

## 0.1 b) Hash d'un fichier arbitraire

# 1 Ondes gravitationnelles quantifiées — Développement complet et rigoureux

## 1.1 1. Linéarisation de la métrique

On considère un espace-temps presque plat, où la métrique est perturbée par une onde gravitationnelle faible :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

Le tenseur  $h_{\mu\nu}$  représente la **perturbation métrique**, de norme petite devant le fond plat de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ .

Dans la **jauge harmonique** :

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h,$$

les équations d'Einstein linéarisées prennent la forme d'une équation d'onde classique.

---

## 1.2 2. Expansion du Lagrangien gravitationnel à l'ordre quadratique

On part du Lagrangien d'Einstein–Hilbert :

$$\mathcal{L}_G = \frac{c^4}{16\pi G} \sqrt{-g} R.$$

En développant jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(h^2)$ , on obtient, dans la jauge harmonique :

$$\mathcal{L}_G^{(2)} = \frac{c^4}{64\pi G} [\partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} - 2 \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\lambda\nu} + 2 \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - \partial_\lambda h \partial^\lambda h].$$

Sous les conditions de jauge et de transversalité, cette expression se simplifie en une **forme canonique d'onde libre** :

$$\mathcal{L}_G^{(2)} = \frac{c^4}{64\pi G} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu}$$

### 1.3 3. Inclusion du terme de correction quantique

Le Lagrangien complet inclut maintenant un terme correctif de type **haute dérivation** (issu d'une expansion effective en  $l_P$ ) :

$$\mathcal{L}_{\text{corr}} = \frac{c^4 l_P^2}{64\pi G} (\Box h_{\mu\nu})(\Box h^{\mu\nu}), \quad l_P^2 = \frac{\hbar G}{c^3}.$$

Ainsi, le Lagrangien total devient :

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{c^4}{64\pi G} [\partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + l_P^2 (\Box h_{\mu\nu})(\Box h^{\mu\nu})]}.$$


---

### 1.4 4. Équation d'onde modifiée

En appliquant le principe de moindre action ( $\delta S = 0$ ), on obtient l'équation d'Euler–Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda h_{\mu\nu})} \right) + \Box \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\Box h_{\mu\nu})} \right) = 0.$$

Ceci conduit à :

$$\boxed{(1 + l_P^2 \Box) \Box h_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box h_{\mu\nu} + l_P^2 \Box^2 h_{\mu\nu} = 0.}$$

C'est une **équation d'onde à dérivées d'ordre quatre**, caractéristique des modèles de gravité quantique effective.

---

### 1.5 5. Analyse spectrale

On cherche une solution plane :

$$h_{\mu\nu}(x) = \epsilon_{\mu\nu} e^{i(k_\alpha x^\alpha)} = \epsilon_{\mu\nu} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.$$

En insérant dans l'équation d'onde :

$$(-\omega^2 + k^2)(1 - l_P^2(\omega^2 - k^2)) = 0.$$

On obtient **deux branches de dispersion** :

$$\begin{cases} \omega_1^2 = k^2, & \text{onde gravitationnelle classique,} \\ \omega_2^2 = k^2 + \frac{1}{l_P^2}, & \text{mode quantique de Planck.} \end{cases}$$

Le second mode correspond à une onde massive, de masse effective :

$$m_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{c l_P} = m_P,$$

soit la **masse de Planck** ( $\approx 2.18 \times 10^{-8}$  kg).

---

## 1.6 6. Interprétation physique

- $\omega_1$  : **propagation classique**, onde gravitationnelle sans masse.
- $\omega_2$  : **mode quantique planckien**, très lourd, pratiquement non excitable à nos énergies.

L'équation complète prédit donc :

- Une **dispersion faible** pour les ondes gravitationnelles ordinaires ( $E \ll E_P$ ).
- Une **correction ultra-haute fréquence** liée à la structure discrète de l'espace-temps.

---

## 1.7 7. Prédiction observationnelles

| Domaine                       | Signature attendue  | Observatoire                     |
|-------------------------------|---|----------------------------------|
| <b>LIGO/Virgo/KAGRA</b>       | Dispersion légère ( $v_g < c$ ) à haute fréquence                     | Analyse spectrale fine           |
| <b>LISA (ESA/NASA)</b>        | Déviati on à basse fréquence ( $f \sim 10^{-3}$ Hz)                   | Test du couplage gravité-quantum |
| <b>Cosmologie primordiale</b> | Suppression de modes $k > k_P$ dans le fond d'ondes gravitationnelles | CMB B-modes (LiteBIRD, CMB-S4)   |

## 1.8 8. Conclusion

L'équation

$$(1 + l_P^2 \square) \square h_{\mu\nu} = 0$$

introduit naturellement, dans le cadre linéarisé, une **structure quantique du champ gravitationnel**.

La discrétisation de l'espace-temps à l'échelle de Planck induit :

- un **spectre bimodal** (classique + quantique),
- une **dispersion mesurable** à haute fréquence,
- une **piste observationnelle** vers la gravité quantique.