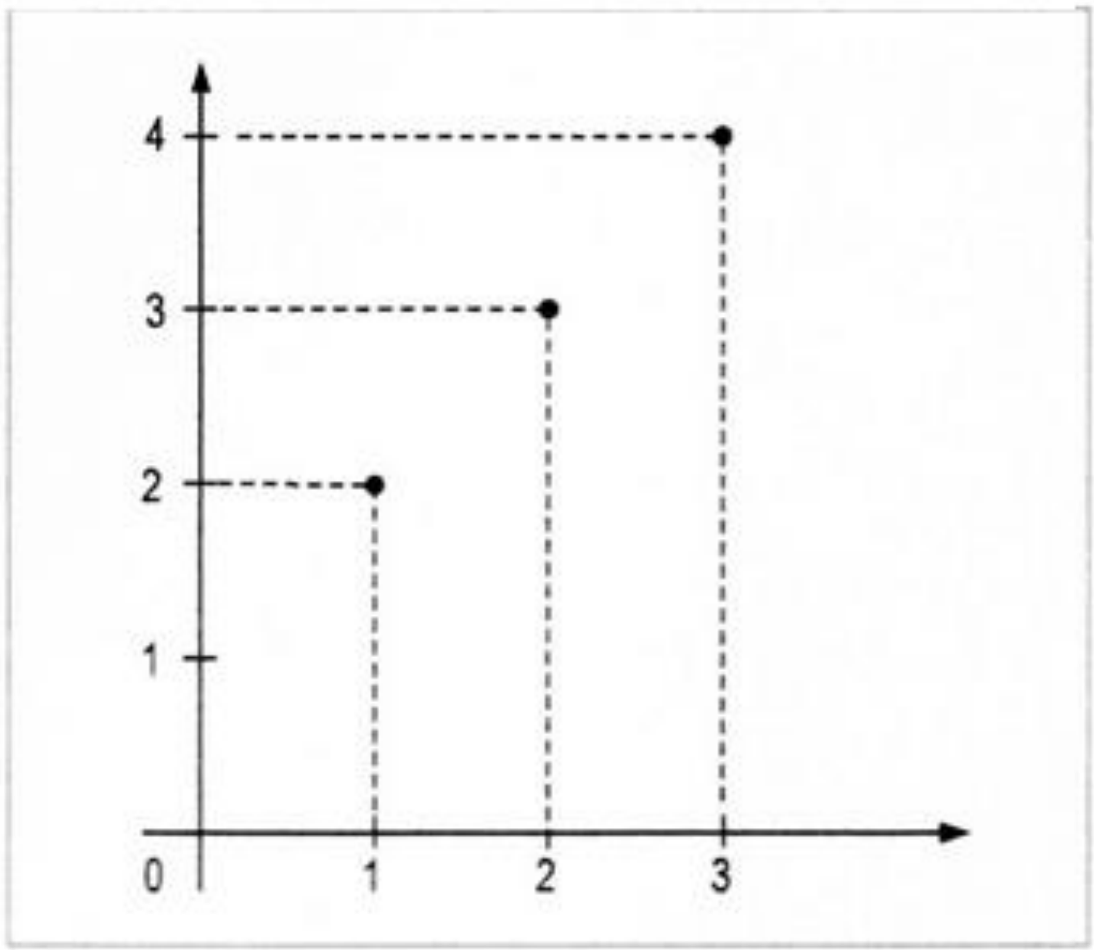
- Um par ordenado de números reais pode ser representado geometricamente por dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado eixo das abscissas, ou eixo *x*, e o vertical de eixo das ordenadas, ou eixo *y*.

FIGURA 2.2 Representação geométrica do par ordenado (a, b)



Funções

Gráfico de $f(x) = x + 1$ do Exemplo 2.1



Funções

- Vídeos:

https://www.youtube.com/watch?v=iC4q1AGeN5A

Disciplina: Matemática Discreta
Prof. Me. Reginaldo César Izelli

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

A LINGUAGEM DAS FUNÇÕES

$f : A \to B$ ou $f : A \to B$ ou $f : A \to B$ ou $f(x) = x^2$

$x \to x^2$ $\quad$ $x \to y = x^2$ $\quad$ $x \to f(x) = x^2$

$$f = \{(-2,5);(-1,2);(0,1);(1,2)\}$$

Valor de x

$$(-2,5) \Rightarrow f(-2) = 5$$

Valor Numérico da função (Valor de y)

No par $(-1,2)$ temos $f(-1) = 2 \Longrightarrow$

O valor numérico da função f é 2 quando x é igual a -1.

Domínio da função

- ***Domínio***

Nas situações de funções dadas por sentenças do tipo $y = f(x)$ em que x e y são variáveis numéricas, e não é mencionado o domínio, convenciona-se que ele seja formado por todos os valore reais de x para os quais existam as respectivas imagens y.

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Domínio da função

- Observemos, porém, que, em funções envolvendo situações práticas, o domínio é constituído por todos os valores reais de *x* para os quais tenha significado o cálculo da imagem.

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Domínio da função

- **DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL**

$$\text{Se } f(x)=\frac{g(x)}{d(x)} \Rightarrow d(x) \neq 0$$

$$\text{Se } f(x)=\sqrt[n]{r(x)} \Rightarrow r(x) \geq 0, \text{ com } n \text{ par.}$$

$$\text{Se } f(x)=\frac{g(x)}{\sqrt[n]{d(x)}} \Rightarrow d(x) > 0, \text{ com } n \text{ par}$$

Disciplina: Matemática Discreta

Prof. Me. Reginaldo César Izelli

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Domínio da funções

Exemplo 1: Para $f(x) = \sqrt{x-2}$,o domínio é o intervalo [2,+∞).

Podemos dizer que f é definida em x pertencente ao intervalo [2,+∞) e f é não definida em x pertencente ao intervalo (-∞,2).

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Domínio da função

Exemplo 2: Dê o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 1$

Solução:

Como esta função não apresenta nenhuma restrição para os valores de x, temos $D(f) = R$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{3}$

Solução:

Como esta função não apresenta nenhuma restrição para os valores de x, temos $D(f) = R$

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Domínio da função

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+5}$

$$D(f) = R$$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x-6}$

$2x - 6 \neq 0$

$2x \neq 6$

$x \neq 3$

$\Rightarrow D(f) = R - \{3\}$ ou $D(f) = \{x \in R \mid x \neq 3\}$

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Domínio da função

e) $f(x) = \sqrt{18 - 6x}$

$$18 - 6x \geq 0$$
$$-6x \geq -18 \quad (x - 1)$$
$$6x \leq 18$$
$$x \leq 3$$

$$\Rightarrow D(f) = \{x \in R \mid x \leq 3\}$$

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Domínio da função

f) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x}}$

$$1 - x > 0$$
$$-x > -1\;.\;(-1)$$
$$x < 1$$

$$\Rightarrow D(f) = \{x \in R \mid x < 1\}$$

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Domínio da função

- **Vídeo:**

https://www.youtube.com/watch?v=Y1urlgE0lBU

Função Crescente ou Decrescente

➢ Função Crescente: Dizemos que uma função *f* é crescente em um intervalo [*a*,*b*] se dentro do intervalo, à medida que aumenta o valor de *x*, as imagens correspondentes também aumentam, ou seja,

$$x_1 \;\; e \;\; x_2, \;\; tal \;\; que \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$$

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Função Crescente ou Decrescente

- **Função Decrescente:** Dizemos que uma função f é decrescente em um intervalo $[a,b]$ se dentro do intervalo, à medida que aumenta o valor de x, as imagens correspondentes vão diminuindo, ou seja,

$$x_1 \ e \ x_2, \ tal \ que \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Pontos de Máximo ou Mínimo

- ***Pontos de máximo:*** Seja f uma função definida em um domínio D. Dizemos que x_0 é um ponto de máximo relativo se existir um intervalo aberto A, com centro em x_0, tal que:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap D$$

A imagem de $f(x_0)$ é chamada valor máximo de f.

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Pontos de Máximo ou Mínimo

- ***Pontos de mínimo:*** Dizemos que x_0 é um ponto de mínimo relativo se existir um intervalo aberto A, com centro em x_0, tal que:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap D$$

A imagem de $f(x_0)$ é chamada valor mínimo de f.

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

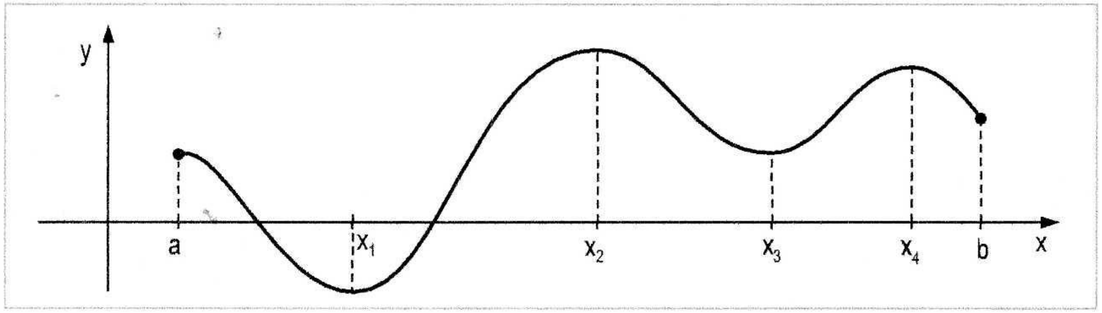
Pontos de Máximo ou Mínimo

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Exemplo:

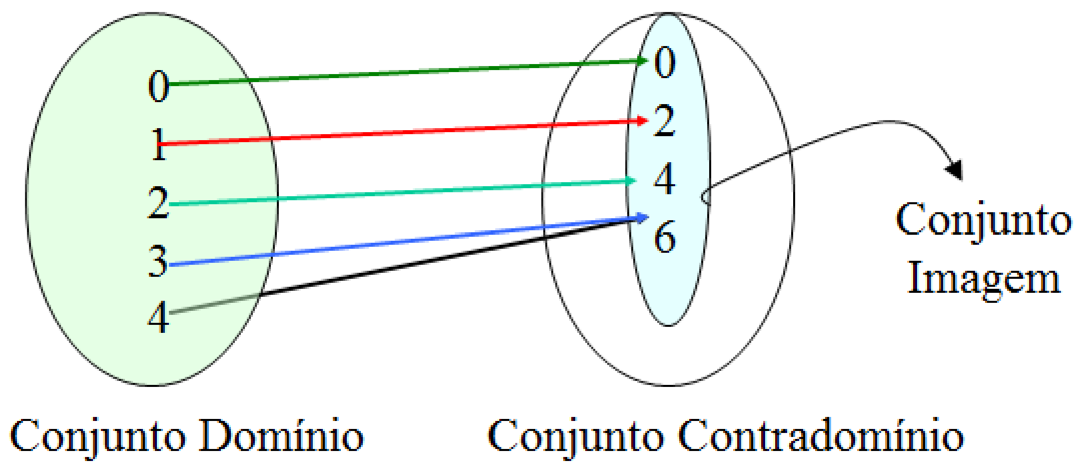
- Pontos de máximo: a, x_2, x_4.
- Pontos de mínimo: x_1, x_3, b.

FIGURA 2.11 Ilustração de pontos de máximo e de mínimo



Classificação de Funções

- **Função Sobrejetora:** É a função na qual a todo elemento do contradomínio está associado um elemento do domínio. Ou seja: $Cd = Im$.

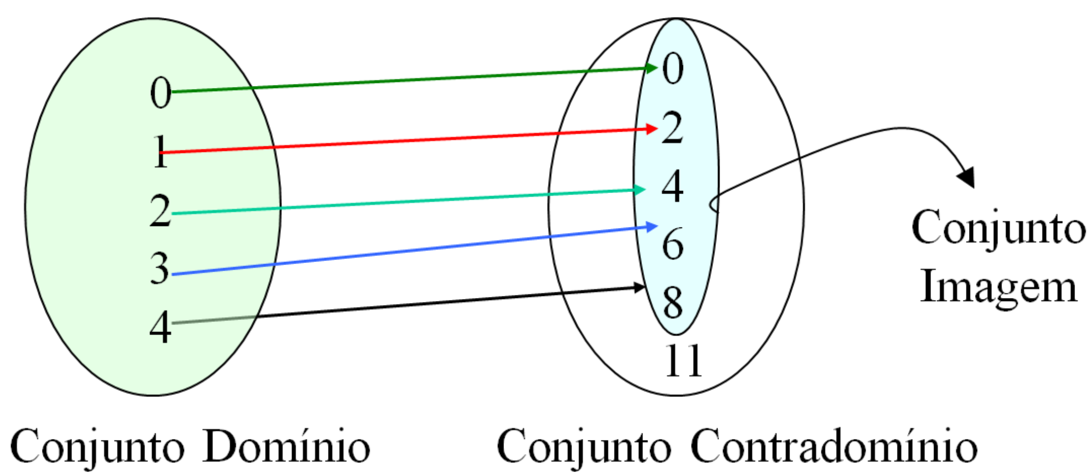


FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Funções

- **Função Injetora:** É quando quaisquer dois elementos diferentes do seu domínio têm imagens diferentes, ou seja,

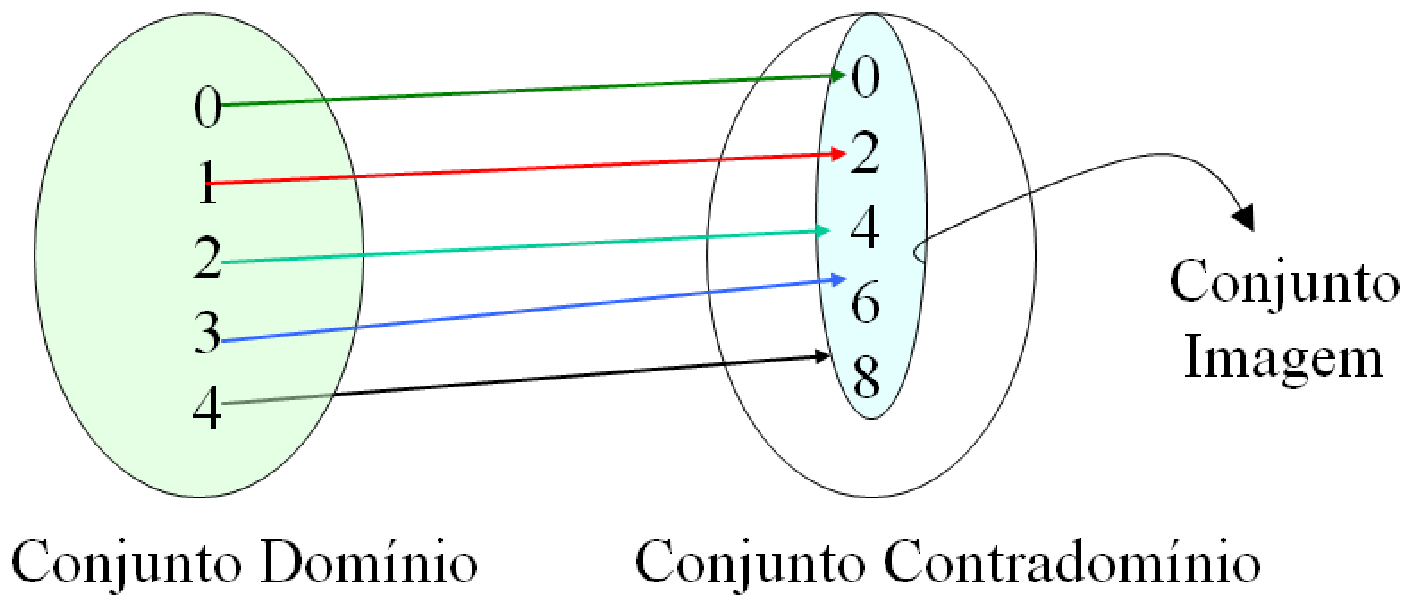
$$x_1 \neq x_2 \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2)$$



FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Funções

➤Função Bijetora: É a função simultaneamente sobrejetora e injetora.



Função Composta

- **Função Composta:** Dadas duas funções f e g, a função composta de g com f, denotada por $g_0 f$, é definida por

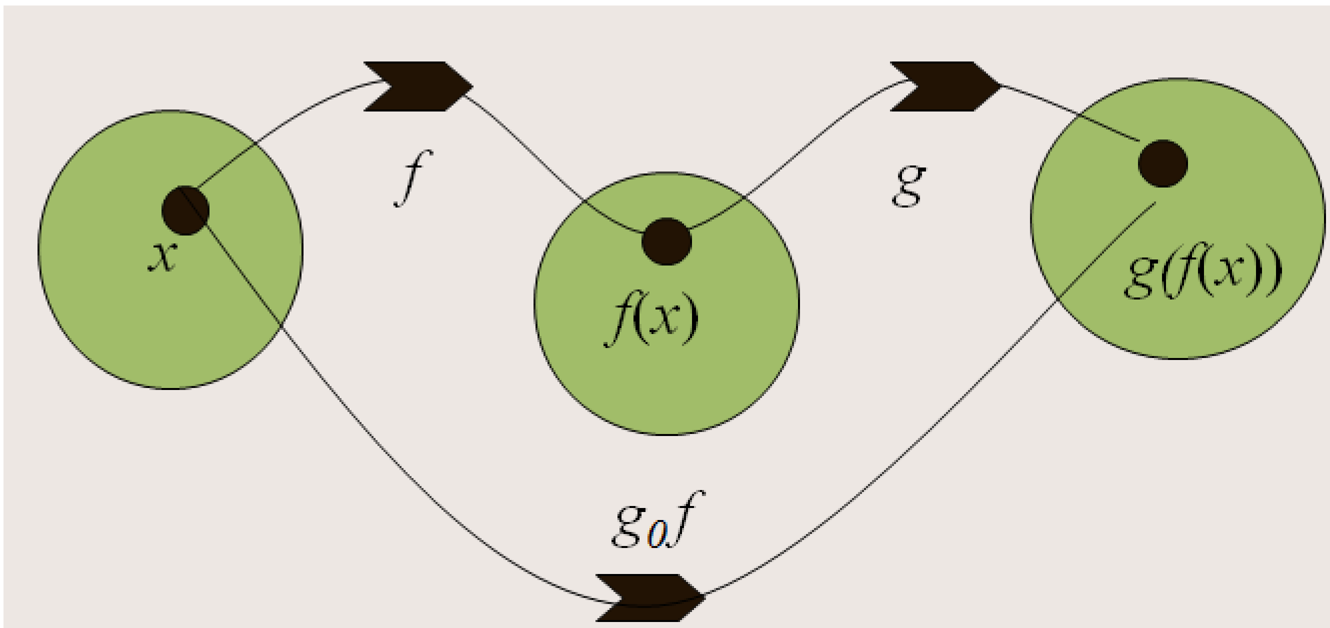
$$(g_0 f)\ (x) = g(f(x)).$$

O domínio de $g_0 f$ é o conjunto de todos os pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g.

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Função Composta

- $D(g_0 f) = \{x \in D(f) \ / \ f(x) \in D(g)\}$.



FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Função Composta

- Exemplo: Dadas as funções f e g (R em R), definidas por

$$f(x) = x - 5$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

Calcule:

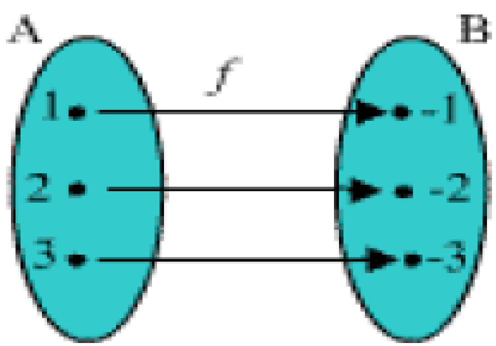
$f_o g\ (x) = f(g(x)) = f\ (x^2 + 2x - 3)$

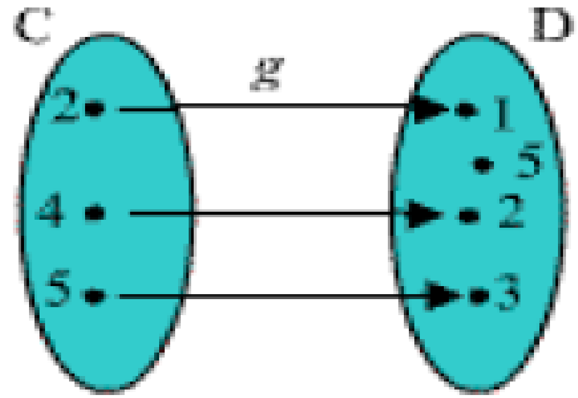
$f\ (x^2 + 2x - 3) = x^2 + 2x - 3 - 5 = x^2 + 2x - 8$

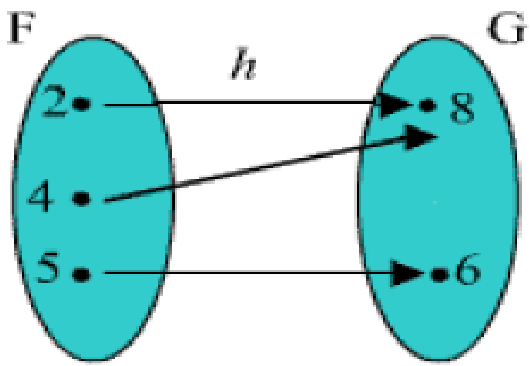
FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Função Inversa

Consideremos as funções, *f, g* e *h, definidas pelos diagramas*







FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Função Inversa

É possível obtermos funções de B em A, ou de D em C, ou ainda de F em E, invertendo os sentidos das flechas?

Dada uma função f: $A \rightarrow B$ bijetora, chamamos de **função inversa** de f a função f^{-1}: $B \rightarrow A$, tal que, para todo $(x, y) \in f$, há $(y, x) \in f^{-1}$.

Disciplina: Matemática Discreta
Prof. Me. Reginaldo César Izelli
FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

FATEC-Zona Sul
Faculdade de Tecnologia da Zona Sul
ENSINO SUPERIOR GRATUITO

Função Inversa

Exemplo: Determinar a função inversa de $f(x) = 6x - 1$.

Condição: $f(x)$ ser bijetora.

$$y = 6x - 1$$

$$\downarrow$$

$$x = 6y - 1$$

$$\downarrow$$

$$y = \frac{x + 1}{6}$$

$$\downarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{6}$$