

## Лекция 12

# ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

### 12.1. Общая постановка задачи динамического программирования

*Динамическое программирование (ДП)* — метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги). Такие операции называются *многошаговыми*. Начало развития ДП относится к 50-м годам XX в. Оно связано с именем Р.Беллмана<sup>1</sup>.

Если модели линейного программирования можно использовать в экономике для принятия крупномасштабных плановых решений в сложных ситуациях, то модели ДП применяются при решении задач значительно меньшего масштаба, например, при разработке правил управления запасами, устанавливающими момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа; при разработке принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; при распределении дефицитных капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использования; при составлении календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования и его замены; при разработке долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов и т. п.

В реально функционирующих больших экономических системах еженедельно требуется принимать микроэкономические ре-

---

<sup>1</sup> Беллман Р.Э. (р.1920 г.) — американский математик.

шения. Модели ДП ценны тем, что позволяют на основе стандартного подхода с использованием при минимальном вмешательстве человека принимать такие решения. И если каждое взятое в отдельности такое решение малосущественно, то в совокупности эти решения могут оказать большое влияние на прибыль.

Приведем *общую постановку задачи ДП*. Рассматривается управляемый процесс, например, экономический процесс распределения средств между предприятиями, использования ресурсов в течение ряда лет, замены оборудования, пополнения запасов и т. п. В результате управления система (объект управления)  $S$  переводится из начального состояния  $s_0$  в состояние  $\hat{s}$ . Предположим, что управление можно разбить на  $n$  шагов, т.е. решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление, переводящее систему  $S$  из начального состояния в конечное, представляет собой совокупность  $n$  пошаговых управлений.

Обозначим через  $X_k$  управление на  $k$ -м шаге ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Переменные  $X_k$  удовлетворяют некоторым ограничениям и в этом смысле называются *допустимыми* ( $X_k$  может быть числом, точкой в  $n$ -мерном пространстве, качественным признаком).

Пусть  $X (X_1, X_2, \dots, X_n)$  — управление, переводящее систему  $S$  из состояния  $s_0$  в состояние  $\hat{s}$ . Обозначим через  $s_k$  состояние системы после  $k$ -го шага управления. Получаем последовательность состояний  $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, \dots, s_{n-1}, s_n = \hat{s}$ , которую изобразим кружками (рис. 12.1).

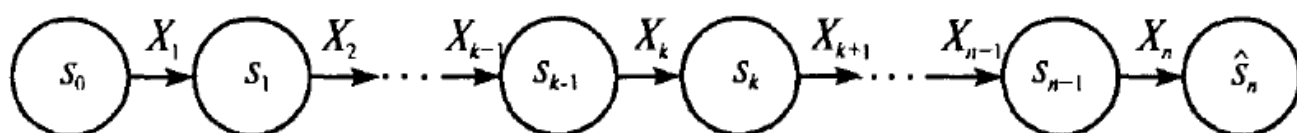


Рис. 12.1

Показатель эффективности рассматриваемой управляемой операции — целевая функция — зависит от начального состояния и управления:

$$Z = F(s_0, X). \quad (12.1)$$

Сделаем несколько предположений.

1. Состояние  $s_k$  системы в конце  $k$ -го шага зависит только от предшествующего состояния  $s_{k-1}$  и управления на  $k$ -м шаге  $X_k$

(и не зависит от предшествующих состояний и управлений). Это требование называется “отсутствием последствия”. Сформулированное положение записывается в виде уравнений

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k), k = 1, 2, \dots, n, \quad (12.2)$$

которые называются *уравнениями состояний*.

2. Целевая функция (12.1) является аддитивной от показателя эффективности каждого шага [3]. Обозначим показатель эффективности  $k$ -го шага через

$$Z_k = f_k(s_{k-1}, X_k), k=1, 2, \dots, n, \quad (12.3)$$

тогда

$$Z = \sum_{k=1}^n f_k(s_{k-1}, X_k). \quad (12.4)$$

Задача пошаговой оптимизации (задача ДП) формулируется так: *определить такое допустимое управление  $X$ , переводящее систему  $S$  из состояния  $s_0$  в состояние  $\hat{s}$ , при котором целевая функция (12.4) принимает наибольшее (наименьшее) значение.*

Выделим особенности модели ДП:

1. *Задача оптимизации интерпретируется как  $n$ -шаговый процесс управления.*

2. *Целевая функция равна сумме целевых функций каждого шага.*

3. *Выбор управления на  $k$ -м шаге зависит только от состояния системы к этому шагу, не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи).*

4. *Состояние  $s_k$  после  $k$ -го шага управления зависит только от предшествующего состояния  $s_{k-1}$  и управления  $X_k$  (отсутствие последствия).*

5. *На каждом шаге управление  $X_k$  зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние  $s_k$  — от конечного числа параметров (смысл замечания 5 станет ясным из рассмотренных ниже примеров).*

Следует вспомнить, что существуют различные способы решения подобных задач, применяемые в зависимости от вида функций, ограничений, размерности и т. п. Рассмотрим вычислительную схему ДП, которая окажется безразличной к способам задания функций и ограничений. Вычислительная схема связана с принципом оптимальности и использует рекуррентные соотношения.

## 12.2. Принцип оптимальности и уравнения Беллмана

**Принцип оптимальности** впервые был сформулирован Р. Беллманом в 1953 г. *Каково бы ни было состояние  $s$  системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный*<sup>1</sup>. Беллманом четко были сформулированы и условия, при которых принцип верен. Основное требование — процесс управления должен быть без обратной связи, т.е. управление на данном шаге не должно оказывать влияния на предшествующие шаги.

Принцип оптимальности утверждает, что для любого процесса без обратной связи оптимальное управление таково, что оно является оптимальным для любого подпроцесса по отношению к исходному состоянию этого подпроцесса. Поэтому решение на каждом шаге оказывается наилучшим с точки зрения управления в целом. Если изобразить геометрически оптимальную траекторию в виде ломаной линии, то любая часть этой ломаной будет являться оптимальной траекторией относительно начала и конца.

**Уравнения Беллмана.** Вместо исходной задачи ДП (см. разд. 12.1) с фиксированным числом шагов  $n$  и начальным состоянием  $s_0$  рассмотрим последовательность задач, полагая последовательно  $n=1, 2, \dots$  при различных  $s$  — одношаговую, двухшаговую и т.д., — используя принцип оптимальности.

Введем ряд новых обозначений. Обозначения в ДП несут большую информационную нагрузку, поэтому очень важно их четко усвоить.

На каждом шаге любого состояния системы  $s_{k-1}$  решение  $X_k$  нужно выбирать “с оглядкой”, так как этот выбор влияет на последующее состояние  $s_k$  и дальнейший процесс управления, зависящий от  $s_k$ . Это следует из принципа оптимальности.

Но есть один шаг, последний, который можно для любого состояния  $s_{n-1}$  планировать локально-оптимально, исходя только из соображений этого шага.

---

<sup>1</sup> Формулировка принадлежит Е.С.Вентцель [3] и немного отличается от предложенной Беллманом.

Рассмотрим  $n$ -й шаг:  $s_{n-1}$  — состояние системы к началу  $n$ -го шага,  $s_n = \hat{s}$  — конечное состояние,  $X_n$  — управление на  $n$ -м шаге, а  $f_n(s_{n-1}, X_n)$  — целевая функция (выигрыш)  $n$ -го шага.

Согласно принципу оптимальности,  $X_n$  нужно выбирать так, чтобы для любых состояний  $s_{n-1}$  получить максимум<sup>1</sup> целевой функции на этом шаге.

Обозначим через  $Z_n^*(s_{n-1})$  максимум целевой функции — показателя эффективности  $n$ -го шага при условии, что к началу последнего шага система  $S$  была в произвольном состоянии  $s_{n-1}$ , а на последнем шаге управление было оптимальным.

$Z_n^*(s_{n-1})$  называется *условным максимумом целевой функции на  $n$ -м шаге*. Очевидно, что

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(s_{n-1}, X_n). \quad (12.5)$$

Максимизация ведется по всем допустимым управлениям  $X_n$ .

Решение  $X_n$ , при котором достигается  $Z_n^*(s_{n-1})$ , также зависит от  $s_{n-1}$  и называется *условно оптимальным управлением на  $n$ -м шаге*. Оно обозначается через  $X_n^*(s_{n-1})$ .

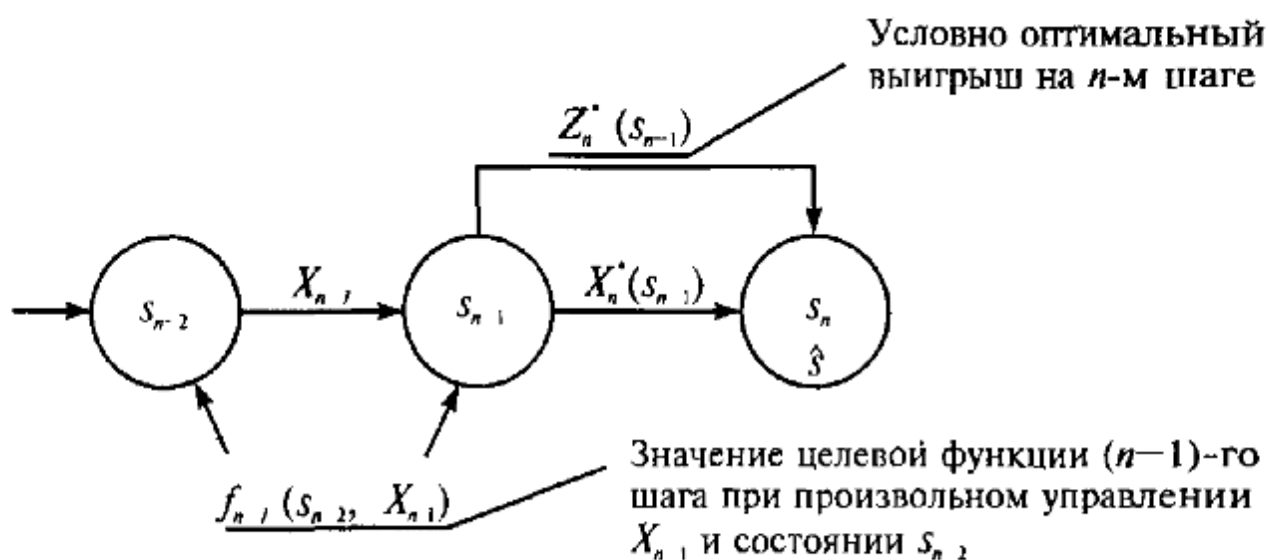


Рис. 12.2

<sup>1</sup> Ограничимся здесь задачей максимизации целевой функции.

Решив одномерную задачу локальной оптимизации по уравнению (12.5), найдем для всех возможных состояний  $s_{n-1}$  две функции:  $Z_n^*(s_{n-1})$  и  $X_n^*(s_{n-1})$ .

Рассмотрим теперь двухшаговую задачу: присоединим к  $n$ -му шагу  $(n-1)$ -й (рис. 12.2).

Для любых состояний  $s_{n-2}$ , произвольных управлений  $X_{n-1}$  и оптимальном управлении на  $n$ -м шаге значение целевой функции на двух последних шагах равно:

$$f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1}). \quad (12.6)$$

Согласно принципу оптимальности для любых  $s_{n-2}$  решение нужно выбирать так, чтобы оно вместе с оптимальным управлением на последнем ( $n$ -м) шаге приводило бы к максимуму целевой функции на двух последних шагах. Следовательно, нужно найти максимум выражения (12.6) по всем допустимым управлениям  $X_{n-1}$ . Максимум этой суммы зависит от  $s_{n-2}$ , обозначается через  $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$  и называется *условным максимумом целевой функции при оптимальном управлении на двух последних шагах*. Соответствующее управление  $X_{n-1}$  на  $(n-1)$ -м шаге обозначается через  $X_{n-1}^*(s_{n-2})$  и называется *условным оптимальным управлением на  $(n-1)$ -м шаге*.

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \{f_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1})\}. \quad (12.7)$$

Следует обратить внимание на то, что выражение, стоящее в фигурных скобках (12.7), зависит только от  $s_{n-2}$  и  $X_{n-1}$ , так как  $s_{n-1}$  можно найти из уравнения состояний (12.2) при  $k=n-1$

$$s_{n-1} = \Phi_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1})$$

и подставить вместо  $s_{n-1}$  в функцию  $Z_n^*(s_{n-1})$ .

В результате максимизации только по одной переменной  $X_{n-1}$  согласно уравнению (12.7) вновь получаются две функции:

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) \text{ и } X_{n-1}^*(s_{n-2}).$$

Далее рассматривается трехшаговая задача: к двум последним шагам присоединяется  $(n-2)$ -й и т. д.

Обозначим через  $Z_k^*(s_{k-1})$  *условный максимум целевой функции, полученный при оптимальном управлении на  $n-k+1$  шагах, начиная с*

$k$ -го до конца, при условии, что к началу  $k$ -го шага система находилась в состоянии  $s_{k-1}$ . Фактически эта функция равна

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{(x_k, \dots, x_n)\}} \sum_{i=k}^n f_i(s_{i-1}, X_i).$$

Тогда

$$Z_{k+1}^*(s_k) = \max_{\{(x_{k+1}, \dots, x_n)\}} \sum_{i=k+1}^n f_i(s_{i-1}, X_i).$$

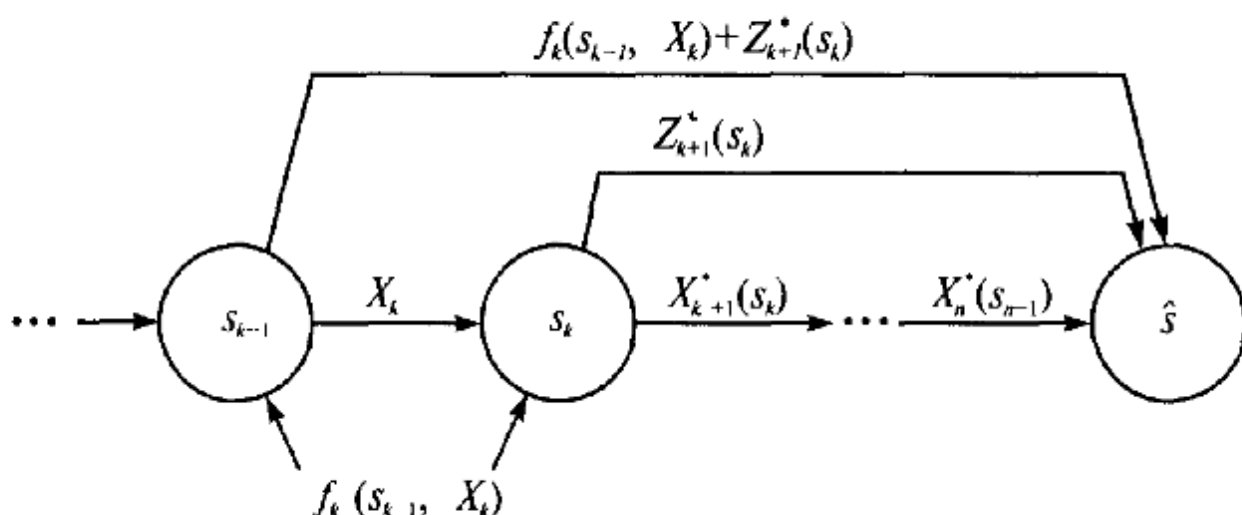


Рис. 12.3

Целевая функция на  $n-k$  последних шагах (рис. 12.3) при произвольном управлении  $X_k$  на  $k$ -м шаге и оптимальном управлении на последующих  $n-k$  шагах равна

$$f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k).$$

Согласно принципу оптимальности,  $X_k$  выбирается из условия максимума этой суммы, т.е.

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{X_k\}} \{f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k)\}, \quad (12.8)$$

$$k = n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

Управление  $X_k$  на  $k$ -м шаге, при котором достигается максимум в (12.8), обозначается через  $X_k^*(s_{k-1})$  и называется *условным оптимальным управлением на  $k$ -м шаге* (в правую часть уравнения

(12.8) следует вместо  $s_k$  подставить выражение  $s_k = \varphi_k(s_{k-1}, X_k)$ , найденное из уравнений состояния).

Уравнения (12.8) называют *уравнениями Беллмана*. Это рекуррентные соотношения, позволяющие найти предыдущее значение функции, зная последующие. Если из (12.5) найти  $Z_n^*(s_{n-1})$ , то при  $k=n-1$  из (12.8) можно определить, решив задачу максимизации для всех возможных значений  $s_{n-2}$ , выражения для  $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$  и соответствующее  $X_{n-1}^*(s_{n-2})$ . Далее, зная  $Z_{n-1}^*(s_{n-2})$ , находим, используя (12.8) и (12.2), уравнения состояний.

Процесс решения уравнений (12.5) и (12.8) называется *условной оптимизацией*<sup>1</sup>.

В результате условной оптимизации получаются две последовательности:

$$Z_n^*(s_{n-1}), Z_{n-1}^*(s_{n-2}), \dots, Z_2^*(s_1), Z_1^*(s_0) -$$

условные максимумы целевой функции на последнем, на двух последних, на ... $n$  шагах и

$$X_n^*(s_{n-1}), X_{n-1}^*(s_{n-2}), \dots, X_2^*(s_1), X_1^*(s_0) -$$

условные оптимальные управления на  $n$ -м,  $(n-1)$ -м, ..., 1-м шагах.

Используя эти последовательности, можно найти решение задачи ДП при данных  $n$  и  $s_0$ . По определению (см. разд. 12.1)  $Z_1^*(s_0)$  — условный максимум целевой функции за  $n$  шагов при условии, что к началу 1-го шага система была в состоянии  $s_0$ , т.е.

$$Z_{\max} = Z_1^*(s_0). \quad (12.9)$$

Далее следует использовать последовательность условных оптимальных управлений и уравнения состояний (12.2).

При фиксированном  $s_0$  получаем  $X_1^* = X_1^*(s_0)$ . Далее из уравнений (12.2) находим  $s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*)$  и подставляем это выраже-

---

<sup>1</sup> Здесь описан способ решения задачи ДП, начинающийся с последнего шага ("обратная схема"). Можно  $n$ -й и 1-й шаги поменять местами ("прямая схема").



ние в последовательность условных оптимальных управлений:

$$X_2^* = X_2^*(s_1^*) \text{ и т.д. по цепочке}^1:$$

$$\begin{aligned} X_1^* &= X_1^*(s_0) \rightarrow s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*) \rightarrow X_2^* = X_2^*(s_1^*) \rightarrow \\ &\rightarrow s_2^* = \varphi_2(s_1^*, X_2^*) \Rightarrow X_3^* = X_3^*(s_2^*) \rightarrow \dots \rightarrow \\ &\rightarrow s_{n-1}^* = \varphi_{n-1}(s_{n-2}^*, X_{n-1}^*) \Rightarrow X_n^* = X_n^*(s_{n-1}^*). \end{aligned}$$

Получаем оптимальное решение задачи ДП:

$$X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*).$$

(Стрелка  $\rightarrow$  означает использование уравнений состояния, а стрелка  $\Rightarrow$  — последовательности условных оптимальных управлений).

### 12.3. Задача о распределении средств между предприятиями

Рассмотрим предложенную выше схему на конкретной задаче о распределении средств между предприятиями.

► **12.1.** Планируется деятельность четырех промышленных предприятий (системы) на очередной год. Начальные средства:  $s_0 = 5$  усл. ед. Размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 усл. ед. Средства  $x$ , выделенные  $k$ -му предприятию ( $k=1, 2, 3, 4$ ), приносят в конце года прибыль  $f_k(x)$ . Функции  $f_k(x)$  заданы таблично (табл. 12.1). Принято считать, что:

а) прибыль  $f_k(x)$  не зависит от вложения средств в другие предприятия;

б) прибыль от каждого предприятия выражается в одних условных единицах;

в) суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

---

<sup>1</sup> Через  $s_k^*$  здесь обозначено состояние системы после  $k$ -го шага при условии, что на  $k$ -м шаге выбрано оптимальное управление.

Таблица 12.1

$x$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

**Решение.** Обозначим через  $x_k$  количество средств, выделенных  $k$ -му предприятию. (Нумерацию предприятий 1, 2, 3, 4 сохраняем в процессе решения неизменной.)

Суммарная прибыль равна

$$Z = \sum_{k=1}^4 f_k(x_k). \quad (12.10)$$

Переменные  $x$  удовлетворяют ограничениям:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 x_k &= 5, \\ x_k &\geq 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Требуется найти переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , удовлетворяющие системе ограничений (12.11) и обращающие в максимум функцию (12.10).

**Особенности модели.** Ограничения линейные, но переменные целочисленные, а функции  $f_k(x_k)$  заданы таблично, поэтому нельзя применить методы целочисленного линейного программирования (см. гл. 8).

Схема решения задачи методом ДП имеет следующий вид: процесс решения распределения средств  $s_0=5$  можно рассматривать как 4-шаговый, номер шага совпадает с номером предприятия; выбор переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — управление соответственно на I, II, III, IV шагах.  $\hat{s}$  — конечное состояние процесса распределения — равно нулю, так как все средства должны быть вложены в производство,  $\hat{s}=0$ . Схема распределения показана на рис. 12.4.

Уравнения состояний (12.2) в данной задаче имеют вид:

$$s_k = s_{k-1} - x_k, \quad k=1, 2, 3, 4, \quad (12.12)$$

где  $s_k$  — параметр состояния — количество средств, оставшихся после  $k$ -го шага, т.е. средства, которые остается распределить между оставшимися  $4-k$  предприятиями.

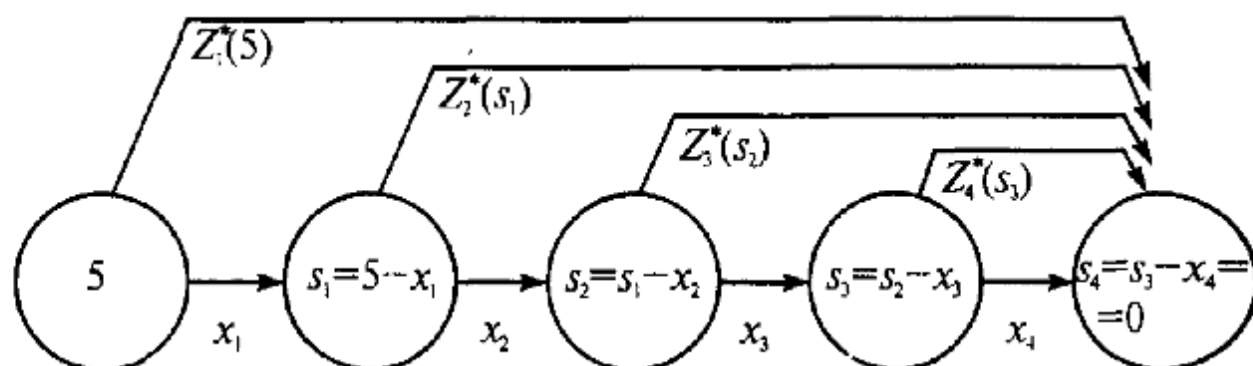


Рис. 12.4

Введем в рассмотрение функцию  $Z_k^*(s_{k-1})$  — условную оптимальную прибыль, полученную от  $k$ -го,  $(k+1)$ -го, ..., 4-го предприятий, если между ними распределялись оптимальным образом средства  $s_{k-1}$  ( $0 \leq s_{k-1} \leq 5$ ). Допустимые управления на  $k$ -м шаге удовлетворяют условию:  $0 \leq x_k \leq s_{k-1}$  (либо  $k$ -му предприятию ничего не выделяем,  $x_k=0$ , либо не больше того, что имеем к  $k$ -му шагу,  $x_k \leq s_{k-1}$ ).

Уравнения (12.5) и (12.8) имеют вид:

$$k=4, s_4 = 0 \Rightarrow Z_4^*(s_3) = \max_{0 \leq x_4 \leq s_3} f_4(x_4), \quad (\text{a})$$

$$Z_3^*(s_2) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_2} \{f_3(x_3) + Z_4^*(s_3)\}, \quad (\text{б})$$

$$Z_2^*(s_1) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_1} \{f_2(x_2) + Z_3^*(s_2)\}, \quad (\text{в})$$

$$Z_1^*(5) = \max_{0 \leq x_1 \leq 5} \{f_1(x_1) + Z_2^*(s_1)\}. \quad (\text{г})$$

Последовательно решаем записанные уравнения, проводя условную оптимизацию (см. рис. 12.4) каждого шага.

**IV шаг.** В табл. 12.1  $f_4(x)$  прибыли монотонно возрастают, поэтому все средства, оставшиеся к IV шагу, следует вложить в 4-е предприятие. При этом для возможных значений  $s_3=0, 1, \dots, 5$  получим:

$$Z_4^*(s_3) = f_4(s_3) \text{ и } x_4^*(s_3) = s_3.$$

III шаг. Делаем все предположения относительно остатка средств  $s_2$  к III шагу (т.е. после выбора  $x_1$  и  $x_2$ ).  $s_2$  может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 (например,  $s_2 = 0$ , если все средства отданы 1-му и 2-му предприятиям,  $s_2 = 5$ , если 1-е и 2-е предприятия ничего не получили, и т.д.). В зависимости от этого выбираем  $0 \leq x_3 \leq s_2$ , находим  $s_3 = s_2 - x_3$  и сравниваем для разных  $x_3$  при фиксированном  $s_2$  значения суммы  $f_3(x_3) + Z_4^*(s_3)$ . Для каждого  $s_2$  наибольшее из этих значений есть  $Z_3^*(s_2)$  — условная оптимальная прибыль, полученная при оптимальном распределении средств  $s_2$  между 3-м и 4-м предприятиями. Оптимизация дана в табл. 12.2 при  $k=3$ . Для каждого значения  $s_2$   $Z_3^*(s_2)$  и  $X_3^*(s_2)$  помещены в графах 5 и 6 соответственно.

II шаг. Условная оптимизация, согласно уравнению (в), проведена в табл. 12.2 при  $k=2$ . Для всех возможных значений  $s_1$  значения  $Z_2^*(s_1)$  и  $X_2^*(s_1)$  находятся в столбцах 8 и 9 соответственно; первые слагаемые в столбце 7 — значения  $f_2(x_2)$ , взяты из табл. 12.1, а вторые слагаемые взяты из столбца 5 табл. 12.2 при  $s_2 = s_1 - x_2$ .

I шаг. Условная оптимизация (уравнение (г)) проведена в табл. 12.2 при  $k=1$  для  $s_0=5^1$ . Поясним решение подробно: если  $x_1=0$ , то  $s_1=5$ , прибыль, полученная от четырех предприятий при условии, что  $s_1=5$  ед. средств между оставшимися тремя предприятиями будут распределены оптимально, равна  $f_1(0) + Z_2^*(5) = 0 + 19 = 19$  ( $Z_2^*(5)$  взято из столбца 9 табл. 12.2 при  $s_1=5$ ). Если  $x_1=1$ , то  $s_2=4$ . Суммарная прибыль при условии, что  $s_2=4$  ед. средств между оставшимися тремя предприятиями будут распределены оптимально, равна  $f_1(1) + Z_2^*(4) = 8 + 16 = 24$  ( $f_1(1)$  взято из табл. 12.1, а  $Z_2^*(4)$  — из столбца 9 табл. 12.2.) Аналогично при  $x_1=2$ ,  $s_2=3$  и  $f_1(2) + Z_2^*(3) = 10 + 13 = 23$ ;

$$\text{при } x_1=3, s_2=2 \text{ и } f_1(3) + Z_2^*(2) = 11 + 10 = 21;$$

$$\text{при } x_1=4, s_2=1 \text{ и } f_1(4) + Z_2^*(1) = 12 + 16 = 28;$$

$$\text{при } x_1=5, s_2=0 \text{ и } f_1(5) + Z_2^*(0) = 18 + 0 = 18.$$

<sup>1</sup> На I шаге условной оптимизации достаточно заполнить раздел таблицы, соответствующий  $s_0=5$ .

Сравнивая подчеркнутые числа, получим  $Z_1^*(5)=24$  усл. ед.  $= Z_{\max}$  при  $x_1^* = x_1^*(5) = 1$ .

Используя уравнения (12.12), получим  $s_1^* = 5 - 1 = 4$ , а по табл. 12.2 в столбце 9 находим  $x_2^* = x_2^*(4) = 2$ . Далее находим  $s_2^* = 4 - 2 = 2$ , а по табл. 12.2 в столбце 6 —  $x_3^* = x_3^*(2) = 1$ . Наконец,  $s_3^* = 2 - 1 = 1$  и  $x_4^* = x_4^*(1) = 1$ , т.е.  $X^*(1; 2; 1; 1)$ .

Максимум суммарной прибыли равен 24 усл. ед. средств при условии, что 1-му предприятию выделено 1 усл. ед.; 2-му предприятию — 2 усл. ед.; 3-му предприятию — 1 усл. ед.; 4-му предприятию — 1 усл. ед. ►

**Замечание 1.** Решение четырехмерной задачи 12.1 на определение условного экстремума сведено фактически к решению четырех одномерных задач: на каждом шаге определялась одна переменная  $x$ .

**Замечание 2.** На разобранный задаче 12.1 видно, что метод ДП безразличен к виду и способу задания функции:  $f_k(x)$  были заданы таблично, поэтому и  $Z_k^*(s)$  и  $X_k^*(s)$  принимали дискретные значения, представленные в табл. 12.2.

Таблица 12.2

$s_{i-1}$	$x_k$	$s_k$	$k=3$			$k=2$			$k=1$		
			$f_3(x_3) + Z_4^*(s_3)$	$Z_3^*(s_2)$	$x_3^*(s_2)$	$f_2(x_2) + Z_3^*(s_2)$	$Z_2^*(s_1)$	$x_2^*(s_1)$	$f_1(x_1) + Z_2^*(s_1)$	$Z_1^*(s_0)$	$x_1^*(s_0)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0+1=1			0+4=4			0+6=6	8	1
	1	0	3+0=3	4	0	6+0=6	6	1	8+0=8		
2	0	2	0+6=6			0+7=7			0+10=10		
	1	1	3+4=7	7	1	6+4=10	10	1	8+6=14	14	1
	2	0	4+0=4			9+0=9			10+0=10		
3	0	3	0+8=8			0+9=9			0+13=13		
	1	2	3+6=9	9	1	6+7=13	13	1	8+10=18	18	1
	2	1	4+4=8			9+4=13		2	10+6=16		

$s_{k-1}$	$x_k$	$s_k$	$k=3$			$k=2$			$k=1$		
			$f_3(x_3)+Z_4^*(s_3)$	$Z_3^*(s_2)$	$x_3^*(s_2)$	$f_2(x_2)+Z_3^*(s_2)$	$Z_2^*(s_1)$	$x_2^*(s_1)$	$f_1(x_1)+Z_2^*(s_1)$	$Z_1^*(s_0)$	$x_1^*(s_0)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	0	7+0=7			11+0=11			11+0=11		
4	0	4	0+13=13			0+13=13			0+16=16		
	1	3	3+8=11			6+9=15			8+13=21		
	2	2	4+6=10	13	0	9+7=16	16	2	10+10=20	21	1
	3	1	7+4=11			11+4=15			11+6=17		
	4	0	11+0=11			13+0=13			12+0=12		
5	0	5	0+16=16			0+18=18			0+19=19		
	1	4	3+13=16			6+13=19			8+16=24		
	2	3	4+8=12	18	5	9+9=18	19	1	10+13=23	24	1
	3	2	7+6=13			11+7=18			11+10=21		
	4	1	11+4=15			13+4=17			12+6=18		
	5	0	18+0=18			15+0=15			18+0=18		

**Замечание 3.** Альтернативой между ДП для подобной дискретной задачи является метод перебора. Метод ДП предпочтительнее, так как на этапе условной оптимизации отбрасываются заведомо негодные варианты.

**Замечание 4.** Достоинством метода является возможность анализа решения на чувствительность к изменению  $s_0$  и  $n$ . Проведенные расчеты можно использовать для изменившихся начального состояния  $s_0$  и числа шагов  $n$ . Например, пусть в задаче 12.1 произошло уменьшение начальных средств на 1 усл. ед. Для  $s_0=4$  достаточно в таблицу добавить расчеты при  $k=1$  (это сделано в той же табл. 12.2). Получаем в этом случае  $Z_{\max}=21$  усл. ед. при распределении:

$$\begin{aligned}
 & x_1^*=1 \rightarrow s_1^*=4-1=3 \Rightarrow x_2^*=1, \text{ или } x_2^*=2 \rightarrow \\
 & \rightarrow s_2^*=3-1=2, \text{ или } s_2^*=3-2=1 \Rightarrow x_3^*=1, \text{ или } \\
 & x_3^*=0 \rightarrow s_3^*=2-1=1, \text{ или } s_3^*=1-0=1 \Rightarrow x_4^*=1.
 \end{aligned}$$

В результате найдены два оптимальных решения:  $X^{(1)*}(1; 1; 1; 1)$  и  $X^{(2)*}(1; 2; 0; 1)$ . Если начальные средства увеличились, например, на 1 усл. ед.,  $s_0=6$ , а функции прибыли  $f_k(x)$  остались прежними, то в табл. 12.2 достаточно добавить раздел для  $s_0=6$  при  $k=3, 2, 1$ ; этот фрагмент расчетов помещен в табл. 12.3.

Таблица 12.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0	6	0+16=16			0+22=22			0+24=24		
	1	5	3+16=19			6+18=24			8+19=27		
6	2	4	4+13=17	22	5	9+13=22	24	1	10+16=26	27	1
	3	3	7+8=15			11+9=20			11+13=24		
	4	2	11+6=17			13+7=20			12+10=22		
	5	1	18+4=22			15+4=19			18+6=24		

Получаем  $Z_{\max}=27$ ,  $x_1^*=1 \rightarrow s_1^*=6-1=5 \Rightarrow x_2^*=1 \rightarrow s_2^*=5-1=4 \Rightarrow x_3^*=0 \rightarrow s_3^*=4-0=4 \Rightarrow x_4^*=4$ .

Оптимальное решение  $X^*(1; 1; 0; 4)$ .

Если принято решение распределить средства  $s_0=5$  между 2-, 3- и 4-м предприятиями, то задача уже решена в табл. 12.2. В разделе  $k=2$  таблицы находим  $Z_{\max}=Z_2^*(5)=19$  при условии, что  $x_2^*=1$ ,  $x_3^*=0$ ,  $x_4^*=4$ .

Наконец, если увеличилось количество предприятий (число шагов), то схему можно дополнить, присоединяя шаги с номерами  $k=0, -1, \dots$  и т. д. Например, пусть средства  $\xi_0 = 6$  распределяются между пятью предприятиями. Функция прибыли для пятого предприятия задана формулой  $f(x)=3x+1$ , если  $x \neq 0$  и  $f(0)=0$ . Присвоим 5-му предприятию номер  $k=0$ , тогда  $x_0$  — средства, выделенные этому предприятию. Обозначим через  $Z_0^*(6)$  оптимальную прибыль, полученную от пяти предприятий:

$$Z_0^*(6) = \max_{0 \leq x_0 \leq 6} \{f_0(x_0) + Z_1^*(s_1)\},$$

а  $s_1=6-x_0$ . Условная оптимизация 0-го шага дана в табл. 12.4.

Таблица 12.4

$x_0$	0	1	2	3	4	5	6
$s_1=6-x_0$	6	5	4	3	2	1	0
$f(0)=0$	0	4	7	10	13	16	19
$Z_1^*(s_1)$ (взята из табл. 12.2 и 12.3 при $k=1$ )	27	24	21	18	14	8	0
$f(x_0) + Z_1(s_1)$	27	28	28	28	27	24	19

Следовательно,  $Z_{\max}=28$ , а оптимальных решений четыре:  $X_1^*(1; 1; 2; 1; 1)$ ,  $X_2^*(2; 1; 1; 1; 1)$ ,  $X_3^*(2; 1; 2; 0; 1)$ ,  $X_4^*(3; 1; 1; 0; 1)$ .

**Замечание 5.** К недостаткам метода по-прежнему следует отнести возникновение технических трудностей при вычислениях в случае увеличения размерности. Если каждое управление  $X_k^*$  будет зависеть от  $r$  переменных, а состояние  $s_k^*$  — от  $p$  параметров, то на каждом шаге возникает  $rp$ -мерная задача оптимизации. (В задаче 12.1  $r=1$ ,  $p=1$ , т.е. решалась одномерная задача). Даже при реализации метода ДП на ЭВМ практически можно решать задачи для небольших  $r$ ,  $p$ ,  $n$ .

## 12.4. Общая схема применения метода ДП.

### Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на $n$ лет

Прежде чем перейти к конкретным задачам, следует усвоить *общую схему применения метода ДП*.

Предположим, что все требования, предъявляемые к задаче методом ДП, выполнены. (Эти требования сформулированы в разд. 12.1). Построение модели ДП и применение метода ДП для решения сводится к следующим моментам:

1. Выбирают способ деления процесса управления на шаги.
2. Определяют параметры состояния  $s_k$  и переменные управления  $X_k$  на каждом шаге.
3. Записывают уравнения состояний.
4. Вводят целевые функции  $k$ -го шага и суммарную целевую функцию.



5. Вводят в рассмотрение условные максимумы (минимумы)  $Z_k^*(s_{k-1})$  и условное оптимальное управление на  $k$ -м шаге:  $X_k^*(s_{k-1})$ ,  $k = n, n-1, \dots, 2, 1$ .

6. Записывают основные для вычислительной схемы ДП уравнения Беллмана для  $Z_n^*(s_{n-1})$  и  $Z_k^*(s_{k-1})$ ,  $k=n-1, \dots, 1$ .

7. Решают последовательно уравнения Беллмана (условная оптимизация) и получают две последовательности функций:

$$\{Z_k^*(s_{k-1})\} \text{ и } \{X_k^*(s_{k-1})\}.$$

8. После выполнения условной оптимизации получают оптимальное решение для конкретного начального состояния  $s_0$ :

а)  $Z_{\max} = Z_1^*(s_0)$  и

б) по цепочке  $s_0 \Rightarrow X_1^* \rightarrow s_1^* \Rightarrow X_2^* \rightarrow s_2^* \Rightarrow \dots \Rightarrow X_{n-1}^* \rightarrow s_{n-1}^* \Rightarrow X_n^* \rightarrow s_n^*$  оптимальное управление:  $X^*(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ .

Решая задачи, следует по возможности придерживаться этой схемы по крайней мере в начале изучения темы. Рассмотрим, как работает схема на примере задачи об оптимальном распределении ресурсов между двумя отраслями на  $n$  лет.

► **12.2.** Планируется деятельность двух отраслей производства на  $n$  лет. Начальные ресурсы  $s_0$ . Средства  $x$ , вложенные в I отрасль в начале года, дают в конце года прибыль  $f_1(x)$  и возвращаются в размере  $q_1(x) < x$ ; аналогично для II отрасли функция прибыли равна  $f_2(x)$ , а возврата —  $q_2(x)$  ( $q_2(x) < x$ ). В конце года все возвращенные средства заново перераспределяются между I и II отраслями, новые средства не поступают, прибыль в производство не вкладывается<sup>1</sup>.

Требуется распределить имеющиеся средства  $s_0$  между двумя отраслями производства на  $n$  лет так, чтобы суммарная прибыль от обеих отраслей за  $n$  лет оказалась максимальной.

Необходимо:

а) построить модель ДП для задачи и вычислительную схему;

б) решить задачу при условии, что  $s_0 = 10000$  ед.,  $n = 4$ ,  $f_1(x) = 0,6x$ ,  $q_1(x) = 0,7x$ ,  $f_2(x) = 0,5x$ ,  $q_2(x) = 0,8x$ .

<sup>1</sup> Последние условия определяют вид уравнений состояний; если поступают новые средства или часть прибыли вкладывается в производство, это можно легко учесть, так как алгоритм метода ДП не изменяется.

Решение. а) Процесс распределения средств между двумя отраслями производства разворачивается во времени, решения принимаются в начале каждого года, следовательно, осуществляется деление на шаги: номер шага — номер года. Управляемая система — две отрасли производства, а управление состоит в выделении средств каждой отрасли в очередном году. Параметры состояния к началу  $k$ -го года —  $s_{k-1}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) — количество средств, подлежащих распределению. Переменных управления на каждом шаге две:  $x_k$  — количество средств, выделенных I отрасли, и  $y_k$  — II отрасли. Но так как все средства  $s_{k-1}$  распределяются, то  $y_k = s_{k-1} - x_k$ , и поэтому управление на  $k$ -м шаге зависит от одной переменной  $x_k$ , т.е.  $X_k(x_k, s_{k-1} - x_k)$ .

Уравнения состояний

$$s_k = q_1(x_k) + q_2(s_{k-1} - x_k) \quad (12.13)$$

выражают остаток средств, возвращенных в конце  $k$ -го года.

Показатель эффективности  $k$ -го шага — прибыль, полученная в конце  $k$ -го года от обеих отраслей:

$$f_1(x_k) + f_2(s_{k-1} - x_k). \quad (12.14)$$

Суммарный показатель эффективности — целевая функция задачи — прибыль за  $n$  лет:

$$Z = \sum_{k=1}^n f_1(x_k) + f_2(s_{k-1} - x_k). \quad (12.15)$$

Пусть  $Z_k^*(s_{k-1})$  — условная оптимальная прибыль за  $n-k+1$  лет, начиная с  $k$ -го года до  $n$ -го года включительно, при условии, что имеющиеся на начало  $k$ -го года средства  $s_{k-1}$  в дальнейшем распределялись оптимально. Тогда оптимальная прибыль за  $n$  лет  $Z_{\max} = Z_1^*(s_0)$ .

Уравнения Беллмана имеют вид:

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{0 \leq x_n \leq s_{n-1}} \{f_1(x_n) + f_2(s_{n-1} - x_n)\}, \quad (12.16)$$

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{0 \leq x_k \leq s_{k-1}} \{f_1(x_k) + f_2(s_{k-1} - x_k) + Z_{k+1}^*(s_k)\}, \quad (12.17)$$

$$(k=n-1, n-2, \dots, 2).$$

б) Используем конкретные данные.

Уравнение состояний (12.13) примет вид:

$$s_k = 0,7x_k + 0,8(s_{k-1} - x_k), \text{ или } s_k = 0,8s_{k-1} - 0,1x_k. \quad (12.18)$$

Целевая функция  $k$ -го шага (12.14)

$$0,6x_k + 0,5(s_{k-1} - x_k) = 0,1x_k + 0,5s_{k-1}.$$

Целевая функция задачи

$$Z = \sum_{k=1}^4 0,5s_{k-1} + 0,1x_k. \quad (12.19)$$

Функциональные уравнения

$$Z_4^*(s_3) = \max_{0 \leq x_4 \leq s_3} \{0,5s_3 + 0,1x_4\}, \quad (12.20)$$

$$\text{и } Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{0 \leq x_k \leq s_{k-1}} \{0,1x_k + 0,5s_{k-1} + Z_{k+1}^*(s_k)\}. \quad (12.21)$$

Проводим условную оптимизацию.

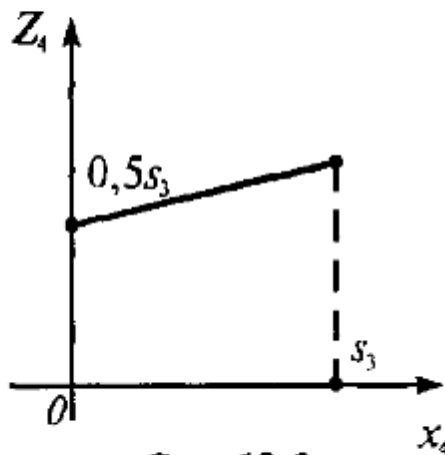


Рис. 12.5

IV шаг. Используем уравнение (12.20). Обозначим через  $Z_4$  функцию, стоящую в скобках,  $Z_4 = 0,1x_4 + 0,5s_3$ ; функция  $Z_4$  — линейная, возрастающая, так как угловой коэффициент 0,1 больше нуля. Поэтому максимум достигается на конце интервала  $[0; s_3]$  (рис. 12.5). Следовательно,  $Z_4^*(s_3) = 0,6s_3$  при  $x_4^*(s_3) = s_3$ .

III шаг. Уравнение:

$$Z_3^*(s_2) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_2} \{0,1x_3 + 0,5s_2 + 0,6s_3\}.$$

Найдем  $s_3$  из уравнений состояний (12.18):  $s_3 = 0,8s_2 - 0,1x_3$  и, подставив его выражение в правую часть уравнения, получим

$$Z_3^*(s_2) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_2} \{0,1x_3 + 0,5s_2 + 0,6(0,8s_2 - 0,1x_3)\},$$

$$Z_3^*(s_2) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_2} \{0,04x_3 + 0,98s_2\}.$$

Как и в предыдущем случае, максимум достигается при  $x_3=s_2$ ; т.е.  $Z_3^*(s_2) = 1,02s_2$  при  $x_3^*(s_2)=s_2$ .

II шаг. Из уравнения состояния:  $s_2=0,8s_1-0,1x_2$ . Поэтому уравнение (12.20) при  $k=2$  примет вид:

$$Z_2^*(s_1) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_1} \{1,316s_1 - 0,002x_2\}.$$

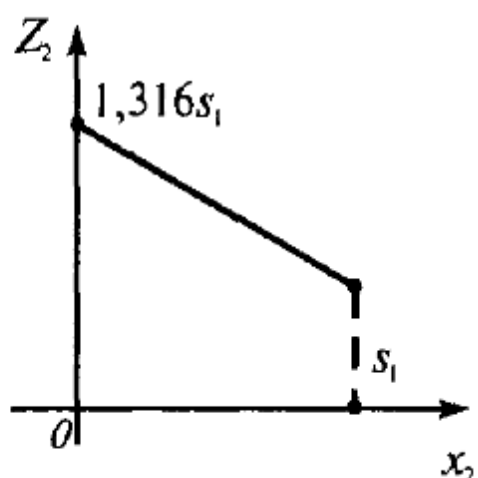


Рис. 12.6

Линейная относительно  $x_2$  функция  $Z_2^* = 1,316s_1 - 0,002x_2$  убывает на отрезке  $[0; s_1]$ , и поэтому ее максимум достигается при  $x_2=0$  (рис.12.6):

$$Z_2^*(s_1) = 1,316s_1 \text{ при } x_2^*(s_1)=0.$$

I шаг.  $s_1=0,8s_0-0,1x_1$ . Уравнение (12.20) при  $k=1$  имеет вид:

$$Z_1^*(s_0) = \max_{0 \leq x_1 \leq s_0} \{1,5528s_0 - 0,0316x_1\}.$$

Как и в предыдущем случае, максимум достигается в начале отрезка, т.е.

$$Z_1^*(s_0) = 1,5528s_0 \text{ при } x_1^*(s_0)=0.$$

На этом условная оптимизация заканчивается. Используя ее результат и исходные данные, получим  $Z_{\max} = Z_1^*(10000)$ ,  $Z_{\max} = 15528$ .

$$x_1^* = 0, \quad y_1^* = s_0 = 10000$$

(все средства выделяются II отрасли)  $\rightarrow$

$$s_1^* = 0,8 \cdot 10000 - 0,1 \cdot 0 = 8000 \Rightarrow x_2^* = 0, \quad y_2^* = s_1 = 8000$$

(все средства выделяются II отрасли)  $\rightarrow$

$$\rightarrow s_2^* = 0,8 \cdot 8000 - 0,1 \cdot 0 = 6400 \Rightarrow x_3^* = 6400, \quad y_3^* = 0 \rightarrow$$

(все средства выделяются I отрасли)  $\rightarrow$

$$\rightarrow s_3^* = 0,8 \cdot 6400 - 0,1 \cdot 6400 = 4480 \Rightarrow x_4^* = 4480, \quad y_4^* = 0$$

(все средства выделяются I отрасли).

Оптимальная прибыль за 4 года, полученная от двух отраслей производства при начальных средствах 10000 ед., равна 15528 ед.

при условии, что I отрасль получает по годам (0; 0; 6400; 4480), а II отрасль — соответственно (10000; 8000; 0; 0).►

## 12.5. Задача о замене оборудования

Замена оборудования — важная экономическая проблема. Задача состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования (станков, производственных зданий и т. п.). Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты, затраты на ремонт и обслуживание, снижаются производительность труда, ликвидная стоимость. Критерием оптимальности являются, как правило, либо прибыль от эксплуатации оборудования (задача максимизации), либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода (задача минимизации).

При построении модели задачи принято считать, что решение о замене выносится в начале каждого промежутка эксплуатации (например, в начале года) и что в принципе оборудование можно использовать неограниченно долго.

Основная характеристика оборудования — параметр состояния — его возраст  $t$ .

При составлении динамической модели замены процесс замены рассматривают как  $n$ -шаговый, разбивая весь период эксплуатации на  $n$  шагов. Возможное управление на каждом шаге характеризуется качественными признаками, например,  $X^c$  (сохранить оборудование),  $X^z$  (заменить) и  $X^p$  (сделать ремонт).

Рассмотрим конкретный пример.

**12.3.** Оборудование эксплуатируется в течение 5 лет, после этого продается. В начале каждого года можно принять решение сохранить оборудование или заменить его новым. Стоимость нового оборудования  $p_0=4000$  руб.<sup>1</sup> После  $t$  лет эксплуатации ( $1 \leq t \leq 5$ ) оборудование можно продать за  $g(t)=p_0 2^{-t}$  рублей (ликвидная стоимость). Затраты на содержание в течение года зависят от возраста  $t$  оборудования и равны  $r(t)=600(t+1)$ . Определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования, чтобы суммарные затраты с учетом начальной покупки и заключительной продажи были минимальны.

---

<sup>1</sup> Все цены условные.

**Решение.** Способ деления управления на шаги естественный, по годам,  $n = 5$ . Параметр состояния — возраст машины —  $s_{k-1} = t$ ,  $s_0 = 0$  — машина новая в начале первого года эксплуатации. Управление на каждом шаге зависит от двух переменных  $X^c$  и  $X^3$ .

Уравнения состояний зависят от управления:

$$s_k = \begin{cases} t + 1, & \text{если } X_k = X^c, \\ 1, & \text{если } X_k = X^3, \end{cases} k = 1, 2, 3, 4. \quad (12.22)$$

В самом деле, если к  $k$ -му шагу  $s_{k-1} = t$ , то при сохранении машины ( $X_k = X^c$ ) через год возраст машины увеличится на 1. Если машина заменяется новой ( $X_k = X^3$ ), то это означает, что к началу  $k$ -го шага ее возраст  $t = 0$ , а после года эксплуатации  $t = 1$ , т.е.  $s_k = 1$ .

Показатель эффективности  $k$ -го шага:

$$f_k(X_k, t) = \begin{cases} 600(t + 1), & \text{если } X_k = X^c, \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t}, & \text{если } X_k = X^3, \end{cases} k = 1, 2, 3, 4. \quad (12.23)$$

(При  $X^c$  затраты только на эксплуатацию машины возраста  $t$ , при  $X^3$  машина продается ( $-4000 \cdot 2^{-t}$ ), покупается новая (4000) и эксплуатируется в течение первого года (600), общие затраты равны ( $-4000 \cdot 2^{-t} + 4000 + 600$ )).

Пусть  $Z_k^*(t)$  — условные оптимальные затраты на эксплуатацию машины, начиная с  $k$ -го шага до конца, при условии, что к началу  $k$ -го шага машина имеет возраст  $t$  лет. Запишем для функций  $Z_k^*(t)$  уравнения Беллмана (12.5) и (12.8), заменив задачу максимизации на задачу минимизации:

$$Z_5^* = \min \begin{cases} 600(t + 1) - 4000 \cdot 2^{-(t+1)}, & \text{если } X_5 = X^c, \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} - 4000 \cdot 2^{-(t+1)}, & \text{если } X_5 = X^3. \end{cases} \quad (12.24)$$

Величина  $4000 \cdot 2^{-(t+1)}$  — стоимость машины возраста  $t$  лет (по условию машина после 5 лет эксплуатации продается).

$$Z_k^* = \min \begin{cases} 600(t + 1) + Z_{k+1}^*(t + 1), & \text{если } X_k = X^c, \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} + Z_{k+1}^*(1), & \text{если } X_k = X^3, \end{cases} \quad (12.25)$$

$$k = 4, 3, 2, 1.$$

Из определения функций  $Z_k^*(t)$  следует

$$Z_{\min} = Z_1^*(0).$$

Дадим геометрическое решение этой задачи. На оси абсцисс будем откладывать номер шага  $k$ , на оси ординат — возраст  $t$  машины. Точка  $(k-1, t)$  на плоскости соответствует началу  $k$ -го года эксплуатации машины возраста  $t$  лет. Перемещение на графике в зависимости от принятого управления на  $k$ -м шаге показано на рис. 12.7.

Состояние начала эксплуатации машины соответствует точке  $s_0^*(0; 0)$ , конец — точкам  $\hat{s}(6; t)$ . Любая траектория, переводящая точку  $s(k-1; t)$  из  $s_0^*$  в  $\hat{s}$ , состоит из отрезков — шагов, соответствующих годам эксплуатации. Надо выбрать такую траекторию, при которой затраты на эксплуатацию машины окажутся минимальными.

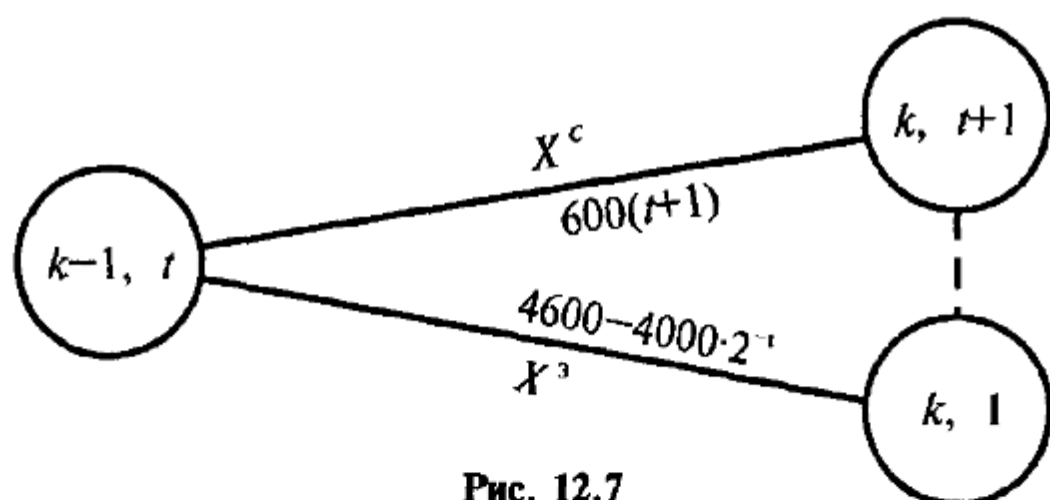


Рис. 12.7

Над каждым отрезком, соединяющим точки  $(k-1; t)$  и  $(k; t+1)$ , запишем соответствующие управлению  $X^c$  затраты, найденные из (12.23):  $600(t+1)$ , а над отрезком, соединяющим точки  $(k-1; t)$  и  $(k; t)$ , запишем затраты, соответствующие управлению  $X^3$ , т.е.  $4600-4000 \cdot 2^{-t}$ . Таким образом мы разметим все отрезки, соединяющие точки на графике, соответствующие переходам из любого состояния  $s_{k-1}$  в состояние  $s_k$  (рис. 12.8). Например, над отрезками, соединяющими точки  $(k; 2)$  и  $(k+1; 3)$ , стоит число  $1800^1$ , что соответствует затратам на эксплуатацию в течение каждого года

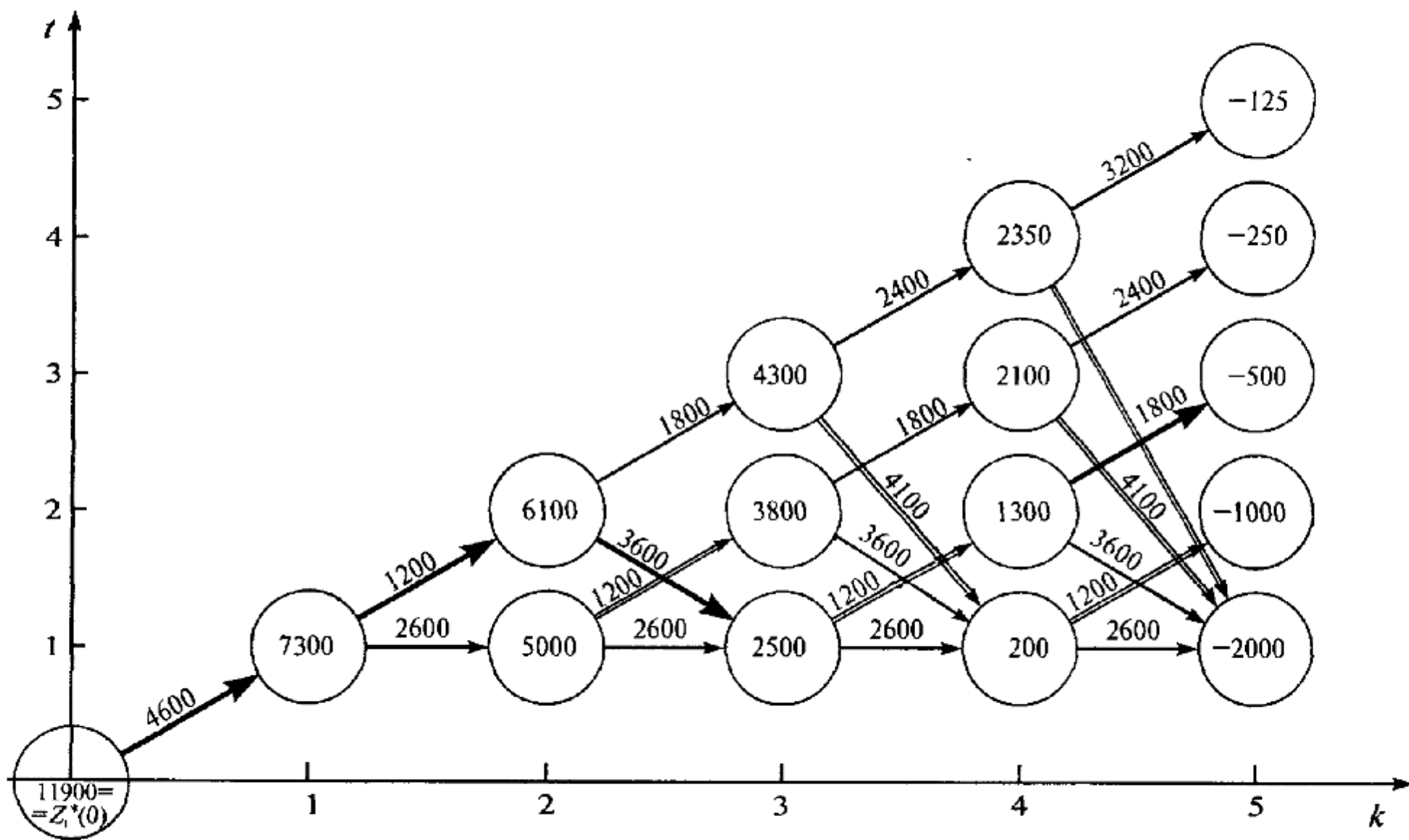


Рис. 12.8



машины возраста  $t = 2$  лет, а над отрезками, соединяющими  $(k; 2)$  и  $(k+1; 1)$ , стоит число 3600 — это сумма затрат на покупку машины и эксплуатацию новой машины в течение года без “затрат” (выручки) за проданную машину возраста  $t$  лет. Следует учесть, что  $0 \leq t \leq k$ .

Проведем на размеченном графе состояний (см. рис. 12.8) условную оптимизацию.

**V шаг.** Начальные состояния — точки  $(4; t)$ , конечные  $(5; t)$ . В состояниях  $(5; t)$  машина продается, условный оптимальный доход от продажи равен  $4000 \cdot 2^{-t}$ , но поскольку целевая функция связана с затратами, то в кружках точек  $(5; t)$  поставим величину дохода со знаком минус.

Анализируем, как можно попасть из каждого начального состояния в конечное на V шаге.

**Состояние  $(4; 1)$ .** Из него можно попасть в состояние  $(5; 2)$ , затратив на эксплуатацию машины 1200 и выручив затем от продажи 1000, т.е. суммарные затраты равны 200, и в состояние  $(5; 1)$  с затратами  $2600 - 2000 = 600$ . Значит, если к последнему шагу система находилась в точке  $(4; 1)$ , то следует идти в точку  $(5; 2)$  (укажем это направление двойной стрелкой), а неизбежные минимальные затраты, соответствующие этому переходу, равны 200 (поместим эту величину  $Z_5^*(1) = 200$  в кружке точки  $(4; 1)$ ).

**Состояние  $(4; 2)$ .** Из него можно попасть в точку  $(5; 3)$  с затратами  $1800 - 500 = 1300$  и в точку  $(5; 1)$  с затратами  $3600 - 2000 = 1600$ . Выбираем первое управление, отмечаем его двойной стрелкой, а  $Z_5^*(2) = 1300$  проставляем в кружке точки  $(4; 2)$ .

Рассуждая таким же образом для каждой точки предпоследнего шага, мы найдем для любого исхода IV шага оптимальное управление на V шаге, отметим его на рис. 12.8 двойной стрелкой. Далее планируем IV шаг, анализируя каждое состояние, в котором может оказаться система в конце III шага с учетом оптимального продолжения до конца процесса, т.е. решаем для всех  $0 \leq t \leq 4$  при  $k=4$  уравнения (12.22). Например, если начало IV шага соответствует состоянию  $(3; 1)$ , то при управлении  $X^c$  система переходит в точку  $(4; 2)$ , затраты на этом шаге 1200, а суммарные затраты за два последних шага равны  $1200 + 1300 = 2500$ . При управлении  $X^3$  затраты за два шага равны  $2600 + 200 = 2800$ . Выбираем минимальные затраты 2500, ставим их в кружок точки  $(3; 1)$ , а соответствующие управления на этом шаге помечаем двойной стрелкой,

ведущей из состояния (3; 1), в состояние (4; 2). Так поступаем для каждого состояния (3;  $t$ ) (см. рис. 12.8).

Продолжая условную оптимизацию III, II и I шагов, мы получим на рис. 12.8 следующую ситуацию: из каждой точки (состояния) выходит стрелка, указывающая, куда следует перемещаться в данном шаге, если система оказалась в этой точке, а в кружках записаны минимальные затраты на переход из этой точки в конечное состояние. На каждом шаге графически решались уравнения (12.22).

После проведения условной оптимизации получим в точке (0; 0) минимальные затраты на эксплуатацию машины в течение 5 лет с последующей продажей:  $Z_{\min} = 11900$ . Далее строим оптимальную траекторию, перемещаясь из точки  $s_0(0; 0)$  по двойным стрелкам в  $\hat{s}$ . Получаем набор точек:

$$\{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 1), (4; 2), (5; 3)\},$$

который соответствует оптимальному управлению  $X^*$  ( $X^s$ ,  $X^c$ ,  $X^z$ ,  $X^c$ ,  $X^c$ ). Оптимальный режим эксплуатации состоит в том, чтобы заменить машину новой в начале 3-го года.►

Таким образом, размеченный график (сеть) позволяет наглядно интерпретировать расчетную схему и решить задачу методом ДП.

Как уже отмечалось, модели и вычислительная схема ДП очень гибки в смысле возможностей включения в модель различных модификаций задачи. Например, аналогичная задача может быть рассмотрена для большого числа вариантов управления, “ремонт”, “капитальный ремонт” и т. д. Можно рассматривать замену оборудования новым с учетом технического прогресса, можно учесть изменения в затратах на эксплуатацию оборудования после его ремонта, в зависимости от года эксплуатации (дороже, дешевле). Все эти факторы можно учитывать вычислительной схемой ДП.

### Использованная и рекомендуемая литература:

1. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов. [Текст]: Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2002. - 407 с.
2. Кузнецов Ю.Н., Козубов В.И., Волощенко А.Б. [Текст]: Математическое программирование. - М.: Высш. шк., 1980. - 300 с.
3. Вентцель. Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. [Текст]: - М.: Наука, 1988. - 206 с.
4. Калихман И. Л., Войтенко М. А. [Текст]: Динамическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие.—М.: Высш. школа, 1979.— 125 с.
5. Таха Х.А. Введение в исследование операций [Текст]:, 7-е изд. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. - 912 с.