

# HW5

## 1.

(a) admissibility criterion

滿足  $C_\psi < \infty$ ，小波轉換才是 reversible

(b) scaling function

解決 b 的積分範圍從 0 到  $\infty$  的問題

## 2.

(a)

sinc wavelet

由於 sinc wavelet 在 -0.25~0.25 之間的值都是 0，也因此和任意多項式相乘後還是 0，積分後也只能是 0，所以 vanish moment 是無限大

(b)

18點的 Coiflet wavelet 相當於 6p，所以 vanish moment = 3

(c)

$$\begin{aligned} \frac{d^6}{df^6} G(f) &= \\ \frac{\pi}{32} (1034480i e^{2i\pi f} \sin(\pi f) - 1622725 e^{2i\pi f} \cos(\pi f) + \dots) &+ 620060i \sin(\pi f) - 1151501 \cos(\pi f) e^{-10i\pi f} \\ f = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{d^6}{df^6} G(f) &\neq 0, \quad \text{vanish moment} = 6 \end{aligned}$$

## 3.

sample rate = 1

period = 2

frequency =  $\frac{1}{\text{period}} = 0.5$

## 4.

透過 sectioned convolution 的方法簡化一維離散小波轉換的計算。將  $x[n]$  切成很多段，每段長度為  $N_1$ ，總共有  $S = \frac{N}{N_1}$  段。

$$\begin{aligned} S(N_1 + L - 1) \log_2(N_1 + L - 1) &\approx S N_1 \log_2(N_1 + L - 1) \\ &= N \log_2(N_1 + L - 1) \\ &\approx N \log_2 N_1 \end{aligned}$$

$N_1$  是常數，所以 complexity 是  $O(N)$

## 5.

(a)

Symlet 的 vanishing moment 和 Daubechies wavelet 一樣，同時 Symlet 的  $g[n]$  最大值幾乎在中間，比 Daubechies wavelet 更具有對稱性。因此更適合用快速小波轉換做實現。

(b)

Curvelet可以沿著不同的方向處理，相比原始的小波轉換只能固定沿 x 軸和 y軸進行處理，Curvelet更能增強細節的處理。

## 6.

(a)

小波轉換可以做邊緣偵測，能夠不破壞邊緣的同時濾除高頻雜訊。因此很適合做adaptive filter design

(b)

小波轉換有兩個特點。第一次特徵萃取，找到圖片中位置、幾何形狀、色彩對比等不同的特徵。第二是可以判斷不同尺度上的特徵。藉由這兩個特點很適合用在pattern recognition

## 7.

(a)

quadratic mirror filter要滿足 $G^2(z) - G^2(-z) = 2^k z^k$ , k is odd

$$\left(\frac{3}{5} + az^{-1}\right)^2 - \left(\frac{3}{5} - az^{-1}\right)^2 = \frac{12}{5}az^{-1} = 2z^k$$

$$a = \frac{5}{6}$$

(b)

orthonormal filter要滿足 $G(z)G(z^{-1}) + G(-z)G(-z^{-1}) = 2$

$$G(z) = \left(\frac{3}{5} + az\right)$$

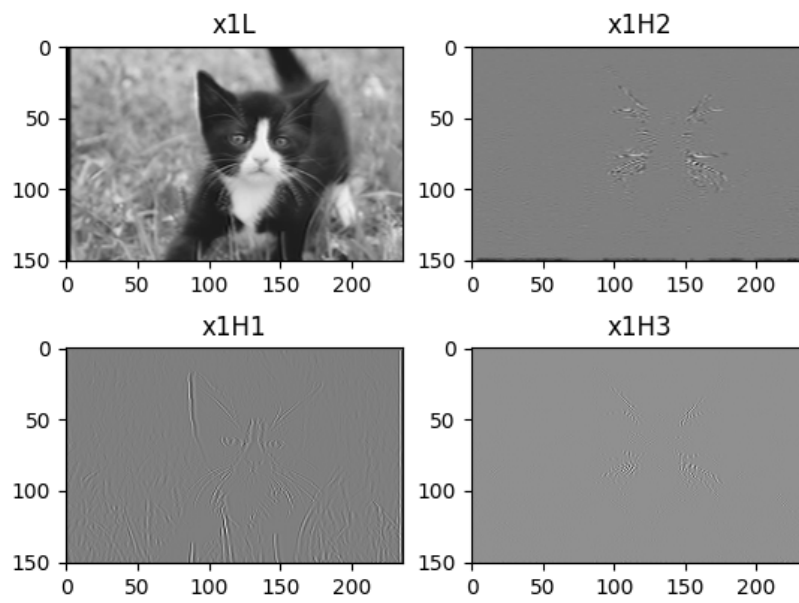
$$G(z^{-1}) = \left(\frac{3}{5} + az^{-1}\right)$$

$$G(z)G(z^{-1}) + G(-z)G(-z^{-1}) = \left(\frac{3}{5} + az\right)\left(\frac{3}{5} + az^{-1}\right) + \left(\frac{3}{5} - az\right)\left(\frac{3}{5} - az^{-1}\right) = 2\left(\frac{9}{16} + a^2\right) = 2$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + a^2 = 1$$

$$a = \pm \frac{4}{5}$$

## 8.



### Extra

$$\text{length}(X_{1,L}) = \lceil (N + L - 1)/2 \rceil$$