

Action unifiée de Kaluza-Dirac-Einstein

Bastien Baranoff

25 octobre 2025

On définit une **connexion totale** \mathcal{A}_μ sur un espace-temps M de dimension quatre, munie d'un groupe de jauge étendu

$$G_{\text{total}} = (U(1) \times SU(2) \times SU(3)) \rtimes SO(3,1),$$

où la connexion est donnée par

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}J_{ab} + \frac{1}{\ell}e_\mu^a P_a + A_\mu^I T_I.$$

Les éléments de cette connexion sont : - ω_μ^{ab} : la **connexion de spin** (groupe de Lorentz $SO(3,1)$), - e_μ^a : le **tétrade** (champ de co-repère), - A_μ^I : les **connexions internes** (groupes $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$), - J_{ab} , P_a , T_I : les générateurs du groupe de de Sitter étendu.

La **courbure totale** $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ est définie par :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu].$$

Elle se décompose en :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \left(R_{\mu\nu}^{ab} J_{ab} + \frac{1}{\ell} T_{\mu\nu}^a P_a \right) \oplus (F_{\mu\nu}^I T_I),$$

avec :

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb}, \quad (\text{courbure de Riemann})$$

$$T^a = De^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b, \quad (\text{torsion})$$

$$F^I = dA^I + \frac{1}{2}f^I_{JK} A^J \wedge A^K. \quad (\text{courbures de Yang-Mills})$$

L'action gravitationnelle combine les termes d'Einstein-Hilbert, de Holst, et cosmologique :

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G} \int \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge R^{cd} + \frac{1}{\gamma} \int e_a \wedge e_b \wedge R^{ab} - \frac{\Lambda}{24\pi G} \int \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d.$$

Formulation équivalente (MacDowell-Mansouri) :

$$S_{\text{MM}} = \frac{\alpha}{\ell^2} \int \varepsilon_{abcd} \left(R^{ab} + \frac{1}{\ell^2} e^a \wedge e^b \right) \wedge \left(R^{cd} + \frac{1}{\ell^2} e^c \wedge e^d \right).$$

Secteur matière

Action de Yang-Mills

$$S_{\text{YM}} = - \sum_I \frac{1}{2g_I^2} \int \text{Tr}(F^I \wedge *F^I) + \sum_I \frac{\theta_I}{8\pi^2} \int \text{Tr}(F^I \wedge F^I).$$

Action du Higgs

$$S_H = \int \left[(D\phi)^\dagger \wedge *(D\phi) - *V(\phi) - \xi|\phi|^2 R * 1 \right].$$

Action de Dirac

$$S_D = \int *e \left[\bar{\psi} i \gamma^a e_a{}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{bc} \gamma_{bc} + A_\mu \right) \psi - y \bar{\psi} \phi \psi \right].$$

Action totale unifiée

$$S_{\text{total}} = S_{\text{grav}} + S_{\text{YM}} + S_H + S_D.$$

Équations du mouvement

Les variations de l'action donnent : 1. **Variation** δe^a :

$$\varepsilon_{abcd} e^b \wedge R^{cd} - \Lambda \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d = 8\pi G \tau_a.$$

2. **Variation** $\delta \omega^{ab}$:

$$T^a = \frac{1}{2} \kappa \bar{\psi} \gamma^a \gamma^5 \psi.$$

3. **Variation** δA^I :

$$D * F^I = J^I.$$

Résumé conceptuel

- **Unification géométrique** : Toutes les forces sont des facettes d'une seule courbure \mathcal{F} .
- **Matière comme excitation** : Les particules sont des vibrations locales de la connexion.