

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
Na podstawie: AIMA ch15, Udacity (S. Thrun)

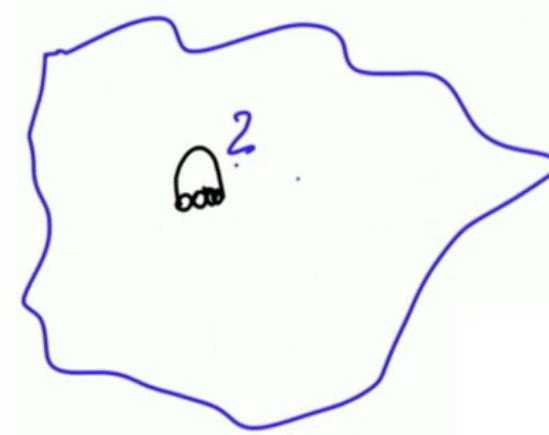
Bartosz Wieloch

Instytut Informatyki,  
Politechnika Poznańska

30 marca 2020

2020-03-30

## Problem lokalizacji



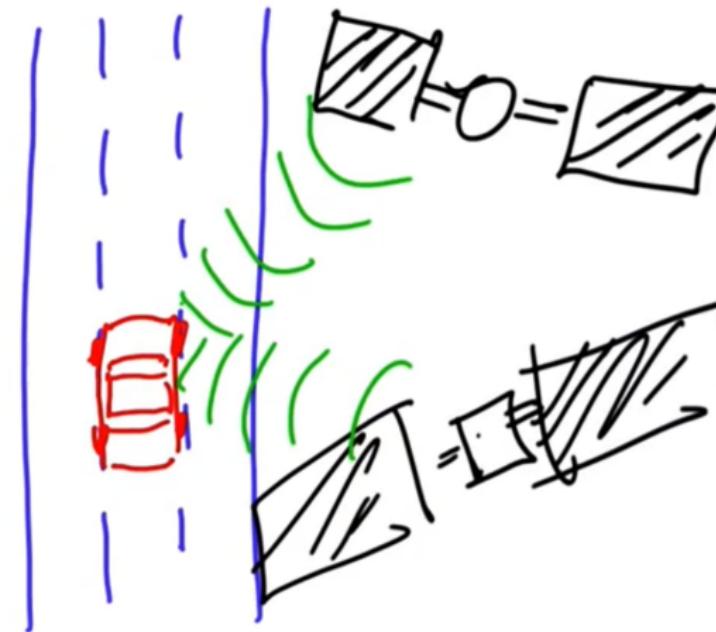
- Obserwonalność
  - Determinizm?

### Algorytmy estymacji stanu (filtry) └ Problem lokalizacji

## — Problem lokalizacji



# Problem lokalizacji



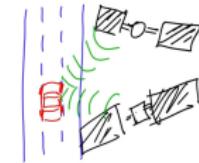
2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

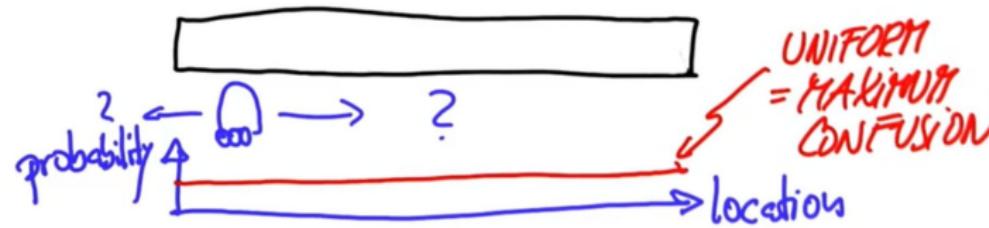
- Problem lokalizacji

- Problem lokalizacji

1. Dokładność GPS: 2m albo jeszcze więcej
2. Potrzebna dokładność: 2cm



# Filtr Histogramowy



## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr Histogramowy

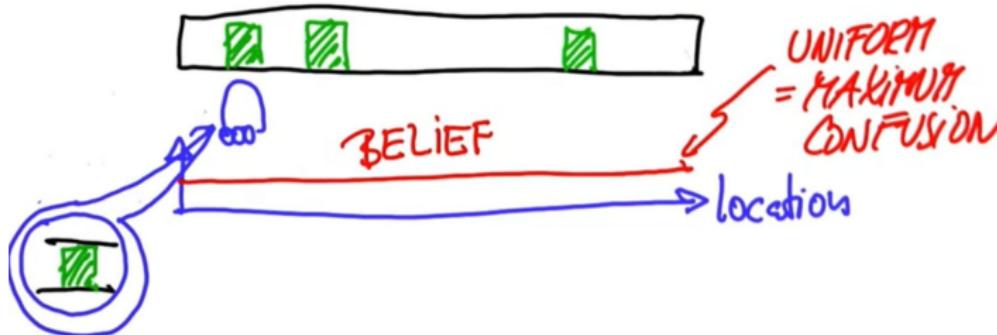
#### └ Filtr Histogramowy

2020-03-30

1. Robot nie wie gdzie jest - maksymalna dezorientacja.



# Filtr Histogramowy

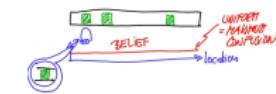


2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

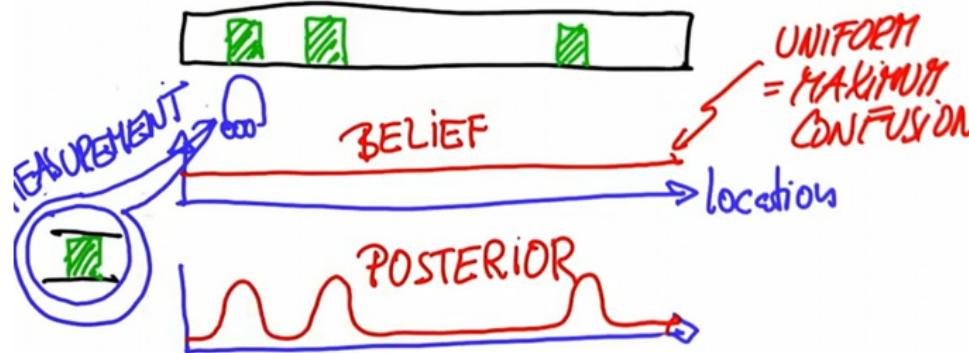
### └ Filtr Histogramowy

#### └ Filtr Histogramowy



1. Żeby się odnaleźć muszą być jakieś punkty orientacyjne. Tutaj: nierożróżnialne.

# Filtr Histogramowy



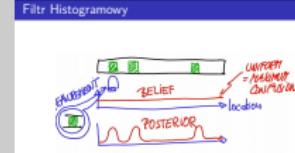
2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

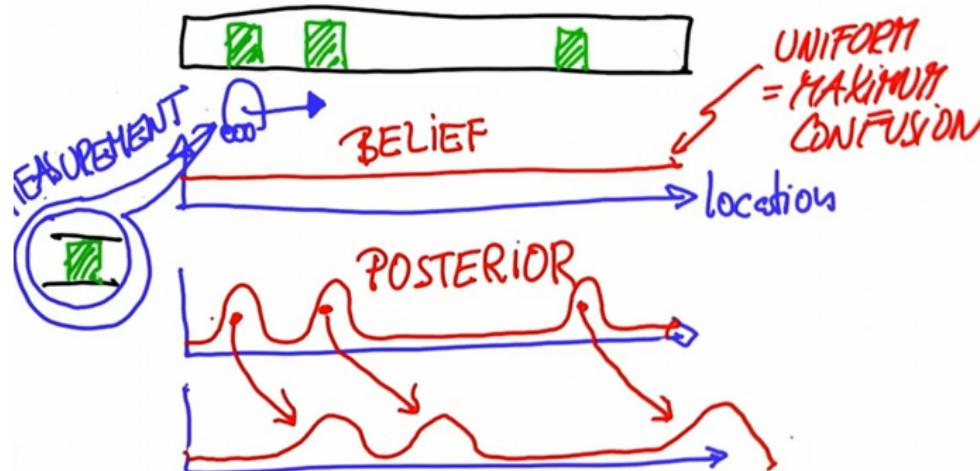
### └ Filtr Histogramowy

#### └ Filtr Histogramowy

1. Zakładamy, że obserwuje świat. Obserwacja (niepewna): jest przy drzwiach lub nie.



# Filtr Histogramowy

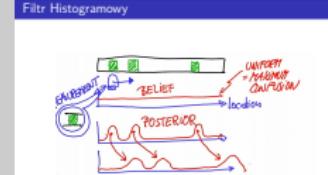


## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr Histogramowy

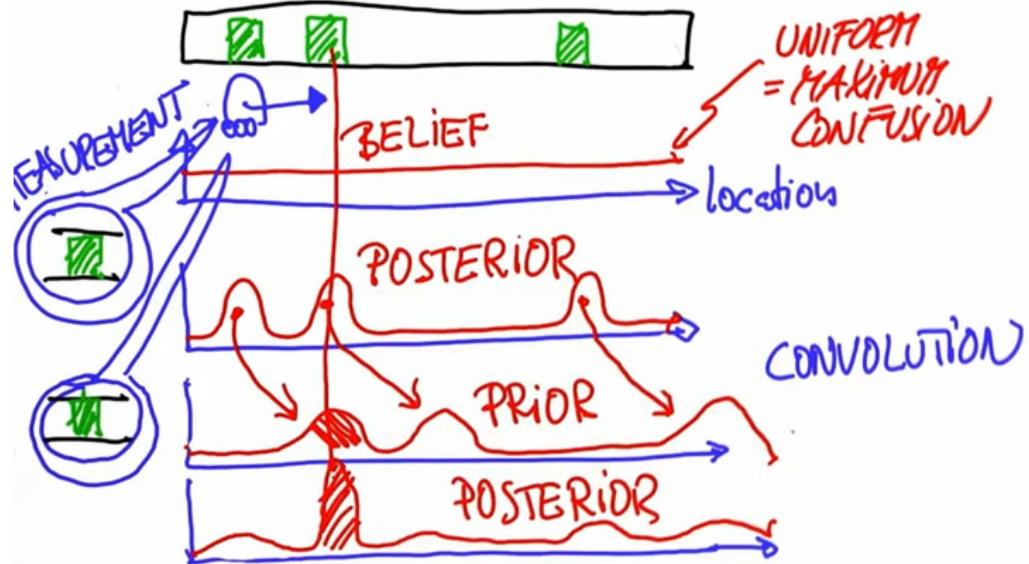
#### └ Filtr Histogramowy

2020-03-30



1. Najważniejszy krok: obserwacja (pomiar) drzwi przekształca naszą funkcję lokalizacji w nową funkcję (funkcję a posteriori: czyli po obserwacji)
2. Prawd. się zwiększa w pewnych miejscach z zmniejsza w innych
3. Ruch zawsze jest trochę niepewny: konwolucja

# Filtr Histogramowy

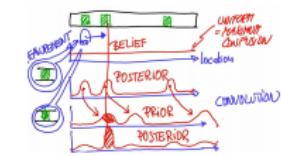


2020-03-30

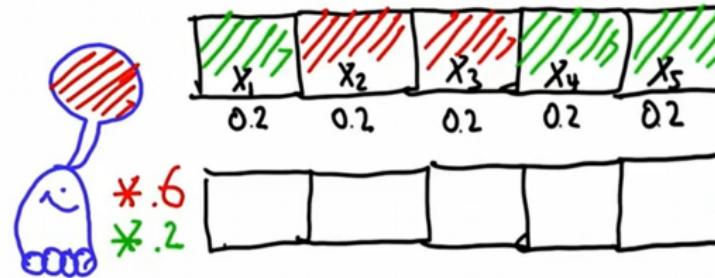
## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr Histogramowy

### └ Filtr Histogramowy



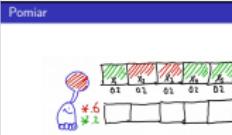
## Pomiar



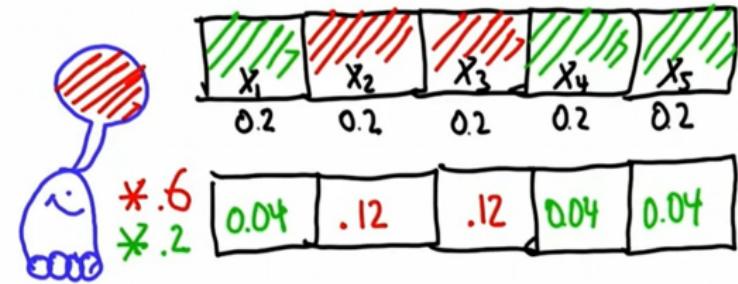
2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Histogramowy

## └ Pomiar



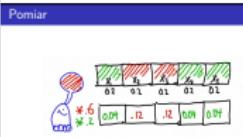
## Pomiar



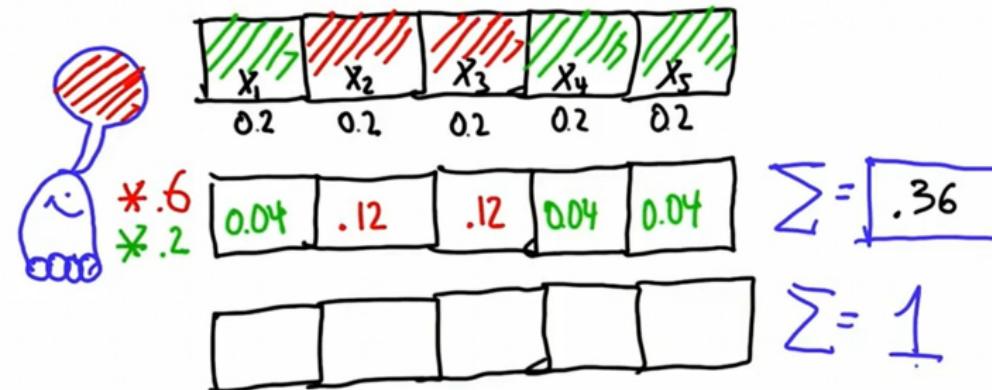
2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Histogramowy

## └ Pomiar



## Pomiar



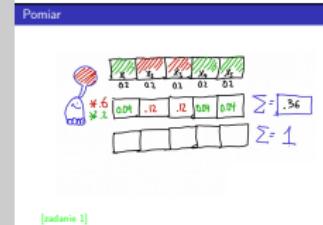
[zadanie 1]

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

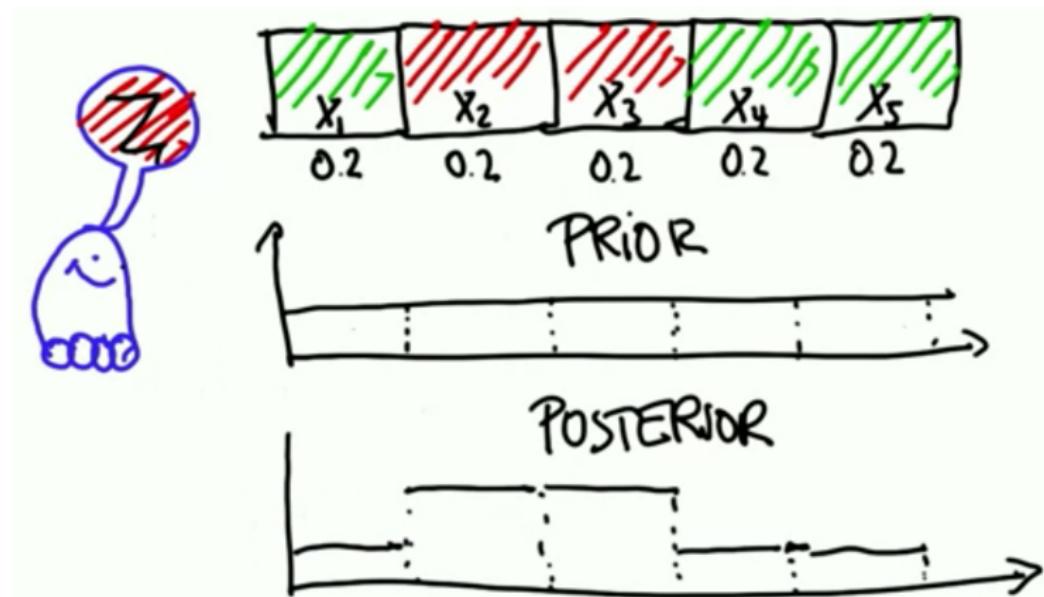
## └ Filtr Histogramowy

## └ Pomiar

2020-03-30



## Pomiar — wynik

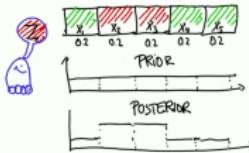


2020-03-30

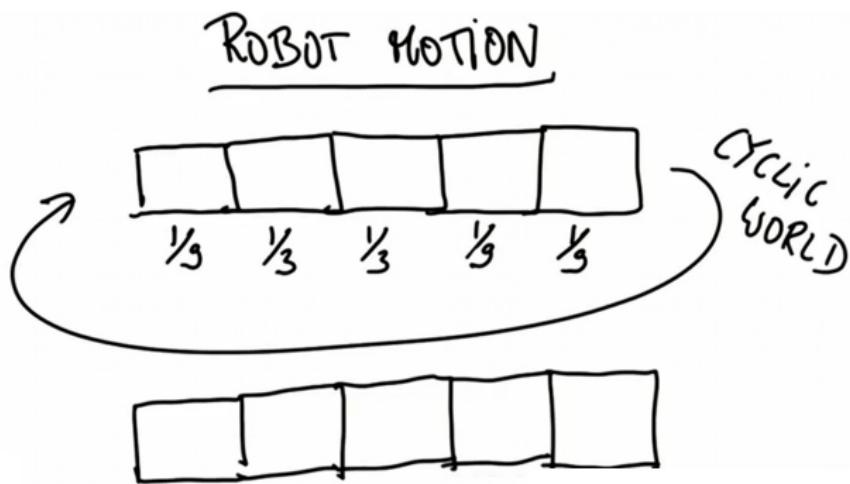
## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr Histogramowy

## └ Pomiar — wynik



## Ruch agenta

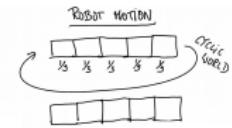


- Jak wygląda stan wiedzy (ang. belief) po ruchu o 1 pozycję w prawo? [\[zadanie 2\]](#)

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Histogramowy

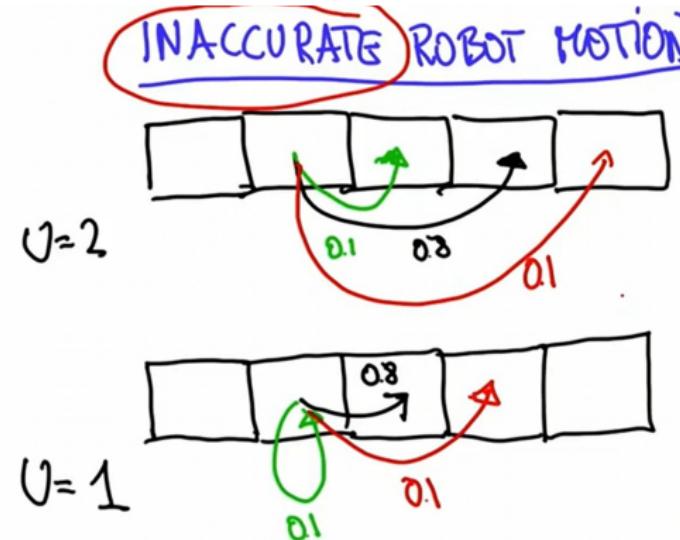
## └ Ruch agenta

2020-03-30



• Jak wygląda stan wiedzy (ang. belief) po ruchu o 1 pozycję w prawo? [\[zadanie 2\]](#)

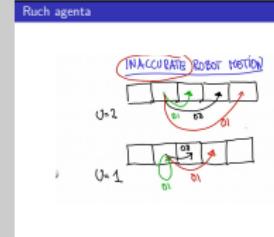
## Ruch agenta



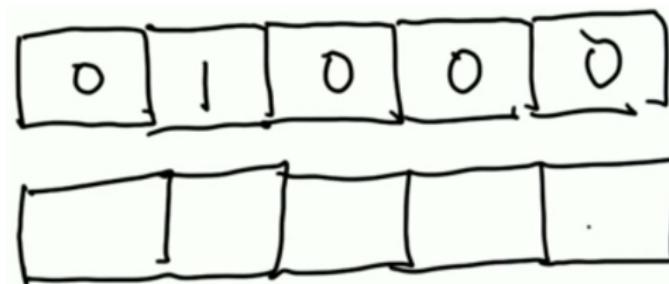
2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Histogramowy

## └ Ruch agenta



## (Niedokładny) ruch agenta



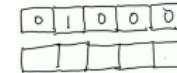
- $P(X_{i+2}|X_i) = 0.8$
- $P(X_{i+1}|X_i) = 0.1$
- $P(X_{i+3}|X_i) = 0.1$
- Jak wygląda rozkład po wykonaniu ruchu o 2 pola w prawo?  
[zadanie3]

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr Histogramowy

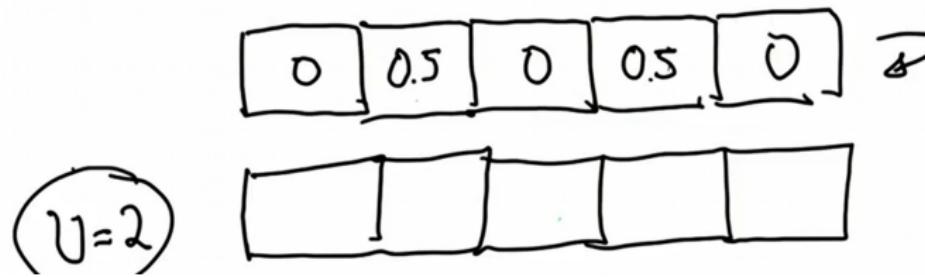
## └ (Niedokładny) ruch agenta

2020-03-30



- $P(X_{i+2}|X_i) = 0.8$
- $P(X_{i+1}|X_i) = 0.1$
- $P(X_{i+3}|X_i) = 0.1$
- Jak wygląda rozkład po wykonaniu ruchu o 2 pola w prawo?  
[zadanie3]

## (Niedokładny) ruch agenta



- $P(X_{i+2}|X_i) = 0.8$
- $P(X_{i+1}|X_i) = 0.1$
- $P(X_{i+3}|X_i) = 0.1$
- Jak wygląda rozkład po wykonaniu ruchu o 2 pola w prawo?  
[zadanie4]

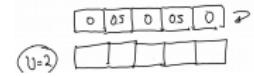
## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr Histogramowy

## └ (Niedokładny) ruch agenta

2020-03-30

1. 0.4;0.05;0.05;0.4;0.1



- $P(X_{i+2}|X_i) = 0.8$
- $P(X_{i+1}|X_i) = 0.1$
- $P(X_{i+3}|X_i) = 0.1$
- Jak wygląda rozkład po wykonaniu ruchu o 2 pola w prawo?  
[zadanie4]

Problem lokalizacji  
oo

Filtr Histogramowy  
oooooooooooo●ooooo

Filtr Kalmana  
oooooooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy  
oooooooooooooooooooooooo

## Ruch agenta



Limit Distribution



$U=1$   
 $U=1$   
 $J=1$   
 $U=1$

⋮

Jak wygląda rozkład w  $\infty$ ? [\[zadanie 5\]](#)

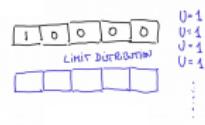
## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

- └ Filtr Histogramowy

- └ Ruch agenta

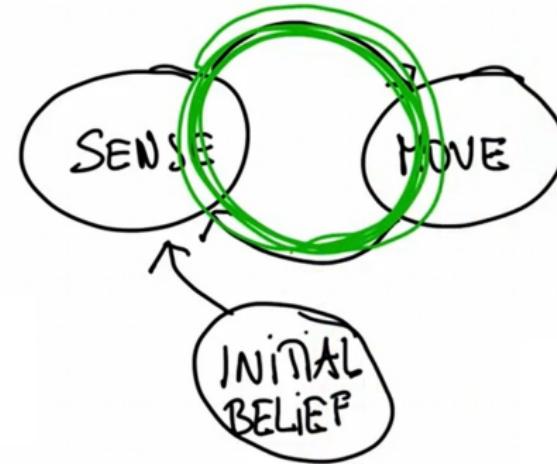
2020-03-30

Ruch agenta



Jak wygląda rozkład w  $\infty$ ? [\[zadanie 5\]](#)

## Lokalizacja



2020-03-30

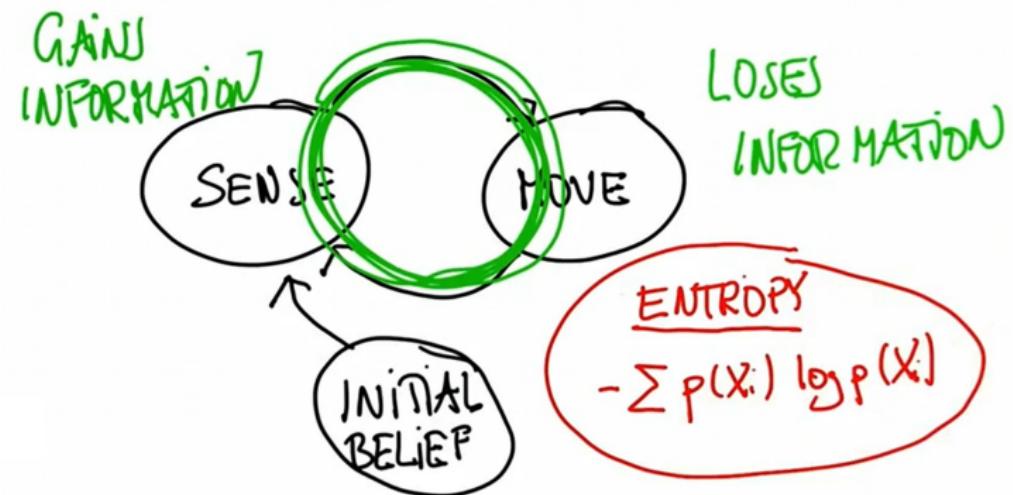
# Algorytmy estymacji stanu (filtry)

- └ Filtr Histogramowy
- └ Lokalizacja

Lokalizacja



## Lokalizacja



2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Histogramowy

## └ Lokalizacja

Lokalizacja



# Lokalizacja — podsumowanie

- **Stan wiedzy:** rozkład prawdopodobieństwa
- **Obserwacja:** iloczyn (stan wiedzy, pomiar) + normalizacja
- **Ruch:** konwolucja (stan wiedzy, model ruchu)

2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr Histogramowy

#### └ Lokalizacja — podsumowanie

# Lokalizacja — podstawy matematyczne (obserwacja)

Zmienne losowe:

- $X$  — robot jest na danym polu ( $X = x_i$  znaczy, że jest na polu i-tym)
- $Z$  — wynik pomiaru
- $\mathbf{P}(X|Z) = \frac{\mathbf{P}(Z|X)\mathbf{P}(X)}{\mathbf{P}(Z)}$ 
  - $\mathbf{P}(X)$  — rozkład a priori
  - $\mathbf{P}(Z|X)$  — rozkład prawd. pomiaru
  - $\mathbf{P}(Z)$  — normalizacja
    - $\mathbf{P}(Z) = \sum_i \mathbf{P}(Z|x_i)\mathbf{P}(x_i) = \alpha$

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr Histogramowy

#### └ Lokalizacja — podstawy matematyczne (obserwacja)

2020-03-30

## Zmienne losowe:

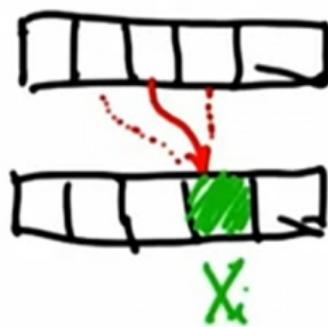
- $X$  — robot jest na danym polu ( $X = x_i$  znaczy, że jest na polu i-tym)
- $Z$  — wynik pomiaru
- $\mathbf{P}(X|Z) = \frac{\mathbf{P}(Z|X)\mathbf{P}(X)}{\mathbf{P}(Z)}$ 
  - $\mathbf{P}(X)$  — rozkład a priori
  - $\mathbf{P}(Z|X)$  — rozkład prawd. pomiaru
  - $\mathbf{P}(Z)$  — normalizacja
    - $\mathbf{P}(Z) = \sum_i \mathbf{P}(Z|x_i)\mathbf{P}(x_i) = \alpha$

# Lokalizacja — podstawy matematyczne (ruch)

Konwolucja:

$$P(x_i^t) = \sum_j P(x_j^{t-1})P(x_i|x_j)$$

- **P(X<sup>t-1</sup>)** — rozkład prawd. a priori (np.  $P(x_i^{t-1})$ )
- **P(X|X)** — rozkład prawd. związań z wiedzą na temat ruchu (np.  $P(x_i|x_j)$ )



## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr Histogramowy

#### └ Lokalizacja — podstawy matematyczne (ruch)

2020-03-30

$$P(x_i^t) = \sum_j P(x_j^{t-1})P(x_i|x_j)$$

- **P(X<sup>t-1</sup>)** — rozkład prawd. a priori (np.  $P(x_i^{t-1})$ )
- **P(X|X)** — rozkład prawd. związań z wiedzą na temat ruchu (np.  $P(x_i|x_j)$ )



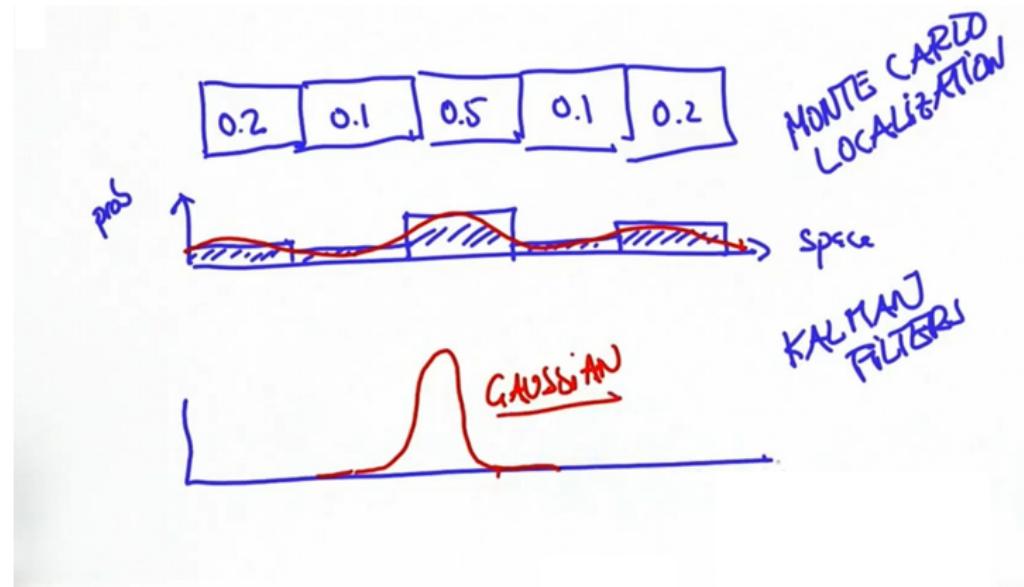
# Porównanie estymacji stanu

Metoda	stanowość	rozkład
Filtr histogramowy	dyskretny	multimodalny
Filtr Kalmana	ciągły	unimodalny

Metoda	stanowość	rozkład
Filtr histogramowy	dyskretny	multimodalny
Filtr Kalmana	ciągły	unimodalny

2020-03-30

# Funkcja gaussowska



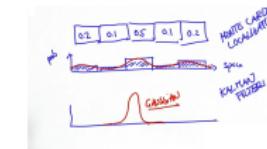
## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr Kalmana

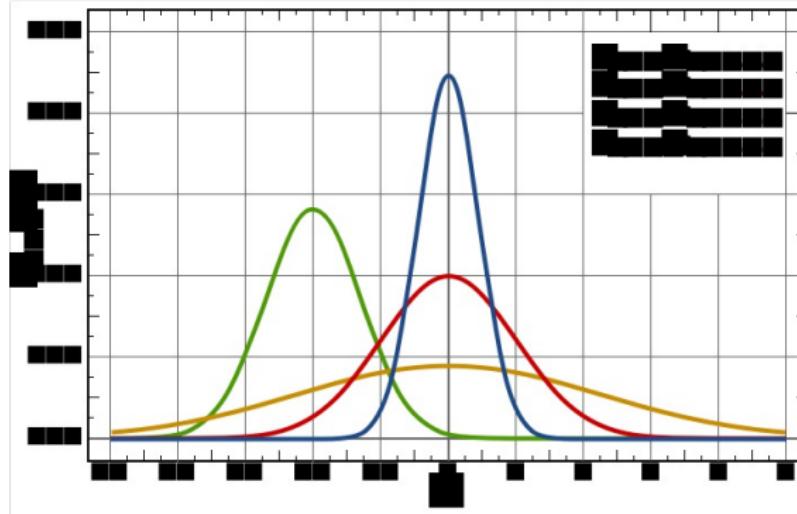
#### └ Funkcja gaussowska

1. Tam: Histogram, Tu: Gausian

2020-03-30



# Funkcja gaussowska



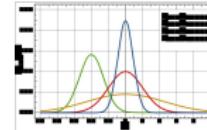
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

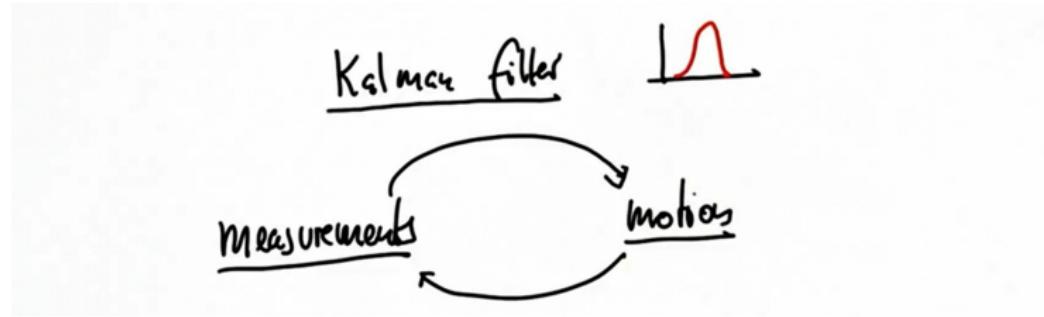
### └ Filtr Kalmana

### └ Funkcja gaussowska



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

# Pomiar i ruch



- Pomiar: (iloczyn/bayes czy konwolucja/prawd. całkowite?)**[zadanie 6]**
- Ruch: (iloczyn/bayes czy konwolucja/prawd. całkowite?)

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr Kalmana

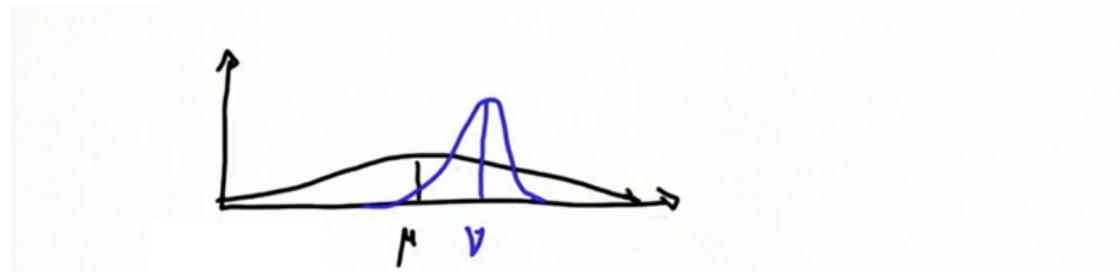
#### └ Pomiar i ruch

2020-03-30



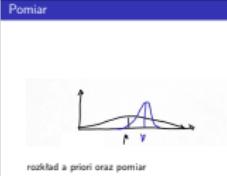
- Pomiar: (iloczyn/bayes czy konwolucja/prawd. całkowite?)**[zadanie 6]**
- Ruch: (iloczyn/bayes czy konwolucja/prawd. całkowite?)

## Pomiar



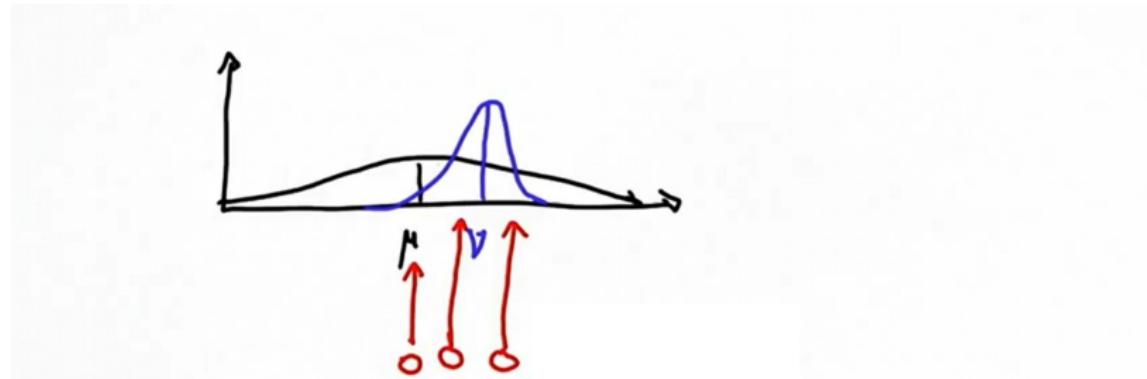
rozkład a priori oraz pomiar

2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Kalmana  
└ Pomiar

1. Co oznacza f. gausowska? Oznacza, że otrzymaliśmy wynik pomiaru  $\nu$ , ale jest on niepewny, co wyraża niebieska krzywa.

## Pomiar

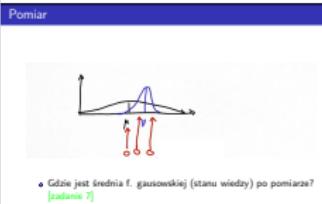


- Gdzie jest średnia f. gausowskiej (stanu wiedzy) po pomiarze?  
[zadanie 7]

2020-03-30

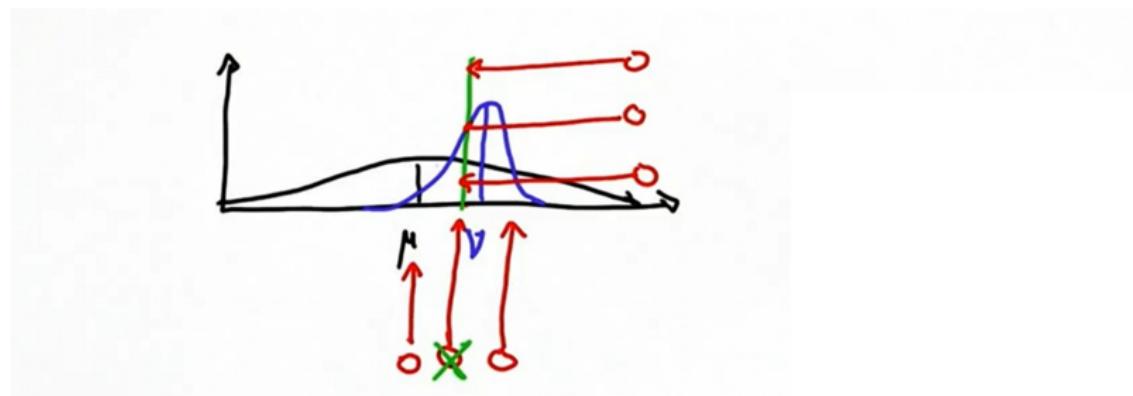
Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Kalmana

## └ Pomiar



• Gdzie jest średnia f. gausowskiej (stanu wiedzy) po pomiarze?  
[zadanie 7]

## Pomiar

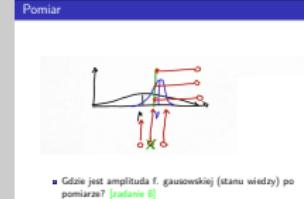


- Gdzie jest amplituda f. gausowskiej (stanu wiedzy) po pomiarze? [zadanie 8]

2020-03-30

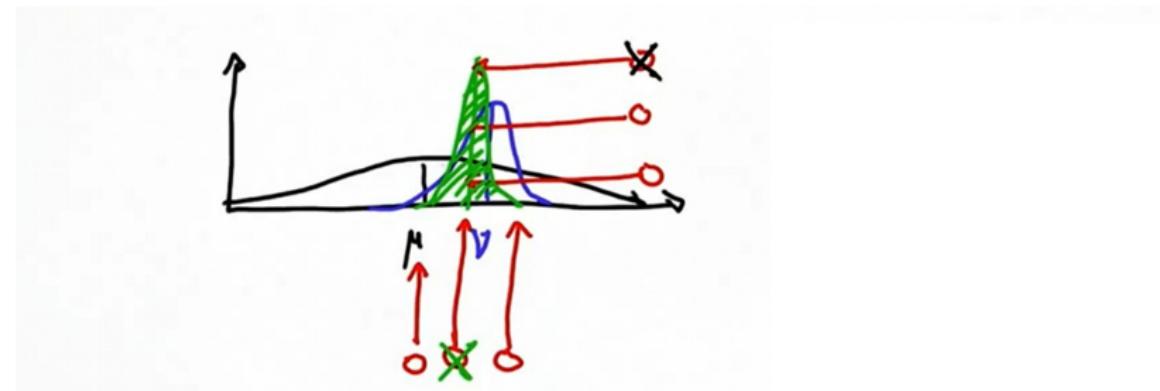
## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

- └ Filtr Kalmana
- └ Pomiar



1. U góry (nie jest to intuicyjne na pierwszy rzut oka. Chodzi o to, że dwa gausy mają więcej informacji niż jeden. Zysk informacyjny.)

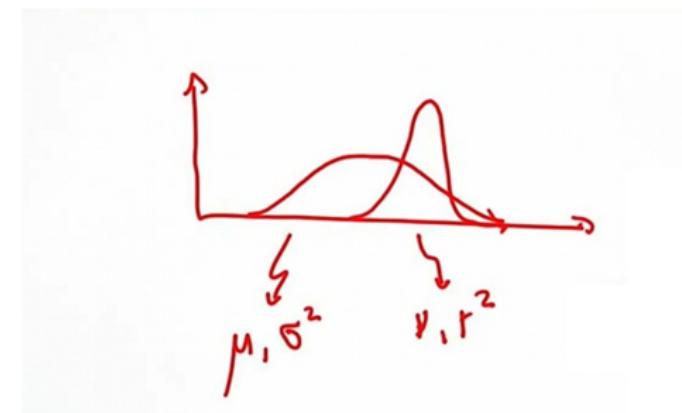
## Pomiar



2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Kalmana  
└ Pomiar

## Pomiar — wzory



Aktualizacja stanu wiedzy po pomiarze (mnożenie f. gaussowskich):

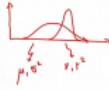
$$\mu' = \frac{r^2 \mu + \sigma^2 \nu}{r^2 + \sigma^2}$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Kalmana

## └ Pomiar — wzory

2020-03-30



Aktualizacja stanu wiedzy po pomiarze (mnożenie f. gaussowskich):

$$\mu' = \frac{r^2 \mu + \sigma^2 \nu}{r^2 + \sigma^2}$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

## Zadanie na pobudkę

- $\mu = 10$
- $\nu = 12$
- $\sigma^2 = 4$
- $r^2 = 4$

Policz  $\mu'$  i  $\sigma^{2'}$  [zadanie 9]

$$\mu' = \frac{r^2\mu + \sigma^2\nu}{r^2 + \sigma^2}$$

$$\sigma^{2'} = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr Kalmana

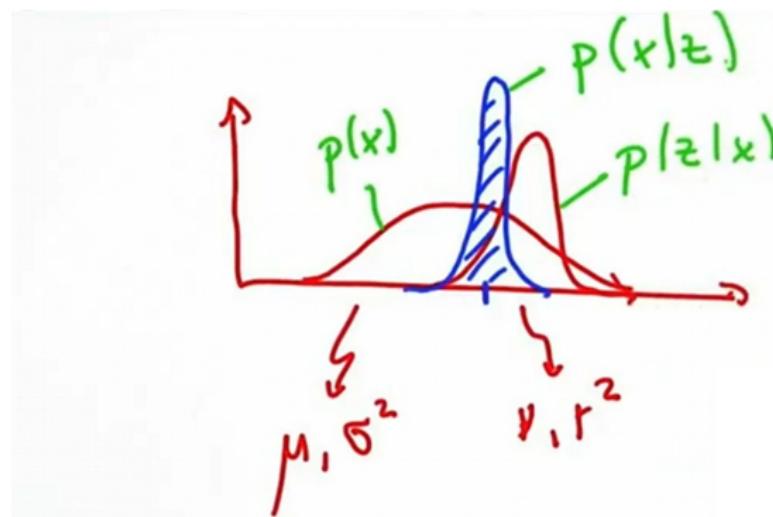
## └ Zadanie na pobudkę

■  $\mu = 10$ ■  $\nu = 12$ ■  $\sigma^2 = 4$ ■  $r^2 = 4$ Policz  $\mu'$  i  $\sigma^{2'}$  [zadanie 9]

$$\mu' = \frac{r^2\mu + \sigma^2\nu}{r^2 + \sigma^2}$$

$$\sigma^{2'} = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

## Pomiar — wzory



- $P(X)$  — rozkład a priori
- $P(Z|X)$  — pomiar
- $P(X|Z)$  — rozkład a posteriori

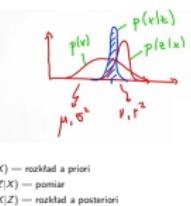
## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr Kalmana

## └ Pomiar — wzory

2020-03-30

1. Przykład z dwoma peakami z dwóch stron. Pokazać jak to wychodzi ze wzoru



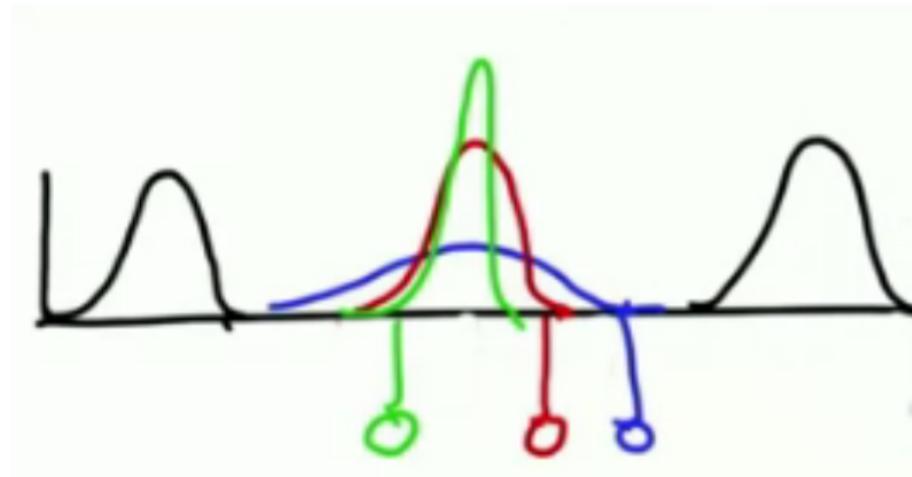
Problem lokalizacji  
oo

Filtr Histogramowy  
ooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana  
oooooooooooo●oooooooooooo

Filtr cząsteczkowy  
oooooooooooooooooooooooo

## Pomiar — pytanie na koniec



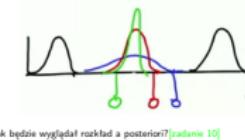
Jak będzie wyglądał rozkład a posteriori? [\[zadanie 10\]](#)

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr Kalmana

└ Pomiar — pytanie na koniec

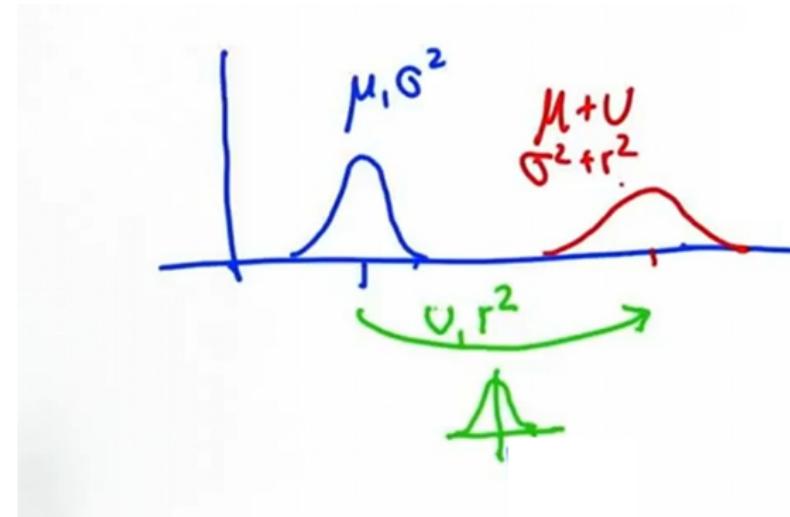
2020-03-30

Pomiar — pytanie na koniec



Jak będzie wyglądał rozkład a posteriori? [\[zadanie 10\]](#)

## Ruch — wzory



Aktualizacja stanu wiedzy po ruchu:

$$\mu' = \mu + \nu$$

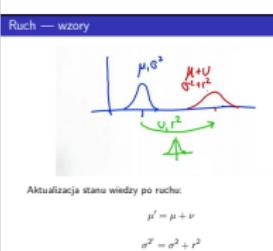
$$\sigma'^2 = \sigma^2 + r^2$$

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

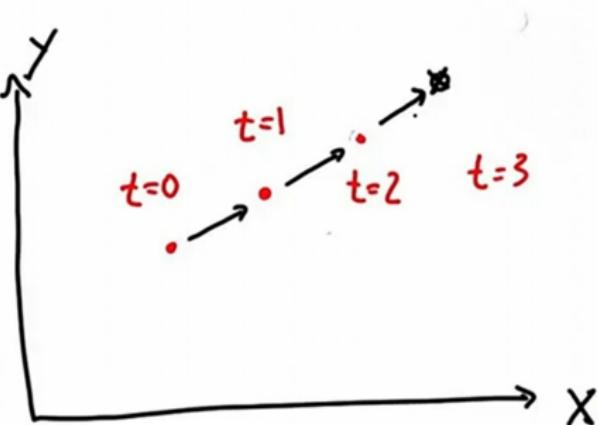
## └ Filtr Kalmana

## └ Ruch — wzory

2020-03-30

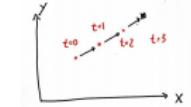


# Wielowymiarowy filtr Kalmana



- Potrafi przewidywać pozycję na podstawie wiedzy o prędkości (bez jej pomiarów)

2020-03-30



• Potrafi przewidywać pozycję na podstawie wiedzy o prędkości (bez jej pomiarów)

## Wielowymiarowa f. gaussowska

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_D \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \cdots & & \\ & \cdots & \\ & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right)$$

2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr Kalmana

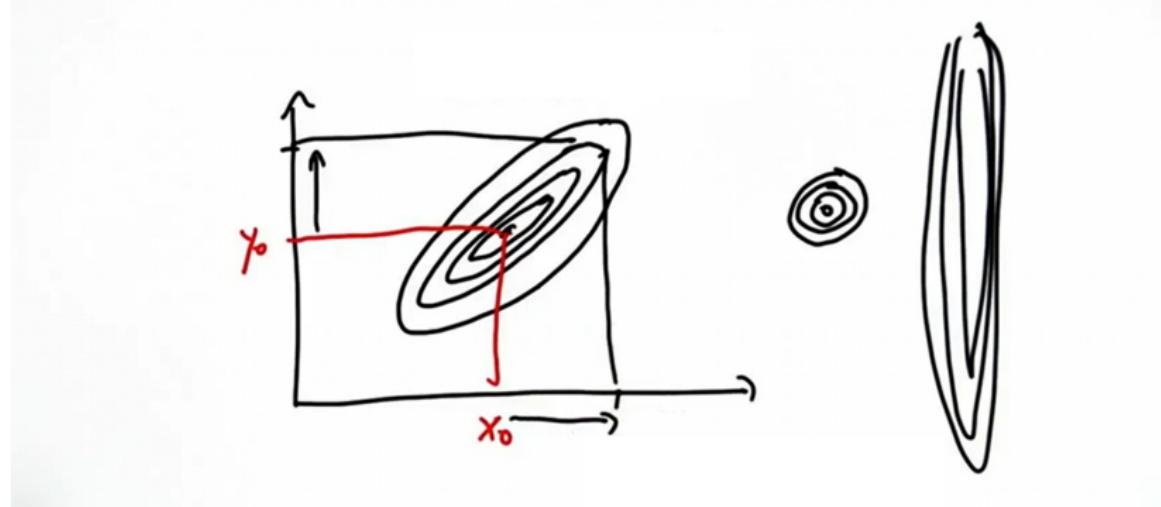
## └ Wielowymiarowa f. gaussowska

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_D \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \cdots & & \\ & \cdots & \\ & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right)$$

## Wielowymiarowa f. gaussowska

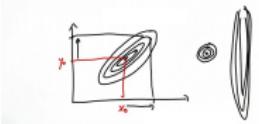


2020-03-30

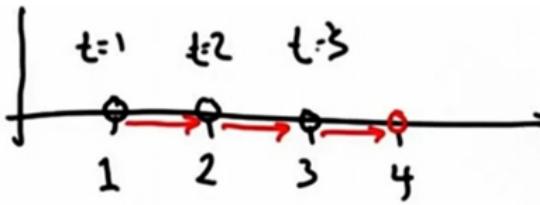
## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

└ Filtr Kalmana

└ Wielowymiarowa f. gaussowska



# Wielowymiarowy filtr Kalmana



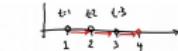
2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

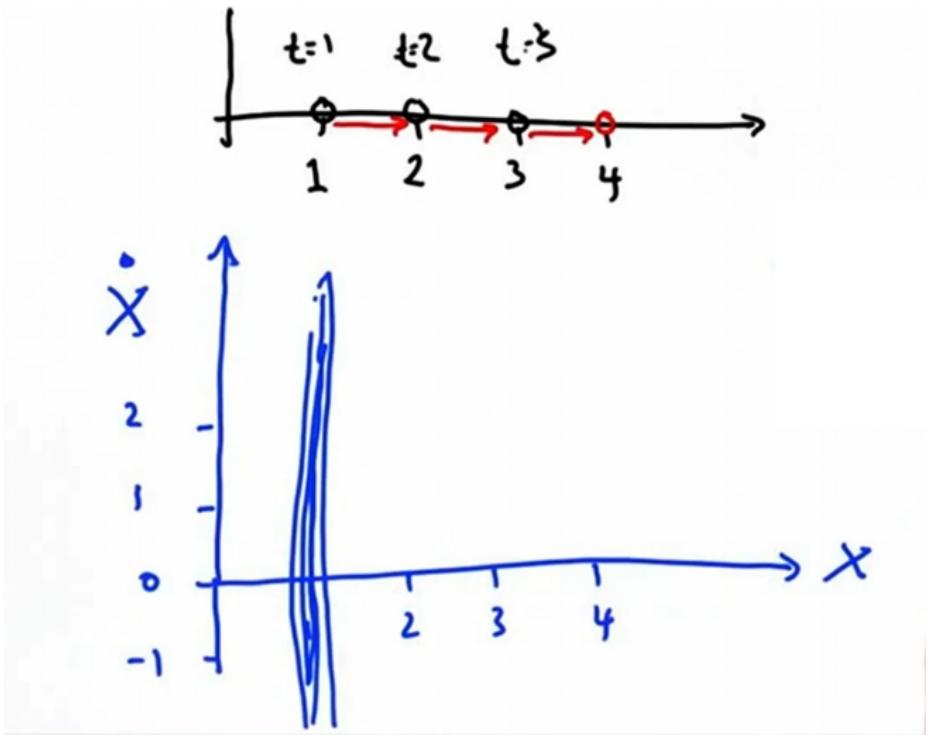
### └ Filtr Kalmana

#### └ Wielowymiarowy filtr Kalmana

Wielowymiarowy filtr Kalmana



# Wielowymiarowy filtr Kalmana



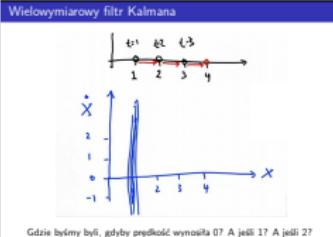
Gdzie byśmy byli, gdyby prędkość wynosiła 0? A jeśli 1? A jeśli 2?

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

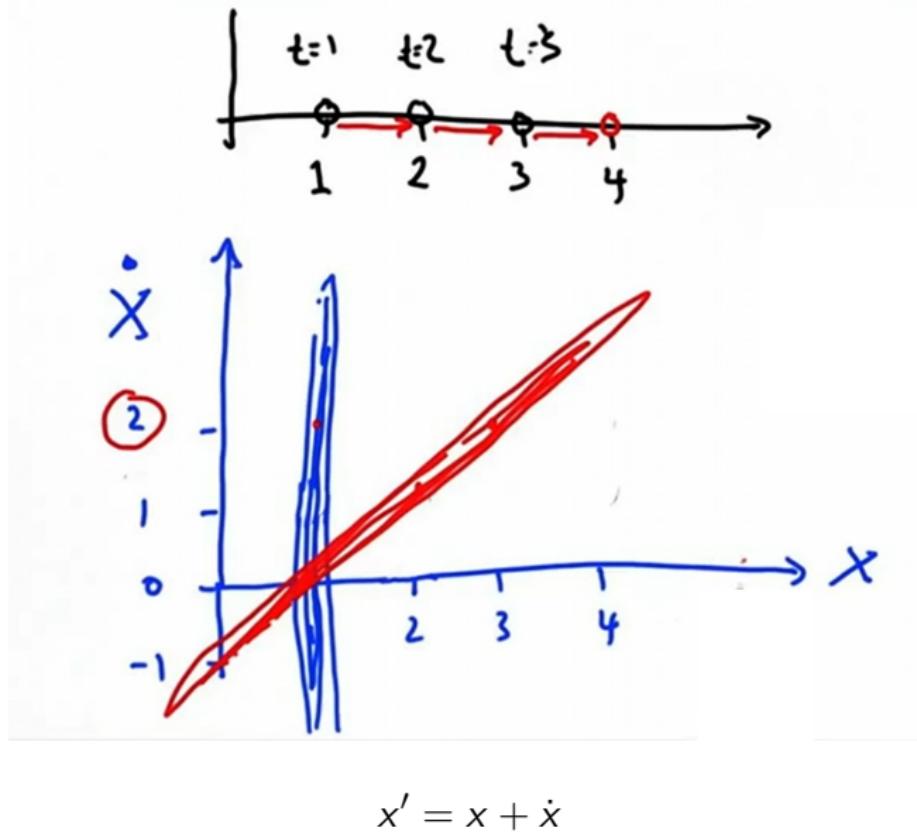
└ Filtr Kalmana

└ Wielowymiarowy filtr Kalmana

2020-03-30



## Wielowymiarowy filtr Kalmana (predykcja)

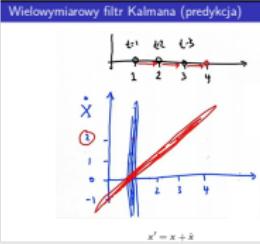


2020-03-30

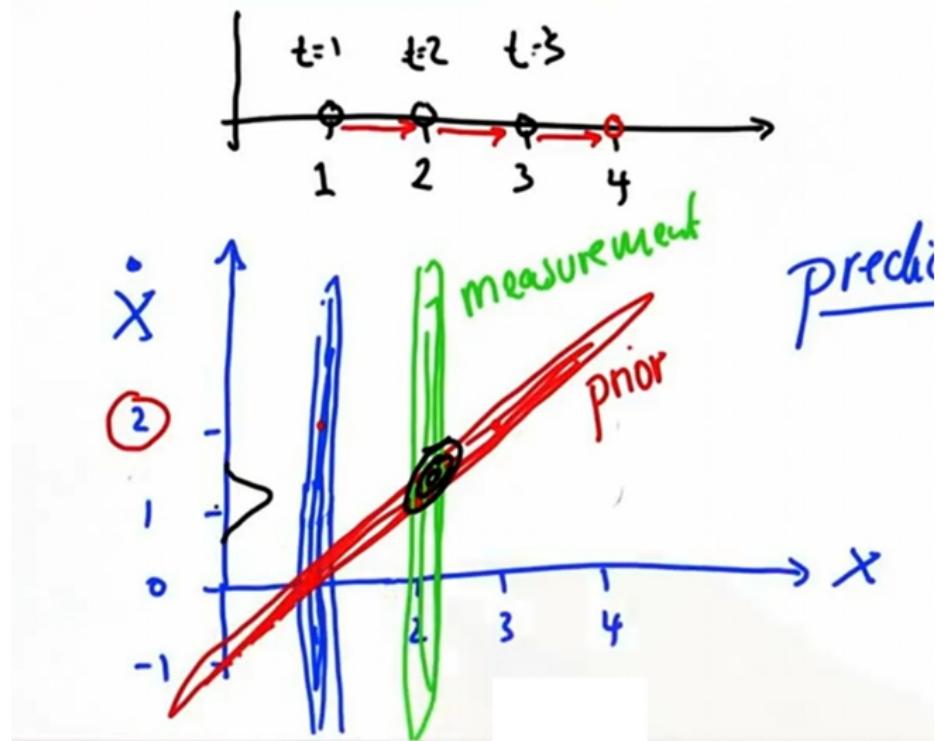
## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr Kalmana

## └ Wielowymiarowy filtr Kalmana (predykcja)



# Wielowymiarowy filtr Kalmana



$x$  - obserwowane

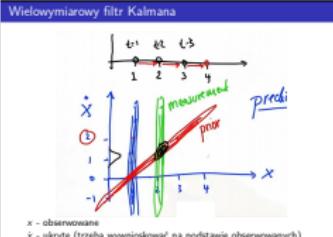
$\dot{x}$  - ukryte (trzeba wywnioskować na podstawie obserwanych)

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr Kalmana

### └ Wielowymiarowy filtr Kalmana

2020-03-30



## Projektowanie filtru Kalmana

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ \dot{x}' \end{pmatrix} &\leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \\ z &\leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_H \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $F$  — funkcja przejścia
- $H$  — funkcja pomiaru („co obserwujemy”)

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr Kalmana

## └ Projektowanie filtru Kalmana

2020-03-30

$\begin{pmatrix} x' \\ \dot{x}' \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$

$z \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$

■  $F$  — funkcja przejścia  
■  $H$  — funkcja pomiaru („co obserwujemy”)

# Projektowanie filtru Kalmana — równania

- $x$  — estymata
- $P$  — macierz kowariancji (niepewność)
- $F$  — funkcja przejścia
- $u$  — wektor ruchu
- $z$  — pomiar
- $H$  — funkcja pomiaru
- $R$  — niepewność pomiaru
- $\mathbf{1}$  — macierz jednostkowa

Ruch:

- $x' = Fx + u$
- $P' = FPF^T$

Pomiar:

- $y = z - Hx$
- $S = HPH^T + R$
- $K = PH^TS^{-1}$
- $x' = x + (Ky)$
- $P' = (\mathbf{1} - KH)P$

Algorytmy estymacji stanu (filtry)

- └ Filtr Kalmana

└ Projektowanie filtru Kalmana — równania

Projektowanie filtru Kalmana — równania

2020-03-30

**Ruch:**

- $x$  — estymata
- $P$  — macierz kowariancji (niepewność)
- $F$  — funkcja przejścia
- $u$  — wektor ruchu
- $x$  — pomiar
- $H$  — funkcja pomiaru
- $R$  — niepewność pomiaru
- $\mathbf{1}$  — macierz jednostkowa

**Ruch:**

- $x' = Fx + u$
- $P' = FPF^T$

**Pomiar:**

- $y = z - Hx$
- $S = HPH^T + R$
- $K = PH^TS^{-1}$
- $x' = x + (Ky)$
- $P' = (\mathbf{1} - KH)P$

## Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	

2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr cząsteczkowy

## └ Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	

## Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	
Filtr cząsteczkowy	<b>ciągła</b>	<b>multimodalny</b>	

2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr cząsteczkowy

## └ Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	
Filtr cząsteczkowy	ciągła	multimodalny	

## Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	$O(N^D)$
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	$O(D^2)$
Filtr cząsteczkowy	<b>ciągła</b>	<b>multimodalny</b>	„szybki”

2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr cząsteczkowy

## └ Porównanie

1. Gdzie  $D$  jest liczbą wymiarów przestrzeni.

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	$O(N^D)$
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	$O(D^2)$
Filtr cząsteczkowy	ciągła	multimodalny	„szybki”

# Zalety filtru cząsteczkowego

Filtr cząsteczkowy:

- bardzo prosty w implementacji
- bardzo elastyczny

Przykład działania: <http://youtu.be/Crt1TkFF-ds> (autor:  
Szymon Kaliski)

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr cząsteczkowy

#### └ Zalety filtru cząsteczkowego

2020-03-30

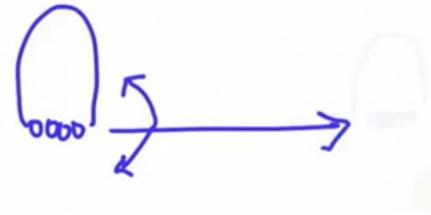
Problem lokalizacji  
oo

Filtr Histogramowy  
ooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana  
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy  
oooo●oooooooooooo

Robot



2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

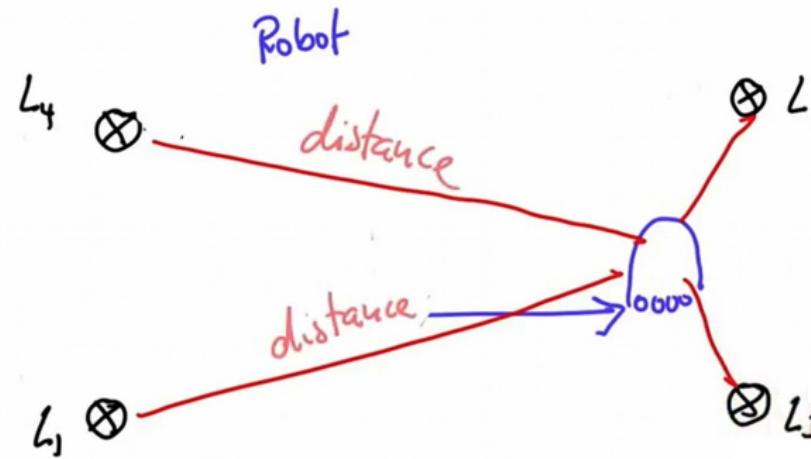
- └ Filtr cząsteczkowy

- └ Robot



Robot

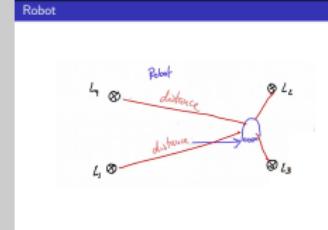
## Robot



2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr cząsteczkowy

## └ Robot



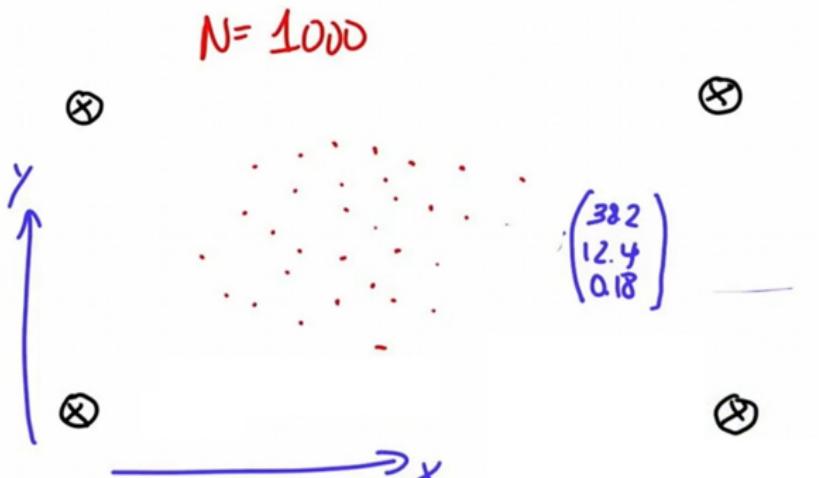
Problem lokalizacji  
oo

Filtr Histogramowy  
ooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana  
oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy  
oooooo●oooooooooooo

## Filtr cząsteczkowy



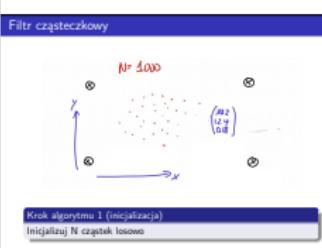
Krok algorytmu 1 (inicjalizacja)

Inicjalizuj N cząstek losowo

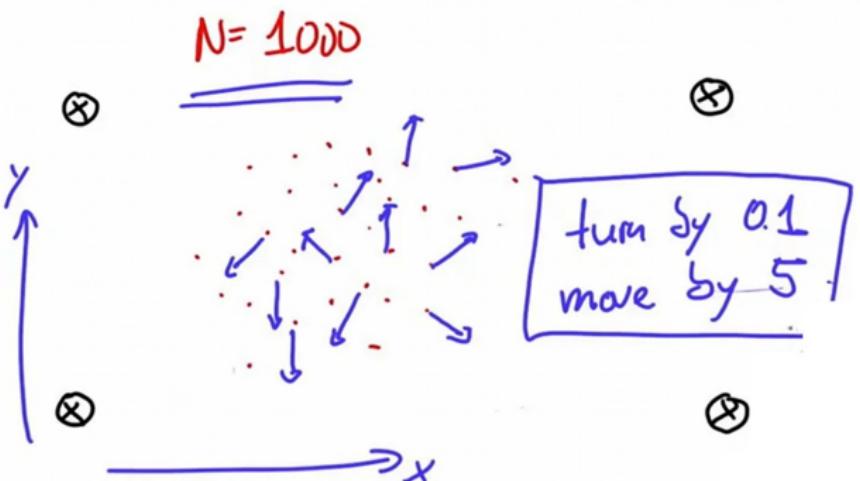
2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr cząsteczkowy

└ Filtr cząsteczkowy



# Filtr cząsteczkowy



## Krok algorytmu 2 (ruch robota)

Wykonaj ruch zgodnie z (zamierzonym) ruchem robota.

Do ruchu dodaj trochę szumu, aby algorytm nie zbiegł do punktu.

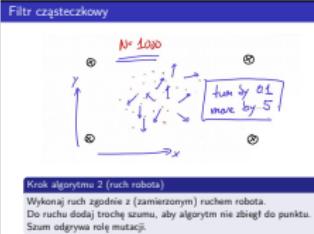
Szum odgrywa rolę mutacji.

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

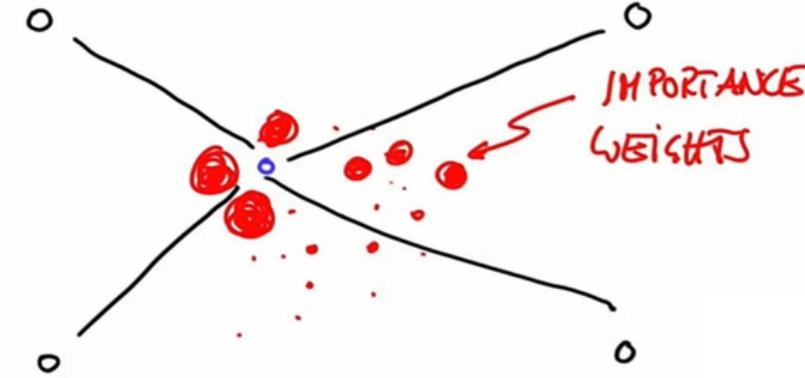
### └ Filtr cząsteczkowy

#### └ Filtr cząsteczkowy

2020-03-30



# Filtr cząsteczkowy



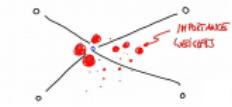
2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

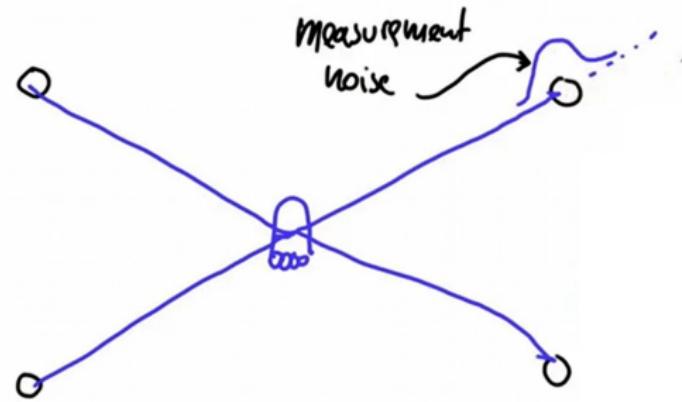
- └ Filtr cząsteczkowy

- └ Filtr cząsteczkowy

Filtr cząsteczkowy



# Filtr cząsteczkowy



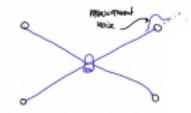
2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

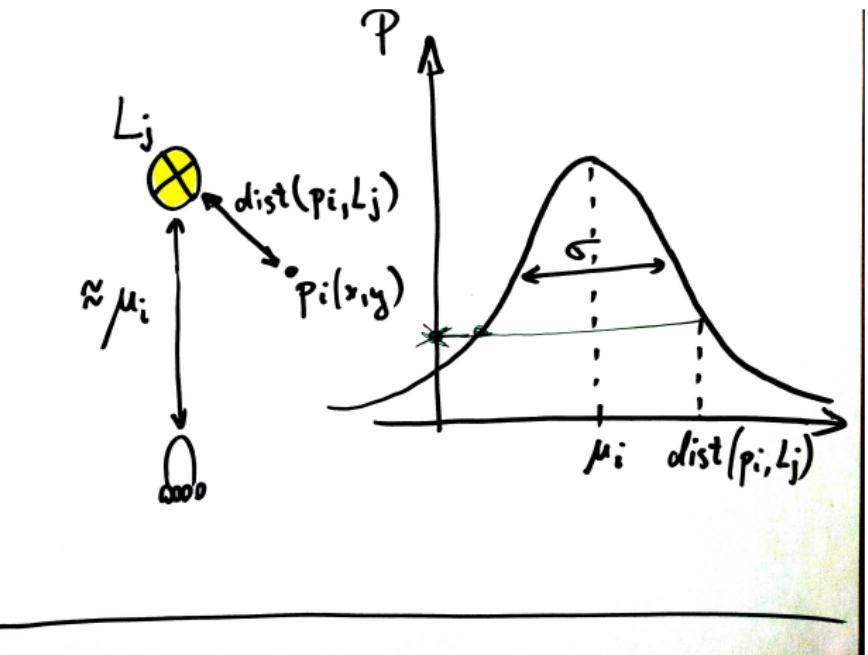
- └ Filtr cząsteczkowy

- └ Filtr cząsteczkowy

Filtr cząsteczkowy



## Filtr cząsteczkowy (wagi cząsteczek)



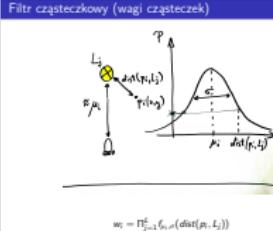
$$w_i = \prod_{j=1}^L f_{\mu_i, \sigma}(dist(p_i, L_j))$$

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

└ Filtr cząsteczkowy

└ Filtr cząsteczkowy (wagi cząsteczek)

2020-03-30



$$w_i = \prod_{j=1}^L f_{\mu_i, \sigma_i}(dist(p_i, L_j))$$

# Filtr cząsteczkowy

## Krok algorytmu 3 (przydział wag)

Przydziel wagę cząsteczkom (prawd. pomiaru). Dla każdej cząsteczki  $p_i$ :

$$w_i = \prod_{j=1}^L f_{\mu_i, \sigma}(dist(p_i, L_j))$$

gdzie:

- $f$  — funkcja gaussowska
- $\mu_i$  — pomiar dla punktu orientacyjnego  $i$
- $\sigma$  — niepewność pomiaru (sensorów)
- $dist(p_i, L_j)$  — odległość pomiędzy pozycją  $i$ -tej cząsteczki a  $j$ -tym punktem orientacyjnym

2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr cząsteczkowy

#### └ Filtr cząsteczkowy

#### Filtr cząsteczkowy

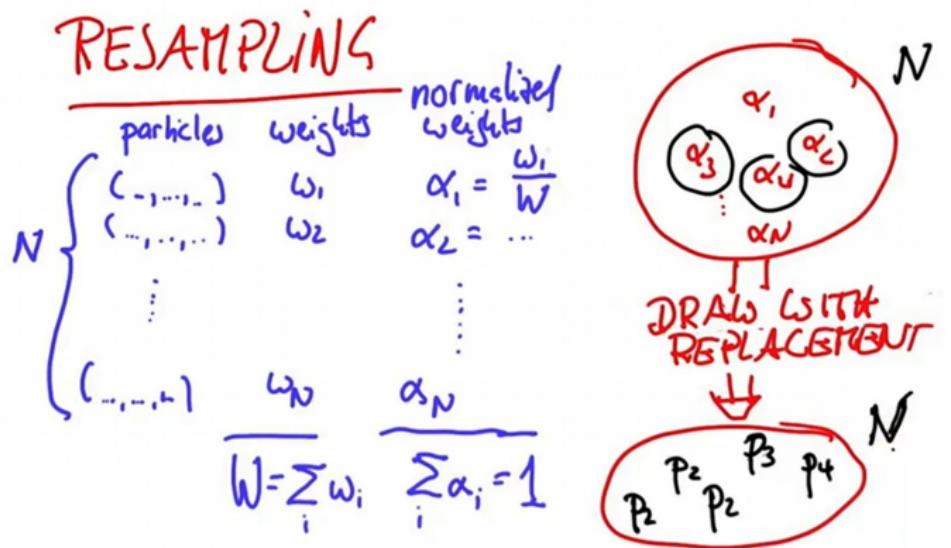
**Krok algorytmu 3 (przydział wag)**  
Przydziel wagę cząsteczkom (prawd. pomiaru). Dla każdej cząsteczki  $p_i$ :

$$w_i = \prod_{j=1}^L f_{\mu_i, \sigma}(dist(p_i, L_j))$$

gdzie:

- $f$  — funkcja gaussowska
- $\mu_i$  — pomiar dla punktu orientacyjnego  $i$
- $\sigma$  — niepewność pomiaru (sensorów)
- $dist(p_i, L_j)$  — odległość pomiędzy pozycją  $i$ -tej cząsteczki a  $j$ -tym punktem orientacyjnym

## Selekcja (ponowne próbkowanie)



Krok algorytmu 4 (próbkowanie)

Próbkuj populację cząstek

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr cząsteczkowy

## └ Selekcja (ponowne próbkowanie)

2020-03-30



## Selekcja — przykład

- $N = 5$
- $w = \{w_1 = 0.6, w_2 = 1.2, w_3 = 2.4, w_4 = 0.6, w_5 = 1.2\}$
- Jakie jest prawd **niewylosowania  $p_3$ ?** [\[zadanie 11\]](#)
- Jakie jest prawd **niewylosowania  $p_1$ ?** [\[zadanie 12\]](#)

2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

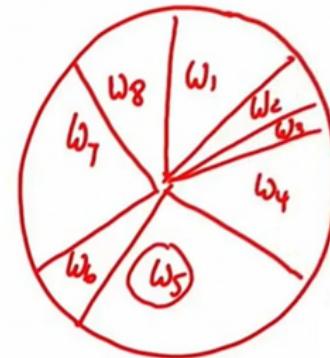
## └ Filtr cząsteczkowy

## └ Selekcja — przykład

1. 0.0777
2. 0.59

- $N = 5$
- $w = \{w_1 = 0.6, w_2 = 1.2, w_3 = 2.4, w_4 = 0.6, w_5 = 1.2\}$
- Jakie jest prawd niewylosowania  $p_3$ ? [\[zadanie 11\]](#)
- Jakie jest prawd niewylosowania  $p_1$ ? [\[zadanie 12\]](#)

## Selekcja ruletkowa



2020-03-30

Algorytmy estymacji stanu (filtry)  
└ Filtr cząsteczkowy  
    └ Selekcja ruletkowa

Selekcja ruletkowa



## Selekcja (szybsza)

```
mx = max(w)
b = 0
idx = randint(0,N)
for i in range(N):
    b += random(0, 2*mx)
    while w[idx] < b:
        b -= w[idx]
        idx = (idx + 1) % N
resampled.append(idx)
```

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr cząsteczkowy

## └ Selekcja (szybsza)

2020-03-30

```
mx = max(w)
b = 0
idx = randint(0,N)
for i in range(N):
    b += random(0, 2*mx)
    while w[idx] < b:
        b -= w[idx]
        idx = (idx + 1) % N
resampled.append(idx)
```

## Podsumowanie

MEASUREMENT UPDATES

$$\underline{P(X|Z)} \propto P(Z|X) P(X)$$

Motion updates

$\xrightarrow{\text{resampling}}$  Importance weights

$\uparrow$  particles

$$\underline{P(X^j)} = \sum_{\text{Samples}} \underline{P(X^j|X)} P(X)$$

$\uparrow$  Sample

$\uparrow$  particles

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

## └ Filtr cząsteczkowy

## └ Podsumowanie

2020-03-30

1. Można dowieść zbieżności (gdy  $N \rightarrow \infty$ )

MEASUREMENT UPDATES

$$P(X|Z) \propto P(Z|X) P(X)$$

Motion UPDATES

$$P(X^j) = \sum_{\text{Samples}} P(X^j|X) P(X)$$

$\uparrow$  Sample

$\uparrow$  particles

## Zadanie

Czy orientacja cząstek ma znaczenie? [\[zadanie 13\]](#)

2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

- └ Filtr cząsteczkowy

- └ Zadanie

1. Tak. Ale tylko w fazie selekcji. Chociaż nie musiałoby tak być - to wszystko zależy od sensorów. Jeśli sensory czują kąt, to będzie miało znaczenie w czasie wazenie także.

Czy orientacja cząstek ma znaczenie? [\[zadanie 13\]](#)

Zadanie

# Wady i zalety

Przykład: <http://youtu.be/8-VFUhayUCI> (autor: Sebastian Thrun)

- Zalety:

- Proste w implementacji
- Zwykle działają bardzo dobrze
- Niewymagające obliczeniowo
- Działają dobrze nawet, gdy rozkłady:
  - niemonotoniczne
  - skomplikowane (niegaussowskie)

- Wady:

- Przekleństwo wymiarowości
  - $\Rightarrow$  rozszerzenia (np. filtry Rao-Blackwellized)
- Zbyt mało cząstek  $\Rightarrow$  kłopoty
- Mało szumów  $\Rightarrow$  kłopoty

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

### └ Filtr cząsteczkowy

#### └ Wady i zalety

2020-03-30

## Wady i zalety

Przykład: <http://youtu.be/8-VFUhayUCI> (autor: Sebastian Thrun)

## • Zalety:

- Proste w implementacji
- Zwykle działają bardzo dobrze
- Niewymagające obliczeniowo
- Działają dobrze nawet, gdy rozkłady:
  - niemonotoniczne
  - skomplikowane (niegaussowskie)

## • Wady:

- Przekleństwo wymiarowości
  - $\Rightarrow$  rozszerzenia (np. filtry Rao-Blackwellized)
- Zbyt mało cząstek  $\Rightarrow$  kłopoty
- Mało szumów  $\Rightarrow$  kłopoty

2020-03-30

## Algorytmy estymacji stanu (filtry)

- └ Filtr cząsteczkowy