МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

з курсу *«Числові методи»*

на тему: *«Розв'язування задач наближення функцій»*

ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ
6.050202 «АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

НАВЧАЛЬНЕ ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Київ 2014

Методичні рекомендації до виконання розрахункової роботи та самостійної роботи з курсу «Числові методи» на тему: «Розв’язування задач наближення функцій» для студентів напряму підготовки 6.050202 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»/ Автори: С.В. Брановицька, О.О. Квітка, Н.Є. Теліцина. – К.: 2014. – 48 с.

Гриф надано Вченою радою ХТФ,
протокол № 5
від «26» _травня_ 2014 р.

Навчальне електронне видання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

з курсу *«Числові методи»*

на тему: *«Розв’язування задач наближення функцій»*

ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ
6.050202 «АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА КОМП’ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

Автори: Брановицька Слава Вікторівна
Квітка Олександр Олександрович
Теліцина Наталія Євгеніївна

Відповідальний редактор: А.М. Шахновський, к.т.н., доц.

Рецензент: В.А. Потаскалов

ЗМІСТ

ВСТУП

В сучасних умовах від інженерного персоналу вимагається не тільки знання технології, але й володіння сучасними методами управління виробництвом, яке здійснюється за допомогою ЕОМ. Знання основних принципів побудови математичних моделей процесів і розуміння суті моделювання та його завдань дасть змогу спеціалісту досконаліше керувати виробництвом.

Мета виконання розрахункової роботи полягає в тому, щоб навчити студентів користуватися існуючими методами апроксимації експериментальних даних для оптимального проектування та оптимального управління хіміко-технологічними процесами.

Завдання розрахункової роботи — прищепити студентам навички побудови емпіричних формул на основі експериментальних даних.

Методичні рекомендації для розрахункової роботи надають допомогу студентам напряму підготовки ***6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»*** при виконанні розрахункової роботи на тему «***Розв'язування задач наближення функцій***».

В методичних рекомендаціях наведено завдання для розрахункової роботи; вимоги до її виконання та оформлення; а також теоретичні відомості, які необхідні для її виконання; види та графіки емпіричних залежностей, які найбільш часто зустрічаються при аналізі та опис закономірностей процесів та явищ в хімії та хімічній технології.

1. ЗАВДАННЯ НА РОЗРАХУНКОВУ РОБОТУ

Завдання 1. Знаходження коефіцієнтів емпіричної залежності

Для заданої табличної функції отримати апроксимуючу функцію, що відповідає закону Ареніуса: $K = A \cdot \exp\left(-\dfrac{B}{T}\right)$, (де $B = \dfrac{E}{R}$; $E-$ енергія активації; $R-$ універсальна газова стала), який описує температурну залежність константи швидкості хімічної реакції, та оцінити результати апроксимації. Експериментальні дані для побудови апроксимуючої функції наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 Температурна залежність константи швидкості хімічної реакції від температури

№1		№2		№3		№4		№5	
T	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**
600	0,12	825	0,15	725	0,2	860	0,4	620	0,31
650	0,4	850	0,3	775	1,15	880	0,84	640	0,93
700	1,52	875	0,69	800	2,49	900	1,61	660	2,72
725	2,59	900	1,34	850	10,85	920	3	680	7,3
775	7,2	925	2,55	875	21,08	940	5,55	700	18,7
800	11,3	950	4,78	900	39,72	960	9,88	720	45,34
850	26,05	975	8,55	950	127,1	980	17,3	740	104,6
№6		**№7**		**№8**		**№9**		**№10**	
T	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**
550	0,33	675	0,12	520	0,14	740	9,1	520	0,19
575	1,09	725	1,08	560	0,4	760	12,21	580	0,87
600	3,4	750	2,75	600	1,11	780	16,2	620	2,15
625	9,44	800	16,3	640	2,56	800	21,11	680	6,64
650	24,46	825	36,24	680	5,49	820	27,24	720	12,77
675	58,92	850	77,05	720	10,73	840	34,65	780	29,89
700	133,4	875	156,8	760	19,57	860	43,63	860	77,22
№11		**№12**		**№13**		**№14**		**№15**	
T	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**
640	0,95	780	0,11	860	0,32	550	0,31	825	0,15
680	7,35	820	0,51	880	0,6	600	3,41	850	0,31
700	18,68	860	1,95	900	1,14	650	24,45	875	0,69
740	104,7	900	6,92	920	2,05	700	133,4	900	1,41
780	491,5	940	21,66	940	3,69	750	580	925	2,73
820	1984	980	61,93	960	6,43	800	2098	950	5,19
860	7032	1020	162,9	980	10,91	850	6526	975	9,51

продовження **Таблиці 1.1.**

№16		№17		№18		№19		№20	
T	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**
600	0,14	540	0,33	540	0,15	610	1,81	518	0,16
625	0,39	560	0,54	580	0,41	630	2,69	543	0,31
650	1,13	580	0,87	620	1,02	650	3,85	568	0,59
675	2,95	600	1,4	660	2,33	670	5,52	593	1,09
700	7,12	620	2,16	700	4,8	690	7,68	618	1,84
725	16,39	640	3,19	740	9,11	710	9,87	643	3
750	35,52	660	4,67	780	16,18	730	13,72	668	4,75
№21		**№22**		**№23**		**№24**		**№25**	
T	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**
625	0,22	620	0,29	580	0,69	560	0,55	560	0,25
675	0,81	660	2,72	620	1,71	600	1,38	600	0,67
725	2,61	700	18,68	660	3,82	640	3,22	640	1,56
775	7,18	740	104,9	700	7,75	680	6,66	680	3,38
825	17,35	780	492	740	14,59	720	12,75	720	6,67
875	38,08	820	1983	780	25,82	760	22,84	760	12,21
925	76,65	860	7033	820	43,13	800	38,57	800	21,14
№26		**№27**		**№28**		**№29**		**№30**	
T	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**	**T**	**K**
740	14,62	540	0,14	740	17,21	650	1,11	650	0,44
760	19,56	600	0,66	760	22,85	700	7,16	700	1,5
780	25,77	640	1,55	780	29,86	750	35,5	750	4,38
800	35,57	700	4,8	800	38,55	800	144,5	800	11,33
820	43,11	760	12,23	820	49,16	850	498,4	850	26,01
840	54,7	820	27,22	840	61,95	900	1498	900	54,55
860	68,68	860	43,64	860	77,2	950	4011	950	105,8

Завдання 2. Знаходження загального вигляду та коефіцієнтів емпіричної залежності

Для заданої табличної функції визначити вигляд апроксимуючої функції, обчислити її коефіцієнти та оцінити результати апроксимації. Експериментальні дані для побудови апроксимуючої функції наведені в таблицях 1.2. – 1.5 (в залежності від номеру варіанту).

Таблиця 1.2. Залежність швидкості рідини, що проходить через шар піни (u, *мл/хв*) від вмісту (об'єму) піни в рідині (V, *мл*).

№1	***V***	1,5	2,7	3,6	4,8	6,3	7,5	8,7	9,9	11,1
	u	2,91	4,12	4,85	5,69	6,68	7,41	8,05	8,68	9,24
№2	***V***	2,4	3,3	4,2	5,1	6	6,9	7,8	8,4	9,3
	u	3,82	4,62	5,3	5,93	6,47	7,04	7,57	7,89	8,36

продовження **Таблиці 1.2.**

№3	***V***	1,8	3	4,5	6,6	8,1	9,6	10,5	11,4	12,6
	u	3,23	4,37	5,51	6,86	7,7	8,51	8,95	9,42	9,96
№4	***V***	2,1	2,7	3,3	3,9	4,5	5,1	5,7	6,3	6,9
	u	3,55	4,08	4,59	5,09	5,51	5,88	6,3	6,69	7,02
№5	***V***	3,9	4,8	6	7,2	8,1	9	10,2	11,1	12,3
	u	5,06	5,72	6,5	7,19	7,72	8,21	8,83	9,24	9,83
№6	***V***	1,5	3	4,2	5,7	7,2	8,4	9,6	10,8	12
	u	2,93	4,33	5,28	6,32	7,22	7,85	8,53	9,1	9,69
№7	***V***	2,1	3,6	4,8	6	7,5	9	9,9	11,4	12,3
	u	3,53	4,87	5,7	6,47	7,38	8,22	8,67	9,41	9,8

Таблиця 1.3. Залежність кількості оксиду сірки, адсорбованої силікагелем (*у, % від маси адсорбенту*), від її концентрації її в газі (*х, % об'єм.*).

№8	***x***	2,4	3,6	5,4	7,2	8,4	10,8	12,6	15	16,8
	y	10	12,6	16,2	18,2	19,1	21	21,7	23,1	23,5
№9	***x***	0	3	6	9	12	15	18	21	24
	y	0	11,8	16,8	19,5	21,5	22,9	24	24,7	25,2
№10	***x***	1,2	3	4,8	7,8	10,2	12,6	14,4	17,4	20,4
	y	6	11,5	15	18,9	20,6	21,8	22,6	23,8	24,5
№11	***x***	0,6	4,2	6,6	9,6	13,2	16,2	19,8	22,8	25,2
	y	3,4	14,3	17,5	20	21,9	23,3	24,3	25,2	25,4
№12	***x***	0	1,8	3,6	6	8,4	11,4	13,8	16,8	19,2
	y	0	8,2	13	16,9	19	21,3	22,5	23,6	24,2
№13	***x***	2,4	4,8	7,2	9,6	12	15,6	18	20,4	23,4
	y	10,1	15,2	18,1	20	21,7	23,2	23,9	24,4	25,1

Таблиця 1.4. Залежність коефіцієнта тепловіддачі (α, *ккал/м*^{2}*·г·град*) від горизонтальної стінки до киплячої води, від різниці температур стінки та киплячої води (Δt, *град*).

№14	Δt	4,5	5,46	6,18	7,38	8,82	10,26	11,94	13,38
	α	1940	2785	3501	4862	6766	8956	11858	14650
№15	Δt	5,7	6,42	7,38	8,34	9,54	10,74	11,7	12,9
	α	3012	3760	4861	6099	7826	9750	11424	13687
№16	Δt	4,98	6,18	7,14	7,86	9,3	10,5	12,18	13,86
	α	2345	3503	4575	5465	7460	9348	12300	15641
№17	Δt	4,74	5,7	6,9	8,58	10,02	11,46	13,14	14,1
	α	2139	3015	4296	6427	8572	10996	14159	16143
№18	Δt	5,94	7,14	8,1	9,06	9,78	10,98	12,18	13,62
	α	3254	4577	5774	7110	8195	10160	12303	15135

продовження **Таблиці 1.4.**

№19	**Δt**	5,62	6,76	8,54	9,42	10,12	11,45	12,53	13,76
	α	2570	4025	6115	7477	8582	10576	12768	15650
№20	***Δt***	4,74	6,42	7,62	9,06	10,5	11,7	12,66	13,38
	α	2145	3750	5162	7115	9345	11420	13227	14647

Таблиця 1.5. Залежність концентрації парів оцтової кислоти (*y*, моль. частки) від її концентрації в рідині (*x*, *моль. частки*).

№21	***x***	0,05	0,13	0,21	0,33	0,45	0,53	0,65	0,73
	y	0,384	0,644	0,762	0,851	0,91	0,931	0,953	0,972
№22	***x***	0,09	0,15	0,23	0,29	0,35	0,43	0,49	0,57
	y	0,543	0,675	0,779	0,83	0,868	0,897	0,925	0,942
№23	***x***	0,33	0,43	0,51	0,61	0,69	0,77	0,85	0,91
	y	0,856	0,905	0,923	0,949	0,967	0,976	0,984	0,993
№24	***x***	0,07	0,19	0,31	0,45	0,59	0,71	0,79	0,87
	y	0,472	0,74	0,841	0,906	0,947	0,968	0,977	0,989
№25	***x***	0,11	0,25	0,37	0,47	0,55	0,63	0,75	0,89
	y	0,595	0,8	0,872	0,916	0,934	0,953	0,975	0,99
№26	***x***	0	0,16	0,28	0,44	0,56	0,72	0,84	0,96
	y	0	0,694	0,819	0,902	0,939	0,969	0,981	0,996
№27	***x***	0,04	0,12	0,2	0,32	0,48	0,6	0,68	0,8
	y	0,328	0,618	0,749	0,845	0,917	0,948	0,962	0,978
№28	***x***	0,08	0,24	0,36	0,44	0,52	0,64	0,76	0,88
	y	0,508	0,788	0,867	0,903	0,929	0,955	0,973	0,987
№29	***x***	0	0,17	0,27	0,35	0,41	0,49	0,55	0,67
	y	0	0,712	0,813	0,865	0,895	0,921	0,936	0,961
№30	***x***	0,24	0,32	0,4	0,48	0,56	0,64	0,8	0,92
	y	0,79	0,848	0,885	0,915	0,938	0,953	0,981	0,992

Завдання 3. Знаходження апроксимуючої залежності за методом Чебишева

За наданими експериментальними даними (температурна залежність ізобарної теплоємності речовини, табл. 1.6), отримати апроксимуючу функцію та оцінити результати апроксимації. Використовуючи спосіб Чебишева отримати апроксимуючі багаточлени 2-го та 3-го ступенів, оцінити результати апроксимації та обрати кращий з варіантів.

Таблиця 1.6. Залежності ізобарних теплоємностей (c_p, *Дж/моль·К*) деяких речовин від температури (T, К).

№1 Метан		№2 Етилен		№3 Ізобутан		№4 Окис етилену		№5 Діетиламін	
T	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***
300	35,3	420	56,1	340	109	380	60,1	300	69
340	60	460	60	380	120	420	65,5	340	76,82
380	39,9	500	63,3	420	130	460	70,6	380	84,26
420	42,1	540	67	460	139	500	75,4	420	91,32
460	44,3	580	69,9	500	149	540	79,9	460	98,03
500	46,5	620	72,9	540	157	580	84,2	500	104,4
540	48,6	660	75,7	580	166	620	88,1	540	110,4
580	50,7	700	78,4	620	173	660	91,8	580	116,2
620	52,8	740	81	660	181	700	95,3	620	121
№6 Триметиламін		**№7 Пропан**		**№8 Пропилен**		**№9 Толуол**		**№10 І-бутилен**	
T	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***
340	103	450	104	350	72,4	300	105	400	112,6
380	113	500	113	400	80,3	350	123	450	122,8
420	123	550	121	450	87,7	400	1392	500	132,4
460	132	600	129	500	97,7	450	155	550	141,3
500	141	650	136	550	101	500	169	600	149,6
540	149	700	143	600	107	550	182	650	157,3
580	157	750	149	650	113	600	194	700	164,5
620	170	800	155	700	119	650	205	750	171,2
660	171	850	161	750	124	700	216	800	177,3
№11 Бутан		**№12 1-3-бутадієн**		**№13 Н-пентан**		**№14 Циклопентан**		**№15 Н-гексан**	
T	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***
350	113	300	80,5	360	143	410	122	510	221,7
400	125	350	91,1	410	158	460	138	560	236,6
450	137	400	101	460	173	510	153	610	250,5
500	148	450	110	510	186	560	167	660	263,5
550	159	500	118	560	199	610	179	710	275,6
600	169	550	126	610	211	660	191	760	287
650	178	600	133	660	222	710	202	810	297,3
700	186	650	139	710	232	760	212	860	306,9
750	195	700	145	760	242	810	221	910	316

продовження **Таблиці 1.6.**

№ 16 Етанол		№17 Діхлорметан		№18 Фторбензол		№19 Бензол		№20 Н-гептан	
T	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***
460	96,1	510	67,4	360	113	390	112	380	246,5
510	102	560	70,5	410	128	430	122	520	260,8
560	108	610	73,2	460	141	470	132	660	274,5
610	113	660	75,7	510	152	510	141	800	287,4
660	118	710	78	560	163	550	149	940	300
710	123	760	80	610	173	590	157	1080	311,1
760	128	810	81,8	660	181	630	165	1220	322
810	132	860	83,4	710	189	670	172	1360	332,2
860	136	910	85	760	196	710	178	1500	342
№21 Піридин		**№22 Оцтова кислота**		**№23 Н-октан**		**№25 2-метилпропілен**		**№25 Ацетилен**	
T	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***
520	134	440	86,4	480	281	400	111	570	56,33
560	142	480	91,5	520	297	440	119	620	58
600	150	520	96,3	560	312	480	127	670	59,6
640	156	560	101	600	327	520	134	720	60,9
680	163	600	104	640	341	560	141	770	62,1
720	168	640	109	680	354	600	148	820	63,33
760	174	680	113	720	366	640	154	870	64,4
800	179	720	116	760	378	680	160	920	65,3
840	183	760	119	800	388	720	165	970	66,25
№26 О-ксилол		**№27 М-Ксилол**		**№28 П-ксилол**		**№29 Хлорбензол**		**№30 2-метилбутан**	
T	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***	**T**	***Cp***
420	179	520	209	470	191	570	165	420	161,3
470	196	570	223	520	207	620	174	470	176
520	211	620	237	570	222	670	182	520	189,8
570	226	670	250	620	236	720	189	570	202,7
620	239	720	261	670	248	770	195	620	214,5
670	251	770	272	720	260	820	201	670	225,6
720	263	820	282	770	271	870	206	720	235,8
770	273	870	291	820	281	920	211	770	245,3
820	284	920	299	870	290	970	216	820	254

Завдання 4. Сплайн-інтерполяція

Побудувати апроксимуючу функцію у вигляді кубічного сплайну для таблично заданої функції (табл. 1.7) та перевірити її роботу.

Таблиця 1.7. Варіанти табличних функцій для розв’язання задачі сплайн-інтерполяції.

Варіант 1	i	0	1	2	3	4
	x_i	0	0,2	0,5	0,9	1,5
	y_i	1,75	2,68	1,24	0,72	1,35
Варіант 2	i	0	1	2	3	4
	x_i	1	1,3	1,7	2,2	2,8
	y_i	2,95	3,89	1,54	3,38	2,34
Варіант 3	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,5	0,7	1	1,4	1,9
	y_i	1,83	2,14	1,46	1,15	3,28
Варіант 4	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,3	0,5	0,8	1,2	1,7
	y_i	2,38	2,94	1,46	1,28	2,15
Варіант 5	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,2	0,6	1,1	1,8	2,6
	y_i	3,34	4,53	2,75	3,91	3,57
Варіант 6	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,1	0,3	0,6	1,1	1,8
	y_i	2,65	2,75	2,19	1,76	3,43
Варіант 7	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,4	0,6	0,9	1,4	2
	y_i	2,45	1,63	0,95	0,73	1,95
Варіант 8	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,8	1	1,3	1,9	2,3
	y_i	1,72	2,35	1,52	2,43	1,55
Варіант 9	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,7	0,8	1,3	1,5	2,1
	y_i	2,63	2,87	2,19	1,76	3,34
Варіант 10	i	0	1	2	3	4
	x_i	1,2	1,4	1,7	2,3	2,8
	y_i	1,36	1,15	2,34	0,92	3,12
Варіант 11	i	0	1	2	3	4
	x_i	1,4	1,6	2	2,5	3,1
	y_i	2,39	3,85	2,74	1,58	3,15
Варіант 12	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,6	0,7	1	1,5	1,9
	y_i	2,64	3,73	1,42	1,84	0,65
Варіант 13	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,3	0,8	1,4	2,1	2,9
	y_i	5,28	6,83	4,35	3,26	2,35

продовження **Таблиці 1.7.**

Варіант 14	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	1,3	1,9	2,6	2,8	3,1
	y_i	1,63	2,18	1,46	1,17	2,95
Варіант 15	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,9	1,2	1,6	2,1	2,8
	y_i	3,47	4,53	2,86	1,64	2,25
Варіант 16	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,4	0,7	1,1	1,7	2,4
	y_i	2,39	2,86	1,55	3,57	2,94
Варіант 17	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	1,1	1,4	1,9	2,5	2,7
	y_i	2,91	3,64	4,55	2,57	0,24
Варіант 18	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,8	0,9	1,2	1,6	2,1
	y_i	1,42	2,34	3,48	1,77	2,66
Варіант 19	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,8	1,2	1,4	1,7	2,2
	y_i	3,18	2,15	4,18	3,81	5,07
Варіант 20	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,3	0,5	0,8	1,2	1,8
	y_i	1,19	2,65	1,83	3,84	2,86
Варіант 21	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,5	0,9	1,5	2,3	3
	y_i	1,54	3,38	2,53	1,86	4,35
Варіант 22	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,6	0,8	1,1	1,6	2
	y_i	1,76	2,61	3,89	2,18	4,35
Варіант 23	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	1,2	1,5	1,9	2,4	3,1
	y_i	0,82	1,38	0,45	2,67	1,5
Варіант 24	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,7	1,1	1,4	1,9	2,6
	y_i	2,75	3,87	1,25	4,26	2,43
Варіант 25	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,6	0,9	1,3	1,8	2,2
	y_i	0,53	1,68	3,65	2,13	4,37
Варіант 26	$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
	x_i	0,7	0,8	1,2	1,5	1,7
	y_i	4,54	6,14	5,43	3,72	4,18

продовження **Таблиці 1.7.**

Варіант 27	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,3	0,6	0,8	1,4	1,9
	y_i	3,25	4,13	2,39	1,75	3,86
Варіант 28	i	0	1	2	3	4
	x_i	0,2	0,5	0,7	1,1	1,8
	y_i	2,36	1,53	3,49	2,78	4,14
Варіант 29	i	0	1	2	3	4
	x_i	1,2	1,4	1,7	2,3	2,8
	y_i	0,65	1,63	0,93	2,13	1,52
Варіант 30	i	0	1	2	3	4
	x_i	1,3	1,6	1,8	2,2	2,7
	y_i	0,48	1,85	2,65	0,84	1,54

2. СКЛАД, ОБСЯГ І СТРУКТУРА РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Розрахункова робота повинна містити такі складові:

1. Титульний лист (Додаток Б).
2. Зміст.
3. Завдання на розрахункову роботу (загальні та індивідуальні).
4. Короткі теоретичні відомості, що стосуються виконання задач.
5. Послідовність виконання задач розрахункової роботи з використанням графіків, таблиць, формул.
6. Лістинги та скріншоти програмних модулів, що реалізують виконання поставлених задач.
7. Висновки.

Обсяг розрахункової роботи має бути не більшим як 50 сторінок, проте вона повинна повністю висвітлювати всі зазначені вище складові. Викладення матеріалу має бути послідовним і зрозумілим.

3. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОЗДІЛІВ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

1. *Використання методу вирівнювання та методу найменших квадратів для визначення коефіцієнтів апроксимуючого поліному*

а) Розрахувати коефіцієнти апроксимуючої функції, отримати значення апроксимуючої функції у вузлах апроксимації і величину середньоквадратичної похибки.

б) Скласти алгоритм і програму апроксимації таблично заданої функції за методом найменших квадратів, з урахуванням методу вирівнювання, виконати розрахунки.

в) Побудувати на одній координатній площині графіки заданої функції і апроксимуючої функції.

г) Проаналізувати отримані дані (розраховані вручну і програмно).

Наприклад таблична залежність питомого об’єму V (м^3/кг) насиченої водяної пари від тиску p (ат.) представлена в таблиці 3.1. і виражається формулою: $V = a + \dfrac{b}{p}$.

Таблиця 3.1. Залежність питомого об’єму насиченої водяної пари від тиску

p	3,304	1,457	0,903	0,382	0,245	0,167	0,119
V	0,50	1,2	2,0	5,0	8,0	12	17

Оскільки вид функціональної залежності нам відомий, то для знаходження її коефіцієнтів (***a***, ***b***) приведемо функцію $V = a + \dfrac{b}{p}$ до лінійного вигляду, використовуючи **метод вирівнювання**.

Метод вирівнювання полягає в перетворені апроксимуючої (наближеної) функції таким чином, щоб перетворити її в лінійну функцію. Для кожної емпіричної формули він індивідуальний.

Спираючись на теоретичні відомості (Додаток А) і загальний вигляд залежності, робимо висновок про те, що для вирівнювання даної функції необхідно ввести нові змінні: ***Y* = *V*, *X* = 1/*p***.

В результаті отримаємо: ***Y* = *a* + *b*·*X***.

Складемо таблицю значень цих величин (табл. 3.2). Для перевірки, чи правильно обрана залежність можна побудувати графік залежності $Y = Y(X)$ (рис. 3.1). Оскільки отриманий графік є прямою лінією, то можна вважати, що метод вирівнювання для даної залежності застосований правильно.

Параметри ***a*** і ***b*** визначимо за допомогою методу найменших квадратів (МНК). Для розрахунку коефіцієнтів нормальної системи рівнянь (Додаток А) складаємо таблицю 3.3.

Таблиця 3.2. Залежність питомого об’єму насиченої водяної пари від тиску (вирівняна залежність)

X=1/p	0,303	0,686	1,107	2,618	4,082	5,988	8,403
Y=V	0,5	1,2	2	5	8	12	17

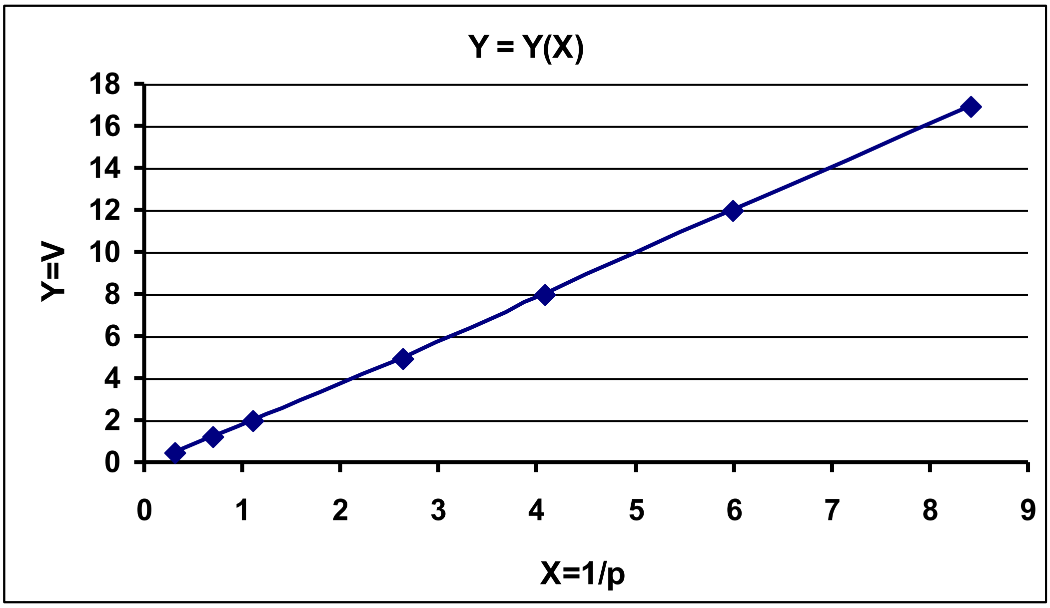

Рис.3.1 Графік вирівняної функції $Y = Y(X)$

Таблиця 3.3 Визначення коефіцієнтів нормальної системи рівнянь

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i
1	0,303	0,5	0,092	0,151
2	0,686	1,2	0,471	0,824
3	1,107	2	1,226	2,215
4	2,618	5	6,853	13,09
5	4,082	8	16,66	32,65
6	5,988	12	35,86	71,86
7	8,403	17	70,62	142,9
Сума:	23,187	45,7	131,775	263,645

Складемо нормальну систему рівнянь ($n=7$):

$$\begin{cases} 7a + 23{,}187b = 45{,}7 \\ 23{,}187a + 131{,}775b = 263{,}645 \end{cases}$$

Для розв’язання отриманої системи рівнянь можна використати будь-який метод. Наприклад знайдемо коефіцієнти апроксимуючої функції за допомогою схеми єдиного ділення методу Гауса:

Введення значень:

7	*	X1	+	23,187	*	X2	=	45,7
23,187	*	X1	+	131,775	*	X2	=	263,645

Результат :

X1 = -0,2368 X2 = 2,0424

Хід	Етапи	Коефіцієнти X1	Коефіцієнти X2	Вільні члени	Контр. суми	Контр. суми
Прямий	1	7	23,1872	45,7	75,8872439	75,8872439
		23,1872	131,775	263,645278	418,607091	418,607091
		1	3,31246	6,52857143	10,8410348	10,8410348
	2		54,9677	112,2657	167,233371	167,233371
			1	2,04239504	3,04239504	3,04239504
Зворотний	3		1	2,04239504	3,04239504	3,04239504
		1		-0,2367874	0,76321255	0,76321255

Таким чином: $\boxed{\mathbf{\mathit{a}=-0{,}237,\ \mathit{b}\ =\ 2{,}0424}}$ і апроксимуюча формула для залежності питомого об'єму насиченої водяної пари V від тиску p набуває вигляду $V=-0{,}237+\dfrac{2{,}0424}{p}$.

Слід зазначити, що розрахунок коефіцієнтів апроксимуючої функції можна зробити також, використовуючи формули Крамера або інший метод. Також може бути використане програмне середовище призначене для подібних розрахунків.

Наприклад, знайдемо значення a і b із використанням програмного продукту MathCad:

Given

$131.775\cdot b + 23.187\cdot a = 263.645$

$23.187\cdot b + 7\cdot a = 45.7$

$$\mathrm{Find}(a,b) \rightarrow \begin{pmatrix} -0.236543519203173967 \\ 2.042342891897279414 \end{pmatrix}$$

Для оцінки точності знайденої апроксимуючої формули (порівняння вихідних і розрахованих значень функції) побудуємо таблицю 3.4. Також для оцінки характеру отриманої апроксимаційної формули та наявності відхилень від вихідних значень функції побудуємо графік (рис. 3.2).

Знайдемо значення середньоквадратичного відхилення:

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}(V_{\mathrm{i}}-Vp_{\mathrm{i}})^2}{\mathrm{n}-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\varepsilon^2}{6}}=\sqrt{\frac{0{,}0434}{6}}=0{,}085$$

Таблиця 3.4 Порівняння експериментальних та розрахованих значень питомого об'єму

i	*p*	*V*	*Vp*	ε	ε^2
1	3,304	0,5	0,381	0,1186	0,0141
2	1,457	1,2	1,165	0,0350	0,0012
3	0,903	2	2,025	-0,0250	0,0006
4	0,382	5	5,110	-0,1098	0,0121
5	0,245	8	8,100	-0,0995	0,0099
6	0,167	12	11,993	0,0069	4,73E-05
7	0,119	17	16,926	0,0738	0,0054
				Сума:	0,0434

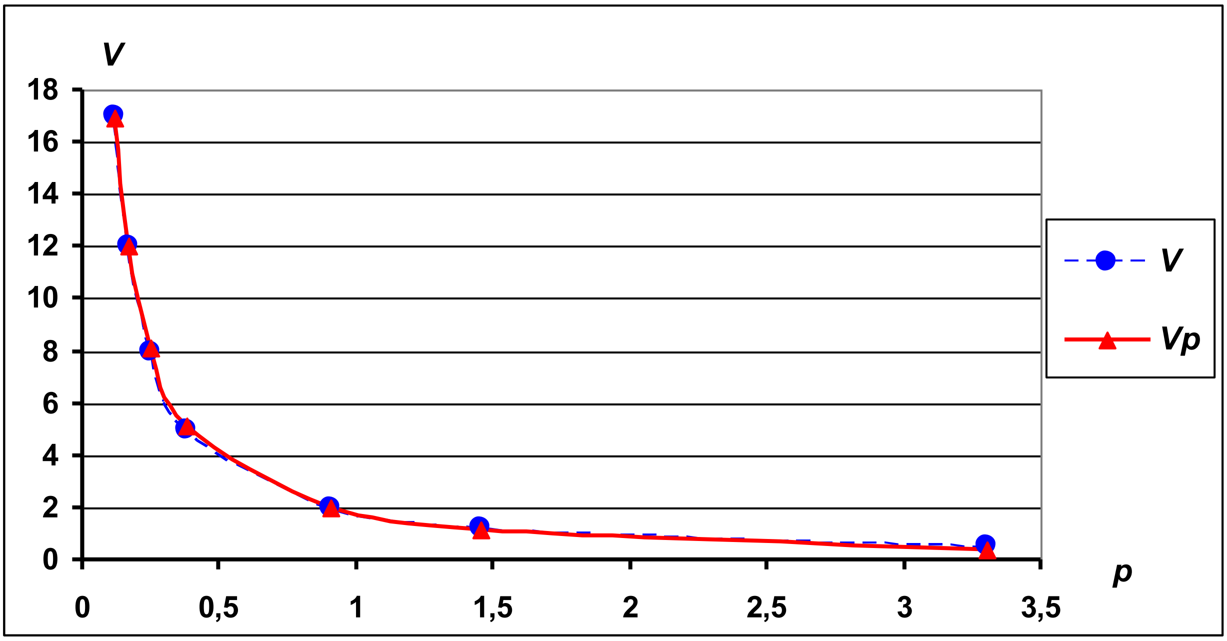

Рис.3.2 Порівняння експериментальних (*V*) та розрахованих (*Vp*) значень питомого об'єму

При створенні програми для апроксимації вихідної табличної функції можна скористатись середовищем розробки Visual Basic або Visual Basic for Applications. Розроблені алгоритм і програма повинні бути описані в додатку до розрахункової роботи. Допускається також використання готового програмного забезпечення, <u>але лише при умові посилання на автора (розробника) та наведення джерела інформації</u>. "Ручний" та "комп'ютерний" результати порівняти необхідно порівняти.

<u>Висновок</u>: З порівняння вихідних і розрахованих значень функції (табл. 3.4 та рис. 3.2) та значення середньоквадратичної похибки ($\delta = 0{,}085$) можна зробити висновок, що отримана апроксимуюча функція досить добре описує залежність питомого об'єму насиченої водяної пари від тиску.

2. *Знаходження загального вигляду емпіричної формули таблично заданої експериментальної залежності*

а) Побудувати точковий графік заданої функції.
б) Вибрати вид апроксимуючої залежності, використовуючи графічний і аналітичний методи.
в) Розрахувати коефіцієнти апроксимуючої функції, отримати її значення у вузлах апроксимації і величину середньоквадратичної похибки.
г) Скласти алгоритм і програму апроксимації таблично заданої функції за методом найменших квадратів, з урахуванням метода вирівнювання для вибору апроксимуючої залежності, виконати розрахунки.
д) Побудувати на одній координатній площині графіки заданої функції і апроксимуючої функції.
е) Проаналізувати отримані дані (розраховані вручну і програмно).

Наприклад, задана таблична залежність (див. вище табл. 3.1).

p	3,304	1,457	0,903	0,382	0,245	0,167	0,119
V	0,50	1,2	2,0	5,0	8,0	12	17

Визначимо загальний вид емпіричної формули графічним методом. Для цього за експериментальними даними побудуємо графік (рис.3.3), позначивши $x = p$, $y = V$.

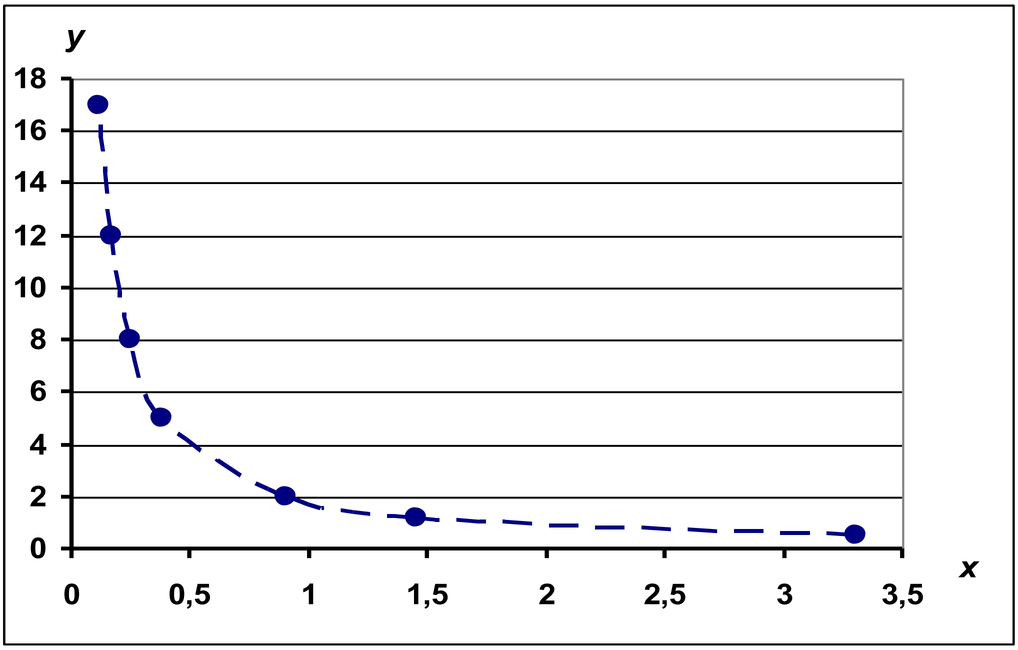

Рис. 3.3 Точковий графік заданої функції

Бачимо, що точки приблизно розподілені на кривій, що схожа на гілку гіперболи, яка асимптотично наближаються до осі **O*x***. Тому можна припустити, що експериментальні дані можуть бути описані гіперболічною залежністю:

$$y = a + \frac{b}{x}.$$

Слід зауважити, що графічний метод визначення загального виду емпіричної формули є дуже наближеним, оскільки досить часто різні емпіричні формули можуть мати приблизно схожі графіки [1, додаток 7]. Він перш за все дозволяє визначити формули, які не можуть бути використані для даної табличної функції.

Для перевірки правильності припущень про вид апроксимуючої функції використаємо аналітичний метод для визначення загального виду емпіричної формули.

Аналітичний метод базується на використанні для вибору загального виду емпіричної формули деяких аналітичних критеріїв x_{ap}, $x_{\text{ãåîì}}$, $x_{\text{ãàðì}}$, y_{ap}, $y_{\text{ãåîì}}$, $y_{\text{ãàðì}}$.

Знайдемо значення аналітичних критеріїв:

$$x_{\text{ŕđ}} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{3,304 + 0,119}{2} = 1,7115$$

$$x_{\text{ăĺîě}} = \sqrt{x_1 \cdot x_n} = \sqrt{3,304 \cdot 0,119} = 0,627$$

$$x_{\text{ăŕđě}} = \frac{2x_1 \cdot x_n}{x_1 + x_n} = \frac{2 \cdot 3,304 \cdot 0,119}{3,304 + 0,119} = 0,229$$

$$y_{\text{ŕđ}} = \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{0,5 + 17}{2} = 8,75$$

$$y_{\text{ăĺîě}} = \sqrt{y_1 \cdot y_n} = \sqrt{0,5 \cdot 17} = 2,9154$$

$$y_{\text{ăŕđě}} = \frac{2y_1 \cdot y_n}{y_1 + y_n} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 17}{0,5 + 17} = 0,9714$$

Тепер знайдемо значення $y*_{\text{ŕđ}}, y*_{\text{ăĺîě}}, y*_{\text{ăŕđě}}$, що відповідають обчисленим $x_{\text{ŕđ}}, x_{\text{ăĺîě}}, x_{\text{ăŕđě}}$, користуючись формулами лінійної інтерполяції $y^*_{\text{ŕđ}} = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x_{\text{ŕđ}} - x_i)$, де x_{i+1}, x_i – значення в табл. 3.1, між якими знаходиться $x_{\text{ŕđ}} (x_i < x_{\text{ŕđ}} < x_{i+1}); \quad y_i < y^*_{\text{ŕđ}} < y_{i+1} \quad (i = 1, 2, ..., n-1)$. Маємо:

$$y^*_{\text{ŕđ}} = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_{\text{ŕđ}} - x_1) = 0,5 + \frac{1,2 - 0,5}{1,457 - 3,304}(1,7115 - 3,304) = 1,103$$

$$y^*_{\text{ăĺîě}} = y_3 + \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}(x_{\text{ăĺîě}} - x_3) = 2 + \frac{5 - 2}{0,382 - 0,903}(0,627 - 0,903) = 3,589$$

$$y^*_{\text{гарм}} = y_5 + \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5}(x_{\text{гарм}} - x_5) = 8 + \frac{12-8}{0{,}167-0{,}245}(0{,}229-0{,}245) = 8{,}783$$

Користуючись обрахованими значеннями обчислимо величини:

$$\varepsilon_1 = |y^*_{\text{ар}} - y_{\text{ар}}| = |1{,}103 - 8{,}75| = 7{,}646$$

$$\varepsilon_2 = |y^*_{\text{ар}} - y_{\text{геом}}| = |1{,}103 - 2{,}9154| = 1{,}8119$$

$$\varepsilon_3 = |y^*_{\text{ар}} - y_{\text{гарм}}| = |1{,}103 - 0{,}9714| = 0{,}1321$$

$$\varepsilon_4 = |y^*_{\text{геом}} - y_{\text{ар}}| = |3{,}589 - 8{,}75| = 5{,}16$$

$$\varepsilon_5 = |y^*_{\text{геом}} - y_{\text{геом}}| = |3{,}589 - 2{,}9154| = 0{,}673$$

$$\varepsilon_6 = |y^*_{\text{гарм}} - y_{\text{ар}}| = |8{,}783 - 8{,}75| = 0{,}03328$$

$$\varepsilon_7 = |y^*_{\text{гарм}} - y_{\text{гарм}}| = |8{,}783 - 0{,}9714| = 7{,}8118$$

Так як $\boldsymbol{\varepsilon_{min}}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_7\} = \varepsilon_6 \approx 0{,}033$, то шукана емпірична формула буде мати вигляд:

$$y = a + \frac{b}{x}$$

Слід зауважити, що в разі, коли разом зі значенням $\boldsymbol{\varepsilon_{min}}$ *ще кілька величин* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *мають такий же порядок (наприклад, 0,033; 0,048; 0,06), то необхідно розглянути всі відповідні емпіричні формули в якості апроксимуючих функцій. Найкращою апроксимуючою формулою може виявитись будь-яка з них.*

Висновок: За допомогою аналітичних критеріїв було знайдено вид емпіричної формули, яка з найменшою похибкою описує експериментальні дані, що задані у вигляді табличної функції.

Подальший хід розв'язання задачі відбувається аналогічно тому, як було розглянуто у задачі, що описана вище (п.3.1). Тобто, для знаходження параметрів емпіричної формули використаємо метод вирівнювання (для приведення функції до лінійного виду) і МНК для знаходження коефіцієнтів рівняння. Так само виконуємо перевірку отриманої апроксимуючої функції (або кількох функцій) і робимо висновки відносно отриманих результатів.

Користуючись сучасними комп'ютерними технологіями (наприклад, MS Excel, MathCad, тощо або спеціалізованими програмними пакетами) більш доречним є апроксимація табличної функції за допомогою всіх можливих емпіричних формул (без використання аналітичних критеріїв) з подальшим вибором тієї, яка має найменшу похибку.

3. *Використання методу Чебишева для знаходження апроксимуючої залежності*

а) Використовуючи метод Чебишева отримати апроксимуючі багаточлени 2-го і 3-го степенів (вручну і програмно).
б) Розрахувати для кожної з апроксимуючих функцій значення у вузлах апроксимації і величину середньоквадратичної похибки та визначити яка з апроксимуючих функцій краще описує задану функцію.
в) Побудувати на одній координатній площині графіки заданої функції і апроксимуючої функції.
г) Проаналізувати результати апроксимації (розраховані вручну і програмно).

Нехай дана таблична залежність (табл. 3.5). Використовуючи метод Чебишева знайдемо емпіричну формулу, що виражає залежність теплоємності C_p фтористого магнію від температури.

Таблиця 3.5. Залежність теплоємності C_p фтористого магнію від температури

***T*, К**	300	400	500	600	700	800	900	1000
C_p, Дж/моль·К	70,35	75,38	80,53	85,81	91,26	96,83	102,53	108,27

Щоб не оперувати великими числами, вводимо в якості аргументу $x = \dfrac{T - 300}{100}$, а $y = C_p$. Необхідні для розрахунку дані зведемо в таблиці 3.6.

Таблиця 3.6. Дані для обрахунку за методом Чебишева

i	T_i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	300	0	70,35	0	0	0	0	0
2	400	1	75,38	1	1	1	75,38	75,38
3	500	2	80,53	4	8	16	161,06	322,12
4	600	3	85,81	9	27	81	257,43	772,29
5	700	4	91,26	16	64	256	365,04	1460,16
6	800	5	96,83	25	125	625	484,15	2420,75
7	900	6	102,53	36	216	1296	615,18	3691,08
8	1000	7	108,27	49	343	2401	757,89	5305,23
Сума		**28**	**710,96**	**140**	**784**	**4676**	**2716,13**	**14047,01**

Нанесемо точки (x_i, y_i) (i = 1,.., 8) на координатну площину $x0y$ (рис.3.4). Із графіку видно, що експериментальні точки розміщені приблизно на одній прямій. З цього можна зробити висновок, що багаточлен першого степеня може бути використаним у якості емпіричної формули для даної табличної функції. Його можна записати у вигляді: $y = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$, де $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x + \alpha_1$. Так як n = 8, то $\alpha = -\frac{1}{n}\sum x_i = -\frac{1}{8}\cdot 28 = -3{,}5$.

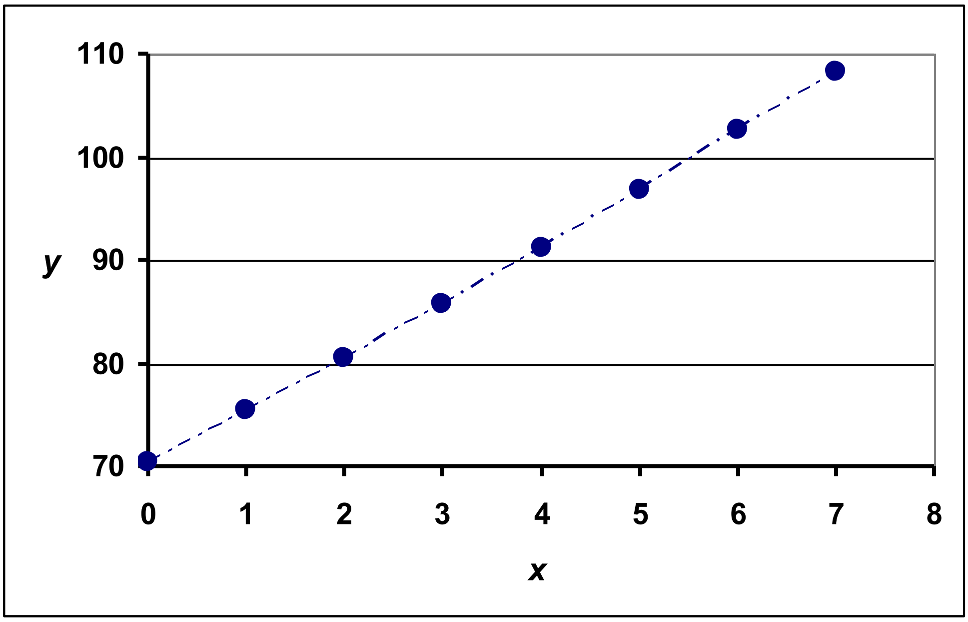

Рис. 3.4 Точковий графік заданої функції

Тоді: $a_0 = \dfrac{\sum y_i\varphi_0(x_i)}{\sum[\varphi_0(x_i)]^2} = \dfrac{1}{n}\sum y_i = \dfrac{1}{8}\cdot 710{,}96 = 88{,}87$

$a_1 = \dfrac{\sum y_i\varphi_1(x_i)}{\sum[\varphi_1(x_i)]^2}$, де $\sum[\varphi_1(x_i)]^2 = \sum x_i^2 + \alpha_1\sum x_i = 140 - 3{,}5\cdot 28 = 42$,

$\sum[\varphi_1(x_i)] = \sum y_i x_i + \alpha_1\sum y_i = 2716{,}13 - 3{,}5\cdot 710{,}96 = 227{,}77$

В результаті $\alpha_1 = \dfrac{227{,}77}{42} = 5{,}42$. Отже шуканий апроксимуючий багаточлен першого степеня має вигляд:

$$y = 88{,}87 + 5{,}42(x - 3{,}5) = 69{,}9 + 5{,}42x$$

Для оцінки точності знайденої формули необхідно знайти суму (**S_1**) квадратів відхилень досліджуваних значень y_i від значень y_{ip} розрахованих по знайденому поліному (табл. 3.7) та середньоквадратичне відхилення. Для наглядного зображення різниці досліджуваних значень і розрахованих побудуємо точковий графік.

Середньоквадратична похибка дорівнює:

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum\left|y-y_d\right|^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{0,701}{7}}=0,3164$$

Таблиця 3.7. Оцінка результатів апроксимації багаточленом першого степеня

i	x_i	y_i	y_{ip}	$y_i - y_{ip}$	$(y_i - y_{ip})^2$
1	0	70,35	69,9	0,45	0,2025
2	1	75,38	75,32	0,06	0,0036
3	2	80,53	80,74	-0,21	0,0441
4	3	85,81	86,16	-0,35	0,1225
5	4	91,26	91,58	-0,32	0,1024
6	5	96,83	97	-0,17	0,0289
7	6	102,53	102,42	0,11	0,0121
8	7	108,27	107,84	0,43	0,1849
				Сума (S_1)	**0,701**

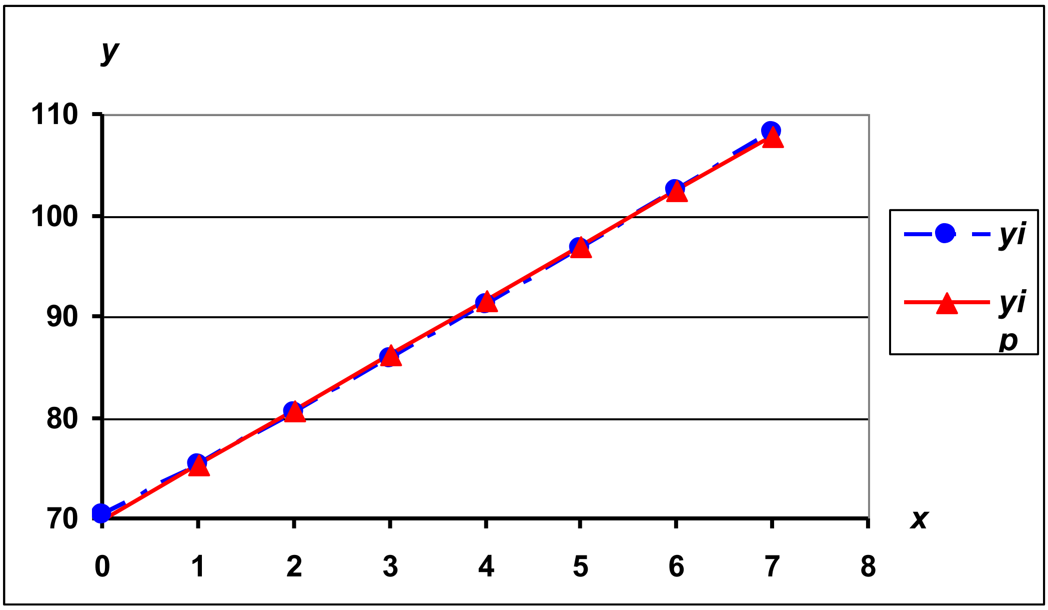

Рис. 3.5 Оцінка результатів апроксимації багаточленом першого степеня

Вважаючи, що точність наближень дослідних даних багаточленом першого порядку недостатня, побудуємо багаточлен другого степеня:
$y=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)$, де $a_0,\varphi_0(x),a_1,\varphi_1(x)$ – вже відомі значення, а $a_2,\varphi_2(x)$ обчислюємо за формулою:

$$a_2=\frac{\sum y_i\varphi_2(x_i)}{\sum\left[\varphi_2(x_i)\right]^2},\text{ де }\varphi_2(x)=(x+\beta_2)\varphi_1(x)+\gamma_2\varphi_0(x)$$

Знайдемо значення β_2 і γ_2:

$$\beta_2 = -\frac{\sum x_i\left[\varphi_1(x_i)\right]^2}{\sum\left[\varphi_1(x_i)\right]^2},$$

де із попередніх розрахунків

$$\sum\left[\varphi_1(x_i)\right]^2 = \sum x_i\varphi_1(x_i) = \sum x_i^2 + \alpha_1\sum x_i = 42$$

$$\sum x_i\left[\varphi_1(x_i)\right]^2 = \sum x_i^3 + \alpha_1\sum x_i^2 + \alpha_1\sum x_i\,\varphi_1(x_i) = 784 - 3{,}5\cdot 140 - 3{,}5\cdot 42 = 147$$

$$\beta_2 = -\frac{147}{42} = -3{,}5$$

$$\gamma_2 = -\frac{\sum x_i\varphi_1(x_i)}{n} = -\frac{42}{8} = -5{,}2$$

Підставивши знайдені значення β_2 і γ_2 та $\varphi_1(x) = x - 3{,}5$ отримаємо:

$$\varphi_2(x) = (x - 3{,}5)(x - 3{,}5) - 5{,}2 = x^2 - 7x + 7$$

Формула для розрахунку $\boldsymbol{a_2}$ має вигляд: $a_2 = \frac{\sum y_i\varphi_2(x_i)}{\sum\left[\varphi_2(x_i)\right]^2}$

де $\sum y_i\varphi_2(x_i) = \sum y_i x_i^2 + \alpha_2^{(1)}\sum y_i x_i + \alpha_2^{(2)}\sum y_i$

З виразу для $\varphi_2(x) = x^2 - 7x + 7$ маємо $\alpha_2^{(1)} = -7,\quad \alpha_2^{(2)} = 7$.

Підставивши знайдені значення в попередню формулу, отримаємо:

$$\sum y_i\varphi_2(x_i) = \sum y_i x_i^2 + \alpha_2^{(1)}\sum y_i x_i + \alpha_2^{(2)}\sum y_i = 14047{,}01 - 7\cdot 2716{,}13 + 7\cdot 710{,}96 = 10{,}82$$

$$\sum\left[\varphi_2(x_i)\right]^2 = \sum x_i^4 + \alpha_2^{(1)}\sum x_i^3 + \alpha_2^{(2)}\sum x_i^2 = 4676 - 7\cdot 784 + 7\cdot 140 = 168$$

Звідки: $a_2 = \frac{10{,}82}{168} = 0{,}06$

Шуканий апроксимуючий багаточлен другого степеня буде мати вигляд: $y = 69{,}9 + 5{,}42\cdot x + 0{,}06\cdot\left(x^2 - 7\cdot x + 7\right)$, або після перетворень отримаємо: $y = 70{,}35 + 4{,}97\cdot x - 0{,}06\cdot x^2$

Обчислимо суму $\boldsymbol{S_2}$ квадратів відхилень дослідних значень $\boldsymbol{y_i}$ від розрахункових значень $\boldsymbol{y_{ip}}$, знайдених за багаточленом другого степеня (табл. 3.8) та середньоквадратичне відхилення. Для наглядного зображення різниці дослідних значень і розрахованих побудуємо точковий графік (рис. 3.6).

Таблиця 3.8. Оцінка результатів апроксимації багаточленом другого степеня

i	x_i	y_i	y_{ip}	$y_i - y_{ip}$	$(y_i - y_{ip})^2$
1	0	70,35	70,35	0	0
2	1	75,38	75,38	0	0
3	2	80,53	80,53	0	0
4	3	85,81	85,8	0,01	0,0001
5	4	91,26	91,19	0,07	0,0049
6	5	96,83	96,7	0,13	0,0169
7	6	102,53	102,33	0,2	0,04
8	7	108,27	108,08	0,19	0,0361
				Сума (S_2)	**0,098**

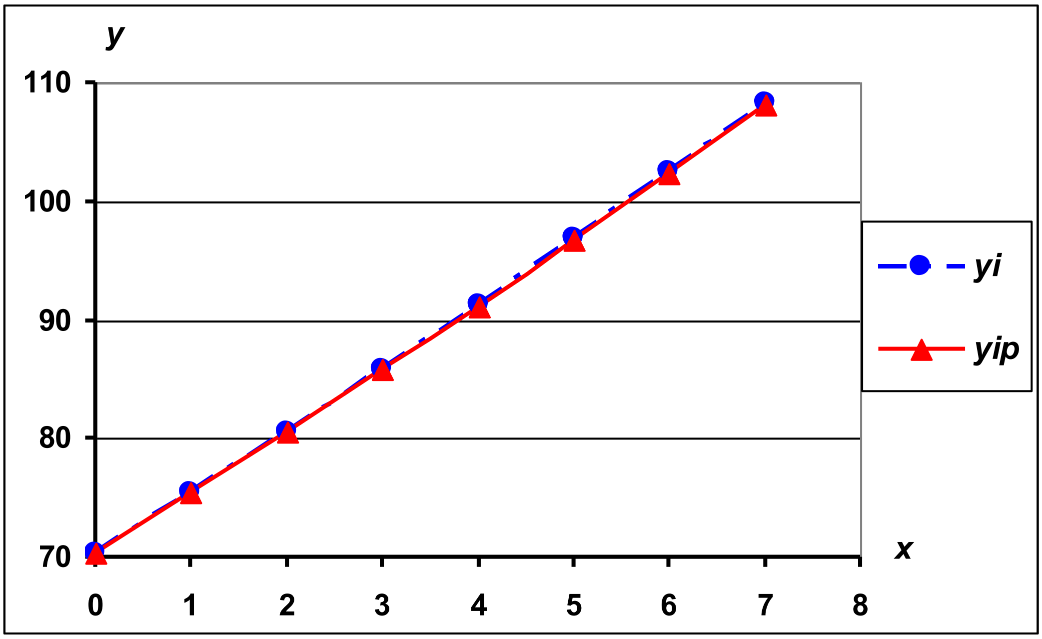

Рис. 3.6 Оцінка результатів апроксимації багаточленом другого степеня

Середньоквадратична похибка дорівнює:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum \left| y - \overline{y} \right|^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,098}{7}} = 0,1183$$

Побудуємо багаточлен третього степеня

$$y = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x)$$

Для цього побудуємо $\varphi_3(x) = (x + \beta_3)\varphi_2(x) + \gamma_3\varphi_1(x)$, де $\beta_3 = -\frac{\sum x_i \left[\varphi_2(x_i)\right]^2}{\sum \left[\varphi_2(x_i)\right]^2}$, а $\gamma_3 = -\dfrac{\sum x_i\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i)}{\sum\left[\varphi_1(x_i)\right]^2} = -\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_2(x_i)$. Знайдемо $\boldsymbol{\beta_3}$ і $\boldsymbol{\gamma_3}$**:**

$$\sum\left[\varphi_2(x_i)\right]^2 = \sum x_i^4 + \alpha_2^{(1)}\sum x_i^3 + \alpha_2^{(2)}\sum x_i^2 =$$
$$=8772{,}000+(-8{,}000)\cdot 1296{,}000+9{,}333\cdot 204{,}000=307{,}932$$

$$\sum x_i\left[\varphi_2(x_i)\right]^2 = \sum x_i^5 + \alpha_2^{(1)}\sum x_i^4 + \alpha_2^{(2)}\sum x_i^3 + \alpha_2^{(1)}\left[\sum x_i^4 + \alpha_2^{(1)}\sum x_i^3 + \alpha_2^{(2)}\sum x_i^2\right] =$$
$$= 61776{,}000+(-8{,}000)\cdot 8772{,}000+9{,}333\cdot 1296{,}000+(-8{,}000)\cdot 307{,}932 = 1232{,}112$$

Звідси:

$$\beta_3 = -\frac{\sum x_i\left[\varphi_2(x_i)\right]^2}{\sum\left[\varphi_2(x_i)\right]^2} = -\frac{1232{,}112}{307{,}993} = --4{,}001$$

$$\sum\left[\varphi_1(x_i)\right]^2 = \sum x_i\varphi_1(x_i) = \sum x_i^2 + \alpha_1\sum x_i = 204{,}000 + (-4)\cdot 36 = 60$$

$$\sum x_i\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) = \sum x_i^4 + \alpha_2^{(1)}\sum x_i^3 + \alpha_2^{(2)}\sum x_i^2 =$$
$$=8772{,}000+(-8{,}000)\cdot 1296{,}000+9{,}333\cdot 204{,}000=307{,}932$$

$$\gamma_3 = -\frac{\sum x_i\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i)}{\sum\left[\varphi_1(x_i)\right]^2} = -\frac{307{,}932}{60} = -5{,}132$$

Знайдемо багаточлен $\boldsymbol{\varphi_3(x)}$:

$$\varphi_3(x) = (x+\beta_3)\varphi_2(x) + \gamma_3\varphi_1(x) = (x-4{,}001)\left(x^2-8x+9{,}333\right) - 5{,}132(x-4)$$

Після елементарних математичних перетворень маємо:

$$\varphi_3(x) = x^3 - 12{,}000x^2 + 36{,}208x - 16{,}809$$

Звідки $\alpha_3^{(1)} = -12{,}000; \alpha_3^{(2)} = 36{,}208; \alpha_3^{(3)} = -16{,}8$.

Знайдемо $\boldsymbol{a_3}$ за формулою:

$$a_3 = \frac{\sum y_i\varphi_3(x_i)}{\sum\left[\varphi_3(x_i)\right]^2}$$

$$\sum y_i\varphi_3(x_i) = \sum y_i x_i^3 + \alpha_3^{(1)}\sum y_i x_i^2 + \alpha_3^{(2)}\sum y_i x_i + \alpha_3^{(3)}\sum y_i =$$
$$=219388+(-12)\cdot 33914{,}6+36{,}208\cdot 5797{,}6+(-16{,}8)\cdot 1326=43{,}5668$$

$$\sum y_i\varphi_3(x_i) = \sum y_i x_i^3 + \alpha_3^{(1)}\sum y_i x_i^2 + \alpha_3^{(2)}\sum y_i x_i + \alpha_3^{(3)}\sum y_i =$$
$$=219388+(-12)\cdot 33914{,}6+36{,}208\cdot 5797{,}6+(-16{,}8)\cdot 1326=43{,}5668$$

$$\sum\left[\varphi_3(x_i)\right]^2 = \sum x_i^6 + \alpha_3^{(1)}\sum x_i^5 + \alpha_3^{(2)}\sum x_i^4 + +\alpha_3^{(3)}\sum x_i^3 =$$
$$= 446964{,}000+(-12{,}000)\cdot 61776{,}000+36{,}208\cdot 8772{,}000+(-16{,}809)\cdot 1296{,}000=1484{,}112$$

Звідси маємо:

$$a_3 = \frac{\sum y_i \varphi_3(x_i)}{\sum \left[\varphi_3(x_i)\right]^2} = \frac{43,5668}{1484,112} = 0,0294$$

Запишемо наближуючий багаточлен третього степеня:

$$y = 147,33 + 8,227(x-4) - 0,294\left(x^2 - 8x + 9,3333\right) +$$
$$+0,0294\left(x^3 - 12 \cdot x^2 + 36,208x - 16,809\right)$$

Після математичних перетворень отримаємо:

$$y = 111,19 + 11,64x - 0,646x^2 + 0,029x^3$$

Обчислимо суму S_3 квадратів відхилень дослідних значень y_i від розрахункових значень y_{ip}, знайдених за багаточленом третього степеня. Для цього складемо таблицю 3.9.

i	x_i	y_i	y_i*	y_i-y_i*	$(y_i\text{-}y_i^*)^2$
1	0	60,12	60,12	0,003	9,6E-06
2	1	65,53	65,54	-0,006	3,7E-05
3	2	70,64	70,64	0,002	3,8E-06
4	3	75,44	75,44	0,004	1,8E-05
5	4	79,94	79,94	-0,002	3,8E-06
6	5	84,17	84,17	0,000	1,2E-07
7	6	88,13	88,13	-0,002	3,0E-06
8	7	91,84	91,84	-0,001	1,2E-06
				Сума (S_3)	7,7E-05

Середньоквадратична похибка дорівнює:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum \left|y - \bar{y}\right|^2}{7}} = \sqrt{\frac{0,000077}{7}} = 0,0033$$

Оскільки $S_3 = 0,77*10^{-4} < S_2 < S_1$, то за шуканий наближуючий багаточлен візьмемо багаточлен третього порядку. Запишемо його у вихідних позначеннях:

$$C_p = 60,1169 + 5,5821\left(\frac{T-380}{40}\right) - 0,16506\left(\frac{T-380}{40}\right)^2 + 0,00215\left(\frac{T-380}{40}\right)^3$$

Після перетворень остаточно отримаємо:

$$\mathbf{C_p = -9,65307 + 0,23251 \times T - 0,00014 \times T^2 + 3,35938 \times 10^{-8} \times T^3}$$

Знайдемо величину середньоквадратичного відхилення і побудуємо графіки функцій, разом з початковим на одній координатній площині.

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{\sum\left|y-\overline{y}\right|^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{7{,}7*10^{-5}}{8}} = 0{,}0031$$

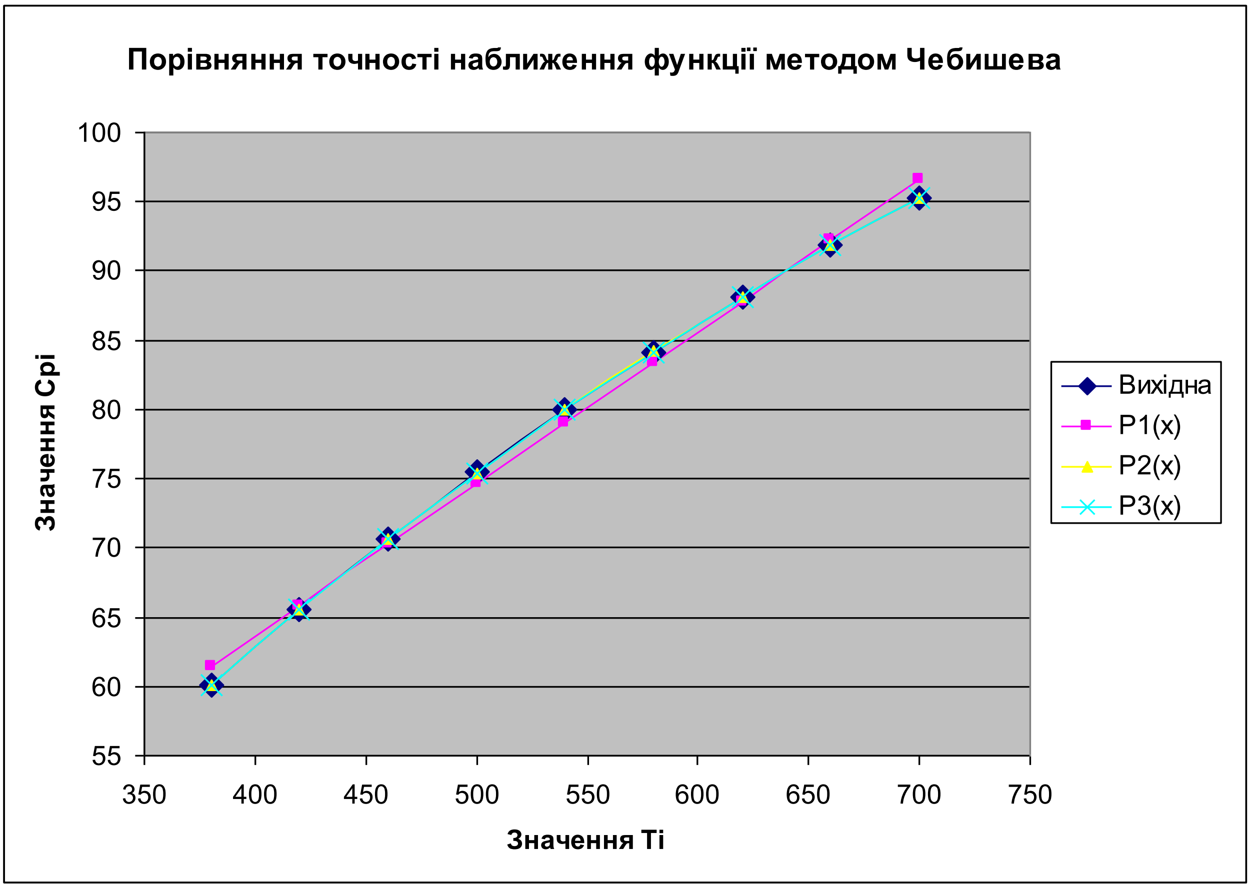

Рис. 3.7 Оцінка результатів апроксимації

<u>Висновок</u>: З отриманих значень і побудованого графіку функції можна зробити висновок, що найточніше апроксимує задану функцію багаточлен третього порядку, тобто наближуюча функція має вигляд:

$$\mathbf{C_p = -9{,}65307 + 0{,}23251 \times T - 0{,}00014 \times T^2 + 3{,}35938 \times 10^{-8} \times T^3}$$

4. *Сплайн-інтерполяція*

а) Розрахувати коефіцієнти сплайну.
б) Розрахувати значення сплайну у вузлових точках і перевірити їх співпадання зі значеннями вихідної функції.
в) Розробити програму для розрахунку коефіцієнтів сплайну і обчислення за його допомогою значень функції у вказаних користувачем точках.
г) В діапазоні значень $[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_n}]$ з кроком $\Delta x = 0{,}1 - 0{,}2$ отримати таблицю значень сплайну і побудувати по ній графік.
д) Зробити висновки.

Побудуємо апроксимуючу функцію у вигляді кубічного сплайну для функції заданою таблично (табл. 3.9).

Таблиця 3.9. Вузлові значення заданої функції

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
x	0	1,4	2,3	3,3	4,5
y	1	1,155	0,079	-1,145	-1,188

Так як ми маємо чотири відрізки [0;1,4], [1,4;2,3], [2,3;3,3], [3,3;4,5], відповідні значення кроків будуть порівнювати:

$$h_1 = x_1 - x_0 = 1,4 - 0 = 1,4$$
$$h_2 = x_2 - x_1 = 2,3 - 1,4 = 0,9$$
$$h_3 = x_3 - x_2 = 3,3 - 2,3 = 1$$
$$h_4 = x_4 - x_3 = 4,5 - 3,3 = 1,2$$

Необхідно знайти:

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3$$
$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_1) + c_2(x - x_1)^2 + d_2(x - x_1)^3$$
$$S_3(x) = a_3 + b_3(x - x_2) + c_3(x - x_2)^2 + d_3(x - x_2)^3$$
$$S_4(x) = a_4 + b_4(x - x_3) + c_4(x - x_3)^2 + d_4(x - x_3)^3$$

Знаходимо a_i, виходячи з умови, що у вузлах y_i значення $S(x)$ повинні співпадати із значенням заданої функції $y = f(x)$:

$$a_1 = y_0 = 1$$
$$a_2 = y_1 = 1,155$$
$$a_3 = y_2 = 0,079$$
$$a_4 = y_3 = -1,145$$

Для подальших розрахунків складемо допоміжну таблицю 3.9.

Таблиця 3.9. Вузлові значення заданої функції

i	***x*i**	***h*i**	***y*i**	$\dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$	***M*i=2(*h*i-1+*h*i)**	$k_i = 3\left[\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \dfrac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right]$
0	0	-	1	0,1107	-	-
1	1,4	1,4	1,155	-1,1955	-	-
2	2,3	0,9	0,079	-1,224	4,6	-3,9186
3	3,3	1	-1,145	-0,0358	3,8	-0,0855
4	4,5	1,2	-1,188	-	4,4	3,5645

«Прямий хід»

Задаємо $\alpha_1 = \beta_1 = 0$

Знаходимо коефіцієнти α_2 і β_2 за формулою:

$$\alpha_2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{-3,9186}{4,6} = -0,8519 \quad \beta_2 = \frac{h_2}{m_2} = \frac{0,9}{4,6} = 0,1957$$

Знаходимо коефіцієнти α_i і β_i за формулами:

$$\alpha_3 = \frac{k_3 - h_2\alpha_2}{m_3 - h_2\beta_2} = \frac{0,6812}{3,6239} = 0,188 \quad \beta_3 = \frac{h_3}{m_3 - h_2\beta_2} = \frac{1}{3,6239} = 0,2759$$

$$\alpha_4 = \frac{k_4 - h_3\alpha_3}{m_4 - h_3\beta_3} = \frac{3,3765}{4,1241} = 0,8187 \quad \beta_4 = \frac{h_4}{m_4 - h_3\beta_3} = \frac{1,2}{4,124} = 0,291$$

«Зворотний хід»

Знаходимо коефіцієнти c_i:

$$c_5 = 0 \quad - \text{ăđŕíč÷íŕ óěîâŕ}$$

$$c_4 = \alpha_4 - \beta_4 c_5 = \alpha_4 = 0,8187$$

$$c_3 = \alpha_3 - \beta_3 c_4 = -0,0379$$

$$c_2 = \alpha_2 - \beta_2 c_3 = -0,8445$$

$$c_1 = \alpha_1 - \beta_1 c_2 = 0$$

Тепер знаходимо коефіцієнти d_i за формулою $d_i = \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$

$$d_4 = \frac{c_5 - c_4}{3h_4} = -0,2274 \quad d_3 = \frac{c_4 - c_3}{3h_3} = 0,2856$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3h_2} = 0,2987 \quad d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} = -0,2011$$

Коефіцієнти b_i обчислюємо за формулою $b_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \dfrac{(c_{i+1} + 2c_i)h_i}{3}$.

$$b_4 = \frac{y_4 - y_3}{h_4} - \frac{(c_5 + 2c_4)h_4}{3} = -0,6908 \quad b_3 = \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{(c_4 + 2c_3)h_3}{3} = -1,4716$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{(c_3 + 2c_2)h_2}{3} = -0,6774 \quad b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = 0,5048$$

Підставивши отримані значення коефіцієнтів у вираз для $S(x)$, отримаємо вираз кубічного сплайну для кожного із відрізків інтервалу $[0; 4,5]$

Шуканий сплайн матиме вигляд:

$$P_3(x) = \begin{cases} 1{,}0 + 0{,}5048(x-0) + 0(x-0)^2 - 0{,}2011(x-0)^3 & 0 \le x \le 1{,}4 \\ 1{,}155 - 0{,}6775(x-1{,}4) - 0{,}8445(x-1{,}4)^2 + 0{,}2987(x-1{,}4)^3 & 1{,}4 \le x \le 2{,}3 \\ 0{,}079 - 1{,}4716(x-2{,}3) - 0{,}0379(x-2{,}3)^2 + 0{,}2855(x-2{,}3)^3 & 2{,}3 \le x \le 3{,}3 \\ -1{,}145 - 0{,}6908(x-3{,}3) + 08187(x-3{,}3)^2 - 0{,}2274(x-3{,}3)^3 & 3{,}3 \le x \le 4{,}5 \end{cases}$$

Для оцінки точності знайденого сплайну порівняємо значення таблично заданої функції у вузлових точках інтервалу [0; 4,5] із значеннями сплайну $P_3(x)$ в цих точках, а також значення похідних (табл. 3.10)

Таблиця 3.10 Значення заданої функції, сплайну, першої та другої похідних у вузлових точках

i	***x***	***y***	***S*** $S_i(x)$	$S_{i+1}(x)$	$S'_i(x)$	$S'_{i+1}(x)$	$S''_i(x)$	$S''_{i+1}(x)$
0	0	1	1	-	0,5048	-	0	-
1	1,4	1,155	1,155	1,155	-0,677	-0,677	-1,689	-1,689
2	2,3	0,079	0,079	0,079	-1,472	-1,472	-0,076	-0,076
3	3,3	-1,145	-1,145	-1,145	-0,691	-0,691	1,6375	1,6375
4	4,5	-1,188	-	-1,188	-	0,2916	-	0

Як бачимо значення співпадають. Отже можна зробити висновок, що сплайн знайдено вірно.

Побудуємо таблицю значень сплайну в точках інтервалу [0; 4,5] з кроком 0,2 (табл. 3.11) і побудуємо графік функції (рис. 3.8).

Таблиця 3.11 Таблиця значень сплайну в точках інтервалу [0; 4,6]

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
$\boldsymbol{P_3(x)}$	1	1,099	1,189	1,259	1,301	1,304	1,258	1,155
i	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
x	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$\boldsymbol{P_3(x)}$	0,988	0,768	0,509	0,226	-0,068	-0,358	-0,631	-0,872
i	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
x	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6
$\boldsymbol{P_3(x)}$	-1,068	-1,206	-1,285	-1,314	-1,305	-1,269	-1,217	-1,159

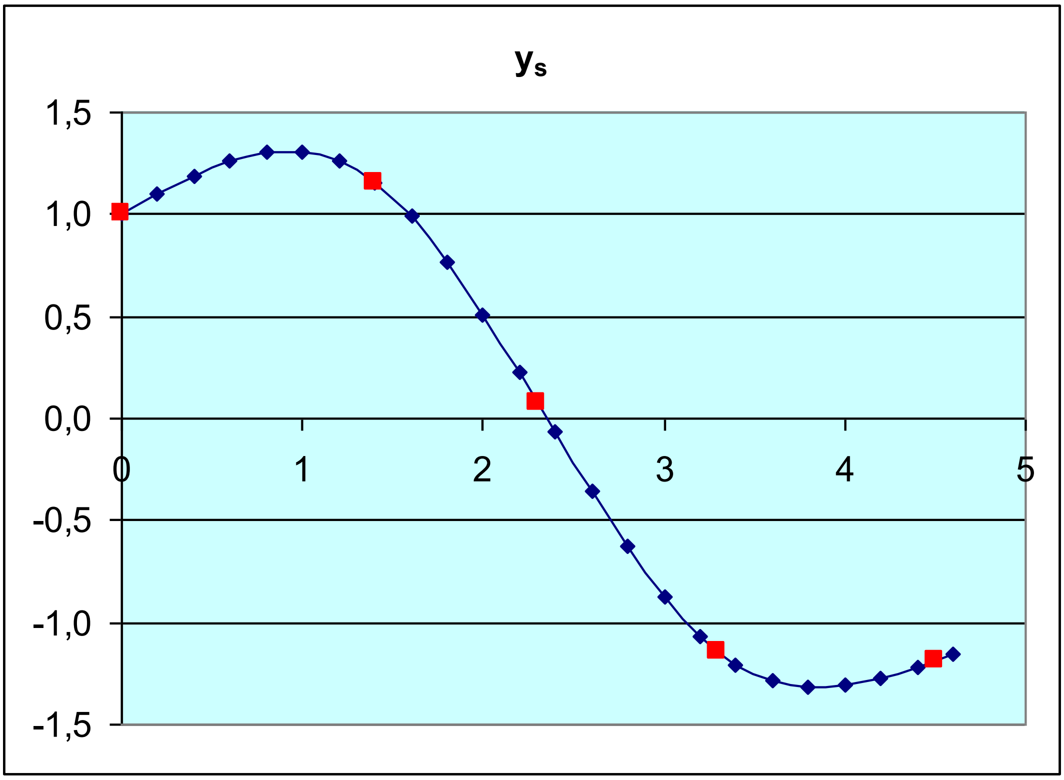

Рис. 3.8 Графічне зображення результатів апроксимації кубічним сплайном

<u>Висновок</u>: Отримані результати (табл. 3.10 та рис. 3.8) свідчать, що отриманий кубічний сплайн досить точно апроксимує задану табличну функцію.

4. РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПОЯСНЮВАЛЬНОЇ ЗАПИСКИ

Пояснювальна записка розрахунково-графічної роботи виконується в будь-якому текстовому редакторі та друкується на аркушах А4 і має бути набрана 12-14 кеглем, з одиничним чи полуторним інтервалом. Параметри сторінок: ліве поле 2,5 — 3 см, верхнє і нижнє – 1, 5 — 2 см, праве — 1 — 1,5 см.

У текстовій частині:

- Заголовки розміщуються посередині рядка та друкуються великими літерами без крапки в кінці, без підкреслення.
- Заголовки підрозділів, пунктів і підпунктів тексту друкуються з великої літери (без підкреслення) без крапки в кінці.
- Усі заголовки мають бути супідрядними і відповідати змісту роботи.
- Абревіатури в заголовках не вживають, їх треба розшифровувати у тексті. Заголовки з двох чи більше речень слід відокремлювати крапками.
- Відстань між заголовком і текстом становить 28 пт, відстань між заголовками розділу та підрозділу – 14 пт.
- Заголовок не розміщують внизу сторінки, якщо після нього уміщується лише один рядок тексту.
- Таблиці й ілюстрації мають бути пронумерованими і міститися після посилань на них у тексті. При наявності приміток вони друкують під таблицею.
- У додатках розміщують офіційні, додаткові і розрахункові матеріали, допоміжні висновки тощо. Усі додатки потрібно нумерувати.
- Нумерація формул, таблиць і рисунків у кожному з додатків має бути самостійною.
- Всі розрахунки в роботі та їх візуалізація можуть бути виконані в програмному середовищі MS Excel (VBA), Visual Basic або Delphi.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Брановицька С.В. «Обчислювальна математика та програмування» [Текст] //С.В. Брановицька, Р.Б. Медведєв, Ю.А. Фіалков – К.: Політехніка, 2004. ─ 248 с.
2. Брановицкая С.В., Медведев Р.Б., Фиалков Ю.Я. Вычислительная математика в химии и химической технологии. – К.: Вища школа, 1986. – 216 с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
4. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Физматгиз, 1972. – 264 с.
5. Поршнев С.В. Вычислительная математика: Курс лекций. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.
6. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.
7. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
8. Костомаров Д. П., Корухова Л.С. Манжелей С. Г. Программирование и численные методы. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 224 с.
9. Хемминг Р.В. Численные методы. – М. Наука, 1972. – 400 с.
10. Каханер Д., Моулер К. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 2001. – 575с.
11. Исаков, В.Б. Элементы численных методов: Учебное пособие для студентов педагогических вузов. – М.: Академия, 2003. – 192 с.
12. Брановицкая С.В. Інформатики та системологія [Текст]// С.В. Брановицька Р.М. Колесникова, видавництво Університету «Україна». ─2003. ─ 120 с.
13. Конспект лекцій з курсу «Чисельні методи».

ДОДАТОК А. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Постановка задачі

Нехай в результаті експерименту отримані значення деякої величини $\boldsymbol{y}$ для заданих значень величини $\boldsymbol{x}$ і представлені у вигляді *табл. А1*.

Таблиця А1

$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2	…	….	x_n
$\boldsymbol{y}$	y_1	y_2	…	…..	y_n

На основі цих даних як правило доводиться вирішувати такі задачі:

I. При відомій формулі, що виражає залежність y від x знайти її параметри. Наприклад, у випадку лінійної залежності, знайти параметри a і b рівняння:

$$y = ax + b \tag{1}$$

II. При невідомому характері функціональної залежності між величинами y і x, знайти її аналітичний вираз $y = f(x)$, який прийнято називати *емпіричною формулою*.

Побудова емпіричної формули ділиться на два етапи:

1) *вибір загального виду емпіричної формули;*
2) *визначення її параметрів.*

Вибір виду емпіричної формули

Графічний спосіб

Для визначення виду емпіричної формули необхідно за даними *табл. А1* побудувати точковий графік: на координатній площині будуємо точки, абсциси яких – значення аргументу x, ординати – значення y. На побудованому графіку проводимо плавну лінію так, щоб точки $(x_1y_1),(x_2y_2),...,(x_ny_n)$ графіка наближалися до неї і розташовувалися по обидві сторони від неї (деякі точки можуть потрапити на лінію). Це і буде графік функції, який приблизно виражає залежність між величинами y і x, а рівняння побудованої таким чином наближеної лінії буде шуканою емпіричною формулою. Якщо наближена лінія – пряма, то відповідно залежність між y і x лінійна, і емпірична формула має вигляд (I). У випадку нелінійної залежності (наближена лінія крива), вигляд формули можна визначити шляхом порівняння побудованої кривої з відомими кривими (окремі неправильності ігноруються).

Аналітичний метод

Цей спосіб базується на використанні деяких аналітичних критеріїв. При цьому вважається, що вихідні дані $x_i, y_i (i=1,...,n, n>3)$ додатні і $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Якщо ж значення $x_i < 0$ (або $y_i < 0$), то достатньо розглянути таблицю значень $(-x_i, y_i)$ або відповідно $(x_i, -y_i)$. Аналогічно при $x_i < 0$ і $y_i < 0$ будують емпіричну формулу для таблиці $(-x_i, -y_i)$. У випадку коли деякі значення x_i, y_i додатні, а деякі – від'ємні завжди можна підібрати такі числа $M > 0, N > 0$ при яких

$\xi_i = M + x_i > 0, \eta_i = N + x_i > 0$, і тоді задача зводиться до знаходження емпіричної формули для додатних значень $\xi_i, \eta_i (i = 1,...,n)$.

Емпіричні формули з двома параметрами

Розглянемо такі функції:

I. $y = ax + b$ (лінійна функція);

II. $y = ab^x$ (показникова);

III. $y = \frac{1}{ax+b}$ (дробово–раціональна);

IV. $y = a\ln x + b$ (логарифмічна);

V. $y = ax^b$ (степенева, при чому при *b>0* залежність параболічна, при *b<0* гіперболічна);

VI. $y = a + \frac{b}{x}$ (гіперболічна);

VII. $y = \frac{x}{ax+b}$ (дробово-раціональна).

Щоб визначити, яка з цих функцій найкраще описує експериментальні дані, необхідно виконати такі обчислення:

1. За даними *таблиці 4* знайти:

$$x_{\text{ńđ}} = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

$$x_{\text{ăĺîě}} = \sqrt{x_1 \cdot x_n}$$

$$x_{\text{ăŕđě}} = \frac{2x_1 \cdot x_n}{x_1 + x_n}$$

$$y_{\text{ńđ}} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y_{\text{ăĺîě}} = \sqrt{y_1 \cdot y_2}$$

$$y_{\text{ăŕđě}} = \frac{2y_1 \cdot y_n}{y_1 + y_n}$$

2. За даними *таблиці 4*, користуючись, наприклад інтерполяційними формулами (або за наближено побудованим графіком шуканої функції, навколо якого групуються дослідні точки x_i, y_i знайти значення $y^*_{\text{ńđ}}, y^*_{\text{ăĺîě}}, y^*_{\text{ăŕđě}}$, які відповідають знайденим у пункті 1 значенням $x_{\text{ńđ}}, x_{\text{ăĺîě}}, x_{\text{ăŕđě}}$. При чому, якщо, наприклад, $x_{\text{ńđ}}$(або $x_{\text{ăĺîě}}$ ÷č $x_{\text{ăŕđě}}$) співпадає з табличним значенням x_i, то відповідне значення $y^*_{\text{ńđ}}$ (ŕáî $y^*_{\text{ăĺîě}}$ ÷č $y^*_{\text{ăŕđě}}$) буде рівне табличному значенню y_i, в іншому випадку $y^*_{\text{ńđ}}$ (ŕáî $y^*_{\text{ăĺîě}}$ ÷č $y^*_{\text{ăŕđě}}$) можна визначити, користуючись формулою лінійної інтерполяції:

$$y^*_{\text{ńđ}} = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x_{\text{ńđ}} - x_i), \qquad (2)$$

де x_{i+1}, x_i — значення *таблиці 4*, між якими знаходиться:

$$x_{ар}(x_i < x_{ар} < x_{i+1}); y_i < y^*_{ар} < y_{i+1} (i = 1, 2, ..., n-1)$$

3. Знайти величини:

$$\varepsilon_1 = | y^*_{ар} - y_{ар} |; \varepsilon_2 = | y^*_{ар} - y_{геом} |;$$
$$\varepsilon_3 = | y^*_{ар} - y_{гарм} |; \varepsilon_4 = | y^*_{геом} - y_{ар} |;$$
$$\varepsilon_5 = | y^*_{геом} - y_{геом} |; \varepsilon_6 = | y^*_{гарм} - y_{ар} |;$$
$$\varepsilon_7 = | y^*_{гарм} - y_{гарм} |$$

Визначити серед них мінімальне значення:

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_7\}$$

4. Провести вибір емпіричної формули серед функцій (I-VII). Шукана емпірична формула буде мати вигляд:

I. $y = ax + b,$ якщо $\varepsilon = \varepsilon_1$;

II. $y = ab^x,$ якщо $\varepsilon = \varepsilon_2$;

III. $y = \dfrac{1}{ax + b},$ якщо $\varepsilon = \varepsilon_3$;

IV. $y = a \ln x + b,$ якщо $\varepsilon = \varepsilon_4$;

V. $y = ax^b,$ якщо $\varepsilon = \varepsilon_5$;

VI. $y = a + \dfrac{b}{x},$ якщо $\varepsilon = \varepsilon_6$;

VII. $y = \dfrac{x}{ax + b},$ якщо $\varepsilon = \varepsilon_7$.

Слід враховувати, що функції I-VII монотонні, і, відповідно, дослідні дані, які їм відповідають x_i, y_i при $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i (i = 1, ..., n-1)$ повинні мати сталий знак приросту $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i (i = 1, ..., n-1)$. В іншому випадку залежності I-VII протипоказані. Такий спосіб вибору емпіричної формули є грубим наближенням, він не враховує поведінки всіх проміжних значень x_i, y_i. Крім того, можливий випадок, що змінні *x* і *y* підкоряються іншій закономірності, і тоді вигляд емпіричної формули буде відрізнятися від функцій I-VII.

За даними *таблиці 4* можна легко впевнитися, що залежність між *x* і *y* лінійна, використовуючи аналітичні критерії: якщо $K_i = \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = const (i = 1, ..., n-1;$ $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ і $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$, то точки x_i, y_i лежать на одній прямій лінії; якщо $k_1 \approx ... \approx k_{n-1}$, то можна вважати, що формула $y = ax + b$ наближено представляє дослідні дані.

Емпіричні формули з трьома параметрами

Важливими емпіричними формулами з трьома параметрами є:

I. $y = ax^2 + bx + c$ (квадратична залежність) (3)

II. $y = ax^b + c$ (степенева залежність) (4)

III. $y = ae^{bx} + c$ (показникова залежність) (5)

Розглянемо аналітичний критерій для квадратичної залежності. Будемо вважати, що $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0 (i = 1,...,n-1)$, а послідовність $y_1,...,y_n$ або монотонна, тобто $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i (i = 1,...,n-1)$ зберігає сталий знак, або ж ця послідовність має єдиний екстремум, тобто рівність Δy_i лише один раз змінює знак.

Введемо розділені різниці першого і другого порядків:

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \tag{6}$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \text{ або } [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{\Delta\left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)}{\Delta_1 x_i}, \tag{7}$$

де

$$\Delta_1 x_i = x_{i+2} - x_i = \Delta x_i + \Delta x_{i+1} \tag{8}$$

Доведено, що точки $x_i, y_i (i = 1,...,n)$ розташовані на параболі (3) тоді і тільки тоді, якщо зберігаються сталі значення різниці другого порядку.

Зокрема, якщо значення $x_1,...,x_n$ рівновіддалені, тобто $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = const (i = 1, 2,...,n-1)$, то для існування емпіричної квадратичної залежності необхідно і достатньо, щоб була сталою друга різниця $\Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i (i = 1,..,n-2)$.

Метод вирівнювання

Метод вирівнювання дозволяє перевірити правильність вибору емпіричної формули. Він полягає в перетворенні апроксимуючої функції в лінійну.

Розглянемо, наприклад, в системі координат *XOY* нелінійну залежність виду:

$$\psi(y) = a\varphi(x) + b \tag{9}$$

де

a і b – сталі, $\psi(y)$ ł $\varphi(x)$ — строго монотонні функції.

Перейдемо до нових змінних $Y = \psi(y)$ ł $X = \varphi(x)$ так, щоб в новій системі координат *XOY* емпірична залежність (9) стала лінійною.

$$Y = aX + b \tag{10}$$

Обчисливши значення $X_i = \varphi(x_i)$ ł $Y_i = \psi(y_i)$, нанесемо точки (X_i, Y_i) *(i=1,2,…,n)* на координатну площину *XOY*. Якщо точка розташована поблизу прямої лінії, то вибрана емпірична формула (9) підходить для опису дослідних даних.

Для показникової залежності $y = ax^b$, логарифмуючи отримаємо $\lg y = x \lg b + \lg a$. Прийнявши $\lg y = Y, x = X, \lg b = B, \lg a = A$, будемо мати рівняння прямої $Y = BX + A$.

Дробово-раціональну функцію $y = \dfrac{1}{ax+b}$ перетворимо в лінійну таким чином. Запишемо обернену залежність $\frac{1}{y} = ax + b$, після чого введемо нові змінні $X = x, Y = \frac{1}{y}$. Тоді отримаємо залежність виду $Y = aX + B$.

Для логарифмічної залежності $y = a\lg x + b$ введемо нові змінні $Y = y, X = \lg x$, тоді отримаємо лінійну залежність $Y = aX + b$.

Для степеневої залежності $y = bx^a (a > 0, b > 0, x > 0, y > 0)$, прологарифмувавши маємо $\lg y = a\lg x + \lg b$.

Прийнявши $Y = \lg y, X = \lg x, B = \lg b,$ маємо $Y = aX + b$.

Гіперболічну залежність $y = a + \frac{b}{x}$ перетворюємо в лінійну, ввівши змінні $Y = y, \quad X = \frac{1}{x}$.

Для дробово-раціональної функції виду $y = \frac{x}{ax + b}$ запишемо обернену функцію $\frac{1}{y} = a + \frac{b}{x}$, а потім введемо нові змінні $Y = \frac{1}{y}, \quad X = \frac{1}{x},$ після чого отримаємо лінійну залежність $Y = a + bX$.

Розглянемо тепер степеневу залежність (4). Запишемо її у виді $y - c = ax^b$ і прологарифмувавши, отримаємо $\lg(y - c) = \lg a + b\lg x$.

Звідси, прийнявши $\lg(y - c) = Y$ ³ $\lg x = X$, отримаємо лінійну залежність $Y = bX + \lg a$.

Якщо точки (X_i, Y_i), де $X_i = \lg x_i, Y_i = \lg(y_i - c)$, нанести на координатну площину, і вони будуть розташовані на прямій (або майже прямій), то залежність (4) виправдана. Для визначення значень Y_i необхідно знати *C*. Отримаємо формулу, яка дозволяє знайти *C*. Запишемо середнє геометричне $x_s = \sqrt{x_1 x_n}$, де x_1 ł x_n – крайні значення змінної *x*. Користуючись кресленням або методом лінійної інтерполяції, знайдемо для x_s відповідні значення y_s (якщо x_s співпадає з табличним значенням, то і відповідні йому значення y_s теж буде табличним. Прийнявши, що точки $M(x, y)$, $M_s(x, y)$, $M_n(x, y)$ розташовані на кривій (4), отримаємо рівності:

$$y_1 = ax_1 + c, \; y_s = ax_s + c, \; y_n = ax_n + c$$

Підносячи $x_s = \sqrt{x_1 x_n}$ до степеня *b* і помноживши на *a*, отримаємо:

$$ax_s^b = \sqrt{ax_1^b ax_n^b} \text{ ŕáî } y_s - c = \sqrt{(y_1 - c)(y_n - c)}$$

Розв’язавши останню рівність відносно *C*, знайдемо:

$$C = \frac{y_1 y_n - y_s^2}{y_1 + y_n - 2y_s} \tag{11}$$

Схожим чином можна перетворити показникову залежність (5) в лінійну. Перенесемо доданок C в ліву частину рівності (5) і прологарифмувавши, отримаємо $\lg(y-c)=\lg a+(bM)x,$ де $M=0,43429$.

Таким чином маємо $Y=\lg a+(bM)x,$ де $Y=\lg(y-c)$.

Для визначення C використаємо формулу (11), але y_s в даному випадку відповідає $x_s=\frac{x_1+x_n}{2}$ і знаходиться за графіком або лінійною інтерполяцією.

Визначення параметрів емпіричної формули

Якщо вид емпіричної формули вибраний, то виникає задача визначення найкращих коефіцієнтів (параметрів), які входять у формулу.

Ця задача формулюється наступним чином: нехай дослідні дані (*таблиця 4*) наближено описуються формулою виду:

$$y=F(x;a_1,...,a_m), \tag{12}$$

де F – відома функція, $a_1,...,a_m$ - невідомі сталі, число яких m зазвичай менше числа точок (x_i,y_i), тобто $m>n$. Необхідно знайти ці сталі. Одним з методів їх знаходження є метод найменших квадратів (МНК).

Метод найменших квадратів

Якщо в емпіричну формулу (12) підставити вихідні дані $x_i,y_i(i=1,...,n)$, то ліва частина формули, не буде дорівнювати правій. Різниці:

$$\varepsilon_i=f(x_i;a_1,...,a_m)-y_i(i=1,2,...,n) \tag{13}$$

називаються *ухиленнями* і є відстанями по вертикалі точок $x_i,y_i(i=1,...,n)$ від графіка функції (12), взяті зі знаком (+) або зі знаком (-).

Відповідно до МНК найкращими коефіцієнтами $a_1,...,a_m$ вважаються ті, для яких сума квадратів відхилень:

$$S(a_1,...,a_m)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i;a_1,...,a_m)-y_i]^2 \tag{14}$$

буде мінімальною.

Використовуючи необхідну умову екстремуму функції декількох змінних, отримаємо так звану *нормальну систему* для коефіцієнтів $a_1,...,a_m$**:**

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=0,...,\frac{\partial S}{\partial a_m}=0 \tag{15}$$

Розглянемо використання МНК для формул (1) і (3). Для найпростішого випадку (1) маємо:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

Нормальна система для визначення a і b буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}[ax_i + b - y_i] \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}[ax_i + b - y_i] \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

або після перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (16)$$

Розв’язавши цю систему рівнянь, знайдемо a і b – потрібні нам коефіцієнти.

Для емпіричної формули (3) на основі (14) запишемо:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

Отримаємо тепер нормальну систему для визначення коефіцієнтів *a, b, c*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}[ax_i^2 + bx_i + c - y_i] \cdot x^2{}_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n}[ax_i^2 + bx_i + c - y_i] \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{n}} = \sum_{i=1}^{n}[ax_i^2 + bx_i + c - y_i] \cdot 1 = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Після перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_з^3 + \tilde{n}\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i = \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_з^2 + \tilde{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i + b\sum_{i=1}^{n} x_з + n\tilde{n} = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (18)$$

Отримаємо систему з трьома невідомими, розв’язавши яку знайдемо шукані коефіцієнти. Якщо задана емпірична формула має інший вид, то її перетворюють, а потім застосовують МНК.

Наближення функції методом Чебишева

Особливість розв’язання задачі апроксимування заданої функції $y = f(x)$ на множині точок $x_1, x_2 ..., x_n$ багаточленом $P_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x)$ даного степеня m (m значно менше за n) за способом Чебишева полягає в тому, що функції $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ – багаточлени, які задовольняють умовам:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = 0 & (j \neq k), \\ \sum_{i=1}^{n} [\varphi_j(x_i)]^2 \neq 0 & (j = 0, 1, 2, \ldots, m) \end{cases} \tag{19}$$

і названі *ортогональними багаточленами Чебишева*.

Доведено, що при заданих точках $x_1, x_2 \ldots, x_n$ ортогональні многочлена Чебишева можуть бути послідовно отримані і записані у вигляді

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1, \\ \varphi_1(x) = x + \alpha_1, \\ \varphi_2(x) = x^2 + \alpha_2^{(1)} x + \alpha_2^{(2)} x, \\ \varphi_3(x) = x^3 + \alpha_3^{(1)} x^2 + \alpha_3^{(2)} x + \alpha_3^{(3)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r(x) = x^r + \alpha_r^{(1)} x^{r-1} + \alpha_r^{(2)} x^{r-2} + \ldots + \alpha_r^{(r)}. \end{cases} \tag{20}$$

Рекурентна формула, що дозволяє обчислювати такий багаточлен за двома попередніми, має вигляд:

$$\varphi_{r+1}(x) = (x + \beta_{r+1})\varphi_r(x) + \gamma_{r+1}\varphi_{r-1}(x) \qquad (r = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{21}$$

де коефіцієнти β_{r+1} і γ_{r+1} обчислюють за формулами:

$$\beta_{r+1} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i [\varphi_r(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^{n} [\varphi_r(x_i)]^2} \qquad \gamma_{r+1} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_{r-1}(x_i)\varphi_r(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} [\varphi_{r-1}(x_i)]^2} \tag{22}$$

Для визначення β_{r+1} і γ_{r+1} за формулами (22) треба тільки знати суми степенів x_i:

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi_r(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r} + \alpha_r^{(1)} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r-1} + \ldots + \alpha_r^{(r)} \sum_{i=1}^{n} x_i^r \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_{r-1}(x_i)\varphi_r(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r} + \alpha_r^{(1)} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r-1} + \ldots + \alpha_r^{(r)} \sum_{i=1}^{n} x_i^r \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i [\varphi_r(x_i)]^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r+1} + \alpha_r^{(1)} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r} + \ldots + \alpha_r^{(r)} \sum_{i=1}^{n} x_i^{r+1} + \\ &+ \alpha_r^{(1)} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{2r} + \alpha_r^{(1)} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r-1} + \ldots + \alpha_r^{(r)} \sum_{i=1}^{n} x_i^r \right] \end{aligned} \tag{25}$$

Побудуємо багаточлен другого степеня $\varphi_2(x)$ за формулою (21). Враховуючи, що $\varphi_0(x) = 1$, на основі першої з умов (19), прийнявши в ній $j = 0$, $k = 1$, для багаточлена $\varphi_1(x)$ отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i) = 0 \tag{26}$$

Оскільки, згідно з (20), $\varphi_1(x) = x + \alpha_1$, то (26) можна переписати у вигляді: $\sum_{i=1}^{n} (x_i + \alpha_1) = 0$, звідки $\sum_{i=1}^{n} x_i + n\alpha_1 = 0$, чи $\alpha_1 = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Остаточно отримаємо:

$$\varphi_1(x) = x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{27}$$

Виразимо тепер $\varphi_2(x)$ через $\varphi_0(x)$ і $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_2(x) = (x+\beta_2)\varphi_1(x) + \gamma_2\varphi_0(x) \tag{28}$$

де згідно з формулами (22),

$$\beta_2 = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i[\varphi_1(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^{n}[\varphi_1(x_i)]^2}; \ \gamma_2 = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}[\varphi_0(x)]^2} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_1(x_i) \tag{29}$$

Відповідно до формул (23) – (25) запишемо:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}[\varphi_1(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_1\sum_{i=1}^{n} x_i, & (30) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_1(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_1\sum_{i=1}^{n} x_i, & (31) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i[\varphi_1(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \alpha_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_1\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha_1\sum_{i=1}^{n} x_i\right] & (32) \end{cases}$$

Аналогічно за відомими багаточленами $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ можна побудувати багаточлен третього степеня $\varphi_3(x)$ і т.д.

Щоб отримати конкретний вигляд апроксимуючого багаточлена (19), потрібно знайти коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_m$. Установлено, що найімовірніші значення цих коефіцієнтів визначаються за формулою:

$$a_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_r(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}[\varphi_r(x_i)]^2} \qquad (r = 0,1,2,...,m) \tag{33}$$

Обчислюють знаменник цієї формули відповідно до (23), а чисельник таким чином:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_r(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^r + \alpha_r^{(1)}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^{r-1} + ... + \alpha_r^{(r)}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{34}$$

Підставивши знайдені таким чином коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_m$ і багаточлени $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ у (19) та виконавши перетворення, отримаємо шуканий апроксимуючий багаточлен m-го степеня.

Якщо точність досягнута багаточленом m-го степеня, нас не задовольняє, можна побудувати багаточлен $(m+1)$-го степеня. Для цього слід за формулами (21) і (22) побудувати багаточлен $\varphi_{m+1}(x)$, за формулою (33) обчислити коефіцієнт a_{m+1}, знайти їх добуток $a_{m+1}\varphi_{m+1}(x)$ і додати його до правої частини $P_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x)$, після чого отримаємо

$$P_{m+1}(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x) + a_{m+1}\varphi_{m+1}(x)$$

Отже, процес переходу від багаточлена m-го степеня до багаточлена $(m+1)$-го степеня за способом Чебишева набагато простіший, ніж за методом найменших квадратів, відповідно до якого крім обчислення коефіцієнта a_{m+1} потрібно було б перерахувати коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_m$.

Інтерполяція сплайнами

Нехай функція $y = f(x)$ задана своїми значеннями y_i у вузлах $x_i (i = 0,1,2,...,n)$, які поділяють інтервал $[a,b]$ на *n* відрізків.

Сплайном $S(x)$ називається функція, визначена та неперервна разом з декількома своїми похідними на $[a,b]$ і така, що на кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le n)$ є поліномом *n*-го степеня. При $(n+1)$-ій вузловій точці сплайнова функція складається з *n* окремих поліномів.

Найпопулярнішою є інтерполяція кубічними сплайнами. Будемо шукати кубічний сплайн на кожному із n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ у вигляді:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \ (x_{i-1} \le x \le x_i) \qquad (35)$$

де a_i, b_i, c_i, d_i – $4n$ невідомих коефіцієнта.

Для побудови кубічного сплайну використовують метод прогонки, який складається з «прямого» і «зворотного» ходів.

<u>Прямий хід:</u>

1. Знаходимо h_i:

$$h_i = x_i - x_{i-1} \qquad (36)$$

2. Знаходимо a_i, виходячи з умови, що у вузлах y_i значення $S(x)$ повинні співпадати із значенням заданої функції $y = f(x)$:

$$S_i(x) = y_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \ a_i = y_{i-1} = S_i(x_{i-1})(i = 1,2,...,n) \qquad (37)$$

3. Знаходимо значення k_i за формулою:

$$k_i = 3\left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right] \qquad (38)$$

4. Знаходимо значення m_i за формулою:

$$m_i = 2(h_{i-1} + h_i) \qquad (39)$$

5. Знаходимо коефіцієнти α_2 і β_2 за формулою:

$$\alpha_2 = \frac{k_2}{m_2} \qquad \beta_2 = \frac{h_2}{m_2} \qquad (40)$$

6. Знаходимо коефіцієнти α_i і β_i за формулами:

$$\alpha_i = \frac{k_i - h_{i-1}\alpha_{i-1}}{m_i - h_{i-1}\beta_{i-1}} \qquad \beta_i = \frac{h_i}{m_i - h_{i-1}\beta_{i-1}} \qquad (41)$$

<u>Зворотний хід</u>

1. Знаходимо коефіцієнти c_i:

$c_i = \alpha_i - \beta_i c_{i+1}$ (43), $c_5 = 0$ — гранична умова, задаємо $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

2. Тепер знаходимо коефіцієнти d_i за формулою:

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \qquad (42)$$

3. Коефіцієнти b_i обчислюємо за формулою:

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{(c_{i+1} + 2c_i)h_i}{3} \qquad (43)$$

Підставивши отримані значення коефіцієнтів у вираз для $S(x)$, отримаємо вираз кубічного сплайну для кожного із відрізків інтервалу $[a,b]$.

ДОДАТОК Б. ТИТУЛЬНИЙ ЛИСТ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут»

ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра кібернетики хіміко-технологічних процесів

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

«Числові методи»

Тема: «Розв'язування задач наближення функцій»

Варіант 19

Виконав:
студент групи ХА – 21
Петров В.І.

Перевірив:
доц. Брановицька С.В.

Київ 2014