General Cources in Mathematics

2학년

(1) 선형대수학

(2) 정수론

3학년 ~4학년 : 대수학

선형 방정식의 계 [vector space]

<example>

$$\begin{cases} 4x-2y=1 \\ 16x-8y=4 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (벡터공간)}$$

⇒ 해가 있는가? / 해가 있다면 해는 무엇인가?

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad \cdots \quad + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad \cdots \quad + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \quad \cdots \quad + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot X = B$$

⇨ X (벡터)를 찾는게 Linear Algebra의 목적

[붙임 행렬] [augmented matrix]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{m \times 1}$$

⇨ Augmented matrix 만을 사용하여 X를 찾아야 한다.

(example)

$$\begin{aligned} x+y+2z&=9 \\ 2x+4y-3z&=1 \\ 3x+6y-5z&=0 \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}}_{[3*4]} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix}}_{[4*1]} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{[3*1]}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 & -18 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} (-2 \cdot x) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} (-3 \cdot x) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ \boxed{0} & 2 & -7 & -17 \\ \boxed{0} & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \cdot y\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & +\frac{21}{2} & +\frac{51}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & -11 & -25 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & -11 & -29 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} (2,2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

leading 1 leading 1.

⇨ 행 사다리꼴 [Row echelon form] 이지만,

⇨ 기약 행 사다리꼴 [Reduced row echelon form]은 아니

[Condition]

(1) 만약 한 행의 원소가 전부 0이 아니라면, 행의 첫번째 0이 아닌 수는 1이다. (leading 1)

(2) 만약 어떤 행들이 모두 0이면, 그 행들은 모두 행렬의 아래쪽 ㅎ 놓여 진다

(3) 두 개의 연속된 행이 모두 0으로 이루어지지 않다면, 아래 행에 있는 leading 1이 윗행에 있는 leading 1의 오른쪽에 위치한다.

(4) 선행 1을 가진 열은 1을 제외한 다른 곳이 모두 0이다.

if Matrix is Satisfied with (1),(2),(3) then This Matrix is Called "Row echelon form".

if Matrix is satisfied with (1),(2),(3),(4) then

This Matrix is Called "Reduced row echelon form"

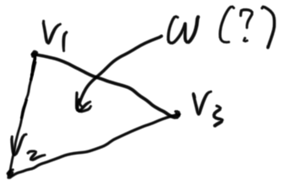
"Row echelon form" or "Reduced Row echelon form" 으로 가공의 행렬을 표현하는 이유는 "컴퓨터의 행렬 연산 프로그래밍"을 일정한 규칙에 따라 진행할 수 있기 때문이다.

[일차결합]

$w = (9,1,0)$ 이

$v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,4,6)$, $v_3 = (2,-3,-5)$ 의 일차결합인가?

⇒ $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 = W$ 가 되는 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이 존재하는가?

⇒ 

⇒ W는 v_1, v_2, v_3 이 만들어 내는 공간에 포함되는가?

PP. 175 in Monkey Book

<Augmented Matrix form>

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right] \Big\} \text{Three formula}$$

five Variables | target variables

현재 해는 $\mathbb{R}^5$에 속해 있다.

Ex.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 3 * 6 \rangle \qquad \langle 6 * 1 \rangle \qquad \langle 3 * 1 \rangle$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad (\because \text{Condition } (1))$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{2} \cdot x_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Compute}]{-2 \cdot R_1 \text{ and}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & +14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{and Computation}]{-5\times R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\times R_3} \begin{pmatrix} \underset{\text{leading 1}}{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & \underset{\text{leading 1}}{1} & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\text{leading 1}}{1} & 2 \end{pmatrix}$$

⟹ Raw echelon form (∵ Condition (1), (2), (3))

⟹ 현재 leading 1을 포함하는 $\{x_1, x_3, x_5\}$는 자유롭지 못하지만 leading 1을 가지고 있지 않은 $\{x_2, x_4\}$는 자유 변수이다.

⟹ $\mathbb{R}^5$ 에서 자유도가 두 개인, 즉 평면에 $\{x_2, x_4\}$ 해가 속해 있다.

⟹ 현재까지의 과정을 'Gauss Elimination'이라고 부른다.
[forward phase]

$$\xrightarrow[\text{and Compute}]{\times\frac{7}{2}\cdot R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{and Compute}]{\times(-6)\cdot R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

→ "Reduced row echelon form"

by (Backward Phase)

→ We call 'forward + Backward' Process as 'Gauss-Jordan Elimination'

We can derive the following:

(1) 모든 행렬은 유일한 기약 행사다리꼴을 가진다.

(∵ Proof: "The Reduced Row Echelon Form of Matrix is unique: A Simple Proof" by Thomas Yuster

(2) 행 사다리꼴은 유일하지 않다.

그러나 모든 행 사다리꼴은 선행 1이 같은 위치에 존재

, 그리고 아랫부분에 위치한 원소가 모두 0인 행의 수는 같다.

(3) leading 1의 위치를 Augmented matrix의 Pivot Posit

이라 부른다. leading 1을 포함하는 열을 Pivot Column이라 한

Example 78pp in M.B

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$$
$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4\cdot x_5 - 3\cdot x_6 = -1$$
$$+5\cdot x_3 + 10\cdot x_4 + 15\cdot x_6 = 5$$
$$2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 8\cdot x_4 + 4\cdot x_5 + 18\cdot x_6 = 6$$

Augmented format

$$\xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Computation

$$\xrightarrow{x\,-2\cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{x\,-2\cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\quad}$ Computation

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times(-1)\cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times(-5)\cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

Computation

$$\xrightarrow{\times(-4)\cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Computation
And Down R_3 to R_4

해는 더 많아 진다.

$$\xrightarrow{\times\left(\frac{1}{6}\right)\cdot R_3} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Reduced row Echelon form

$\rightarrow x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 = 0$

$\rightarrow x_3 + 2 \cdot x_4 = 0$

$\Rightarrow \{x_1, x_3, x_6\} \Rightarrow$ 종속변수

$\{x_2, x_4, x_5\} \Rightarrow$ 독립변수

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot x_2 - 4 \cdot x_4 - 2 \cdot x_5 \\ x_2 \\ -2 \cdot x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

x_6 $\frac{1}{3}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \cdot x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x_4 \\ 0 \\ -2 \cdot x_4 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cdot x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ In $\mathbb{R}^6$

⇒ 해 공간은 육차원 안에서 삼차원 공간 안에 있다.

[부분 공간]

homogeneous

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0$$

[Augmented Matrix]

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} & 0 \end{array}\right]$$

→ 동차 선형계는 해가 0 임을 수반한다.

→ 해의 존재 양상
- 무수히 많은 해 → 자유변수가 있다. <Nontrivial Solution>
- 해가 1개 → 자명한 해 [Trivial Solution]
- 해가 없다.

Theorem-(1)

동차 선형계는 한 개의 자명한 해를 가지거나 무수히 많은 해를 가진다. 다른 경우는 존재하지 않는다.

By 'Pivot Colums'

Theorem-(2)

동차 선형계가 n개의 미지수를 가지며 그 계에 대한 첨가 행렬의 기약 사다리꼴이 r개의 0이 아닌 행을 가진다면 계는 $n-r$개의 자유변수를 가진다.

해 공간은 $n-r$차원

Thedem - (3)

방정식의 수보다 미지수의 수가 더 많은 동차 선형계는 무한히 많은 해를 갖는다.

n r

→ leading 1의 경우는 많아도 n개.

→ $N(\text{leading } 1) \le n < r$

Example

'G-J elimination'을 사용하여 다음의 동차 선형계를 풀어라.

$$x_1 + 3\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 2\cdot x_5 = 0$$
$$2x_1 + 6\cdot x_2 - 5x_3 - 2\cdot x_4 + 4\cdot x_5 - 3\cdot x_6 = 0$$
$$5x_3 + 10\cdot x_4 + 15\cdot x_6 = 0$$
$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Computation}]{\times(-2)\cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Computation}]{x(-1)\cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +2 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Computation}]{x(-5)\cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +2 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Computation and Move } R_3 \text{ to } R_4]{x(-4)\cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{x\frac{1}{6} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$