PP 130

Vector Space ⟵ 행렬연산 도구 $\Longleftrightarrow$ 대수적 성질

2날차

역행렬

given $A \in M_{n\times n}$, find $B \in M_{n\times n}$ Such that $A \cdot B = B \cdot A =$

(i) why shape$(B) = (n \times n)$?

Let $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B \in M_{(x \times y)}$, $I \in M_{(k}$

given that $A \cdot B = B \cdot A = I$

Shape$(A_{(m\times n)} \cdot B_{(x\times y)}) \Rightarrow (m \times n) \times (x \times y) \Rightarrow m \times y$ ($\because n = x$)

Shape$(B_{(x\times y)} \cdot A_{(m\times n)}) \Rightarrow (x \times y) \times (m \times n) \Rightarrow x \times n$ ($\because y = m$)

given that I being Identical Matrix, $k = w$

$\Rightarrow m \times y = m \times m$ ($\because m = y$)

$\Rightarrow x \times y = x \times x$ ($\because x = y$)

$\Rightarrow$ A is Identical Matrix

B is Identical Matrix

다) $x = y = n = m$

that has same shape with Matrix A

정방행렬이면 모두 역행렬을 가진다? $\longrightarrow$ No

(example)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}, \quad B = \begin{bmatrix} C_1, & C_2, & C_3 \end{bmatrix}_{3\times3}, \quad \text{where } C_i = \begin{bmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ C_{3i} \end{bmatrix}$$

$AB = BA = I_3$ 이 되는 B가 있을까?

$$BA = \begin{bmatrix} B a_1 & B a_2 & B \cdot a_3 \end{bmatrix} \neq I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix}$ $\left(\because a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{이므로 } B \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Theorem

$A_{(n\times n)}$의 Reduced echelon row form을 R이라 할 때

R은 0인 행을 갖거나 항등행렬 I_n이다.

Definition

$AB = BA = I_n$ ...

$A \in M_{n \times n}$, $\exists B \in M_{n \times n}$, $AB = BA = I_n$ 이면

A를 가역(Invertible) 또는 정칙(Non Singular) 이라 한다.

이때 B를 A의 역행렬이라 한다.

ex) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $ad-bc \neq 0$

$\leadsto \det(A) = |A| = ad-bc \neq 0$

역행렬이 있다면 과연 하나일까? 아니면 복수개일까?

Theorem

A가 가역(invertible) 이고 B, C가 A의 역행렬이라면, $B = C$

[Uniqueness]

$\Rightarrow B \cdot A = I_n \longrightarrow B \cdot A \cdot C = I_n \cdot C$

$\Rightarrow B \cdot (AC) = C$

$\Rightarrow B \cdot I_n = C$

$\therefore B = C$

Theorem

$A, B \in M_{n \times n}$, A, B는 가역 일때

$A \cdot B$도 가역이다.

$A+B$는 가역이 아니다. $\left(\because A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\right)$

$\rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$\Rightarrow (AB) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = I_n$

Similarly $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = I_n$

$\rightarrow (A_1 A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) A^n이 가역일때 $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$

(III) $\forall c \neq 0$, 스칼라, $c \cdot A$도 가역이고, $(cA)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1}$ 이다.