Résumé

On présente deux démonstrations fréquentielles où la transformée de Fourier relie ordre et chaos, structure et aléa. La première interprète la série $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ comme l'énergie d'un bruit blanc filtré deux fois sur un espace circulaire. La seconde reformule la *formule d'Euler* $e^{i\pi} + 1 = 0$ comme le point d'équilibre parfait entre rotation, translation et annulation spectrale.

---

1. Le bruit blanc et la somme des inverses carrés

1.1 Cadre conceptuel

Un bruit blanc parfait possède un spectre de puissance plat :

$$S(f) = S_0,$$

et, par dualité de Fourier, son autocorrélation temporelle est un Dirac :

$$R(x) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = S_0\,\delta(x).$$

L'uniformité spectrale et la localisation temporelle sont donc deux manifestations d'une même symétrie.

1.2 Filtrage du bruit blanc

Une intégration multiplie le spectre par $1/f$. Deux intégrations successives donnent :

$$S(f) \propto \frac{1}{f^2}.$$

La transformée de Fourier inverse de ce spectre est une parabole :

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{f^2}\right\} \propto x^2,$$

autrement dit : un bruit blanc filtré deux fois devient quadratique dans le domaine temporel.

1.3 Quantification sur un cercle

En repliant ce signal sur un cercle de période 2π, les fréquences se quantifient :

$$f_n = n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Le spectre discret est alors :

$$S_n = \frac{1}{n^2}.$$

L'énergie totale (Parseval) vaut :

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La constante $\pi^2/6$ représente donc l'énergie d'un bruit blanc régularisé sur un domaine fermé : le chaos rendu mesurable par la périodicité.

---

2. La formule d'Euler comme fermeture spectrale

2.1 Onde complexe et rotation

Une onde pure peut s'écrire sous forme complexe :

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\sin(\omega t).$$

Sa transformée de Fourier est un **Dirac** concentré en ω_0 :

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\,\delta(f - \omega_0).$$

Autrement dit, une rotation parfaite dans le plan complexe correspond à une impulsion spectrale unique : une **pure fréquence**, sans dispersion.

2.2 Fermeture sur le cercle unitaire

Quand on fixe $\omega = \pi$, on obtient :

$$e^{i\pi} = -1.$$

Ce point $(-1, 0)$ est diamétralement opposé à $+1$ sur le cercle unitaire. C'est la *demi-période* de toute onde, le moment où le signal s'inverse.

En ajoutant 1, on obtient :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Ce n'est pas une magie algébrique :
c'est **la fermeture du spectre sur lui-même**. Le signal tournant d'un demi-tour revient sur l'axe opposé, et l'addition ramène la phase à zéro —
le moment exact où rotation et annulation coïncident.

2.3 Lecture fréquentielle

Dans l'espace fréquentiel, $e^{i\pi}$ correspond à un Dirac en fréquence π, et l'ajout de 1 correspond à une translation du spectre vers l'origine. Les deux impulsions se superposent en opposition de phase : leur somme donne le **Dirac nul**.

Ainsi, la formule d'Euler exprime le même principe que la somme des inverses carrés : $>$ la convergence d'un spectre discret vers une annulation totale $>$ lorsque le système est parfaitement périodique.

Concept	Domaine temporel	Domaine fréquentiel	Interprétation

3. Interprétation unifiée

Concept	Domaine temporel	Domaine fréquentiel	Interprétation
Bruit blanc	chaos total	constante (Dirac temporel)	indétermination pure
Spectre $1/f^2$	parabole x^2	décroissance quadratique	bruit régularisé
Onde $e^{i\omega t}$	rotation harmonique	Dirac ponctuel	ordre absolu
$e^{i\pi} + 1 = 0$	inversion complète	superposition destructive	fermeture du spectre

---

4. Conclusion

Les deux identités,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad e^{i\pi} + 1 = 0,$$

peuvent être vues comme deux faces d'une même géométrie spectrale : l'une quantifie la **densité d'énergie d'un bruit régularisé**,
l'autre décrit la **fermeture topologique de la rotation complexe**.

Dans les deux cas, π joue le rôle du **périmètre de cohérence** : la longueur minimale d'un cercle où le désordre, l'harmonie et la nullité se rejoignent.