

Лекція 10

ОСНОВИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Процедури розв'язання многоцелевих задач

Почти всяка складна техніческа задача приняття розв'язання многоцелева, т.к. при виборі найкращого варіанта приходиться учитувати багато різних вимог, предъявляемых к машине, і серед цих вимог часто виникають протирівчі друг другу. Однак почти всі математичні методи оптимізації призначенні для знаходження екстремума однієї функції - т.е. для однієї мети. Поэтому часто все спробують свести многоцелеву задачу до одноцелевої. Ця процедура в більшості випадків приводить до серйозного іскаження існування проблеми і, слідом, до необґрунтованої заміни однієї задачі іншою.

Якщо при розв'язанні одноцелевих задач методологічні проблеми не виникають, а можливі тільки обчислювальні труднощі, то інакше обстоєть з многоцелевими розв'язаннями. Тут основні нюанси пов'язані з наступною проблемою: чому слід вважати найкращою альтернативою в задачі з декількома цільовими функціями, які протирівчі і досягають максимуму в різних точках множества альтернатив? На цей счт на сучасний день не існує єдиного погляду, по тому оцінка якості системи випадку векторного показника якості являється однією з головних проблем в теорії ефективності та дослідження операцій.

Многомерні цілі можуть виникати з двома або більше відносинами:

1. Цілі взаємно нейтральні. Система може використовувати окремо для окремих цілей та характеризуватися незалежно.
2. Цілі кооперують. Тут, як правило, систему можна розглядати відносно однієї мети, а інші досягаються одночасно.
3. Цілі конкурують. В цьому випадку одну з цілей можна досягти лише за рахунок іншої.

Якщо цілі частично нейтральні, частично кооперують і частично конкурують між собою, то задача формулюється таким чином, що потрібно враховувати не тільки конкуруючі цілі. Розглядання нейтральних або кооперативних цілей не представляє особых проблем, так що проблеми, спрямовані на множину цілей, прежде всіх повинні бути розглянуті в контексті конкуруючих цілей, коли скоро всі вони разом не можуть бути вказані одним параметром.

Можна предложить наступну структуру існуючих на сучасний день процедур розв'язання такого роду многоцелевих задач:

- По методу використання інформації
 - Априорні
 - Апостериорні
 - Адаптивні (на основі методів теорії чутливості)
 - По методу приняття розв'язання
1. Скалярна постановка
 - Метод головної компоненти
 - Метод уступок
 - Метод комплексного критерію
 - Метод Гермейера
 - Метод справедливого компромісу

- Метод условного центра масс
 - Метод на основе функции Харрингтона
 - Метод идеальной точки
1. Векторная постановка (выделение Парето-оптимальной области)
 - Графоаналитический метод
 - ЛПт - поиск
 - По характеру использованной информации
 - Детерминированные
 - Вероятностные

В известной степени эти методы переплетаются друг с другом, поэтому данная структура не претендует на законченный вид, а способствует лучшему пониманию путей решения рассматриваемой в работе проблемы.

2. Априорные процедуры многоцелевой оптимизации и соответствующие им методы принятия решения

В процедурах априорного типа делается явное или неявное предположение, что вся информация, позволяющая определить наилучшее решение, скрыта в формальной модели задачи и, следовательно, с помощью некоторых преобразований может быть из этой формальной модели извлечена и использована. т.е. считается, что множества альтернатив U и целевых функций $W_1(u)$, $W_2(u)$, ... вполне достаточно для объективного, не зависящего от отсутствующих в данной модели факторов определения оптимального решения.

Рассмотрим ряд методов, суть которых заключается сведении задачи к одноцелевой.

Метод главной компоненты заключается в том, что критерий качества связывается с одним из показателей, выбранных в роли основного (главного). На основные показатели накладываются ограничения. В этом случае по главному показателю реализуется критерий оптимальности, по остальным - пригодности. Например, если имеется вектор полезного эффекта в виде

$$W_{\langle k \rangle} = \langle W_1, W_2, \dots, W_k \rangle, \quad (1)$$

где

$W_i (i=1,2,\dots,k)$ - компоненты вектора, например, для машины: производительность, экологичность, надежность, себестоимость и т.д., то метод главной компоненты заключается в произвольном выборе одного из компонентов в качестве главного, по которому производится оптимизация и выбирается решение. При этом остальные компоненты переводятся в разряд ограничений.

Этот метод прост, нагляден и часто применяется в машиностроительной практике, однако принципиальным его недостатком является произвол в выборе главного критерия. Можно привести много примеров из истории науки и техники, когда произвольный и неверный выбор этого критерия приводит к трагическим последствиям или, по меньшей мере, к малоэффективным результатам. 

Для задач, у которых критерии не равнозначны, применяется другой метод решения - *уступок*. Прежде чем решать поставленную задачу по методу уступок, необходимо:

- расположить критерии по их значимости (наиболее важный считается первым);
- отыскать оптимальное значение W_1^* целевой функции W_1 ;
- сделать уступку по первому показателю эффективности, т.е. ухудшить величину W_1^* до значения $W_1^{**} = k_1 W_1^*$;
- ввести в задачу дополнительное ограничение $W_1 \geq W_1^{**}$;
- отыскать оптимальное значение W_2^* целевой функции W_2 ;
- сделать уступку по второму показателю эффективности, т.е. ухудшить величину W_2^* до значения $W_2^{**} = k_2 W_2^*$;
- ввести в задачу дополнительное ограничение $W_2 \geq W_2^{**}$;

- новую задачу с двумя дополнительными ограничениями решить по третьему показателю эффективности и т.д.;
- процесс решения задачи заканчивается, когда решение будет получено по всем показателям. Окончательный план и будет наиболее рациональным - получено оптимальное значение наименее важного критерия при условии гарантированных значений предшествующих показателей эффективности.

Пример 1. Решить задачу по двум критериям, считая наиболее предпочтительным. Его отклонение от максимального значения составляет 10 %:

$$W_1 = x_1 + 2x_2 \text{ (ρ) max;}$$

$$W_1 = x_1 + 2x_2 \text{ (ρ) min;}$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6;$$

$$x_1 \leq 4;$$

$$x_2 \leq 5;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Решая задачу линейного программирования по первому показателю эффективности W_1 , например в среде пакета EXCEL или графически, получаем, что максимальное значение целевой функции $W_1^* = 14$ достигается при $x_1 = 4$ и $x_2 = 5$. Делаем уступку на 10%, т.е. уменьшаем величину $W_1^* = 14$ до значения $W_1^{**} = 14 \cdot 0,9 = 12,6$. Вносим в задачу дополнительное ограничение $x_1 + 2x_2 \geq 12,6$.

Далее, решая задачу линейного программирования при минимизации второго показателя эффективности имеем $W_2^* = 7,6$ при $x_1 = 2,6$ и $x_2 = 5$. При этом значение показателя эффективности W_1 не изменилось и равно 12,6.

Метод комплексного критерия, в отличие от метода главной компоненты, применяется довольно редко. Он заключается в переходе от векторного критерия к скалярному путем образования суммарного монопоказателя. При этом основная идея метода заключается в составлении одной функции, аргументами которой служат компоненты вектора полезного эффекта. Особенно частым случаем является представление такой функции в виде дроби, где в числителе стоят все величины, увеличение которых желательно (например, эффект), а в знаменателе те, которые хотелось бы уменьшить. Часто, например, употребляется показатель *приведенных затрат*, где числитель выражает производительность труда (m^3), а знаменатель - затраты. Такой показатель в настоящее время подвергается обоснованной критике, так как при этом вводится неявное допущение о том, что недостаток в одном показателе может быть скомпенсирован за счет другого. При этом, если желательно не оговаривать условия, то может получиться, что комплекс дорогостоящих, но и высокопроизводительных машин (харвестер + форвардер) будет иметь одинаковый показатель с каким-нибудь устаревшим вариантом, имеющим малую производительность и, соответственно, стоимость.

Другим, несколько более замысловатым методом составления комплексного критерия является метод его свертывания (*метод Гермейера*).

В этом методе комплексный критерий образуется в виде следующего произведения.

Пусть каждый критерий $W_i(u)$ характеризует некоторый показатель изделия альтернативы u - металлоемкость, производительность, грузоподъемность, надежность, устойчивость, доступность предмета труда, повреждаемость древостоя, вибонагруженность оператора. Наилучшая альтернатива, по-видимому, характеризуется наиболее удачным сочетанием всех этих показателей качества, т.е. имеет максимальное значение "глобального" качества. Таким образом, для выбора наилучшей альтернативы достаточно уяснить, каким образом глобальное качество зависит от единичных показателей качества, после чего многоцелевая задача может быть сведена к задаче скалярной оптимизации с использованием функции вида:

$$Q = \sum_i \lambda_i W_i(u) \quad (2)$$

где

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

λ_i - коэффициент значимости i -го показателя качества. Обычно $n=1$.

Этот метод можно применять, если достаточно точно известны λ_i . Обычно λ_i определяются с помощью метода экспертных оценок или на основании хорошо апробированных статистических данных.

Здесь основная трудность заключается в способе назначения коэффициентов значимости. Обычно для их определения используют экспертные методы. Поэтому в ряде ситуаций может употребляться модель, в которой глобальное качество альтернативы представляет собой сумму единичных показателей (принцип равномерной оптимальности):

$$Q = \sum_i \lambda_i W_i(u) \quad .(3)$$

Этой моделью пользуются в задачах, в которых критерии имеют одну и ту же единицу измерения (как правило, стоимостную). В качестве примера можно привести целевую функцию экономического обоснования оптимального размера промежуточного пользования.

Если критерии $W_i(u)$ не выражаются в одних и тех же единицах измерения, то их приводят к безразмерному виду путем деления значения каждого критерия на единицу соответствующего масштаба или путем введения функции:

$$Q(u) = \frac{\sum_i \frac{W_i(u) - W_i^{\min}}{W_i^{\max} - W_i^{\min}}}{\max_i \frac{W_i^{\max} - W_i^{\min}}{W_i^{\max} - W_i^{\min}}} \quad , (4)$$

где

W_i^{\min} и W_i^{\max} - соответственно минимальное и максимальное значения критериев качества на допустимом множестве.

Основным недостатком принципа равномерной оптимальности является невозможность компенсации недопустимо малых значений некоторых критериев достаточно большими значениями других.

Действительно, если u характеризует проект манипулятора, а W_1 и W_2 представляют собой надежность и грузоподъемность, то он может обладать очень высокой надежностью в том случае, когда сможет (в лучшем случае) поднять из-за чрезмерного собственного веса лишь собственный захват или харвестерную головку. Очевидна бесполезность такого изделия, глобальное качество которого может быть довольно большим, если определять его по принципу равномерной оптимальности.

Свободен от этого недостатка *метод справедливого компромисса*:

$$Q(u) = \prod_i W_i(u) \quad (5)$$

Как видно из формулы, манипулятору с нулевой грузоподъемностью будет присвоено нулевое значение. Этот принцип оптимальности весьма популярен и встречается во многих работах.

Методы компромиссов в большей степени приспособлены к решению задач в векторной постановке.

Метод условного центра масс нашел довольно широкое распространение в технических приложениях.

Пусть последовательно найдены значения экстремумов для каждого показателя $W_i(u)$, что соответствует точкам в пространстве параметров с координатами $\{x_1^{i*}, x_2^{i*}, \dots, x_n^{i*}\}$.

Введем понятие "условной массы" точки:

$$m_i = \frac{\sum_i W_i(x_1^{i*}, x_2^{i*}, \dots, x_n^{i*})}{W_i(x_1^{i*}, x_2^{i*}, \dots, x_n^{i*})} \quad , (6)$$

где

$W_i(x_1^{i*}, x_2^{i*}, \dots, x_n^{i*})$ - значение i -го показателя эффективности при совокупности управляемых параметров, обеспечивающих экстремальное его значение. Будем полагать, что компромиссному решению будет удовлетворять набор параметров, соответствующих точке с координатами "условного центра масс":

$$x_j^{**} = \frac{\sum m_i x_j^{i*}}{\sum m_i} . \quad (7)$$

Найденные по этому методу средневзвешенные значения параметров x_i^{**} учитывают не только интересы всех показателей качества, но и чувствительность каждого по отношению к данному параметру.

Завершим обзор априорных процедур рассмотрением *метода идеальной точки* в пространстве критериев. Пусть на множестве альтернатив U заданы n целевых функций $W_1(u), \dots, W_n(u)$.

В пространстве векторных оценок рассмотрим идеальную точку $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, где $x_i = \min W_i(u)$. Если бы точка x принадлежала множеству векторных оценок, т.е. если бы существовала альтернатива $u^* \in U$ такая, что $W_i(u^*) = x_i, i = 1, \dots, n$ то, очевидно, что u^* была бы лучшей альтернативой. Однако, как правило, этого не происходит, поэтому в качестве наилучшей альтернативы предполагается выбрать такую точку, векторная оценка которой находится ближе всего к идеальной точке x .

Интуитивно такой подход представляется очень привлекательным. Однако он не лишен довольно существенных недостатков. Одни из основных - возникновение проблемы выбора метрики и несоответствие аксиоме независимости.

Как показано выше, ни один из перечисленных выше методов не свободен от недостатков, связанных с желанием упростить задачу и сделать ее однозначной. Однако, как правило, упрощение сложного явления, в принципе не упрощаемого, не может дать верного ответа.

Поэтому, в настоящее время разработан ряд методов, не "уходящих" от сложности проблемы и предпочитающих учитывать все ее стороны. Такие методы основаны на принципе *компромисса*, то есть принятия взвешенного решения, в котором фигурируют в определенной пропорции все действующие факторы. При этом, в некоторых методах предлагается не однозначный ответ а лишь область разумных (рациональных) решений. Принятие же однозначного решения остается прерогативой лица принимающего решение (ЛПР). Одним из таких методов является весьма распространенный *метод Парето*, предложенный итальянским математиком-экономистом Парето в 1904 году. Основная идея метода Парето заключается в сохранении множества возможных вариантов и выделении области из которой необходимо выбирать наиболее целесообразные варианты. При этом к области Парето относятся только такое множество решений, где с изменением какого-либо из них критерии меняются противоречиво. Поясним более подробно это положение.

Предположим, что принято некоторое решение x^* , которому соответствует значение критерия $W_i(x^*) [i=1\dots n]$. Затем в результате исследований (оптимизации) получено другое решение x^{**} , для которого

$$\forall W_i(x^{**}) \geq W_i(x^*). \quad (8)$$

Очевидно, что решение x^* целесообразно исключить из рассмотрения. К области Парето относятся только такие решения, для которых не существует такого x^{**} , чтобы для всех критериев удовлетворились неравенства (4.).

Предположим, что целью исследований является $W_1(x)(\rho) \max, W_2(x)(\rho) \max$,

где

W_1, W_2 - какие либо критерии;

x - решение (выбор).

Построим гипотетический график зависимости $w_i(x)$.

Необходимо отметить, что построение области Парето является трудно формализуемой задачей, так как при этом необходимо проводить многократно трудоемкий процесс оптимизации. Однако Н.Н.Моисеевым предложен сравнительно простой и наглядный графоаналитический метод приближенного построения области Парето.

Метод Н.Н. Моисеева заключается в последовательном итеративном процессе решения простейших оптимизационных задач. При этом сначала задаются начальными произвольными значениями критериев: $W_1^{(0)}=C_1$; $W_2^{(0)}=C_2$. Затем решаются две оптимизационные задачи:

1. $W_1^{(0)(\rho)} \max; W_2^{(0)}=C_2$;
1. $W_2^{(1)(\rho)} \max; W_1^{(1)}=C_1$.

Решив эти две задачи находят точки a и b (рис.4.2).

Прямая, соединяющая эти две точки является областью Парето в первом приближении. Далее решаются две аналогичные задачи. При этом задаются значениями критериев: $W_1^{(0)}=C_3$; $W_2^{(0)}=C_4$. Затем решаются две оптимизационные задачи:

1. $W_1^{(2)(\rho)} \max; W_2^{(2)}=C_3$;
1. $W_2^{(3)(\rho)} \max; W_1^{(3)}=C_4$.

Через полученные точки снова проводят прямые. После соединения точек c и d получают ломаную $acdb$, которая является областью Парето второго приближения. В большинстве случаев второе приближение является достаточным.

В случае большего числа критериев метод теряет наглядность, но может выполняться с помощью ЭВМ. При решении задач указанным выше методом существует одно принципиальное затруднение. Оно связано с тем, что множество Парето не всегда может оказаться выпуклым. В этом случае этим методом пользоваться нельзя и необходимо использовать другими методами решения компромиссных задач.

Метод зондирования с помощью ЛП τ - последовательности. Анализ всех предшествующих методов принятия решений показывает, что всем им присущи те или иные недостатки, связанные с попытками формализации в принципе неформализуемой задачи. В этом случае напрашивается решение, использующее идею полного просмотра всех возможных вариантов решений и выбора из них лучшего. Однако, естественно, что такой полный просмотр невозможен, т.к. количество точек просмотра бесконечно. Для того, чтобы уменьшить количество просматриваемых точек можно (конечно, в ущерб получаемого объема информации) каким-либо разумным способом организовать процедуру просмотра. На этой идеи и основан метод решения проектно-конструкторских задач с противоречивыми критериями, предложенный И.М.Соболем и Р.Б.Статниковым и основанный на утверждении, что максимальное число просматриваемых точек при минимуме вычислений достигается, если точки выбираются из так называемой ЛП τ - последовательности. Название ЛП τ - последовательность появилось как сокращение фразы "бесконечные последовательности точек, любой двоичный участок которых есть П τ сетка. Таким образом, просматривая варианты в точках, соответствующих ЛП τ - последовательности и, вычисляя значения критериев в этих точках можно принимать эффективные решения.

Рассмотрим более подробно порядок решения задач в этом случае. Пусть проектируемая система зависит от n варьируемых параметров $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ в n -мерном пространстве. На параметры накладываются функциональные и областные ограничения. Задача решается в диалоговом режиме и состоит из следующих этапов:

- составление таблицы испытаний (выбор пробных точек);
- выбор критериальных ограничений;
- анализ результатов и принятие решения.

Остановимся более подробно на порядке выполнения этих этапов.

- Выбор пробных точек. Этот этап выполняется с помощью ЭВМ путем генерирования декартовых координат точек $Q_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in})$, по которым находят декартовы координаты управляемых переменных в соответствии с формулой:

$$u_j^i = u_j^* + q_{ij}(u_j^* - u_j), \quad j=1,2,\dots,n \quad (8)$$

По точке $u=u^i$ проверяются ограничения. Если они выполнены, то точка $u=u^i$ отбирается в качестве пробной и по ней вычисляются значения критериев W . В противном случае пробная точка отбрасывается.

Вычисление координат точек Q_i может проводиться с помощью матрицы направляющих числителей (табл. 2).

Таблица 1

jM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1,25	3	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0,25	1	9	1	1	1	1	1	1	1
4	1,25	3	9	1	1	1	1	1	1	1
5	1,0	1	9	1	1	1	1	1	1	1
6	0,25	2	9	1	1	1	1	1	1	1
7	0,25	1	1	17	1	1	1	1	1	1
8	1,25	3	1	17	1	1	1	1	1	1
9	1,0	1	1	17	1	1	1	1	1	1
10	0,25	2	1	17	1	1	1	1	1	1
11	0,25	2	9	17	1	1	1	1	1	1
12	1,0	1	9	17	1	1	1	1	1	1
13	1,25	3	9	17	1	1	1	1	1	1
14	0,25	1	1	1	1	1	1	1	1	513
15	0,25	1	1	1	1	1	1	1	1	513

По таблице числителей t_j^l вычисляются координаты v_j^l направляющих точек v^l
 $v_j^l = t_j^l 2^{-l}$, (9)

где

j - номер координаты соответствующей точки Π τ сетки, 1 соответствует номеру точки, равному 2¹. Если в двоичной системе номер точки Q_i $i=e_m, \dots, e_2, e_1$, то координаты этой точки будут

$$q_{ij} = e_1 v_{j*}^1 * e_1 v_{j*}^1 * \dots * e_1 v_{j*}^1, \quad (10)$$

где

* - означает поразрядное сложение по модулю 2 в двоичной системе.

Выбор критериальных ограничений. Этот этап предполагает участие ЛПР, который на основании анализа результатов расчета W назначает критериальные ограничения, если это необходимо.

Анализ результатов и принятия решения. На этом этапе анализируются полученные значения W с учетом всех принятых ограничений. Если все условия выполняются, то находится решение, при котором минимизируется значение показателя эффективности (критерия). В противном случае могут быть пересмотрены критериальные ограничения, т.е. сделаны уступки. На этом этапе решаются еще две важные задачи:

- анализируется корреляционная матрица

$$W_{[k,m]} = |r_{k,m}|, \quad (11)$$

где

$r_{k,m}$ - коэффициент парной корреляции между критериями W_k и W_m ;

- определяется Парето - оптимальное множество решений и из него неформальным путем находится наиболее предпочтительный вариант решения.

В заключение отметим следующие моменты. Процедуры данного типа основаны на предположении о возможности априорного определения наилучшего соотношения между требованиями, предъявляемыми различными критериями. Понятно, что такая возможность существует не всегда. Кроме того, выбор конкретного вида глобальной функции цели не может быть осуществлен в отрыве от решаемой задачи.

3. Апостериорные процедуры многоцелевой оптимизации и соответствующие им методы принятия решения

В основе апостериорных процедур лежит предположение, что формальная модель многоцелевой задачи не содержит информации, достаточной для однозначного выбора наилучшей альтернативы. Следовательно, решения, принимаемые с помощью апостериорных процедур, имеют принципиально субъективный характер, что предопределяет необходимость привлечения субъективных суждений конструктора. Учет предпочтений проектанта в этом случае является одним из наиболее эффективных методов снятия имеющейся неопределенности.

Апостериорные процедуры принятия решений заключаются в формулировке дополнительных требований, накладываемых на предпочтения проектанта, выполнение которых позволяет однозначно восстановить некоторую скалярную функцию полезности $P(u)$, после чего задача принятия решений сводится к скалярной оптимизации.

Типичная структура апостериорной процедуры решения многокритериальных задач такова. Сначала выполняется проверка гипотезы о независимости по полезности. Если ответы проектанта позволяют сделать вывод, что независимость действительно имеет место, то с помощью специальных методов (часто используется принцип лотереи) восстанавливаются все величины, необходимые для идентификации искомой функции полезности.

Основным достоинством апостериорных процедур по сравнению с априорными является четкое определение условий, при выполнении которых ими можно пользоваться. Но их практическое использование часто наталкивается на необходимость сбора чрезвычайно большого количества информации, а также на то, что проектант во многих случаях либо не может дать информацию, необходимую для реализации процедуры, либо дает ее с большими ошибками. Это связано, как правило, с неподготовленностью проектанта к решению такого рода задач.

4. Адаптивные процедуры многоцелевой оптимизации и соответствующие им методы принятия решения

Как известно, в кибернетике под *адаптацией* понимается "процесс накопления и использования информации в системе, направленный на достижение определенного, обычно оптимального в некотором смысле состояния или поведения системы при начальной неопределенности или изменяющихся внешних условиях. Из приведенного выше определения в результате анализа можно сформулировать некоторые общие принципы адаптации:

- адаптация представляет, как правило, непрерывный динамический управляемый случайный процесс;
- в процессе адаптации управление процессом должно быть оптимальным по какому-либо одному или нескольким критериям (показателям).

В процессе адаптации (адаптивного управления) могут меняться: параметры, структура системы, алгоритм функционирования, управляющие воздействия и т.д. Как

известно, процесс оптимального проектирования может интерпретироваться в виде задачи оптимального управления. Поэтому к нему могут быть полностью применены как общие принципы, так и методы адаптации. При этом адаптация здесь может рассматриваться с двух точек зрения:

- во-первых, в ходе проектирования происходит непрерывное поступление и накопление знаний об условиях применения будущего объекта, новых данных о материалах, их поведении при действующих нагрузках и т.д., которые должны учитываться при принятии оптимальных решений;
- во-вторых, некоторые изделия после их создания работают в самых разнообразных и неопределенных условиях, что требует, в свою очередь, от конструктора обеспечения максимальной приспособляемости машины к изменяющимся условиям.

ФУНКЦИЯ ЖЕЛАТЕЛЬНОСТИ

1 Частный случай и обобщенная функции желательности Харрингтона

Одним из наиболее удобных способов построения обобщенного отклика является обобщенная функция желательности Харрингтона. В основе построения этой обобщенной функции лежит идея преобразования натуральных значений частных откликов в безразмерную шкалу желательности или предпочтительности. Чтобы получить шкалу желательности, удобно пользоваться готовыми разработанными таблицами соответствий между отношениями предпочтения в эмпирической и числовой (психологической) системах. Значение частного отклика, переведенное в безразмерную шкалу желательности, обозначается через d_i ($i=1, 2, \dots, n$) и называется частной желательностью. Шкала желательности имеет интервал от нуля до единицы. Значение $d_i=0$ соответствует абсолютно неприемлемому уровню данного свойства, а значение $d_i=1$ – самому лучшему значению свойства. Значение $d_i=0,37$ обычно соответствует границе допустимых значений. В таблице 1 приведены стандартные оценки по шкале желательности.

Таблица 1 –Стандартные оценки по шкале желательности

Желательность	Оценка по шкале желательности
Отлично	$0,80 \leq d < 1,00$
Хорошо	$0,63 \leq d < 0,80$
Удовлетворительно	$0,37 \leq d < 0,63$
Плохо	$0,20 \leq d < 0,37$
Очень плохо	$0,00 \leq d < 0,20$

Функция желательности отражает зависимость оценок, или показателей желательности (d), от безразмерных показателей (y), в которые переводят размерные (натуральные) показатели качества. Эта зависимость выражается уравнением:

$$d = f(y) \quad (1)$$

Обобщенный показатель желательности (D_i) рассчитывается по формулам:

- без учета коэффициентов весомости:

$$D = \sqrt[n]{\dots}, \quad (2)$$

- с учетом коэффициентов весомости:

$$D' = \prod_{i=1}^n m_i^{\alpha_i}, \quad (3)$$

где m_i – коэффициент весомости, причем $\sum_i \alpha_i = 1$

Точность комплексной оценки повышается при учете коэффициентов весомости показателей свойств. Перевести значения размерных (натуральных) показателей (x) качества изделий в безразмерные (y) при линейной зависимости между ними можно по формуле:

$$y = a_0 + a_1 x \quad (4)$$

и при нелинейной (в частности квадратичной) связи:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \quad (5)$$

Рассмотрим для примера линейный случай. Прологарифмировав дважды уравнение (1), получим:

$$\ln \ln \frac{1}{d} = -y.$$

Подставляя значения y в уравнение (4), получим:

$$a_0 + a_1 x = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{d}}.$$

Составляем систему уравнений для известных значений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{d_1}}, \\ a_0 + a_1 x_2 = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{d_2}}. \end{cases} \quad (6)$$

Решая совместно оба уравнения, находят значения коэффициентов a_0 и a_1 . В результате получают уравнение линейной зависимости между исследуемым показателем и безразмерными значениями. По этому уравнению можно найти значение y для любого значения x , а далее по

формуле (1) – показатель желательности.

2 Исследование функции желательности и построение его графика

1) Область определения функции – вся вещественная ось: $D(y)=R$.

2) Четность и нечетность функции:

$$f(x) = e^{-e^{-x}}, f(-x) = e^{-e^x}.$$

$f(-x) \neq -f(x)$ – значит функция не нечетная;

$f(x) \neq -f(-x)$ – значит функция не четная.

3) Функция не является периодической.

4) Так как область определения – вся вещественная ось, вертикальных асимптот график не имеет.

5) Наклонные асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-e^{-x}}}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-e^{-x}}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} x} = \frac{0}{-\infty} = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-e^{-x}} - 0x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-e^{-x}} = 0.$$

$y_1 = k_1 x + b_1 = 0$ – горизонтальная асимптота.

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-e^{-x}}}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = \frac{0}{\infty} = 0;$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-e^{-x}} - 0x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}} = 1.$$

$y_2 = k_2 x + b_2 = 1$ – горизонтальная асимптота.

6) Точки пересечения с осями координат:

$Ox: f(x) = e^{-e^{-x}} = 0$, нет решений.

Следовательно график не пересекается с осью Ох.

$Oy: f(0) = e^{-e^0} = e^{-1} = 0,368$.

Следовательно точка пересечения с осью Oy – $(0; 0,368)$.

7) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-e^{-x}})' = (e^{-e^{-x}}) \cdot (-e^{-x})' = (e^{-e^{-x}}) \cdot (-e^{-x}) \cdot (-x)' = \\ &= (e^{-e^{-x}}) \cdot (-e^{-x}) \cdot (-1) = e^{-e^{-x}} \cdot e^{-x} = e^{-e^{-x}-x}. \end{aligned}$$

Уравнение $f'(x) = e^{-e^{-x}-x} = 0$ не имеет решения. Функция $f'(x) > 0$ на всей оси Ox , значит функция $f(x)$ возрастает на всей числовой оси.

8) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^{-e^{-x}-x})' = (e^{-e^{-x}-x}) \cdot (-e^{-x}-x)' = (e^{-e^{-x}-x}) \cdot (e^{-x}-1) = \\ &= e^{-e^{-x}-2x} - e^{-e^{-x}-x}. \end{aligned}$$

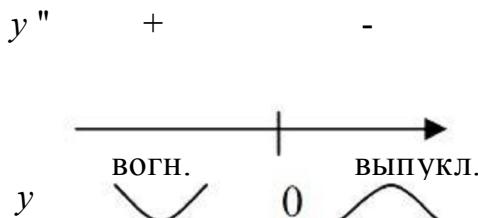
$$f''(x) = 0, \quad e^{-e^{-x}-2x} - e^{-e^{-x}-x} = 0,$$

$$e^{-e^{-x}-2x} = e^{-e^{-x}-x},$$

$$-e^{-x}-2x = -e^{-x}-x,$$

$$x = 0.$$

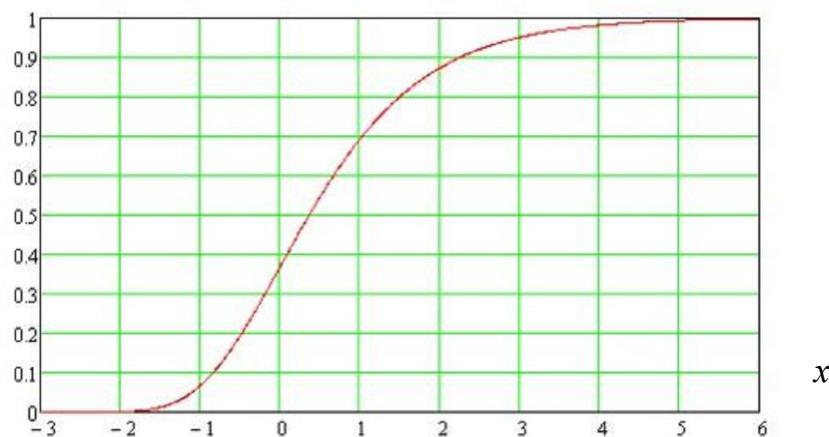
Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка $x = 0$ делит области определения функции.



Функция вогнута на интервале $(-\infty; 0)$, выпукла на интервале $(0; +\infty)$.

9) С учётом предыдущих пунктов строим график функции $f(x)$:

$$f(x)$$



3 Определение качества двух аналогов реле с использованием функции желательности

Сравним качество электротехнических устройств при помощи функции Харрингтона. Для иллюстрации метода ограничимся двумя реле: механическим реле времени РВМ13 и его аналогом – микропроцессорным реле времени РСВ13М и тремя их техническими показателями (таблица 2). Шкала оценок для сравниваемых изделий приведена в таблице 3.

Таблица 2 – Значения показателей качества сравниваемых изделий

Наименование показателей	Коэффициент весомости, m_i	РВМ 13	РСВ 13М
Потребляемая мощность реле, ВА	0,5	10	7
Коммутационная износостойкость контактов реле	0,3	5000	20000
Масса, кг	0,2	1,5	1

Коэффициенты весомости m_i определяют на базе специальных научных исследований или экспертным путем.

Таблица 3 – Шкала оценок

Градации качества	Критерии оценок размерных показателей		
	Потребляемая мощность реле, ВА	Коммутационная износостойкость контактов реле	Масса, кг
Отлично	менее 5	15000 и более	0,5
Хорошо	менее 7	10000 и более	1
Удовлетворительно	менее 9	5000 и более	1,5
Плохо	менее 10	1000 и более	2
Очень плохо	более 10	менее 1000	2,5

Оценкам «отлично» и «удовлетворительно» для показателя «потребляемая мощность» реле соответствуют значения 5 и 9, подставляя эти значения в формулу (6), получим:

$$\begin{cases} a_0 + 5a_1 = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{0,8}}, \\ a_0 + 9a_1 = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{0,37}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + 5a_1 = 1,51, \\ a_0 + 9a_1 = 0,01. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим, что $a_1=-0,37$; $a_0=3,35$. В результате получаем уравнение линейной зависимости между исследуемыми показателями и безразмерным значением стандартной оценки по шкале желательности:

$$y_1 = 3,35 - 0,37x.$$

По этому уравнению можно найти значения безразмерного показателя y' для любых значений натурального показателя x .

Для показателя «коммутационная износостойкость» оценкам «отлично» и «удовлетворительно» соответствуют значения 15000 и 5000.

Подставляя эти значения в формулу (6) получим:

$$\begin{cases} a_0 + 15000a_1 = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{0,8}}, \\ a_0 + 5000a_1 = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{0,37}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + 15000a_1 = 1,51, \\ a_0 + 9000a_1 = 0,01. \end{cases}$$

Решая систему уравнений находим, что $a_1=0,00015$; $a_0=-0,74$. Тогда уравнение линейной зависимости между исследуемыми показателями и безразмерным значением стандартной оценки по шкале желательности будет иметь вид:

$$y_2 = -0,74 + 0,00015x.$$

Аналогично для показателя «масса» оценкам «отлично» и «удовлетворительно» соответствуют значения 0,5 и 1,5. Подставляя эти значения в формулу (6) получим:

$$\begin{cases} a_0 + 0,5a_1 = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{0,8}}, \\ a_0 + 1,5a_1 = \ln \frac{1}{\ln \frac{1}{0,37}}. \end{cases}$$

$$a_0 + 0,5a_1 = 1,51,$$

$$a_0 + 1,5a_1 = 0,01.$$

Решая систему уравнений находим, что $a_1=-1,5$; $a_0=2,26$. Уравнение линейной зависимости между исследуемыми показателями и безразмерным значением стандартной оценки по шкале желательности будет иметь вид:

$$y_3 = 2,26 - 1,5x.$$

Исходя из полученных данных, находим значения безразмерного показателя y' для изделия А (реле РВМ13):

$$y'_1^A = 3,35 - 0,37 \cdot 10 = -0,35,$$

$$y'_2^A = -0,74 + 0,00015 \cdot 5000 = 0,01,$$

$$y'_3^A = 2,26 - 1,5 \cdot 1,5 = 0,01.$$

Находим значения безразмерного показателя y' для изделия Б (реле PCB 13М):

$$y'_1^B = 3,35 - 0,37 \cdot 7 = 0,76,$$

$$y'_2^B = -0,74 + 0,00015 \cdot 20000 = 2,26,$$

$$y'_3^B = 2,26 - 1,5 \cdot 1 = 0,76.$$

Далее рассчитываем частные показатели желательности для показателя качества изделий А и Б по формуле (1):

$$d_1^A = e^{-e^{-(0,35)}} = 0,242,$$

$$d_1^B = e^{-e^{-0,76}} = 0,626,$$

$$d_2^A = e^{-e^{-0,01}} = 0,372,$$

$$d_2^B = e^{-e^{-2,26}} = 0,901,$$

$$d_3^A = e^{-e^{-0,01}} = 0,372.$$

$$d_3^B = e^{-e^{-0,76}} = 0,626.$$

В результаті обобщені показатели желательності по формулам (2) і (3) равні:

- для изделия А (реле РВМ13):

$$D_A = \sqrt[3]{0,242 \cdot 0,372 \cdot 0,372} =$$

$$D_A' = 0,242^{0,5} \cdot 0,372^{0,3} \cdot 0,372^{0,2} = 0,3.$$

- для изделия Б (реле РСВ 13М):

$$D_B = \sqrt[3]{0,626 \cdot 0,901 \cdot 0,626} = 0,707,$$

$$D_B' = 0,626^{0,5} \cdot 0,901^{0,3} \cdot 0,626^{0,2} = 0,698.$$

Результати проведених розрахунків зведені в таблицю 4.

Таблиця 4 – Натуральні і обобщенні по функції желательності отклики

Сравниваемые изделия	Натуральные значения откликов			Частные желательности			D	Оценка по шкале желательности	D'	Оценка по шкале желательности
	x1	x2	x3	d1	d2	d3				
А	10	5000	1,5	0,242	0,372	0,372	0,322	плохо	0,3	плохо
Б	7	20000	1	0,626	0,901	0,626	0,707	хорошо	0,698	хорошо

Так як $D_A' = 0,3 < D_B' = 0,698$, то можна зробити висновок про те, що рівень якості реле РВМ13 нижче, ніж рівень якості реле РСВ 13М.

4 Область применения функции желательности Харрингтона

4.1 В экологии:

- при оценке качества природных вод;
- при оценке состояния лабораторных популяций по комплексу эколого-физиологических показателей;
- обобщенный показатель состояния сообщества при изучении действия загрязнителей на экосистемы.

4.2 В экономике:

- для оценки уровня социально-экономического развития региона;
- показатель конкурентоспособности промышленного предприятия;
- оценка конкурентоспособности товара;
- реализации методики краткосрочного финансового планирования;
- для оценки эффективности инвестиционных проектов.

4.3 В медицине:

- для оценки возможности использования наиболее эффективного способа лечения.

4.4 В технике:

- для оценки рациональности конструктивно-технологического и геометрического компоновочного решения изделия.

4.5 В искусственных нейронных сетях.

Искусственные нейронные сети (ИНС) — сети, в качестве вершин которых выступают искусственные нейроны (ИН). ИНС осуществляет преобразование вектора входных сигналов (воздействий) X в вектор выходных сигналов Y . Интерпретация векторов X и Y зависит от постановки решаемой задачи и предметной области. ИНС в настоящее время рассматривается как

грубая (первого приближения) модель мозга человека и других живых существ. ИНС нашли применение в следующих областях:

- Кластеризация и классификация. ИНС способна на предъявленных ей "эталонных" векторах X выделить характеризующие их признаки, накопить их и использовать в дальнейшем для оценки степени близости вновь предъявляемых входных векторов к эталонным (классификация). Некоторые типы нейронных сетей могут самостоятельно выделить во множестве предъявляемых входных векторов X обособленные группы (кластеризация), определяемые "усредненными" векторами X .

- Аппроксимация. ИНС дают возможность с любой требуемой точностью аппроксимировать нелинейную непрерывную функцию $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$. Применительно к проблематике автоматизированного проектирования — это, в первую очередь, задача построения формальной математической модели объекта проектирования.

- Прогнозирование. Нейронные сети с обратными связями (рекуррентные нейронные сети) способны предсказывать будущее состояние моделируемого объекта/процесса по его состоянию на k предыдущих шагах модельного времени и текущему воздействию X .

Средством описания ИНС являются функции принадлежности. Существует свыше десятка типовых форм кривых для задания функций принадлежности. Рассмотрим некоторые из них:

1) Полиномиальная функция принадлежности (*S*-функция) определяется как:

$$\mu_1(x, a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a; \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & \text{если } a \leq x \leq \frac{a+b}{2}; \\ 1 - \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & \text{если } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b; \\ 1, & \text{если } x \geq b. \end{cases}$$

График *S*-функции представлен на рисунке 1:

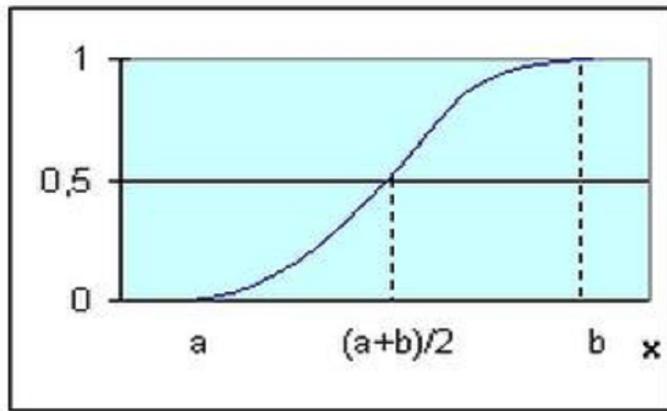


Рисунок 1 – График S-функції

2) Сигмоидная функция принадлежности (дополнительная двухсторонняя) определяется как:

$$\mu_2(x, a, b, c) = \begin{cases} \mu_2(x, a, b), & \text{если } x < b; \\ 1, & \text{если } b \leq x \leq c; \\ 1 - \mu_1(x, c, c + b - a), & \text{если } x > c. \end{cases}$$

График сигмоидной функции принадлежности представлен на рисунке 2:

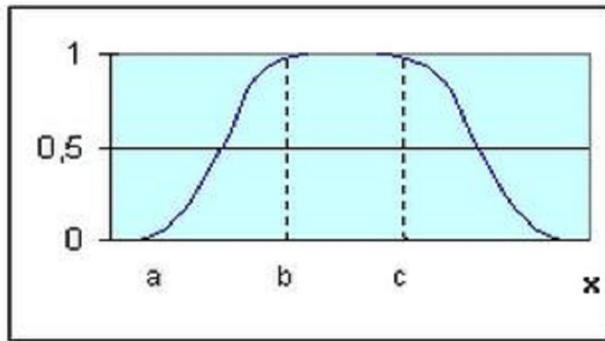


Рисунок 2 – График сигмоидной функції

3) Треугольная функция принадлежности определяется как:

$$\mu_3(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a; \\ \frac{x-a}{c-a}, & \text{если } a \leq x \leq c; \\ \frac{b-x}{b-c}, & \text{если } c \leq x \leq b; \\ 0, & \text{если } x \geq b. \end{cases}$$

График треугольной функции принадлежности представлен на рисунке 3:

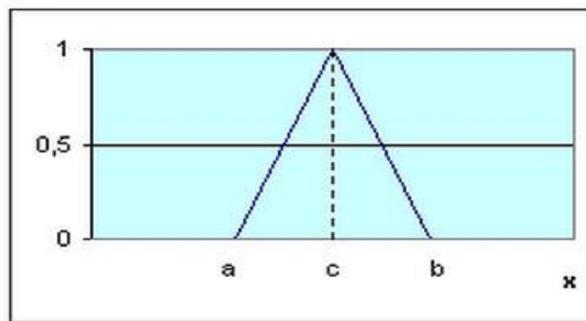


Рисунок 3 – График треугольной функции

4) Полиномиальная функция принадлежности (Z-функция)

определяется как:

$$\mu_4(x, a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq c; \\ \{1 + [a(x - c)]^b\}^{-1}, & \text{если } x > c. \end{cases}$$

График полиномиальной функции принадлежности представлен на рисунке 4:

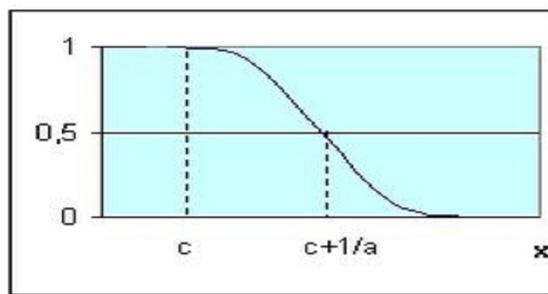


Рисунок 4 – График полиномиальной функции

5) Трапециевидная функция принадлежности определяется как:

$$\mu_5(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a; \\ \frac{x-a}{c-a}, & \text{если } a < x < c; \\ 1, & \text{если } c \leq x \leq d; \\ \frac{b-x}{b-d}, & \text{если } d < x < b; \\ 0, & \text{если } x \geq b. \end{cases}$$

График трапециевидной функции принадлежности представлен на рисунке 5:

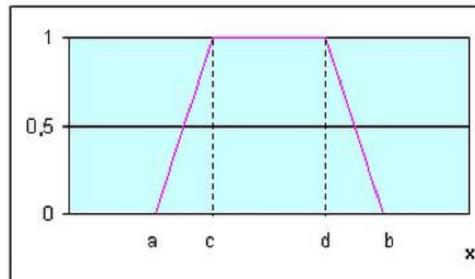


Рисунок 5 – График трапециевидной функции

6) Гауссовская функция принадлежности определяется как:

$$\mu_6(x, a, b) = e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}.$$

График гауссовской функции принадлежности представлен на рисунке 6:

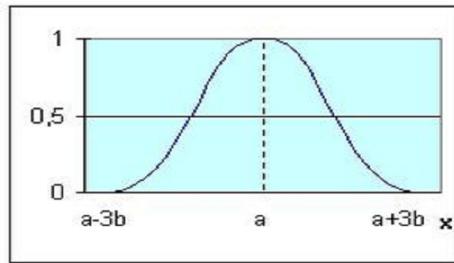


Рисунок 6 – График гауссовской функции

7) Сигмоидная (логистическая) функция принадлежности определяется как:

$$\mu_7(x, a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}.$$

График сигмоидной функции принадлежности представлен на рисунке 7:

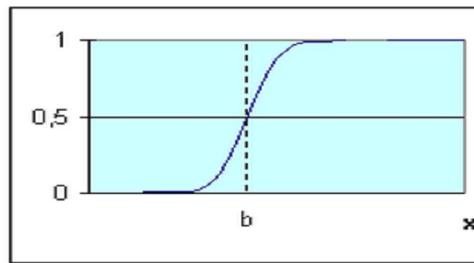


Рисунок 7 – График сигмоидной функции

Функция желательности может быть использована как функция принадлежности, график ее функции аналогичен графику S-функции и графику сигмоидной функции.

5 Присутствие функции желательности в пакетах

- 1) Инструментарий нечеткий логики (ИНЛ) в составе пакета *Matlab* содержит 11 встроенных типов функций принадлежности, формируемых на основе кусочно-линейных функций, распределения Гаусса, сигмоидной кривой, квадратических и кубических полиномиальных кривых.
- 2) *Statistica* - программа всестороннего анализа и добычи данных.
- 3) Пакет программ *Thermix-2D* для анализа динамики АЭС.

Пример. Оптимизация состава железооксидной катализаторной пасты для формования на шнековом экструдере

Основной целью технологии формования носителей и катализаторов из оксидных порошков является повышение механической прочности зерен заданной формы при определенных параметрах пористой структуры целевого продукта, а также производительности процесса.

В процессах приготовления и регулирования свойств формовочных водных паст оксидов металлов важными факторами являются состав и концентрация добавок водорастворимых полимеров (ВП) и поверхностно-активных веществ (ПАВ). Индивидуальные особенности таких добавок, называемых по принятой терминологии “временными технологическими связками” (ВТС), могут оказывать на свойства пасты выраженное в той или иной степени функциональное действие (диспергаторы, связующие, смачиватели, загустители и др.).

В данном исследовании на примере пасты оксида железа $\alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$ было изучено влияние ее состава и параметров работы экструдера на показатели процесса и качество целевого продукта.

Опыты проводились с использованием методов планирования экспериментов. В качестве компонентов ВТС использовались поливиниловый (ПВС), метилцеллулоза (МЦ) и глицерин.

Было исследовано влияние на процесс экструзии пасты следующих пяти факторов: z_1 – содержание $\alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$, (46-50 об.%), z_2 – содержание ПВС, (2-6 мас.%) в жидкой фазе пасты; z_3 – содержание МЦ, (0,1-1,25 мас.%) в жидкой фазе пасты; z_4 – содержание глицерина, (0-18 мас.%) в жидкой фазе пасты; z_5 – число оборотов шнека экструдера, (10-15 об/мин).

В качестве плана (табл. 3) была использована полуреплика максимальной разрешающей способности от полного факторного эксперимента для пяти факторов, обеспечивающая практически несмешанные оценки для линейных эффектов и эффектов парного взаимодействия [7].

В экспериментах образцы железооксидной катализаторной пасты были получены при смешении порошка $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ с соответствующим количеством раствора ВТС в течение 20 мин. в лабораторном двухвальном Z - образном смесителе с объёмом рабочей камеры 1000 см^3 и скоростью вращения 50 об/мин.

В качестве показателей процесса формования и свойств готового продукта измерялись следующие критерии:

y_1 – производительность формования по влажному продукту, кг/ч;

y_2 – прочность на сжатие прокаленного экструдата, МПа;

y_3 – кажущаяся плотность прокаленного экструдата, $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Формование паст в гранулы осуществлялось в шнековом экструдере с формующей головкой диаметром 30 мм и стальной фильтерой с 12-ю формирующими каналами диаметром 4 мм.

Для оценки свойств готовых катализаторов служили гранулы диаметром 4 мм, высушенные при 105°C , а затем прокаленные при 500°C в течение 2-х ч.

Таблица 3

План эксперимента в безразмерном масштабе
и результаты опытов

№ опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	+1	+1	10.1	1.02	2.50
2	-1	+1	+1	+1	-1	7.7	0.54	2.30
3	+1	-1	+1	+1	-1	7.3	1.46	2.38
4	-1	-1	+1	+1	+1	7.4	0.55	2.27
5	+1	+1	-1	+1	-1	6.6	1.36	2.48
6	-1	+1	-1	+1	+1	12.3	0.93	2.29

7	+1	-1	-1	+1	+1	5.1	1.77	2.38
8	-1	-1	-1	+1	-1	9.9	0.52	2.23
9	+1	+1	+1	-1	-1	2.7	1.55	2.53
10	-1	+1	+1	-1	+1	9.1	1.33	2.32
11	+1	-1	+1	-1	+1	9.4	1.72	2.49
12	-1	-1	+1	-1	-1	6.1	0.72	2.10
13	+1	+1	-1	-1	+1	8.8	1.28	2.50
14	-1	+1	-1	-1	-1	8.8	0.09	2.26
15	+1	-1	-1	-1	-1	4.0	1.11	2.45
16	-1	-1	-1	-1	+1	15.0	0.43	2.20

Качество готовых экструдатов оценивали по показателю механической прочности гранул на сжатие и по пористости, которая характеризуется величиной кажущейся плотности.

Для оценки дисперсии воспроизводимости было поставлено пять опытов в центре плана. Результаты приведены в табл. 4. По формуле (2.12) по данным, приведенным в табл. 4, были посчитаны дисперсии воспроизводимости для y_1, y_2, y_3 :

$$s_{1\text{воспр}}^2 = 0.182; s_{2\text{воспр}}^2 = 0.017; s_{3\text{воспр}}^2 = 0.0017.$$

Число степеней свободы дисперсий воспроизводимости $f_{\text{воспр}} = 4$.

Таблица 4

Результаты опытов в центре плана

№ опыта	y_1	y_2	y_3
1	11.2	1.42	2.39
2	11.7	1.25	2.42
3	11.2	1.33	2.33
4	12.2	1.25	2.34
5	11.8	1.07	2.33

По результатам экспериментов (табл. 3) посчитаны коэффициенты уравнений регрессии. Значимость коэффициентов проверена по критерию Стьюдента, а адекватность уравнения регрессии эксперименту – по критерию Фишера [7].

После исключения незначимых коэффициентов адекватные эксперименту уравнения регрессии имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 8.14 - 1.39x_1 - 0.67x_3 + 1.5x_5 + 1.29x_1x_3 + \\&+ 0.37x_1x_4 + 0.76x_2x_4 + 0.3x_2x_5 + 0.49x_3x_4 - 1.08x_4x_5; \\ \hat{y}_2 &= 1.02 + 0.385x_1 + 0.0875x_3 + 0.105x_5 - 0.095x_1x_2 + \quad (3.1) \\&+ 0.01x_2x_3 - 0.214x_3x_4; \\ \hat{y}_3 &= 2.355 + 0.11x_1 + 0.0425x_2.\end{aligned}$$

Анализ уравнений регрессии (3.1) показывает противоречивый характер влияния факторов на критерии оптимизации: например, с увеличением содержания $\alpha - Fe_2O_3$ (фактор x_1) производительность формования (y_1) уменьшается, растут прочность на сжатие прокаленного экструдата

(y_2) и его кажущаяся плотность (y_3) . Для того, чтобы определить условия, обеспечивающие высокие значения производительности и прочности и низкие значения плотности, была использована функция желательности Харрингтона. В этой задаче имеют место односторонние ограничения на критерии оптимизации вида $y \leq y_{\max}$ и $y \geq y_{\min}$, поэтому для преобразования измеренных критериев y в частные желательности d была использована экспоненциальная зависимость (2.6). Для определения коэффициентов b_0 и b_1 , входящих в (2.7), был использован следующий приём: худшему значению критерия, полученному по плану (табл. 3), присваивается значение желательности, равное 0.2, а лучшему – 0.8 (табл. 5).

Таблица 5

Базовые значения функций желательности
и соответствующие значения критериев

Критерий оптимизации	Значения критериев оптимизации	Значения частных функций желательности d	Желательность значения критерия
y_1	15.0	0.8	Хорошо
	2.7	0.2	Плохо
y_2	1.77	0.8	Хорошо
	0.09	0.2	Плохо
y_3	2.1	0.8	Хорошо
	2.53	0.2	Плохо

$$0.8 = \exp \{-\exp(-y')\}, \text{ отсюда } y' = 1.51;$$

$$0.2 = \exp[-\exp(-y')], \text{ отсюда } y' = -0.46. \quad (3.2)$$

Система уравнений, определяющая коэффициенты b_0 и b_1 для про-

изводительности формования y_1 , имеет вид:

$$\begin{aligned} 1.51 &= b_0 + 15.0b_1, \\ -0.46 &= b_0 + 2.7b_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В результате решения системы уравнений имеем
 $b_0 = 0.91$; $b_1 = -0.16$.

Аналогично по данным табл. 3 были определены коэффициенты b_0 и b_1 для прочности на сжатие y_2 и кажущейся плотности прокалённого экструдата y_3 .

В результате получены зависимости частных функций желательности от замеренных значений критериев оптимизации:

$$\begin{aligned} d_1 &= \exp[-\exp(0.91 - 0.16y_1)], \\ d_2 &= \exp[-\exp(0.57 - 1.17y_2)], \\ d_3 &= \exp[-\exp(-11.14 + 4.59y_3)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Результаты опытов, приведенные в табл. 3, по формулам (3.4) пересчитаны в частные функции желательности (табл. 6).

В последнем столбце табл. 6 приведена обобщенная средняя геометрическая функция желательности D_G , определенная по формуле (1.12) для свёртки критериев с равными весовыми коэффициентами.

Для проведения регрессионного анализа по критерию D_G повторные опыты (табл. 4) также переведены в шкалу желательности (табл. 7). По данным табл. 7 по формуле (2.12) определена дисперсия воспроизводимости по обобщенному критерию $s_{D_G}^2 = 7.228 \cdot 10^{-4}$.

Таблица 6

Функції желательності

№ опыта	d_1	d_2	d_3	D_G
1	0.610	0.585	0.247	0.445
2	0.484	0.389	0.572	0.460
3	0.462	0.727	0.447	0.531
4	0.468	0.393	0.615	0.484
5	0.421	0.698	0.279	0.435
6	0.707	0.551	0.587	0.611
7	0.333	0.802	0.447	0.492
8	0.601	0.380	0.667	0.534
9	0.199	0.751	0.201	0.311
10	0.560	0.689	0.263	0.493
11	0.576	0.791	0.263	0.493
12	0.392	0.466	0.800	0.527
13	0.545	0.674	0.247	0.449
14	0.545	0.201	0.628	0.410
15	0.270	0.618	0.329	0.380
16	0.799	0.341	0.703	0.576

Таблица 7

Результаты повторных опытов в шкале
желательности

№ опыта	d_1	d_2	d_3	D_G
1	0.661	0.715	0.430	0.588
2	0.682	0.664	0.380	0.556
3	0.661	0.689	0.527	0.621
4	0.703	0.664	0.511	0.620
5	0.687	0.603	0.527	0.602

Адекватное эксперименту уравнение регрессии после отсея незначимых коэффициентов имеет вид:

$$\hat{D}_G = 0.048 - 0.042x_1 - 0.018x_2 + 0.017x_4 + 0.034x_5 - 0.014x_1x_2 + \\ + 0.017x_1x_4 + 0.025x_2x_5 - 0.015x_3x_4 - 0.013x_3x_5 - 0.027x_4x_5. \quad (3.5)$$

Полученное уравнение регрессии было использовано для определения оптимальных условий процесса.

Методом нелинейного программирования определены условия, обеспечивающие наибольшее значение $D_G=0.6$ в области исследования: $x_1 = -1; x_2 = +1; x_3 = -1; x_4 = +1; x_5 = +1$.

Эти условия совпадают с 6-м опытом в матрице планирования, поэтому экспериментальной проверки результатов не требуется.

Использованная и рекомендуемая литература:

1. Вентцель. Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. [Текст]: – М.: Наука, 1988. – 206 с.
2. Ахназарова, С. Л. Использование функции желательности Харрингтона при решении оптимизационных задач химической технологии. Учебно-методическое пособие [Текст] / С. Л Ахназарова, Л. С. Гордеев.- М. : РХТУ им. Д. С. Менделеева. - 2003.- 76 с.
3. Холоднов В.А. Системный анализ и принятие решений. Компьютерное моделирование и оптимизация объектов химической технологии в Mathcad и Excel. [Текст]: учебное пособие / В.А.Холоднов, В. П. Решетиловский, М.Ю.Лебедева, Е. С. Боровинская. СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2007.-425 с.
4. Diwekar Urmila M. Introduction to Applied Optimization. [Текст]: Kluwer Academic Publishers, 1998. 352 p.