

3. Consider the following matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

For each value of λ given below determine if it is an eigenvalue of A.

a) $\lambda = 0$

b) $\lambda = -1$

c) $\lambda = -2$

$\lambda = 0$

a) $\text{Null}(A - \lambda I) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{no basis}$

0 is not an eigen value of A

b) $\lambda = -1$ $A + I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{-1 is not an eigen value of A}$

c) $\lambda = -2$ $A + 2I \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{-2 is not an eigen value of A}$

16/20