1 Ondes gravitationnelles quantifiées — Développement complet et rigoureux

1.1 1. Linéarisation de la métrique

On considère un espace-temps presque plat, où la métrique est perturbée par une onde gravitationnelle faible :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

Le tenseur $h_{\mu\nu}$ représente la **perturbation métrique**, de norme petite devant le fond plat de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.
Dans la **jauge harmonique** :

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \qquad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h,$$

les équations d'Einstein linéarisées prennent la forme d'une équation d'onde classique.

1.2 2. Expansion du Lagrangien gravitationnel à l'ordre quadratique

On part du Lagrangien d'Einstein–Hilbert :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{G}} = \frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\,R.$$

En développant jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(h^2)$, on obtient, dans la jauge harmonique :

$$\mathcal{L}_G^{(2)} = \frac{c^4}{64\pi G}\left[\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} - 2\,\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\lambda\nu} + 2\,\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h - \partial_\lambda h\,\partial^\lambda h\right].$$

Sous les conditions de jauge et de transversalité, cette expression se simplifie en une **forme canonique d'onde libre** :

$$\boxed{\mathcal{L}_G^{(2)} = \frac{c^4}{64\pi G}\,\partial_\lambda h_{\mu\nu}\,\partial^\lambda h^{\mu\nu}}$$

1.3 3. Inclusion du terme de correction quantique

Le Lagrangien complet inclut maintenant un terme correctif de type **haute dérivation** (issu d'une expansion effective en l_P) :

$$\mathcal{L}_{\text{corr}} = \frac{c^4\, l_P^2}{64\pi G}\, (\Box h_{\mu\nu})(\Box h^{\mu\nu}), \qquad l_P^2 = \frac{\hbar G}{c^3}.$$

Ainsi, le Lagrangien total devient :

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{c^4}{64\pi G}\left[\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + l_P^2(\Box h_{\mu\nu})(\Box h^{\mu\nu})\right]}.$$

1.4 4. Équation d'onde modifiée

En appliquant le principe de moindre action ($\delta S = 0$), on obtient l'équation d'Euler–Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{\mu\nu}} - \partial_\lambda\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda h_{\mu\nu})}\right) + \Box\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\Box h_{\mu\nu})}\right) = 0.$$

Ceci conduit à :

$$\boxed{(1 + l_P^2\Box)\,\Box h_{\mu\nu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Box h_{\mu\nu} + l_P^2\Box^2 h_{\mu\nu} = 0.}$$

C'est une **équation d'onde à dérivées d'ordre quatre**, caractéristique des modèles de gravité quantique effective.

1.5 5. Analyse spectrale

On cherche une solution plane :

$$h_{\mu\nu}(x) = \epsilon_{\mu\nu} e^{i(k_\alpha x^\alpha)} = \epsilon_{\mu\nu} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}.$$

En insérant dans l'équation d'onde :

$$(-\omega^2 + k^2)\big(1 - l_P^2(\omega^2 - k^2)\big) = 0.$$

On obtient **deux branches de dispersion** :

$$
\boxed{\begin{cases} \omega_1^2 = k^2, & \text{onde gravitationnelle classique,} \\ \omega_2^2 = k^2 + \dfrac{1}{l_P^2}, & \text{mode quantique de Planck.} \end{cases}}
$$

Le second mode correspond à une onde massive, de masse effective :

$$
m_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{c\, l_P} = m_P,
$$

soit la **masse de Planck** ($\approx 2.18 \times 10^{-8}\,\text{kg}$).

1.6 6. Interprétation physique

- ω_1 : **propagation classique**, onde gravitationnelle sans masse.

- ω_2 : **mode quantique planckien**, très lourd, pratiquement non excitable à nos énergies.

L'équation complète prédit donc :

- Une **dispersion faible** pour les ondes gravitationnelles ordinaires ($E \ll E_P$).
- Une **correction ultra-haute fréquence** liée à la structure discrète de l'espace-temps.

1.7 7. Prédictions observationnelles

Domaine	Signature attendue	Observatoire
LIGO/Virgo/KAGRA	Dispersion légère ($v_g < c$) à haute fréquence	Analyse spectrale fine
LISA (ESA/NASA)	Déviation à basse fréquence ($f \sim 10^{-3}$ Hz)	Test du couplage gravité–quantum
Cosmologie primordiale	Suppression de modes $k > k_P$ dans le fond d'ondes gravitationnelles	CMB B-modes (LiteBIRD, CMB-S4)

1.8 8. Conclusion

L'équation

$$(1 + l_P^2 \Box)\Box h_{\mu\nu} = 0$$

introduit naturellement, dans le cadre linéarisé, une **structure quantique du champ gravitationnel**.
La discrétisation de l'espace-temps à l'échelle de Planck induit :

- un **spectre bimodal** (classique + quantique),
- une **dispersion mesurable** à haute fréquence,
- une **piste observationnelle** vers la gravité quantique.