

Action unifiée de Kaluza–Dirac–Einstein

Bastien Baranoff

24 octobre 2025

1 Connexion universelle

On définit une connexion totale sur un espace-temps M de dimension quatre, munie d'un groupe de jauge étendu :

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}J_{ab} + \frac{1}{\ell}e_\mu^a P_a + A_\mu^I T_I,$$

où :

- ω_μ^{ab} est la connexion de spin locale (Lorentz),
 - e_μ^a le tétrade,
 - A_μ^I les connexions internes ($U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$),
 - J_{ab}, P_a, T_I sont les générateurs du groupe de de Sitter étendu $G_{\text{total}} = (U(1) \times SU(2) \times SU(3)) \rtimes SO(3, 1)$.
-

2 Courbures associées

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu],$$

soit :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = (R_{\mu\nu}^{ab}J_{ab} + \frac{1}{\ell}T_{\mu\nu}^a P_a) \oplus (F_{\mu\nu}^I T_I),$$

avec :

$$\begin{aligned}
R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb}, \\
T^a &= De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b, \\
F^I &= dA^I + \frac{1}{2}f^I{}_{JK}A^J \wedge A^K.
\end{aligned}$$

3 Action gravitationnelle (MacDowell–Mansouri + Holst)

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G} \int \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge R^{cd} + \frac{1}{\gamma} \int e_a \wedge e_b \wedge R^{ab} - \frac{\Lambda}{24\pi G} \int \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d.$$

Le premier terme est **Einstein–Hilbert**,

le second le terme **Holst–Immirzi**,

le dernier le terme **cosmologique**.

Une formulation équivalente (MacDowell–Mansouri) :

$$S_{\text{MM}} = \frac{\alpha}{\ell^2} \int \varepsilon_{abcd} \left(R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} e^a \wedge e^b \right) \wedge \left(R^{cd} + \frac{1}{\ell^2} e^c \wedge e^d \right).$$

4 Secteur Yang–Mills + Higgs + Dirac

$$S_{\text{YM}} = - \sum_I \frac{1}{2g_I^2} \int \text{Tr}(F^I \wedge *F^I) + \sum_I \frac{\theta_I}{8\pi^2} \int \text{Tr}(F^I \wedge F^I).$$

$$S_{\text{H}} = \int \left[(D\phi)^\dagger \wedge *(D\phi) - *V(\phi) - \xi |\phi|^2 R *1 \right],$$

$$S_{\text{D}} = \int *e \left[\bar{\psi} i \gamma^a e_a{}^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{bc} \gamma_{bc} + A_\mu) \psi - y \bar{\psi} \phi \psi \right].$$

5 Action totale unifiée

$$S_{\text{total}} = S_{\text{grav}} + S_{\text{YM}} + S_{\text{H}} + S_{\text{D}}.$$

La connexion \mathcal{A}_μ joue ici le rôle de **champ unique**,

et les courbures correspondantes engendrent les quatre forces fondamentales.

6 Équations de champ (schéma)

- Variation δe^a :

$$\varepsilon_{abcd} e^b \wedge R^{cd} - \Lambda \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d = 8\pi G \tau_a.$$

- Variation $\delta \omega^{ab}$:

$$T^a = \frac{1}{2} \kappa \bar{\psi} \gamma^a \gamma^5 \psi,$$

équation d'**Einstein–Cartan**.

- Variation δA^I :

$$D * F^I = J^I,$$

équations de **Yang–Mills courbés**.

- Variations $\delta \phi, \delta \psi$: équations de **Klein–Gordon/Higgs** et **Dirac**.

7 Lecture unifiée de la courbure

Les deux projections de la courbure \mathcal{F} donnent les deux mondes :

| Projection | Contraction | Équation obtenue |
|-----------------------|-------------------------------------|--------------------|
| Lorentz / translation | $\varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b$ | Gravité (Einstein) |
| Interne T_I | Hodge $*$ | Maxwell–Yang–Mills |

$$R_{\mu\nu}[A] = \text{Tr}(F_{\mu\alpha}[A]F_{\nu}^{\alpha}[A]) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\text{Tr}(F_{\alpha\beta}[A]F^{\alpha\beta}[A])$$

8 Brisure de symétrie et masse

Le potentiel de Higgs

$$V(\phi) = \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2$$

et le couplage $\xi|\phi|^2 R$ produisent :

- les masses des bosons W/Z ,
- les masses des fermions via $y\bar{\psi}\phi\psi$,
- une **masse gravitationnelle effective** locale si $\xi \neq 0$.

9 Résumé conceptuel

L'action unifiée Kaluza–Dirac–Einstein repose sur une seule courbure \mathcal{F} :

- contraction avec $\varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \rightarrow$ **Einstein–Hilbert**,
- contraction avec Hodge- $*$ \rightarrow **Maxwell–Yang–Mills**.

Toutes les forces deviennent des facettes d'un même champ de connexion, et la matière en est l'oscillation locale.

10 Références

- Kaluza, K. (1919). *On the problem of unity in physics.* *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1–23.
- Dirac, P.A.M. (1928). *The Quantum Theory of the Electron.* *Proc. Roy. Soc. A*, 117, 610.
- MacDowell, S.W., Mansouri, F. (1977). *Unified Geometric Theory of Gravity and Supergravity.* *Phys. Rev. Lett.*, 38, 739.
- Ashtekar, A. (1986). *New Variables for Classical and Quantum Gravity.* *Phys. Rev. Lett.*, 57, 2244.

« *La physique est la géométrie d'un champ unique,
et la matière n'est qu'une vibration locale de sa courbure.* »