Action unifiée de Kaluza-Dirac-Einstein

Bastien Baranoff

25 octobre 2025

Action unifiée de Kaluza-Dirac-Einstein

On définit une connexion totale $\mathcal{A}_\mu$ sur un espace-temps M de dimension quatre, munie d'un groupe de jauge étendu:

$$G_{\text{total}} = (U(1) \times SU(2) \times SU(3)) \rtimes SO(3,1)$$

où la connexion est donnée par:

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab} J_{ab} + \frac{1}{\ell} e_\mu^a P_a + A_\mu^I T_I$$

Les éléments de cette connexion sont: - ω_μ^{ab}: la connexion de spin (groupe de Lorentz $SO(3,1)$), - e_μ^a: le tétrade (champ de co-repère), - A_μ^I: les connexions internes (groupes $U(1), SU(2), SU(3)$), - J_{ab}, P_a, T_I: les générateurs du groupe de de Sitter étendu.

La courbure totale $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ est définie par:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$$

Elle se décompose en:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \left(R_{\mu\nu}^{ab} J_{ab} + \frac{1}{\ell} T_{\mu\nu}^a P_a \right) \oplus \left(F_{\mu\nu}^I T_I \right)$$

avec:

$$\begin{aligned}
R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb}, \quad \text{(courbure de Riemann)} \\
T^a &= De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b, \quad \text{(torsion)} \\
F^I &= dA^I + \frac{1}{2} f^I{}_{JK} A^J \wedge A^K. \quad \text{(courbures de Yang-Mills)}
\end{aligned}$$

Action gravitationnelle

L'action gravitationnelle combine les termes d'Einstein-Hilbert, de Holst, et cosmologique:

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G} \int \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge R^{cd} + \frac{1}{\gamma} \int e_a \wedge e_b \wedge R^{ab} - \frac{\Lambda}{24\pi G} \int \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d$$

Formulation équivalente (MacDowell-Mansouri):

$$S_{\mathrm{MM}} = \frac{\alpha}{\ell^2} \int \varepsilon_{abcd} \left(R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} e^a \wedge e^b \right) \wedge \left(R^{cd} + \frac{1}{\ell^2} e^c \wedge e^d \right)$$

Secteur matière

Action de Yang-Mills

$$S_{\mathrm{YM}} = -\sum_I \frac{1}{2g_I^2} \int \mathrm{Tr}\left(F^I \wedge *F^I\right) + \sum_I \frac{\theta_I}{8\pi^2} \int \mathrm{Tr}\left(F^I \wedge F^I\right)$$

Action du Higgs

$$S_H = \int \left[(D\phi)^\dagger \wedge *(D\phi) - *V(\phi) - \xi |\phi|^2 R * 1 \right]$$

Action de Dirac

$$S_D = \int *e \left[\bar{\psi} i \gamma^a e_a{}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{bc} \gamma_{bc} + A_\mu \right) \psi - y \bar{\psi} \phi \psi \right]$$

Action totale unifiée

$$S_{\text{total}} = S_{\text{grav}} + S_{\mathrm{YM}} + S_H + S_D$$

Équations du mouvement

Les variations de l'action donnent:

1. Variation δe^a:

$$\varepsilon_{abcd} e^b \wedge R^{cd} - \Lambda \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d = 8\pi G \tau_a$$

2. Variation $\delta \omega^{ab}$:

$$T^a = \frac{1}{2} \kappa \bar{\psi} \gamma^a \gamma^5 \psi$$

3. Variation δA^I:

$$D * F^I = J^I$$

Résumé conceptuel

- **Unification géométrique**: Toutes les forces sont des facettes d'une seule courbure $\mathcal{F}$.
- **Matière comme excitation**: Les particules sont des vibrations locales de la connexion.