Action unifiée de Kaluza–Dirac–Einstein

Bastien Baranoff

24 octobre 2025

1 Connexion universelle

On définit une connexion totale sur un espace-temps M de dimension quatre, munie d'un groupe de jauge étendu :

$$\mathcal{A}_\mu = \tfrac{1}{2}\omega_\mu^{ab} J_{ab} + \frac{1}{\ell} e_\mu^{\ a} P_a + A_\mu^I T_I,$$

où :

- ω_μ^{ab} est la connexion de spin locale (Lorentz),
- $e_\mu^{\ a}$ le tétrade,
- A_μ^I les connexions internes ($U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$),
- J_{ab}, P_a, T_I sont les générateurs du groupe de de Sitter étendu $G_{\text{total}} = (U(1) \times SU(2) \times SU(3)) \rtimes SO(3,1)$.

---

2 Courbures associées

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu],$$

soit :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = (R_{\mu\nu}^{ab} J_{ab} + \tfrac{1}{\ell} T_{\mu\nu}^a P_a) \oplus (F_{\mu\nu}^I T_I),$$

avec :

$$
\begin{aligned}
R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^{a}{}_{c} \wedge \omega^{cb}, \\
T^{a} &= De^{a} = de^{a} + \omega^{a}{}_{b} \wedge e^{b}, \\
F^{I} &= dA^{I} + \tfrac{1}{2} f^{I}{}_{JK} A^{J} \wedge A^{K}.
\end{aligned}
$$

---

3 Action gravitationnelle (MacDowell–Mansouri + Holst)

$$
S_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G} \int \varepsilon_{abcd}\, e^{a} \wedge e^{b} \wedge R^{cd} + \frac{1}{\gamma} \int e_{a} \wedge e_{b} \wedge R^{ab} - \frac{\Lambda}{24\pi G} \int \varepsilon_{abcd}\, e^{a} \wedge e^{b} \wedge e^{c} \wedge e^{d}.
$$

Le premier terme est **Einstein–Hilbert**,
le second le terme **Holst–Immirzi**,
le dernier le terme **cosmologique**.

Une formulation équivalente (MacDowell–Mansouri) :

$$
S_{\text{MM}} = \frac{\alpha}{\ell^{2}} \int \varepsilon_{abcd} \Big(R^{ab} + \frac{1}{\ell^{2}} e^{a} \wedge e^{b} \Big) \wedge \Big(R^{cd} + \frac{1}{\ell^{2}} e^{c} \wedge e^{d} \Big).
$$

---

4 Secteur Yang–Mills + Higgs + Dirac

$$
S_{\text{YM}} = -\sum_{I} \frac{1}{2g_{I}^{2}} \int \mathrm{Tr}(F^{I} \wedge *F^{I}) + \sum_{I} \frac{\theta_{I}}{8\pi^{2}} \int \mathrm{Tr}(F^{I} \wedge F^{I}).
$$

$$
S_{\text{H}} = \int \Big[(D\phi)^{\dagger} \wedge *(D\phi) - *V(\phi) - \xi |\phi|^{2} R * 1 \Big],
$$

$$
S_{\text{D}} = \int *e \Big[\bar{\psi}\, i\, \gamma^{a} e_{a}{}^{\mu} (\partial_{\mu} + \tfrac{1}{4} \omega_{\mu}^{bc} \gamma_{bc} + A_{\mu}) \psi - y \bar{\psi} \phi \psi \Big].
$$

---

5 Action totale unifiée

$$
S_{\text{total}} = S_{\text{grav}} + S_{\text{YM}} + S_{\text{H}} + S_{\text{D}}.
$$

La connexion $\mathcal{A}_{\mu}$ joue ici le rôle de **champ unique**,
et les courbures correspondantes engendrent les quatre forces fondamentales.

---

6 Équations de champ (schéma)

- Variation δe^a :
$$\varepsilon_{abcd}\, e^b \wedge R^{cd} - \Lambda\, \varepsilon_{abcd}\, e^b \wedge e^c \wedge e^d = 8\pi G\, \tau_a.$$
- Variation $\delta\omega^{ab}$:
$$T^a = \frac{1}{2}\kappa\, \bar{\psi}\gamma^a\gamma^5\psi,$$
équation d'**Einstein–Cartan**.
- Variation δA^I :
$$D * F^I = J^I,$$
équations de **Yang–Mills courbés**.
- Variations $\delta\phi, \delta\psi$: équations de **Klein–Gordon/Higgs** et **Dirac**.

---

7 Lecture unifiée de la courbure

Les deux projections de la courbure $\mathcal{F}$ donnent les deux mondes :

Projection	Contraction	Équation obtenue
Lorentz / translation	$\varepsilon_{abcd}\, e^a \wedge e^b$	Gravité (Einstein)
Interne T_I	Hodge $*$	Maxwell–Yang–Mills

$$\boxed{R_{\mu\nu}[A] = \mathrm{Tr}(F_{\mu\alpha}[A]F_\nu{}^\alpha[A]) - \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}\mathrm{Tr}(F_{\alpha\beta}[A]F^{\alpha\beta}[A])}$$

---

8 Brisure de symétrie et masse

Le potentiel de Higgs
$$V(\phi) = \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2$$
et le couplage $\xi|\phi|^2R$ produisent :

- les masses des bosons W/Z,
- les masses des fermions via $y\bar{\psi}\phi\psi$,
- une **masse gravitationnelle effective** locale si $\xi \neq 0$.

---

9 Résumé conceptuel

L'action unifiée Kaluza–Dirac–Einstein repose sur une seule courbure $\mathcal{F}$:
- contraction avec $\varepsilon_{abcd}\, e^a \wedge e^b \rightarrow$ **Einstein–Hilbert**,
- contraction avec Hodge-* $\rightarrow$ **Maxwell–Yang–Mills**.

Toutes les forces deviennent des facettes d'un même champ de connexion, et la matière en est l'oscillation locale.

---

10 Références

- Kaluza, K. (1919). *On the problem of unity in physics. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1–23.
- Dirac, P.A.M. (1928). *The Quantum Theory of the Electron. Proc. Roy. Soc. A*, 117, 610.
- MacDowell, S.W., Mansouri, F. (1977). *Unified Geometric Theory of Gravity and Supergravity. Phys. Rev. Lett.*, 38, 739.
- Ashtekar, A. (1986). *New Variables for Classical and Quantum Gravity. Phys. Rev. Lett.*, 57, 2244.

« La physique est la géométrie d'un champ unique,
et la matière n'est qu'une vibration locale de sa courbure. »