

Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

Algorytmy estymacji stanu (filtry)

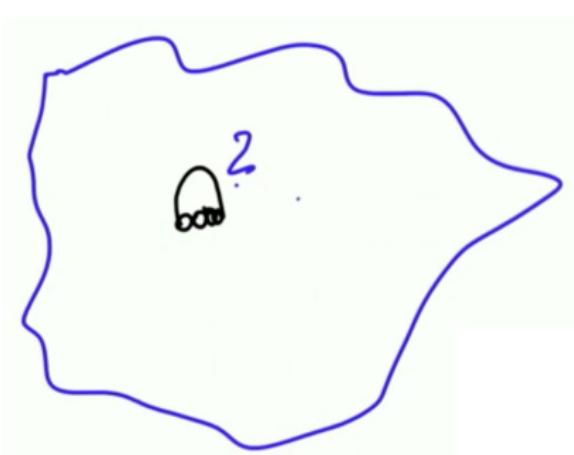
Na podstawie: AIMA ch15, Udacity (S. Thrun)

Bartosz Wieloch

Instytut Informatyki,
Politechnika Poznańska

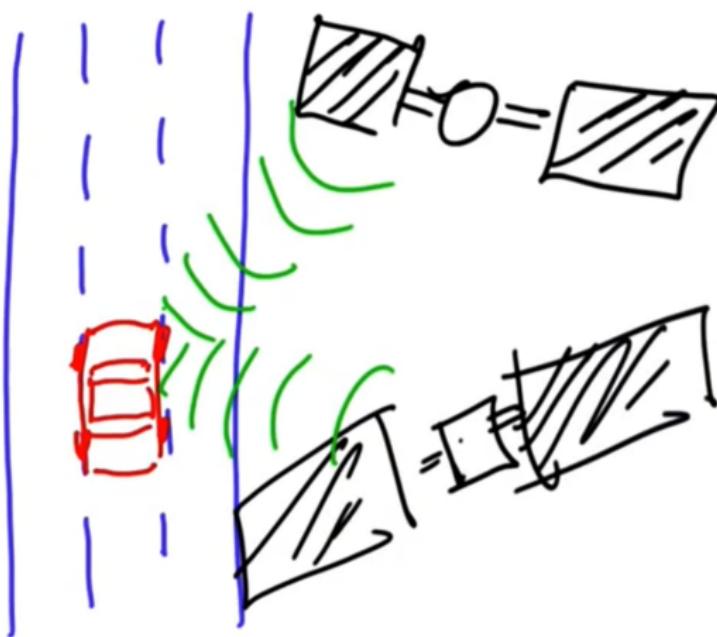
30 marca 2020

Problem lokalizacji

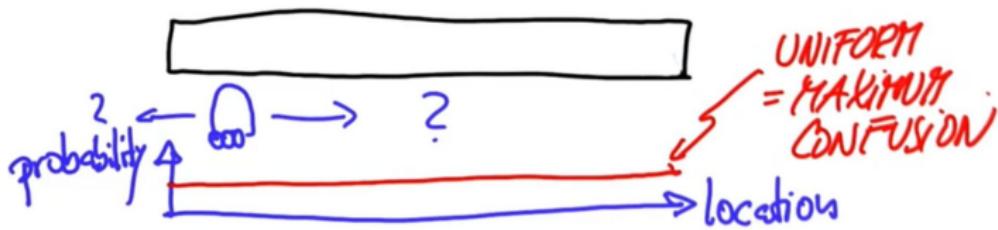


- Obserwowałość?
 - Determinizm?

Problem lokalizacji



Filtr Histogramowy



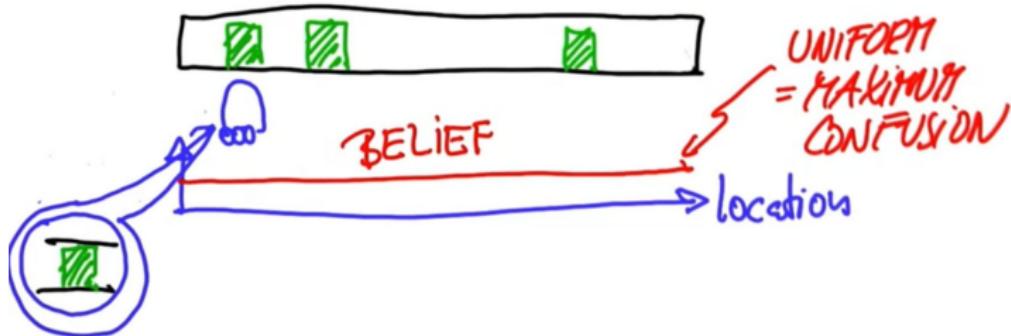
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
o●ooooooooooooooooooo

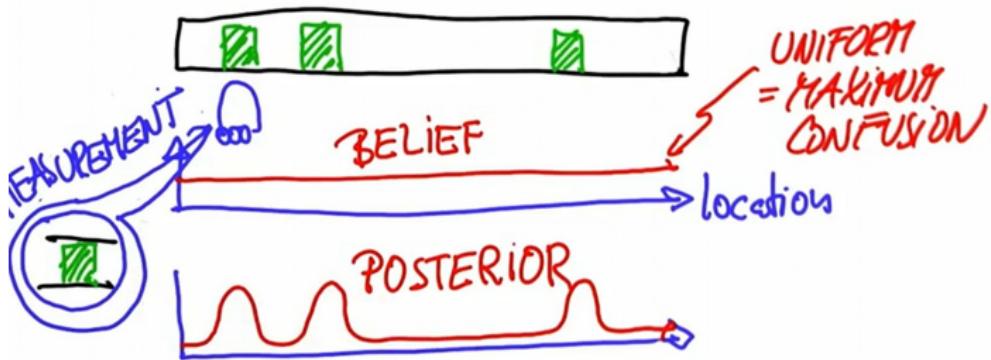
Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

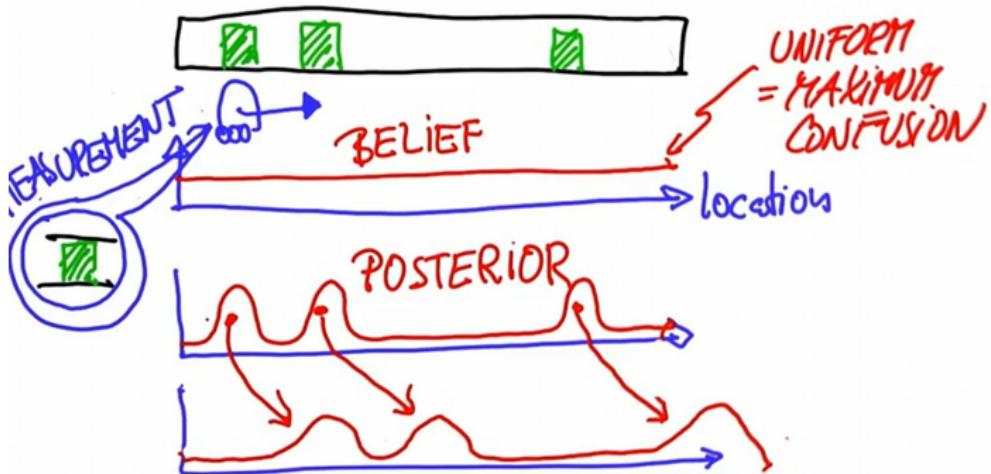
Filtr Histogramowy



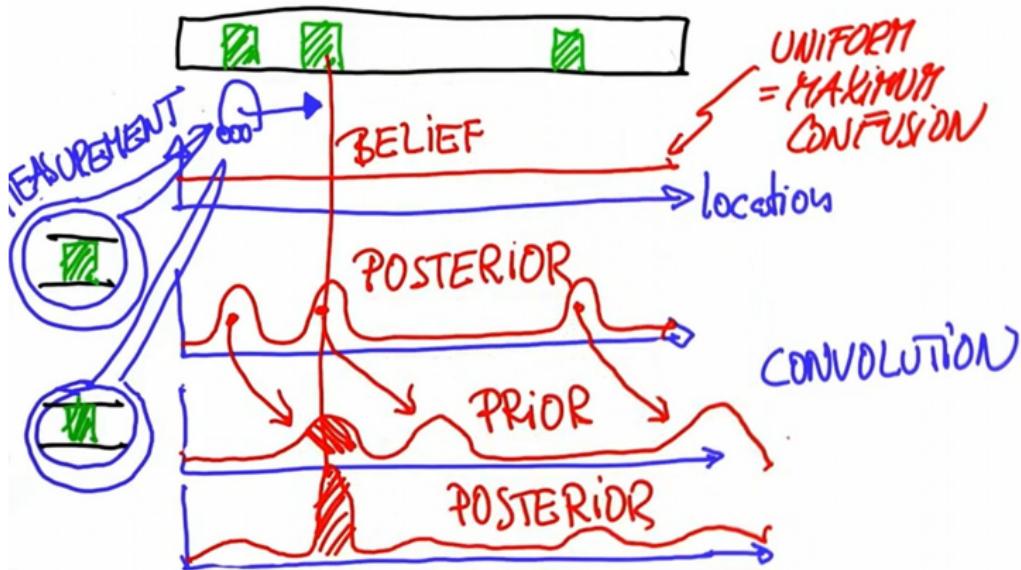
Filtr Histogramowy



Filtr Histogramowy



Filtr Histogramowy



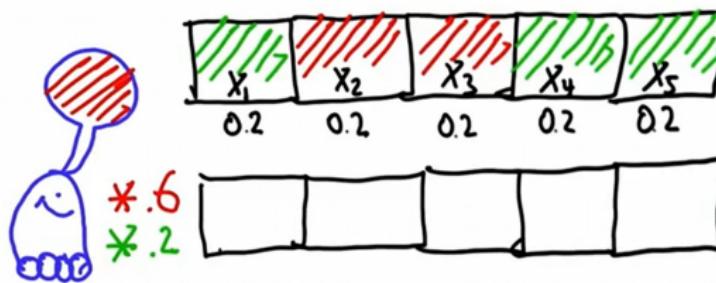
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
ooooo●oooooooooooo

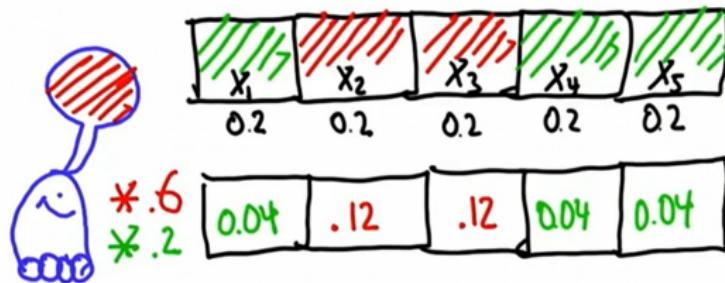
Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

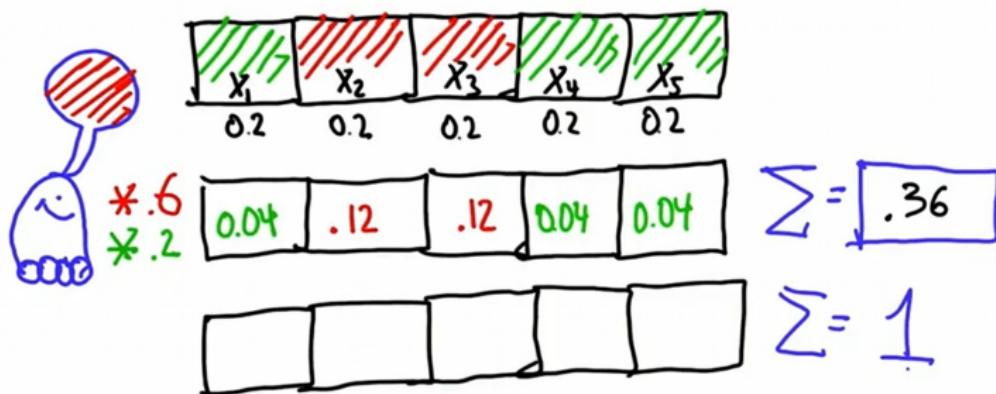
Pomiar



Pomiar

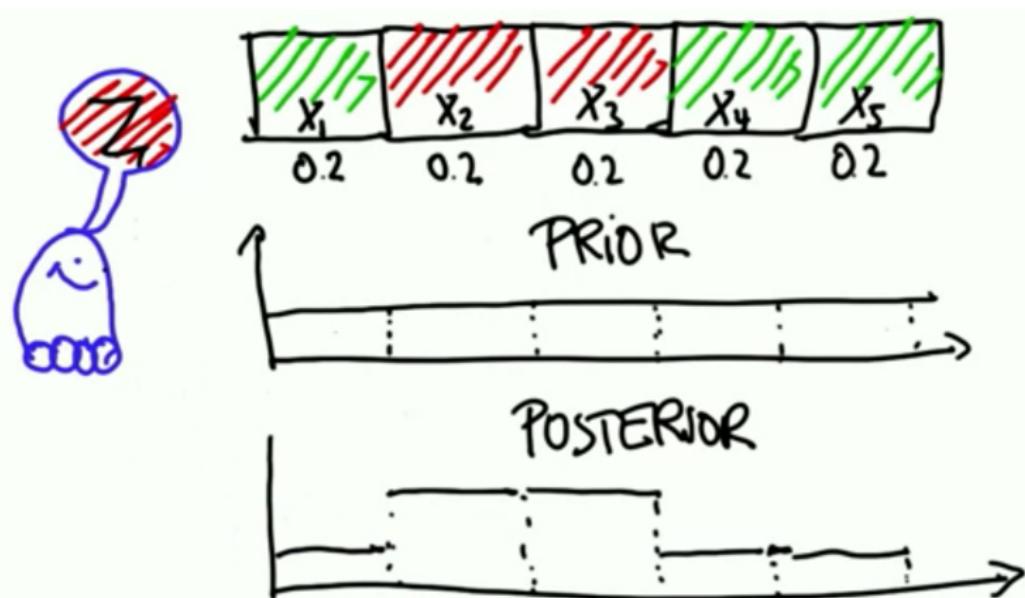


Pomiar

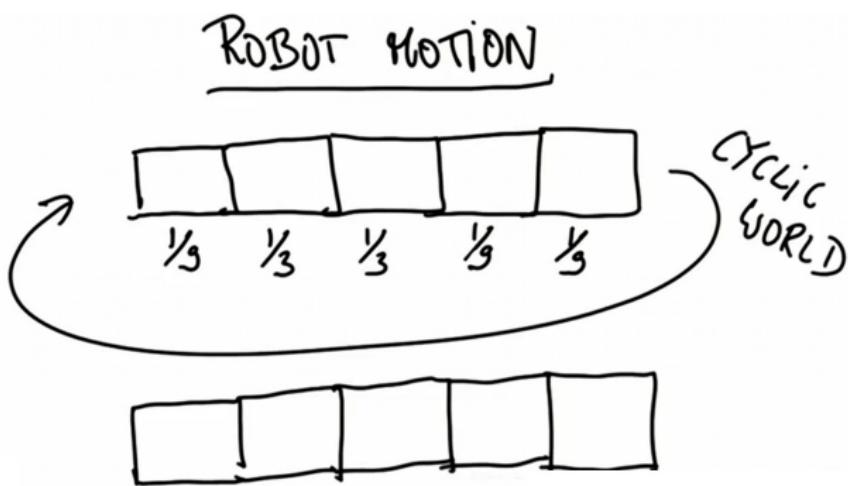


[zadanie 1]

Pomiar — wynik

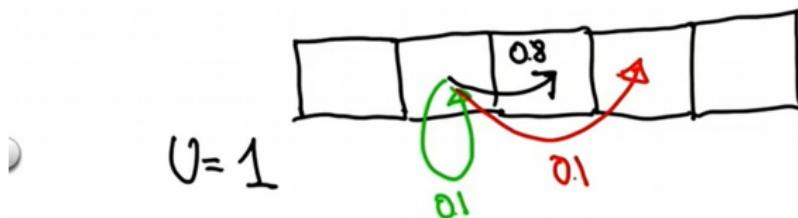
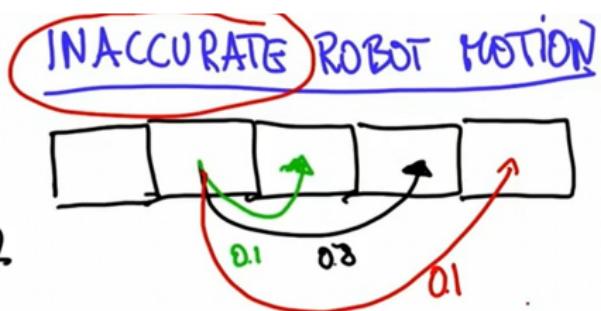


Ruch agenta

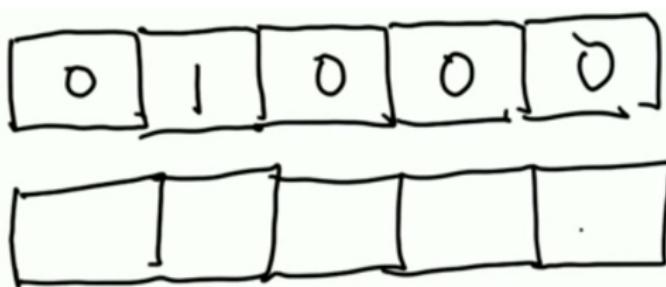


- Jak wygląda stan wiedzy (ang. belief) po ruchu o 1 pozycję w prawo? [zadanie 2]

Ruch agenta

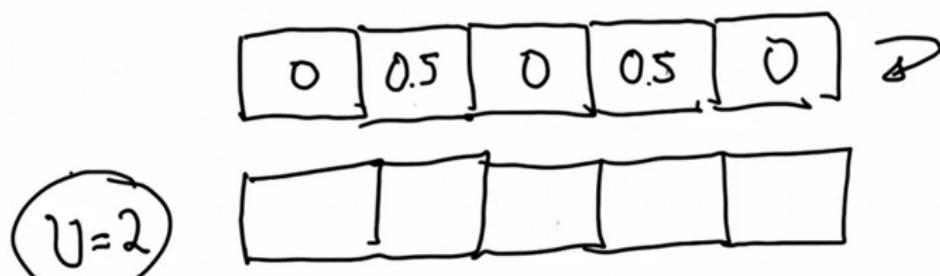


(Niedokładny) ruch agenta



- $P(X_{i+2}|X_i) = 0.8$
- $P(X_{i+1}|X_i) = 0.1$
- $P(X_{i+3}|X_i) = 0.1$
- Jak wygląda rozkład po wykonaniu ruchu o 2 pola w prawo?
[zadanie3]

(Niedokładny) ruch agenta



- $P(X_{i+2}|X_i) = 0.8$
- $P(X_{i+1}|X_i) = 0.1$
- $P(X_{i+3}|X_i) = 0.1$
- Jak wygląda rozkład po wykonaniu ruchu o 2 pola w prawo?
[zadanie4]

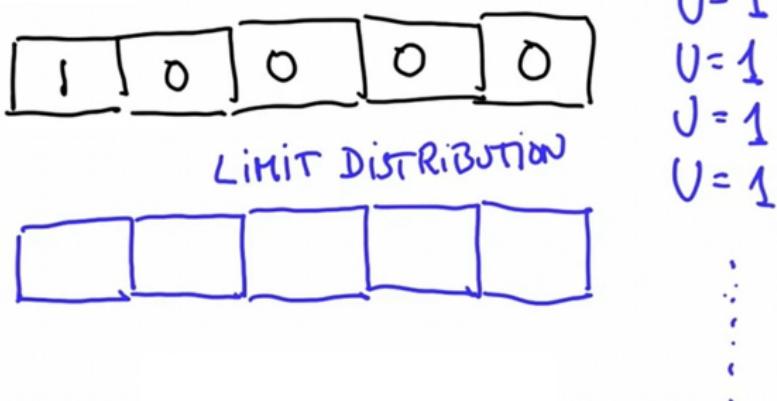
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooo●ooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

Ruch agenta



Jak wygląda rozkład w ∞ ? [zadanie 5]

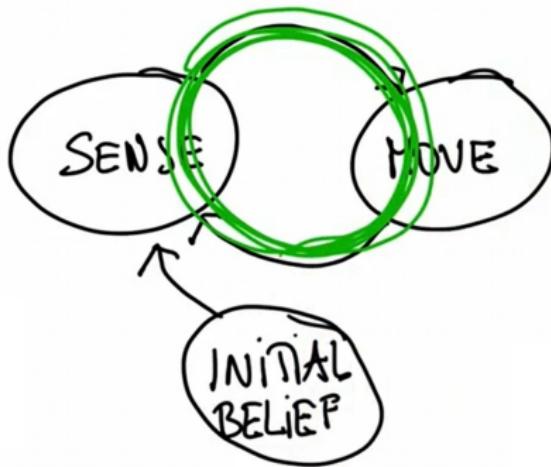
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooo●oooo

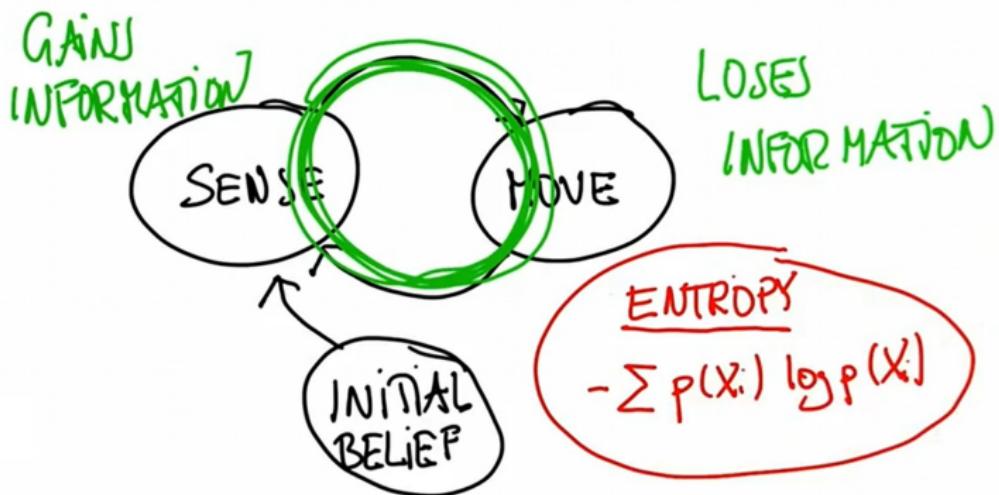
Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

Lokalizacja



Lokalizacja



Lokalizacja — podsumowanie

- **Stan wiedzy:** rozkład prawdopodobieństwa
- **Obserwacja:** iloczyn (stan wiedzy, pomiar) + normalizacja
- **Ruch:** konwolucja (stan wiedzy, model ruchu)

Lokalizacja — podstawy matematyczne (obserwacja)

Zmienne losowe:

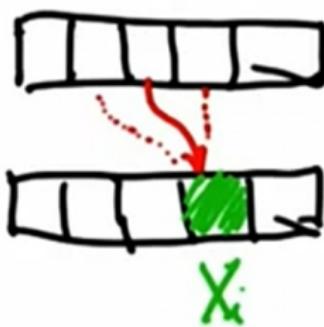
- X — robot jest na danym polu ($X = x_i$ znaczy, że jest na polu i-tym)
- Z — wynik pomiaru
- $\mathbf{P}(X|Z) = \frac{\mathbf{P}(Z|X)\mathbf{P}(X)}{\mathbf{P}(Z)}$
 - $\mathbf{P}(X)$ — rozkład a priori
 - $\mathbf{P}(Z|X)$ — rozkład prawd. pomiaru
 - $\mathbf{P}(Z)$ — normalizacja
 - $\mathbf{P}(Z) = \sum_i \mathbf{P}(Z|x_i)P(x_i) = \alpha$

Lokalizacja — podstawy matematyczne (ruch)

Konwolucja:

$$P(x_i^t) = \sum_j P(x_j^{t-1}) P(x_i | x_j)$$

- $P(X^{t-1})$ — rozkład prawd. a priori (np. $P(x_i^{t-1})$)
- $P(X|X)$ — rozkład prawd. związanych z wiedzą na temat ruchu (np. $P(x_i | x_j)$)



Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
●oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

Porównanie estymacji stanu

Metoda	stanowość	rozkład
Filtr histogramowy	dyskretny	multimodalny
Filtr Kalmana	ciągły	unimodalny

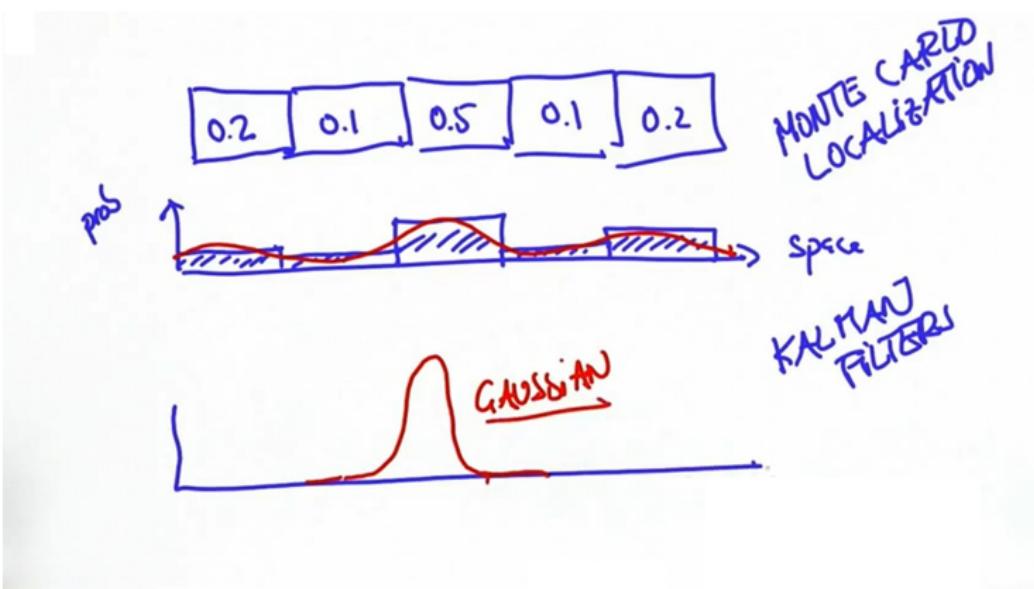
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
ooooooooooooooooooo

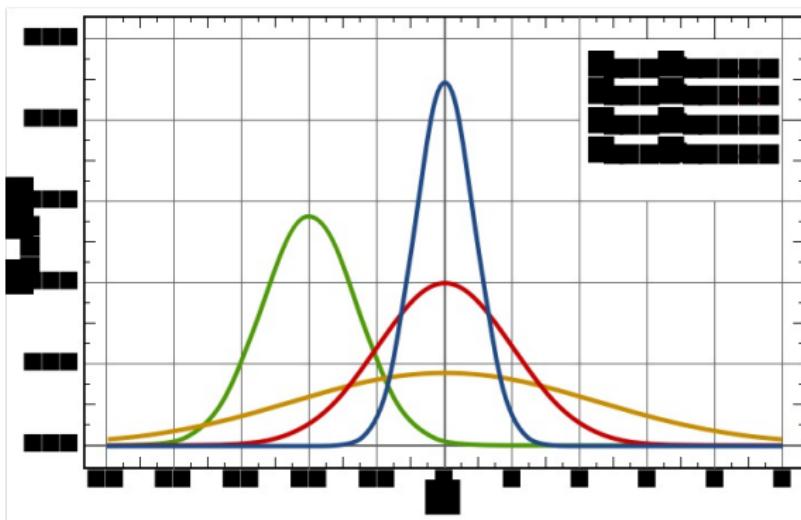
Filtr Kalmana
o●ooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
ooooooooooooooooooo

Funkcja gaussowska

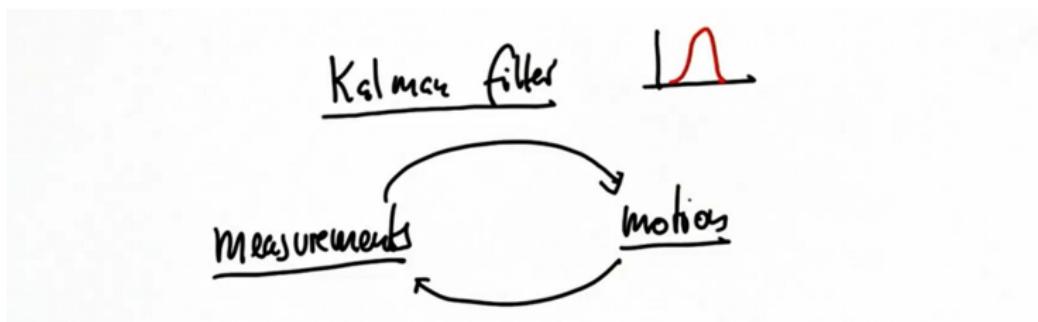


Funkcja gaussowska



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Pomiar i ruch



- Pomiar: (iloczyn/bayes czy konwolucja/prawd. całkowite?) [zadanie 6]
- Ruch: (iloczyn/bayes czy konwolucja/prawd. całkowite?)

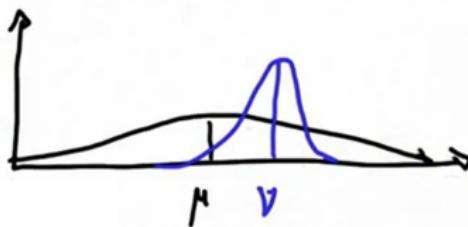
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooo●oooooooooooo

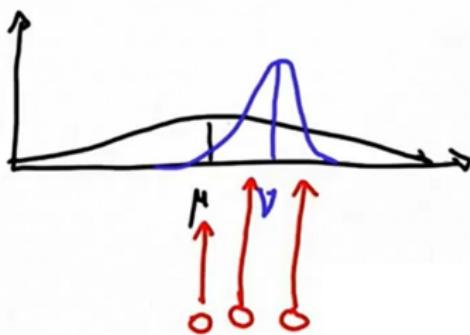
Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

Pomiar



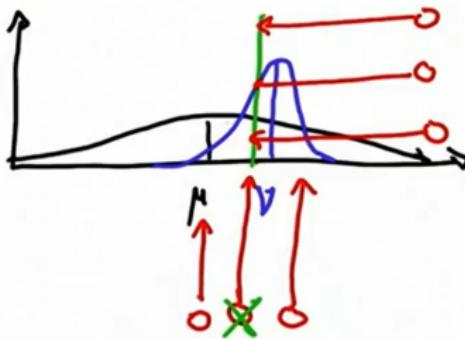
rozkład a priori oraz pomiar

Pomiar



- Gdzie jest średnia f. gausowskiej (stanu wiedzy) po pomiarze? [zadanie 7]

Pomiar



- Gdzie jest amplituda f. gausowskiej (stanu wiedzy) po pomiarze? [zadanie 8]

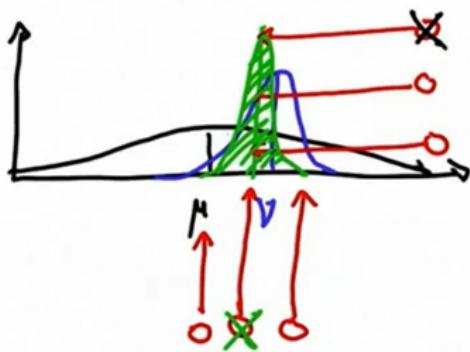
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

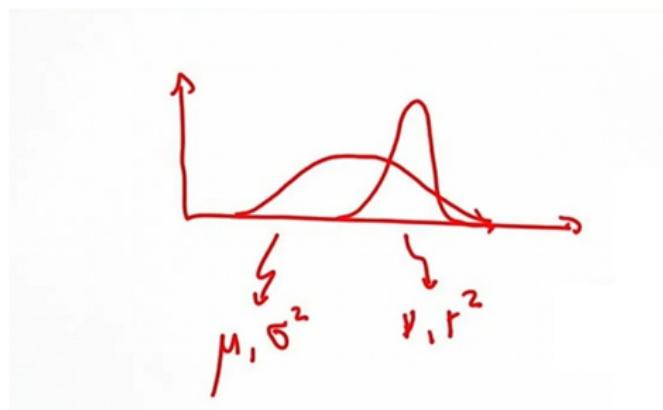
Filtr Kalmana
oooooooo●oooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

Pomiar



Pomiar — wzory



Aktualizacja stanu wiedzy po pomiarze (mnożenie f. gaussowskich):

$$\mu' = \frac{r^2 \mu + \sigma^2 \nu}{r^2 + \sigma^2}$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

Zadanie na pobudkę

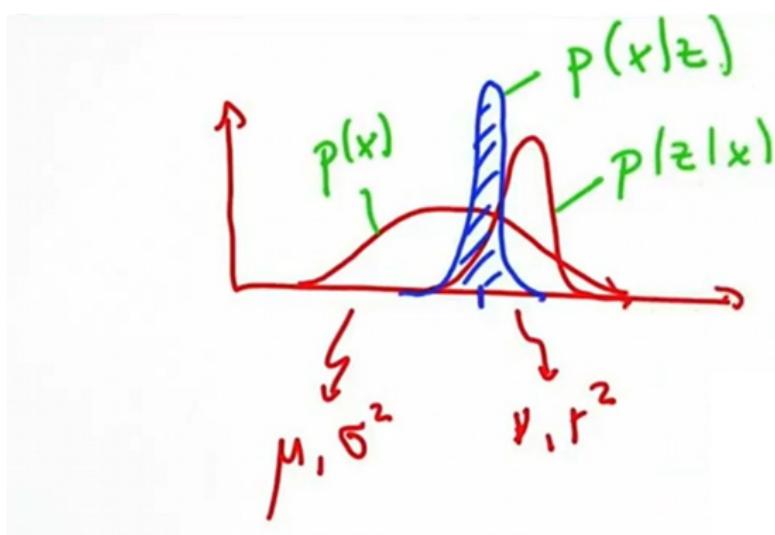
- $\mu = 10$
- $\nu = 12$
- $\sigma^2 = 4$
- $r^2 = 4$

Policz μ' i $\sigma^{2'}$ [zadanie 9]

$$\mu' = \frac{r^2\mu + \sigma^2\nu}{r^2 + \sigma^2}$$

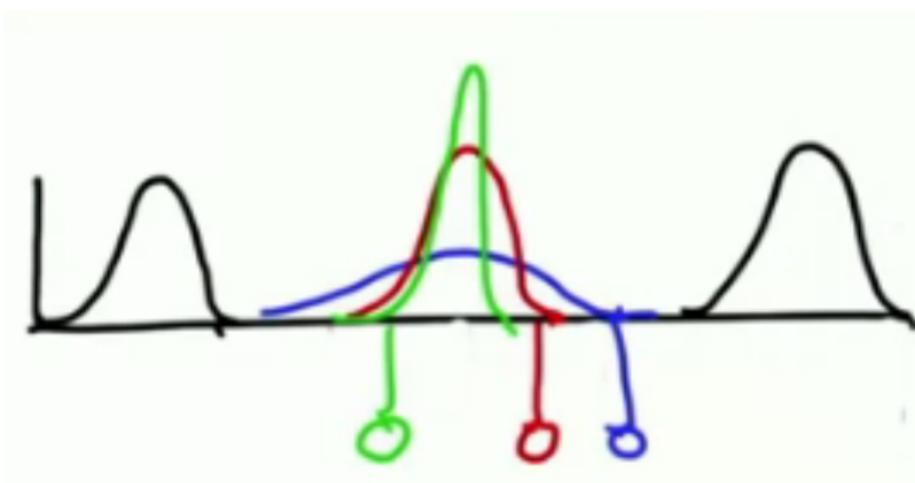
$$\sigma^{2'} = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

Pomiar — wzory



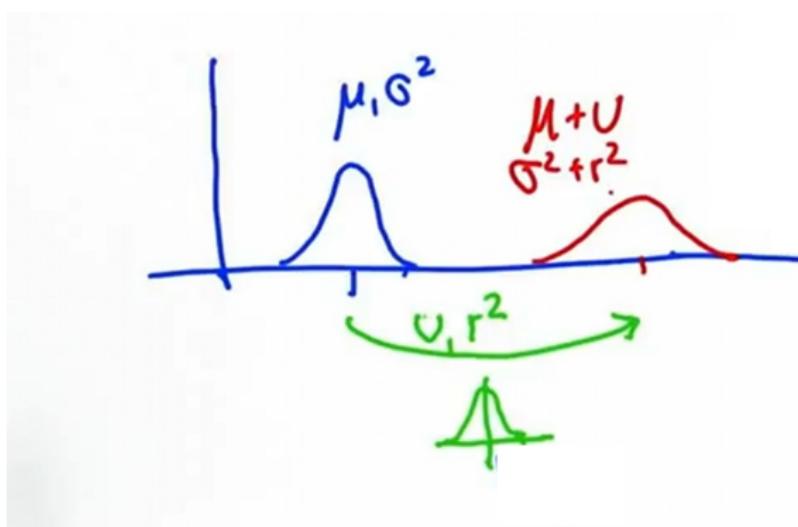
- $P(X)$ — rozkład a priori
- $P(Z|X)$ — pomiar
- $P(X|Z)$ — rozkład a posteriori

Pomiar — pytanie na koniec



Jak będzie wyglądał rozkład a posteriori? [zadanie 10]

Ruch — wzory

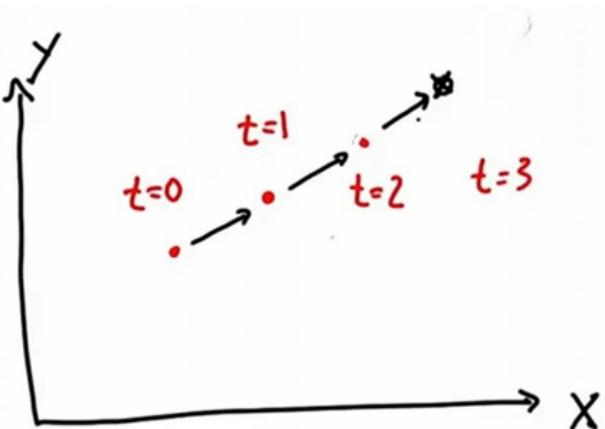


Aktualizacja stanu wiedzy po ruchu:

$$\mu' = \mu + v$$

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + r^2$$

Wielowymiarowy filtr Kalmana



- Potrafi przewidywać pozycję na podstawie wiedzy o prędkości (bez jej pomiarów)

Wielowymiarowa f. gaussowska

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_D \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \cdots & & \\ & \cdots & \\ & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

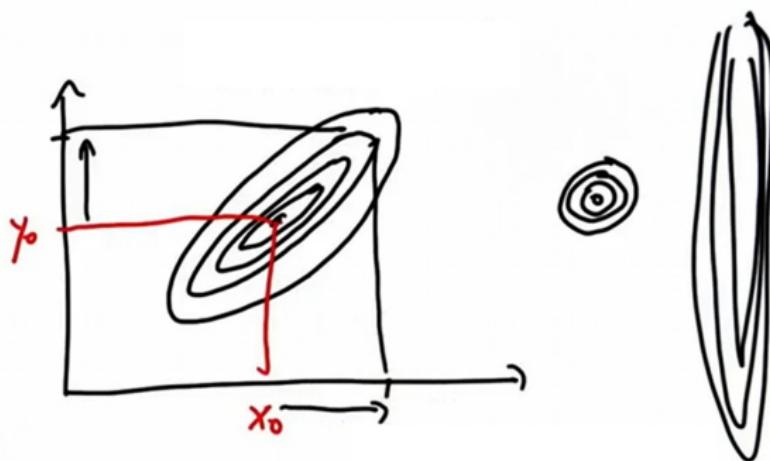
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo●oooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

Wielowymiarowa f. gaussowska



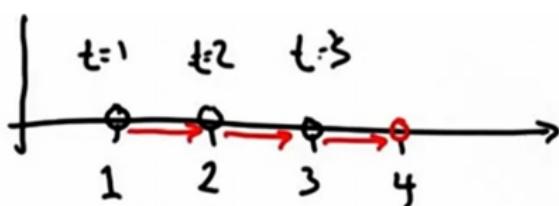
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo●oooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

Wielowymiarowy filtr Kalmana



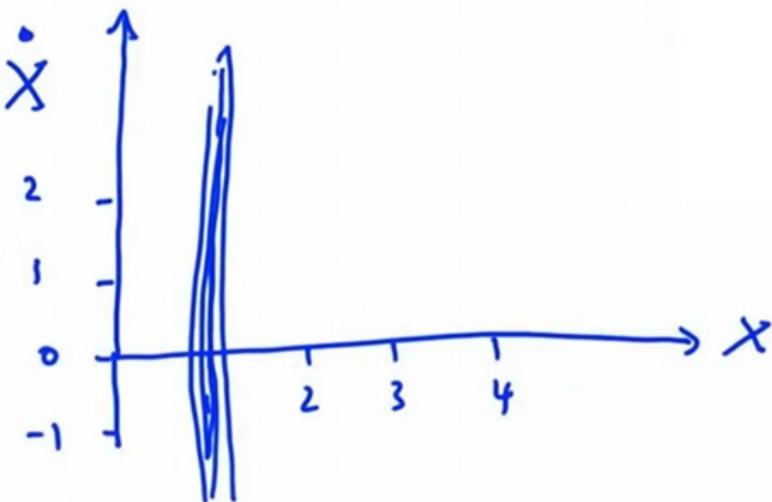
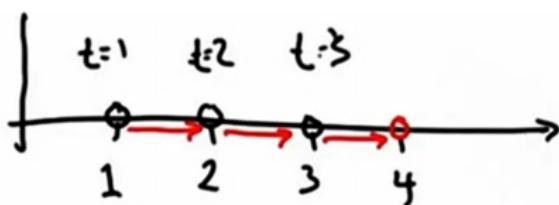
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo●oooo

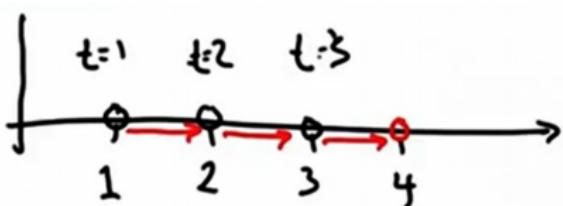
Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo

Wielowymiarowy filtr Kalmana



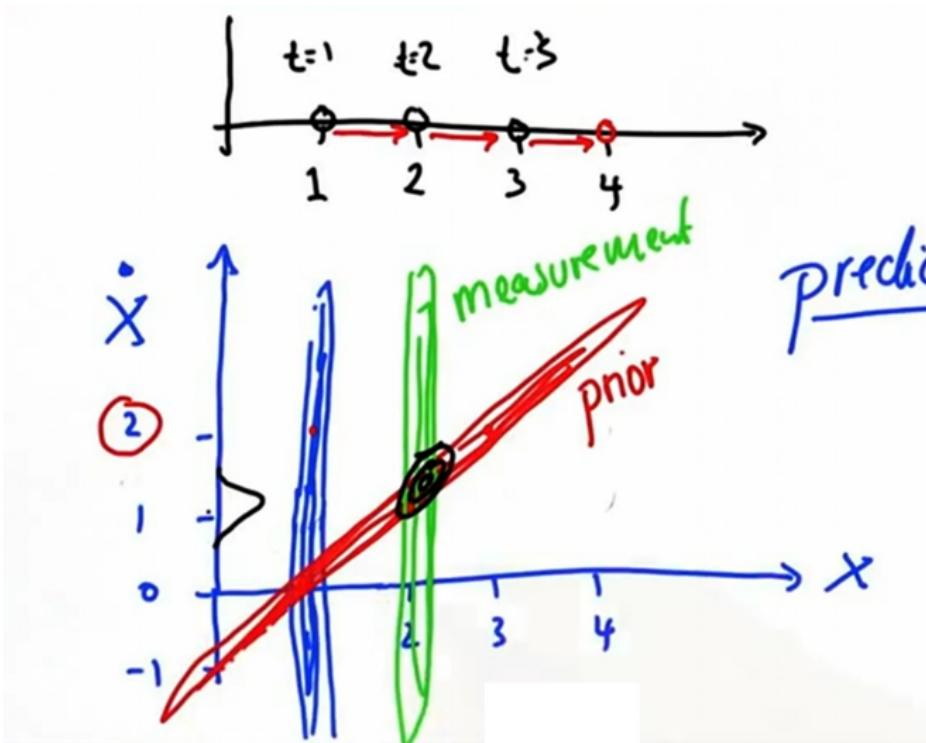
Gdzie byśmy byli, gdyby prędkość wynosiła 0? A jeśli 1? A jeśli 2?

Wielowymiarowy filtr Kalmana (predykcja)



$$x' = x + \dot{x}$$

Wielowymiarowy filtr Kalmana

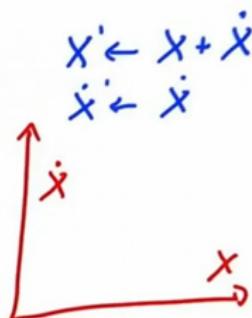


x - obserwowane

\dot{x} - ukryte (trzeba wywnioskować na podstawie obserwowanych)

Projektowanie filtru Kalmana

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \ddot{x}' \end{pmatrix} \leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$$
$$z \leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_H \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$$



- F — funkcja przejścia
- H — funkcja pomiaru („co obserwujemy”)

Projektowanie filtru Kalmana — równania

- x — estymata
- P — macierz kowariancji (niepewność)
- F — funkcja przejścia
- u — wektor ruchu
- z — pomiar
- H — funkcja pomiaru
- R — niepewność pomiaru
- $\mathbf{1}$ — macierz jednostkowa

Ruch:

- $x' = Fx + u$
- $P' = FPF^T$

Pomiar:

- $y = z - Hx$
- $S = HPH^T + R$
- $K = PH^T S^{-1}$
- $x' = x + (Ky)$
- $P' = (\mathbf{1} - KH)P$

Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
●oooooooooooooooooooo

Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	

Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
o●ooooooooooooooo

Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	
Filtr cząsteczkowy	ciągła	multimodalny	

Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oo●ooooooooooooooo

Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	$O(N^D)$
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	$O(D^2)$
Filtr cząsteczkowy	ciągła	multimodalny	„szybki”

Zalety filtru cząsteczkowego

Filtr cząsteczkowy:

- bardzo prosty w implementacji
- bardzo elastyczny

Przykład działania: <http://youtu.be/Crt1TkFF-ds> (autor:
Szymon Kaliski)

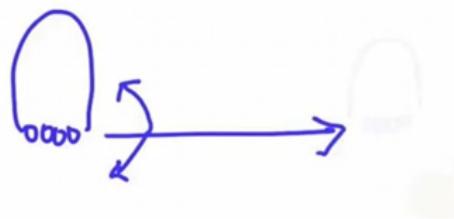
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooo●oooooooooooo

Robot



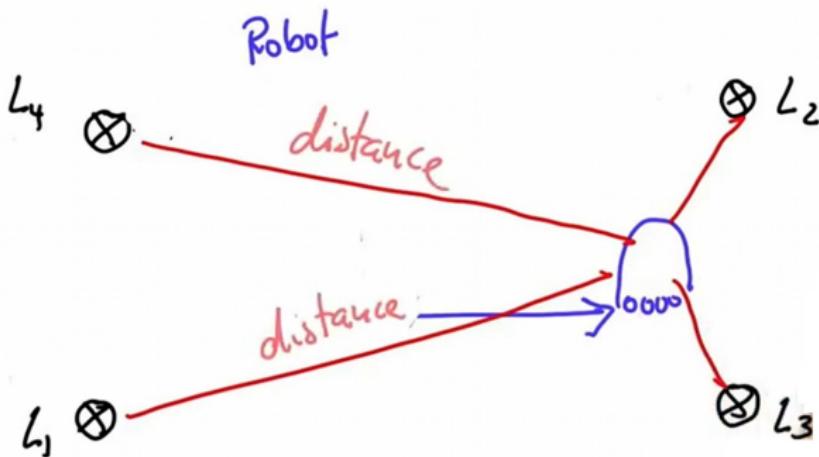
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
ooooo●oooooooooooo

Robot



Problem lokalizacji
oo

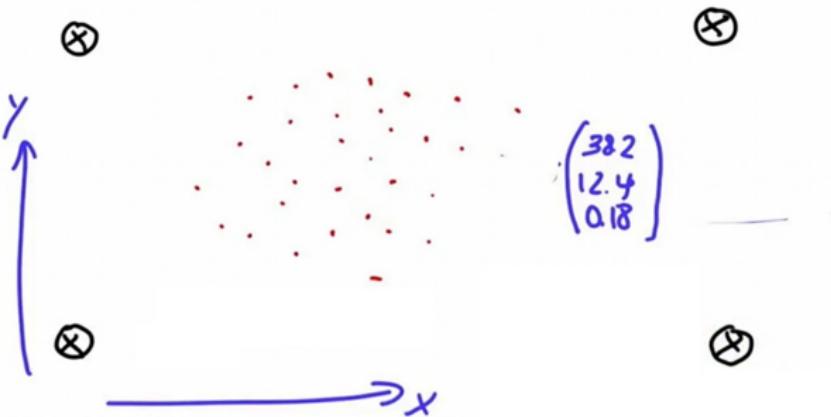
Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooo●oooooooooooo

Filtr cząsteczkowy

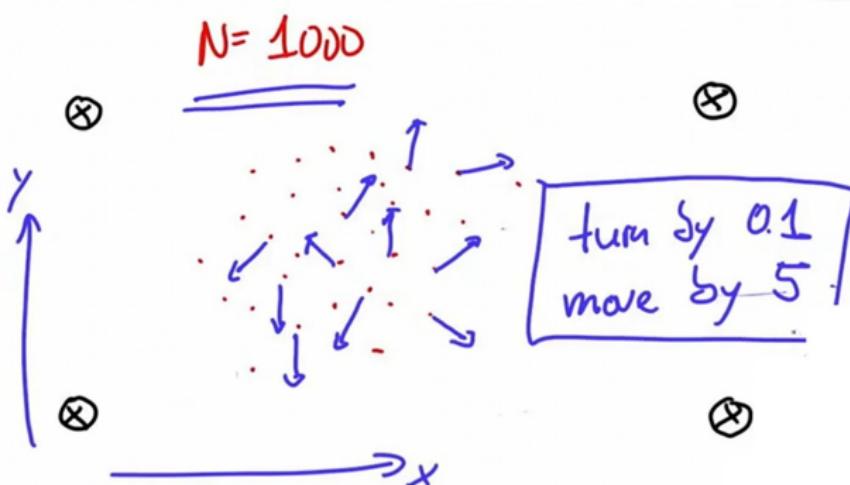
N= 1000



Krok algorytmu 1 (inicjalizacja)

Inicjalizuj N cząstek losowo

Filtr cząsteczkowy



Krok algorytmu 2 (ruch robota)

Wykonaj ruch zgodnie z (zamierzonym) ruchem robota.

Do ruchu dodaj trochę szumu, aby algorytm nie zbiegł do punktu.

Szum odgrywa rolę mutacji.

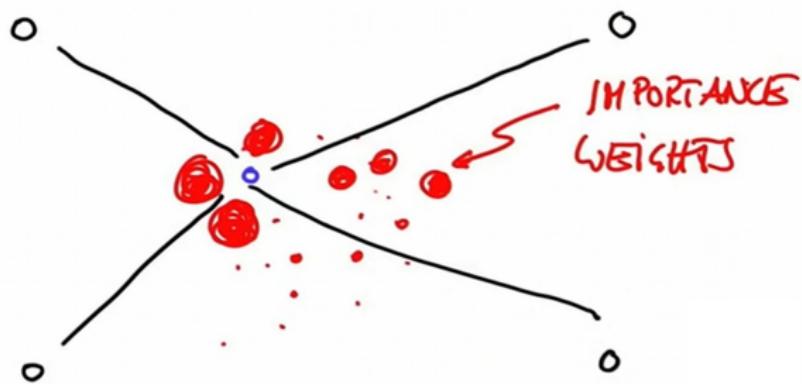
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooo●oooooooooooo

Filtr cząsteczkowy



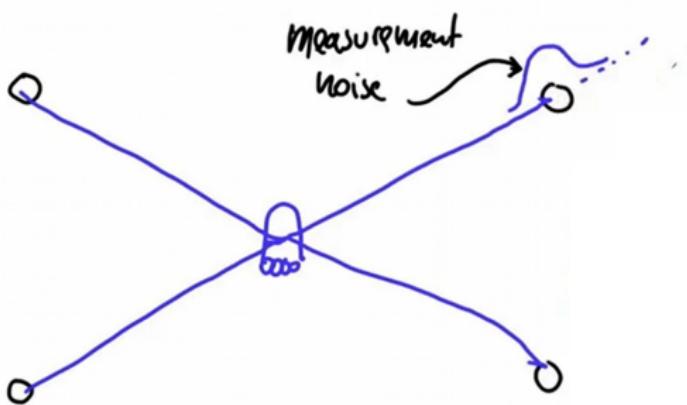
Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

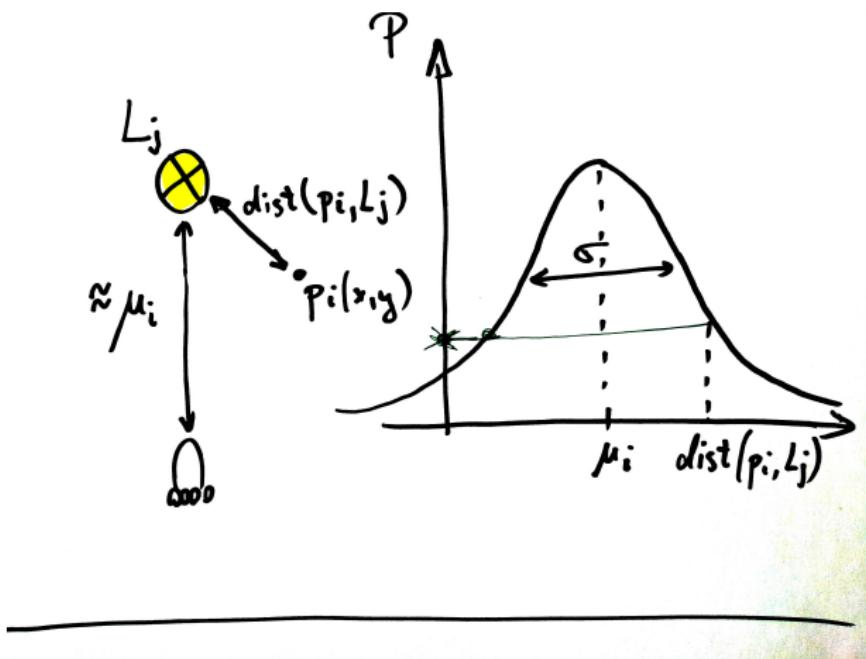
Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooo●oooooooooooo

Filtr cząsteczkowy



Filtr cząsteczkowy (wagi cząsteczek)



$$w_i = \prod_{j=1}^L f_{\mu_i, \sigma}(dist(p_i, L_j))$$

Filtr cząsteczkowy

Krok algorytmu 3 (przydział wag)

Przydziel wagi cząsteczkom (prawd. pomiaru). Dla każdej cząsteczki p_i :

$$w_i = \prod_{j=1}^L f_{\mu_i, \sigma}(dist(p_i, L_j))$$

gdzie:

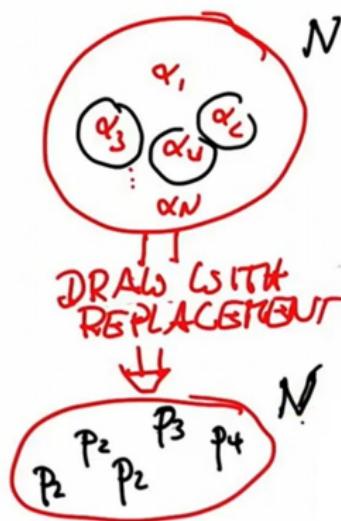
- f — funkcja gaussowska
- μ_i — pomiar dla punktu orientacyjnego i
- σ — niepewność pomiaru (sensorów)
- $dist(p_i, L_j)$ — odległość pomiędzy pozycją i -tej cząsteczki a j -tym punktem orientacyjnym

Selekcja (ponowne próbkowanie)

RESAMPLING

particles	weights	normalized weights
(\dots, \dots, \dots)	w_1	$\alpha_1 = \frac{w_1}{W}$
(\dots, \dots, \dots)	w_2	$\alpha_2 = \dots$
\vdots	\vdots	\vdots
(\dots, \dots, \dots)	w_N	α_N

$$W = \sum_i w_i \quad \sum_i \alpha_i = 1$$



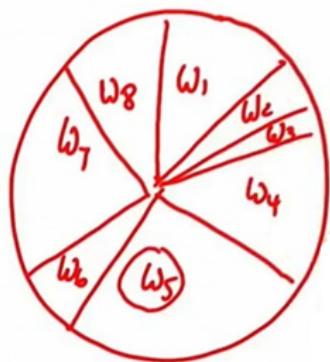
Krok algorytmu 4 (próbkowanie)

Próbkuj populację cząstek

Selekcja — przykład

- $N = 5$
- $w = \{w_1 = 0.6, w_2 = 1.2, w_3 = 2.4, w_4 = 0.6, w_5 = 1.2\}$
- Jakie jest prawd **niewylosowania p_3 ?** [zadanie 11]
- Jakie jest prawd **niewylosowania p_1 ?** [zadanie 12]

Selekcja ruletkowa



Selekcja (szybsza)

```
mx = max(w)
b = 0
idx = randint(0,N)
for i in range(N):
    b += random(0, 2*mx)
    while w[idx] < b:
        b -= w[idx]
        idx = (idx + 1) % N
    resampled.append(idx)
```

Podsumowanie

MEASUREMENT UPDATES

$$\underline{\underline{P(X|Z)}} \propto P(Z|X) P(X)$$

← resampling ↑ importance weights ↗ particles

MOTION UPDATES

$$\underline{\underline{P(X^j)}} = \sum_{\text{Samples}} P(X^j|X) P(X)$$

↑ sample ↗ particles

Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo●oo

Zadanie

Czy orientacja cząstek ma znaczenie? [zadanie 13]

Wady i zalety

Przykład: <http://youtu.be/8-VFUhayUCI> (autor: Sebastian Thrun)

- Zalety:

- Proste w implementacji
- Zwykle działają bardzo dobrze
- Niewymagające obliczeniowo
- Działają dobrze nawet, gdy rozkłady:
 - niemonotoniczne
 - skomplikowane (niegaussowskie)

- Wady:

- Przekleństwo wymiarowości
 - \Rightarrow rozszerzenia (np. filtry Rao-Blackwellized)
- Zbyt mało cząstek \Rightarrow kłopoty
- Mało szumów \Rightarrow kłopoty

Problem lokalizacji
oo

Filtr Histogramowy
oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy
oooooooooooooooooooo●