

Kapitel 4

Filter-Design

Zur Bearbeitung digitaler Signale (wie etwa bei Tonübertragungen) durch digitale Filter werden bestimmte Eigenschaften idealer, aber nicht-stabiler oder kostenaufwändiger Filter durch einfachere FIR- oder IIR-Filter modelliert.

Beispiel 4.1 Der ideale Tiefpassfilter mit Übertragungsfunktion

$$\hat{h}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } -\omega_c \leq \xi \leq \omega_c, \\ 0, & \text{falls } \omega_c < |\xi| \leq \pi. \end{cases}$$

ist nicht stabil, da die Übertragungsfunktion nicht stetig ist. Um einen stabilen FIR- oder IIR-Filter mit annähernd den gleichen Eigenschaften zu erhalten, werden die folgenden Design-Spezifikationen für den zu bestimmenden Amplitudengang $|\hat{h}(\xi)|$ erstellt:

- (i) Die Sprungstelle $\xi = \omega_c$ wird durch einen “Übergangsbereich”

$$\omega_p < \xi < \omega_s$$

mit der sogenannten “Passfrequenz” ω_p und der “Sperrfrequenz” ω_s ersetzt ($0 < \omega_p < \omega_c < \omega_s < \pi$).

- (ii) Zwei Toleranzen $\delta_1, \delta_2 > 0$ geben die maximal erlaubte Abweichung im Durchlass- bzw. Sperrbereich an.

Gesucht sind also einfache Filter, deren Amplitudengang stetig differenzierbar ist und die Bedingungen

$$|\hat{h}(\xi)| \begin{cases} \in [1 - \delta_1, 1 + \delta_1] & \text{für } 0 \leq \xi \leq \omega_p, \\ \text{fällt strikt monoton} & \text{für } \omega_p \leq \xi \leq \omega_s, \\ \in [0, \delta_2] & \text{für } \omega_s \leq \xi \leq \pi, \end{cases}$$

erfüllt. Da die Filter in der Regel eine reelle Impulsantwort besitzen, folgt aus $\hat{h}(-\xi) = \overline{\hat{h}(\xi)}$, wird der Amplitudengang nur im halben Periodenintervall $[0, \pi]$ spezifiziert.

Die Realisierung solcher Filter verwendet Techniken der Analysis und Approximationstheorie. Andere Spezifikationen können sich genau so auf den Phasengang oder die Gruppenlaufzeit des Filters beziehen.

4.1 Periodisierung zur Konstruktion von IIR-Filtern

Ein wesentliches Hilfsmittel der Fourier-Analysis ist die Poissonsche Summenformel.

Satz 4.2 (Poissonsche Summenformel) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und ihre Fourier-Transformierte $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\xi} dt$ seien stetig und absolut-integrierbar; die Periodisierung

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t+k)$$

sei stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t+k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2k\pi) e^{i2k\pi t}. \quad (4.1)$$

Beweis: Die Fourierkoeffizienten von g (Periodenlänge 1) sind gegeben durch

$$c_\ell(g) = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t+k) e^{-i2\pi\ell t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(t+k) e^{-i2\pi\ell t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\ell t} dt = \hat{f}(2\pi\ell).$$

Die Vertauschung der Summation und Integration (als Lebesgue-Integral) ist hier aufgrund der absoluten Integrierbarkeit von f erlaubt. Damit ist die Poissonsche Summenformel (4.1) nichts anderes als die Tatsache, dass die Funktion g aufgrund der Voraussetzungen punktweise mit seiner Fourierreihe übereinstimmt,

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t+k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi k) e^{i2\pi k t}.$$

□

Bemerkung 4.3 Eine ebenso gebräuchliche Form lautet folgendermaßen: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und ihre Fourier-Transformierte \hat{f} seien stetig und absolut-integrierbar; die Periodisierung

$$\hat{h}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi + 2\pi k)$$

sei stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-ik\xi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi + 2\pi k). \quad (4.2)$$

denn:

$$c_{-\ell}(\hat{h}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi + 2\pi k) e^{i\ell\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\ell\xi} d\xi = f(\ell)$$

ergibt punktweise

$$\hat{h}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi + 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\ell) e^{-i\ell\xi}.$$

Die obige Periodisierung versetzt uns auch in die Lage, aus nichtperiodischen rationalen Funktionen \hat{f} rational trigonometrische Funktionen \hat{h} zu konstruieren:

Satz 4.4 Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und ihre Fouriertransformierte erfülle die Voraussetzung von Bemerkung 4.3. Sei \hat{h} die Periodisierung von \hat{f} in Bemerkung 4.3. Weiter sei \hat{f} rational mit der Partialbruchzerlegung

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\xi - \theta_k},$$

und einfachen komplexen Polstellen θ_k , $1 \leq k \leq n$, mit positivem Imaginärteil. Dann ist \hat{h} trigonometrisch rational mit einfachen Polstellen $e^{i\theta_k}$ und Partialbruchzerlegung

$$\hat{h}(\xi) = \sum_{k=1}^N \frac{iA_k}{1 - e^{i\theta_k} e^{-i\xi}}.$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$G(s) := \sum_{k=1}^N \frac{iA_k}{s - i\theta_k}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0.$$

G ist die Laplace-Transformierte der Funktion

$$g(t) := \begin{cases} \sum_{k=1}^N iA_k e^{i\theta_k t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases},$$

wie man leicht nachrechnet:

$$G(s) = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt = \sum_{k=1}^N iA_k \int_0^\infty e^{(i\theta_k - s)t} dt, \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0.$$

Wegen der Voraussetzung an die θ_k konvergieren alle Integrale und die Funktion g ist absolut integrierbar. Sie ist sogar stetig (in $t = 0$), da aus $\sum A_k \neq 0$ nach dem Gleichnamigmachen der Partialbruchzerlegung von \hat{f} nur eine Graddifferenz von 1 zwischen Zähler und Nenner bliebe. Dies wäre aber ein Widerspruch zur absoluten Integrierbarkeit von \hat{f} .

Setzen wir $s = i\xi$ mit $\xi \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die Fourier-Transformierte

$$\hat{g}(\xi) = G(i\xi) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\xi - \theta_k} = \hat{f}(\xi).$$

Also stimmen f und g in allen Stetigkeitspunkten, also in ganz \mathbb{R} , überein. Die Funktionswerte

$$f(n) = g(n) = \sum_{k=1}^N iA_k e^{i\theta_k n} u[n]$$

setzen wir in die Poissonsche Summenformel aus Bemerkung 4.3 ein und erhalten

$$\hat{h}(\xi) = \sum_{k=1}^N iA_k \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(\theta_k - \xi)n} = \sum_{k=1}^N \frac{iA_k}{1 - e^{i(\theta_k - \xi)}}.$$

Dies ist genau die Behauptung. \square

Wir wollen die prinzipielle Vorgehensweise der Periodisierung am Beispiel der sog. Butterworth-Filter veranschaulichen.

Beispiel 4.5 (Butterworth-Filter) Es soll ein stabiler IIR-Filter konstruiert werden, der die Spezifikationen in Beispiel 4.1 erfüllt und dessen Systemfunktion rational mit kleinem Nennergrad ist. Dazu wird zunächst die Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ in der Form eines “kontinuierlichen Butterworth-Filters” vorgegeben. Diese hat die Betragsquadratfunktion

$$|\hat{f}(\xi)|^2 = \frac{1}{1 + (\xi/\omega_0)^{2N}},$$

wobei die Parameter $\omega_0, N > 0$ so zu bestimmen sind, dass die beiden Spezifikationen

$$|\hat{f}(\omega_p)|^2 = (1 - \delta_1)^2, \quad |\hat{f}(\omega_s)|^2 = \delta_2^2,$$

gelten. Aufgrund der Monotonieeigenschaften gilt dann

$$\begin{cases} 1 \geq |\hat{f}(\xi)| \geq 1 - \delta_1 & \text{für } 0 \leq \xi \leq \omega_p, \\ |\hat{f}(\xi)| \text{ fällt strikt monoton} & \text{für } \omega_p \leq \xi \leq \omega_s, \\ \delta_2 \geq |\hat{f}(\xi)| \geq 0 & \text{für } \omega_s \leq \xi \leq \infty. \end{cases}$$

Außerdem ist $|\hat{f}|^2$ eine gerade Funktion. Die Spezifikationen liefern (falls alle Ausdrücke existieren) die eindeutige Lösung $|\hat{f}|^2$ mit

$$\begin{aligned} N &= \frac{\ln(\delta_2^{-2}-1) - \ln((1-\delta_1)^{-2}-1)}{2 \ln(\omega_s/\omega_p)} \\ \ln \omega_0 &= \frac{\ln(\delta_2^{-2}-1) \ln(\omega_p) - \ln((1-\delta_1)^{-2}-1) \ln(\omega_s)}{\ln(\delta_2^{-2}-1) - \ln((1-\delta_1)^{-2}-1)}. \end{aligned}$$

Dies ist jedoch noch kein Amplitudengang der gewünschten Form, da einerseits $|\hat{f}|^2$ weder periodisch noch rational ist.

Die letztgenannte Eigenschaft erzielt man durch Aufrunden von N zur nächsten ganzen Zahl. (Dann kann auch ω_0 verschoben werden, je nachdem ob der Schwellwert bei ω_p oder ω_s exakt sein soll). Die Betragsquadratfunktion hat die $2N$ komplexen einfachen Polstellen

$$\theta_k = \omega_0 e^{i(2k+1)\pi/2N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1,$$

die im Winkelabstand π/N gleichmäßig auf dem Kreis mit Radius ω_0 verteilt sind ($\theta_0 = \omega_0 e^{i\pi/2N}$). Die Pole treten in Paaren $(\theta_k, -\theta_k = \theta_{k+N})_{0 \leq k \leq N-1}$ auf. Kein Pol liegt auf der reellen Achse.

Zur Festlegung des kontinuierlichen Butterworth-Filters mit Parametern $N \in \mathbb{N}$ und $\omega_0 > 0$ aus der Betragsquadratfunktion wählt man die Zerlegung

$$|\hat{f}(\xi)|^2 = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{-\theta_k^2}{(\xi - \theta_k)(\xi + \theta_k)} = \underbrace{\prod_{k=0}^{N-1} \frac{-\theta_k}{\xi - \theta_k}}_{=: \hat{f}(\xi)} \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\theta_k}{\xi + \theta_k}.$$

Das zweite Produkt ist gleich $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. Also ist die zugehörige Funktion $f(x)$ reellwertig.

Der Übergang zur Definition eines diskreten Filters erfolgt durch die Periodisierung

$$\hat{h}(\xi) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi + 2\pi k),$$

die für jedes $N \geq 1$ stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Zur Berechnung von \hat{h} bestimmen wir die Partialbruchzerlegung von \hat{f} in Satz 4.4 (beachte: \hat{f} hat nur einfache Polstellen mit positivem Imaginärteil). Für $N \geq 2$ erfüllt \hat{f} auch die übrigen Voraussetzungen dieses Satzes. So erhalten wir einen analytischen Ausdruck

$$\hat{h}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{iA_k}{1 - e^{i(\theta_k - \xi)}}$$

für die Übertragungsfunktion sowie

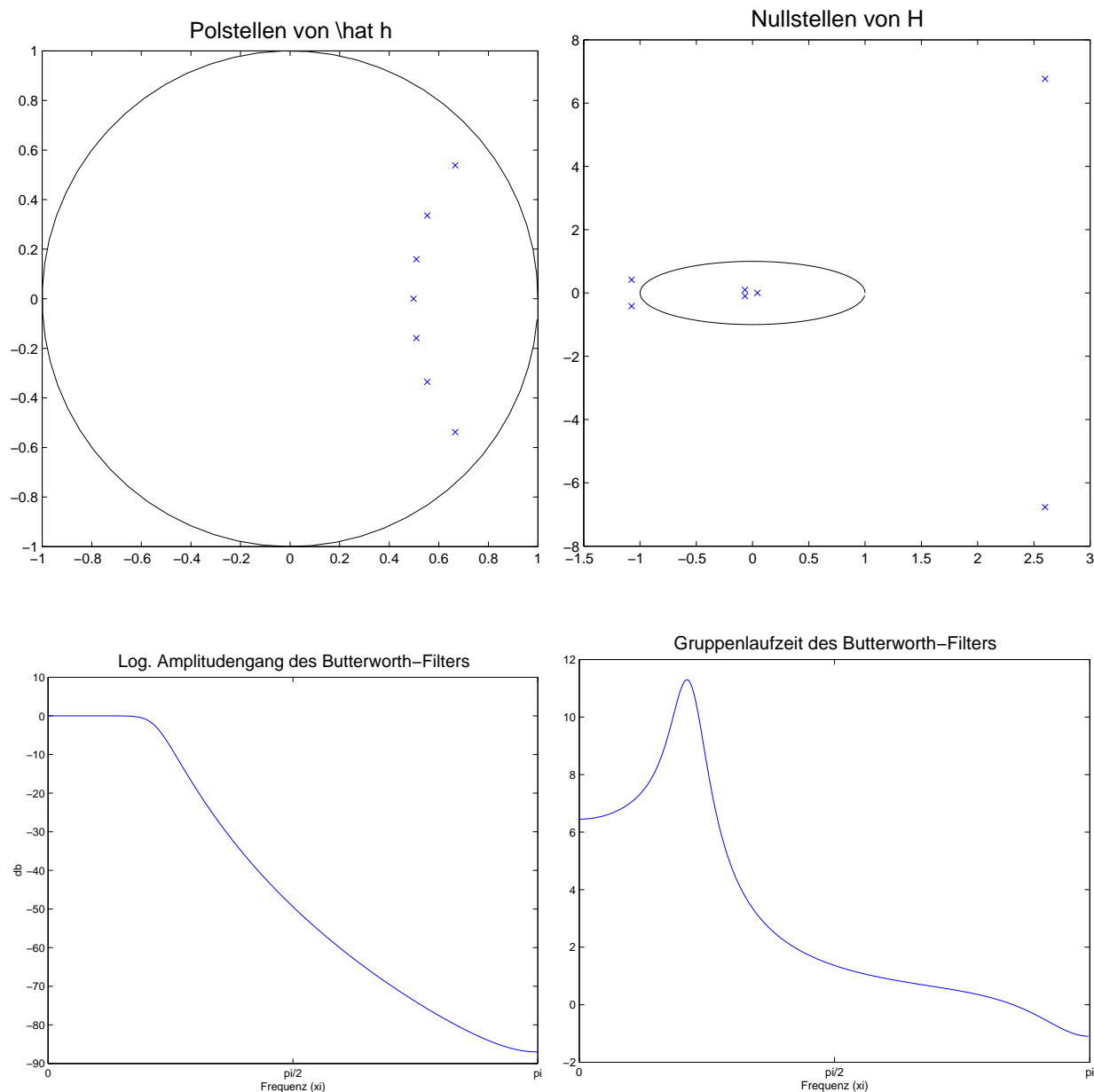
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{iA_k}{1 - e^{i\theta_k} z^{-1}}$$

für die Systemfunktion des digitalen Filters. H ist eine rationale Funktion mit demselben Nennergrad N wie \hat{f} . Die Polstellen liegen bei $d_k = e^{i\theta_k}$, $0 \leq k \leq N-1$. Dies sind alle Zahlen im Inneren des Einheitskreises (wegen $\text{Im } \theta_k > 0$). Also ist der konstruierte digitale Butterworth-Filter kausal und stabil. Weiterhin gelten die Beziehungen

$$d_k = \overline{d_{N-1-k}}, \quad iA_k = \overline{iA_{N-1-k}}.$$

Hieraus ergibt sich die Darstellung von H als rationale Funktion mit reellen Koeffizienten

$$H(z) = \sum_{k=0}^{[(N-2)/2]} \frac{|A_k|^2}{1 - 2\text{Re}(d_k)z^{-1} + |d_k|^2 z^{-2}} \left(+ \frac{iA_{(N-1)/2}}{1 - d_{(N-1)/2} z^{-1}} \text{ falls } N \text{ ungerade} \right).$$



Die Lage der Nullstellen des digitalen Butterworth-Filters lässt sich nicht direkt aus den Nullstellen des kontinuierlichen Filters bestimmen. Sie kann direkt aus der analytischen Form von \hat{h} (und der Systemfunktion H) abgeleitet werden.

Nach der Poissonschen Summenformel gilt außerdem

$$h[n] := f(n).$$

Die Impulsantwort ist also reell und wird durch einfaches Abtasten des kontinuierlichen Butterworth-Filters zu ganzzahligem N erzielt! Die Periodisierung $\hat{f} \mapsto \hat{h}$ verändert natürlich den Amplitudengang für $\xi \in [-\pi, \pi]$ (z.B. entsteht $\hat{h}(0) > 1$). Jedoch wird für $N \geq 4$ und $\omega_0 \ll \pi$ der Unterschied kaum wahrnehmbar. (s. Übungsaufgabe). Insbesondere bleibt die Monotonie im gesamten Intervall $[0, \pi]$ meist erhalten.

4.2 Bilineare Transformation zur Konstruktion von IIR-Filtern

Eine weitere Methode zur Konstruktion der periodischen Übertragungsfunktion \hat{h} ist die nichtlineare Transformation der reellen Achse auf das Periodenintervall mittels der Abbildung

$$\mathbb{R} \ni \omega \mapsto \xi = 2 \arctan(\omega/2) \in (-\pi, \pi).$$

Zu gegebener rationaler Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist dann die Funktion

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(2 \tan(\xi/2)), \quad \xi \in (-\pi, \pi), \quad (4.3)$$

ebenfalls rational in $e^{i\xi}$. Dies sieht man wie folgt: Wir verwenden die komplexen Variablen

$$s := i\omega, \quad z = e^{i\xi}$$

und stellen die bijektiven Beziehungen

$$s = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad z = \frac{1 + s/2}{1 - s/2}$$

auf, die eine Bijektion der kompaktifizierten Ebene $\hat{\mathbb{C}}$ in sich definieren. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s < 0 &\Leftrightarrow |z| < 1, \\ \operatorname{Re} s = 0 &\Leftrightarrow |z| = 1, \\ \operatorname{Re} s > 0 &\Leftrightarrow |z| > 1. \end{aligned}$$

Für $z = e^{i\xi}$ gilt weiterhin

$$s = 2 \frac{1 - e^{-i\xi}}{1 + e^{-i\xi}} = 2i \frac{\sin(\xi/2)}{\cos(\xi/2)} = 2i \tan(\xi/2).$$

Falls also $\hat{f}(\omega) = F(s)$ rational (in ω wie in s) ist, so ist auch

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(2 \tan(\xi/2)) = F(s) = F\left(2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) =: H(z)$$

rational in $z^{-1} = e^{-i\xi}$, und der Nennergrad ist der von \hat{f} .

Beispiel 4.6 (Butterworth-Filter) Der kontinuierliche Butterworth-Filter $\hat{f}(\omega)$ mit den Parametern N und ω_0 erfülle die Spezifikationen aus Beispiel 4.1 mit den transformierten Frequenzen

$$\tilde{\omega}_p = 2 \tan(\omega_p/2), \quad \tilde{\omega}_s = 2 \tan(\omega_s/2).$$

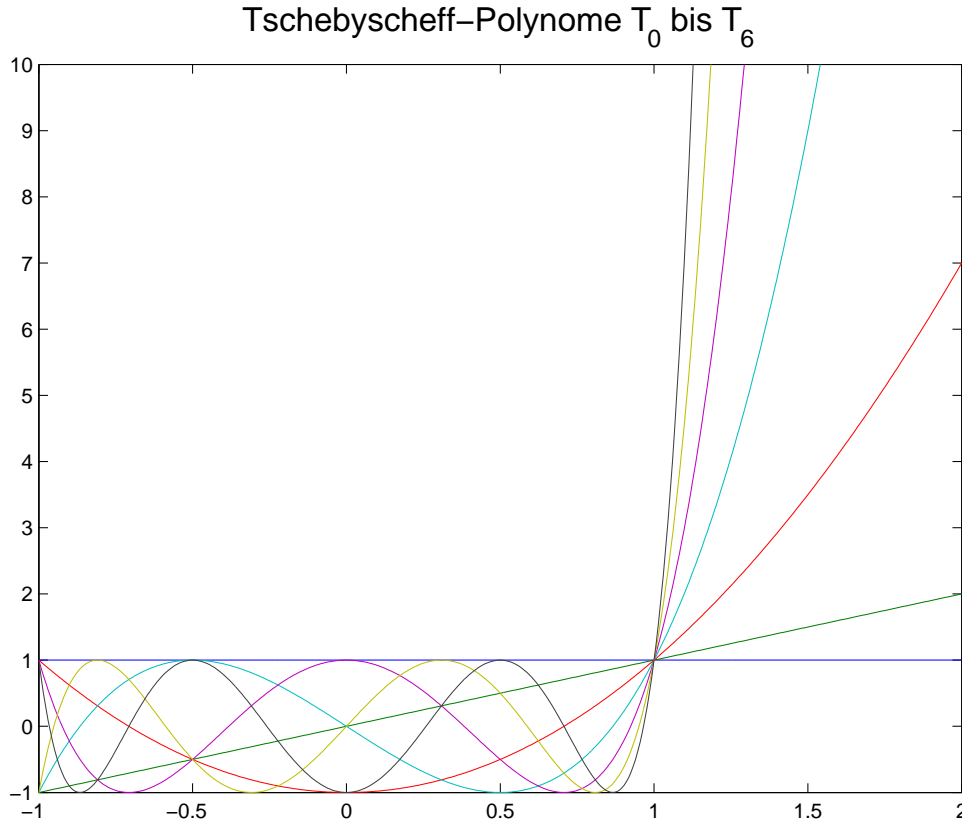
Mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Beispiel sind die Polstellen der Funktion $F(s) = \hat{f}(\omega)$, mit $s = i\omega$, gegeben durch $s_k = i\theta_k$, $0 \leq k \leq N-1$. Die transformierte Funktion

$$H(z) = F\left(2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

ist dann die rationale Systemfunktion eines digitalen Filters mit Polstellen $d_k = \frac{1+s_k/2}{1-s_k/2}$, die alle im Inneren des Einheitskreises liegen (wegen $\operatorname{Im} \theta_k > 0$). Also ist der digitale Filter stabil und kausal. Weiterhin ist H wieder rationale Funktion mit reellen Koeffizienten, und der Filter hat eine reelle Impulsantwort. Aufgrund der Konstruktion ist sofort einsichtig, dass der Amplitudengang $|\hat{h}(\xi)|$ die Spezifikationen des angenäherten Tiefpass-Filters erfüllt.

Eine Besonderheit hinsichtlich der Nullstellen der Systemfunktion $H(z)$ liegt vor. Weil $F(s)$ eine N -fache Nullstelle bei ∞ hat, besitzt H eine N -fache Nullstelle bei $z = -1$. Dies bewirkt ein noch schnelleres Abklingen des Amplitudengangs gegenüber der Konstruktion durch Periodisierung.

Das konkrete Zahlenbeispiel $\omega_p = 0.4\pi$, $\omega_s = 0.6\pi$, $\delta_1 = 0.01$, $\delta_2 = 0.001$ ergibt den Wert $N = 14$ für die Ordnung des Butterworth-Filters und die Anzahl der Polstellen von H .



Die gleichen Spezifikationen können durch andere kontinuierliche Filter mit geringerem Grad der Nennerfunktion erzielt werden. Prominente Beispiele sind die Tschebyscheff-Filter.

Beispiel 4.7 (Tschebyscheff-Filter) Als Betragsquadratfunktion des kontinuierlichen Filters wählen wir die Funktion

$$|\hat{f}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N(\omega/\omega_0)^2}.$$

Hierbei ist T_N das Tschebyscheff-Polynom 1. Art, also

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, \\ T_{N+1}(x) &= 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), & N &\geq 1. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Oszillation von T_N zwischen -1 und 1 ist in der Darstellung

$$T_N(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

enthalten. Es gilt $T_N(1) = 1$ und T_N wächst monoton in $[1, \infty)$; das Wachstum wird stärker mit wachsendem N .

Wir setzen nun $\omega_0 = \tilde{\omega}_p$ und $\frac{1}{1+\epsilon^2} = (1-\delta_1)^2$. Dann besitzt die Funktion \hat{f} die folgenden Eigenschaften:

1. Der Wert $|\hat{f}(\omega)|$ oszilliert zwischen 1 und $1-\delta_1$ für $0 \leq \omega \leq \omega_p$; an der Stelle ω_p wird der Schwellwert angenommen.
2. In $[\omega_p, \infty)$ fällt $|\hat{f}(\omega)|$ strikt monoton gegen Null.

Durch geeignete Wahl von N kann sodann die Bedingung

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \delta_2, \quad \omega > \tilde{\omega}_s,$$

erfüllt werden. Mit den konkreten Zahlenwerten aus dem vorherigen Beispiel genügt bereits $N = 8$.

Die Lage der (komplexen) Polstellen der Funktion $|\hat{f}|^2$ ermittelt man als Lösungen der Gleichung

$$T_N(z) = \pm \frac{i}{\epsilon}.$$

Alle $2N$ Lösungen liegen auf einer Ellipse mit den Halbachsen der Länge

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(\rho^{1/n} + \rho^{-1/n}) && \text{in } x\text{-Richtung,} \\ b &= \frac{1}{2}(\rho^{1/n} - \rho^{-1/n}) && \text{in } y\text{-Richtung} \end{aligned}$$

und dem Parameter $\rho = \epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}}$. Die genaue Lage entspricht den Werten

$$\omega_k = a \cos t_k + ib \sin t_k, \quad 0 \leq k \leq 2N - 1,$$

und die Winkel t_k sind (wie beim Butterworth-Filter) $t_k = \frac{2k+1}{2N}\pi$. Die ähnlichen Symmetrien wie beim Butterworth-Filter ergeben eine rationale Systemfunktion mit reellen Koeffizienten und eine reelle Impulsantwort.

Die Herleitung der Formeln für ω_k erfordert etwas Mühe. Aus der Rekursionsgleichung der Tschebyscheff-Polynome (mit festem $z \in \mathbb{C}$) folgt durch Auflösen der Differenzengleichung

$$T_N(z) = \frac{1}{2} \left(\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^N + \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)^N \right).$$

Hierbei ist ein fester Zweig der Wurzel zu verwenden. Man beachte, dass $v := z + \sqrt{z^2 - 1}$ mit $v^{-1} = z - \sqrt{z^2 - 1}$ korrespondiert.

Die Abbildung

$$v \mapsto \frac{v + v^{-1}}{2} =: z$$

bildet das Äußere des Einheitskreises bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ab. Dabei wird der Kreis K_ρ um den Ursprung mit Radius $\rho > 1$ auf die Ellipse

$$E_\rho = \left\{ z \mid z = \frac{v + v^{-1}}{2}, \quad |v| = \rho \right\}$$

mit den Halbachsen

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) && \text{in } x\text{-Richtung,} \\ b &= \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1}) && \text{in } y\text{-Richtung} \end{aligned}$$

und den Brennpunkten $f = \pm(a^2 - b^2) = \pm 1$ abgebildet. Die Umkehrabbildung lautet $v = z + \sqrt{z^2 - 1}$, wobei der Zweig der Wurzel so zu wählen ist, dass $|v| > 1$ gilt.

Die Tschebyscheff-Polynome erfüllen also die Identität

$$T_N \left(\frac{v + v^{-1}}{2} \right) = \frac{v^N + v^{-N}}{2}, \quad |v| > 1.$$

Dies bedeutet, dass T_N die Ellipsen E_r mit $r > 1$ auf die Ellipsen E_{r^N} abbildet. Dabei wird jedes $c \in E_{r^N}$ genau N mal angenommen:

$$c \in E_{r^N} \Rightarrow w = c + \sqrt{c^2 - 1} \in K_{r^N} \Rightarrow v = w^{1/N} \in K_r \quad (N \text{ Wurzeln}) \Rightarrow z = \frac{v + v^{-1}}{2} \in E_r.$$

Die Punkte $c = \pm \frac{i}{\epsilon}$ ergeben $w = \pm i\rho$ mit $\rho = \epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}}$. Also sind die $2N$ Polstellen gegeben durch $\omega_k = \frac{v_k + v_k^{-1}}{2}$ mit

$$v_k = \rho^{1/N} e^{i \frac{2k+1}{2N} \pi}, \quad 0 \leq k \leq 2N - 1,$$

($v_0, v_2, \dots, v_{2N-2}$ von $w = i\rho$, die restlichen von $w = -i\rho$). Alle Polstellen liegen auf der Ellipse $E_{\rho^{1/N}}$. \square

4.3 Computergestützter Entwurf von IIR-Filtern

Neben den behandelten geschlossenen Entwurfsmethoden wird sehr häufig ein parametrischer Entwurf verwendet. Hierzu werden geeignete Parameter des digitalen Filters spezifiziert. Dies kann sein

- (a) der Grad des Zähler- und Nennerpolynoms von $H(z)$; die parametrisierte Form von H ist dann

$$H(z) = \frac{\sum_{k=1}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}.$$

- (b) die Anzahl und grobe Verteilung der Pol- und Nullstellen; die parametrisierte Form von H ist dann

$$H(z) = K_0 \prod_{k=1}^N \frac{1 - z_k z^{-1}}{1 - p_k z^{-1}},$$

oder unter der Annahme reeller Nenner- und Zählerpolynome,

$$H(z) = K_0 \prod_{k=1}^N \frac{(1 - z_k z^{-1})(1 - \overline{z_k} z^{-1})}{(1 - p_k z^{-1})(1 - \overline{p_k} z^{-1})}.$$

- (c) andere parametrische Formen wie die Partialbruchzerlegung.

Die Spezifikation muss in Form kontinuierlicher Parameter verfügbar sein. Weiterhin wird eine “Wunsch”-Übertragungsfunktion und ein zugehöriges Approximationskriterium aufgestellt. Sodann wird mit Methoden der (i.a. nichtlinearen) Optimierung versucht, das Approximationskriterium innerhalb der durch die Parametrisierung gegebene Menge bestmöglich zu erfüllen. Die so erhaltene “Minimallösung” wird als Filter verwendet. Ist ihre Qualität nicht ausreichend, muss eine neue Parametrisierung (z.B. Erhöhung des Nennergrads) aufgestellt werden.

Einschlägige Methoden werden vom DSP Committee zusammengefasst (DSP=digital signal processing, seit 1979). Insbesondere sind hier auch Verfahren zur Optimierung der Gruppenlaufzeit zusätzlich zum Amplitudengang verfügbar.

4.4 Fenstermethode für FIR-Filter

Im den vorherigen Abschnitten wurden Methoden zum Entwurf von Filtern mit rationaler Systemfunktion beschrieben. Nun wollen wir den Entwurf von FIR-Filtern betrachten. Ziel ist wieder die Approximation eines “idealen” Filters, dessen Systemfunktion

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] z^{-n}$$

und Impulsantwort $(h_d[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ wir als gegeben voraussetzen.

Die Fenstermethode besteht in der Definition eines FIR-Filters durch die Angabe seiner Systemfunktion

$$H(z) = \sum_{n=-M_1}^{M_2} w[n] h_d[n] z^{-n}, \quad (4.4)$$

also erstens dem Abschneiden der Summation und zweitens der Gewichtung der Koeffizienten $h_d[n]$. Die Impulsantwort des so definierten Filters ist

$$h[n] = \begin{cases} w[n] h_d[n], & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Seine Übertragungsfunktion erhalten wir (unter geeigneten Voraussetzungen an das Konvergenzgebiet von H_d) aus der periodischen Faltung

$$\hat{h}(\xi) = H(e^{i\xi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{i\omega}) W(e^{i(\xi-\omega)}) d\omega. \quad (4.6)$$

Hierbei ist W die zugehörige Systemfunktion der “Fensterfolge” ($w[n]$). Eine Approximation von H_d wird also erzielt, wenn die Übertragungsfunktion $W(e^{i\xi})$ möglichst stark um $\xi = 0$ konzentriert ist und

$$\max_n |w[n]| = w[R] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\xi}) e^{-iR\xi} d\xi \approx 1$$

für ein R gilt. Dann beschreibt H eine Approximation des phasenverschobenen $e^{iR\xi} H_d(e^{i\xi})$.

Häufig verwendet man reelle Fensterfolgen mit

$$w[n] = 0 \quad \text{für } n < 0, \quad n > M, \quad w[n] = w[M - n].$$

Sie beschreiben einen kausalen Filter mit verallgemeinerter linearer Phase, denn es gilt

$$W(e^{i\xi}) = W_e(e^{i\xi}) e^{-i\xi M/2}$$

mit einer reellen geraden Funktion W_e .

Beispiel 4.8 Beispiele von Fensterfolgen sind:

(a) *Rechteckfenster*

$$w_{R,M}[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Übertragungsfunktion lautet

$$W_{R,M}(e^{i\xi}) = \sum_{n=0}^M e^{-in\xi} = \frac{1 - e^{-i(M+1)\xi}}{1 - e^{-i\xi}} = e^{-i\xi M/2} \frac{\sin((M+1)\xi/2)}{\sin(\xi/2)}.$$

Die reelle Funktion $W_{R,M,e}(e^{i\xi}) = \frac{\sin((M+1)\xi/2)}{\sin(\xi/2)}$ ist der bekannte “Dirichlet-Kern”.

(b) *Bartlett-Fenster* oder Dreiecksfenster

$$w_{B,M}[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \leq M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Übertragungsfunktion erhält man für gerades $M = 2N + 2$ aus der einfach zu prüfenden Beziehung $w_{B,M}[n] = (N+1)^{-1} w_{R,N} * w_{R,N}[n-1]$. Damit ist

$$W_{B,M}(e^{i\xi}) = e^{-i\xi(N+1)} (N+1)^{-1} \left(\frac{\sin((N+1)\xi/2)}{\sin(\xi/2)} \right)^2.$$

Die reelle Funktion $W_{B,M,e}(e^{i\xi}) = (N+1)^{-1} \left(\frac{\sin((N+1)\xi/2)}{\sin(\xi/2)} \right)^2$ ist der aus der Approximationstheorie bekannte “Fejer-Kern”. Wegen $W_{B,M,e} \geq 0$ wird das Bartlett-Fenster in der Praxis nicht oft verwendet, da es einen zu stark glättenden Effekt hat.

(c) *Hanning-Fenster*

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörige Fensterfunktion $v(t)$ ist stetig differenzierbar.

(d) *Hamming-Fenster*

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörige Fensterfunktion $v(t)$ ist unstetig mit Sprung der Höhe 0.08 bei 0 und M .

(e) *Blackman-Fenster*

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörige Fensterfunktion $v(t)$ ist stetig differenzierbar.

Alle diese Fenster erfüllen $w[M/2] = 1$ (falls M gerade). Das Maximum von $|\hat{w}(\xi)|$ liegt bei $\xi = 0$. Die Konzentration um $\xi = 0$ wird mit Hilfe der folgenden Parameter zur zugehörigen kontinuierlichen Funktion $v(t)$ bestimmt:

- (i) $\Delta_M(w)$ bezeichnet die Breite des Hauptmaximums, also $\Delta_M(w) = 2\omega_0(v)$, wobei ω_0 die kleinste positive Nullstelle von \hat{v} ist.
- (ii) $\kappa_M(w)$ bezeichnet die relative Amplitude der Nebenmaxima, also $\kappa_M(w) = \max_{|\xi| > \Delta_M(w)/2} |\hat{v}(\xi)|/|\hat{v}(0)|$.

Die Parameter sind der anliegenden Tabelle zu entnehmen. Das Rechteckfenster besitzt die kleinste Breite des Hauptmaximums, aber auch die größte Amplitude der Nebenmaxima. Die Glattheit der kontinuierlichen Fensterfunktion $v(t)$ hat direkten Einfluss auf die Abnahme der Nebenmaxima für wachsendes $\xi \in [0, \pi]$. Die Ordnung

$$\max_{|\xi| > c} |\hat{v}(\xi)|/|\hat{v}(0)| = \mathcal{O}(M^{-\alpha})$$

für festes $0 < c < \pi$ ist $\alpha = 1$ für die unstetigen (Rechteck und Hamming), $\alpha = 2$ für die stetigen (Dreieck) sowie $\alpha = 3$ für die stetig differenzierbaren (Hanning und Blackman) Fenster. Dies sind nur asymptotische Aussagen. An den Graphen der Amplitudengänge sieht man, dass die Güte der Approximation bei festem M sich nicht allein durch die Glattheit der Fensterfunktion v beschreiben lässt. So hat das unstetige Hamming-Fenster zunächst deutlich kleinere Nebenamplituden als das stetig differenzierbare Hanning-Fenster. Die Größe der Nebenmaxima beim Hamming-Fenster nimmt dann sehr langsam ab, während sie beim Hanning-Fenster sehr rasch abklingt.

Bemerkung 4.9 Das Rechteckfenster hat gegenüber den anderen Fenstern einen wesentlichen Nachteil, der auf dem sog. *Gibbschen Phänomen* beruht. Besitzt die Übertragungsfunktion $H_d(e^{i\xi})$ des vorgegebenen idealen Filters eine Unstetigkeitsstelle, so wird für $M \rightarrow \infty$ zwar die Approximation bzgl. der L^2 -Norm, aber keine gleichmäßige Approximation erzielt. Es existiert sogar eine Konstante $\rho > 0$, so dass in der Nähe einer Sprungstelle ξ_0 von $|H_d(e^{i\xi})|$ der Höhe $y > 0$ gilt

$$\sup_{|\xi - \xi_0| < \delta} (|H_d(e^{i\xi})| - |H_d(e^{i\xi_0})|) \geq \rho y, \quad M \rightarrow \infty.$$

Dieses Phänomen taucht auch beim Hamming-Fenster auf, ist jedoch durch den Faktor $w(M) = 0.08$ deutlich abgemildert. Dagegen weisen die Fenster der übrigen Form wegen $w(M) = 0$ kein Gibbsches Phänomen auf. Dieser qualitative Unterschied kann anhand der Eigenschaften der Übertragungsfunktionen erläutert werden. So gilt für das Rechteckfenster (Dirichlet-Kern) und Hamming-Fenster

$$\int_{|\xi| > \epsilon} |W_M(\xi)| d\xi \not\rightarrow 0,$$

bei festem $0 < \epsilon < \pi$, während für das Dreiecksfenster (Fejer-Kern) und die anderen stetigen Fensterfunktionen die Konvergenz der Integrale gegen 0 vorliegt.

Bemerkung 4.10 Die Fenstertechnik hat enge Bezüge zur Summationstheorie für Fourierreihen. Die Partialsummen

$$S_N(H_d; \xi) = \sum_{n=-N}^N h_d[n] e^{-in\xi}$$

der Fourierreihe von $H_d(e^{i\xi})$ ergeben sich durch Multiplikation mit dem bei $n = 0$ zentrierten Rechteckfenster ($M = 2N$). Die in der Summationstheorie definierten Cesaró-Mittel

$$S_N^{(1)}(H_d; \xi) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(H_d; \xi) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) h_d[n] e^{-in\xi}$$

ergeben sich also durch Multiplikation mit dem zentrierten Dreiecksfenster. In der Approximationstheorie werden die besseren asymptotischen Eigenschaften der Cesaró-Mittel häufig verwendet.

Eine weitere Klasse von Fenstern wird durch die Optimierung der Konzentration von $W(e^{i\xi})$ um $\xi = 0$ gegenüber der Größe der Nebenmaxima motiviert.

Diskussion 4.11 (Zeit-Frequenz Konzentration) Als Maß für die Konzentration einer Fensterfunktion $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit fest vorgegebenem Trägerintervall $\text{supp } v \subset [-T/2, T/2]$, $T > 0$, definieren wir die Teilenergie

$$\varepsilon^2(v; B, T) := \int_{-B/2}^{B/2} |\hat{v}|^2 d\xi \bigg/ \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}|^2 d\xi \leq 1, \quad B > 0.$$

(Das Trägerintervall kann auch nach $[0, T]$ verschoben werden.) Da v kompakten Träger hat, ist \hat{v} eine analytische Funktion, also notwendig $\varepsilon^2(v; B, T) < 1$. Zu gegebenen Parametern $B, T > 0$ führt die Suche nach einem Maximum der Teilenergie $\varepsilon^2(v; B, T)$ auf ein Eigenwertproblem, das durch den Integraloperator

$$I_{B,T}(\hat{v}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\sin T(\xi - \omega)/2}{(\xi - \omega)/2} \hat{v}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin T(\xi - \omega)/2}{(\xi - \omega)/2} \chi_{[-B/2, B/2]}(\omega) \hat{v}(\omega) d\omega$$

beschrieben wird. Wir setzen $S_T(\xi) := \frac{\sin T\xi/2}{\xi/2}$, also ist S_T die Fourier-Transformierte der charakteristischen Funktion des Intervalls $[-T/2, T/2]$. Der Integraloperator hat dann die äquivalente Form

$$I_{B,T}(\hat{v}) = (2\pi)^{-1} S_T * (\chi_{[-B/2, B/2]} \hat{v}).$$

Der Faltungssatz für die inverse Fourier-Transformation, $\mathcal{F}^{-1}((2\pi)^{-1} \hat{f} * \hat{g}) = fg$, liefert die folgende Interpretation dieses Operators: Zunächst schneidet man von \hat{v} die Frequenzen $|\xi| > B/2$ ab, dann schneidet man von der inversen Fouriertransformierten $w(t)$ des Ergebnisses die Werte mit $|t| > T/2$ ab. Dieses doppelte Abschneiden sowohl im Frequenz- wie im Zeitbereich verkleinert die Norm von \hat{v} . Alle Eigenwerte λ dieses Operators liegen im Intervall $[0, 1]$ (diskretes Spektrum). Jeder Eigenwert λ ist dabei eine Funktion von B und T (tatsächlich eine Funktion des Produkts BT). Die Eigenfunktion $\psi_1 =: \hat{v}$ zum größten Eigenwert $0 < \lambda_1 < 1$ löst das Problem der maximalen Konzentration (Slepian, Pollak, und Landau 1961). Man zeigt, dass alle Eigenwerte λ_n , $n \in \mathbb{N}$, einfach sind, also (bis auf Multiplikation mit Skalaren) eine eindeutig bestimmte Eigenfunktion ψ_n besitzen. Die Eigenfunktionen sind die sog. “prolate spheroidal wave functions”, siehe z.B. <http://mathworld.wolfram.com/ProlateSpheroidalWaveFunction.html> by Eric Weisstein, die ein Orthogonalsystem sowohl auf \mathbb{R} wie auch auf dem kompakten Intervall $[-B/2, B/2]$ definieren. Dass die Eigenfunktion $v = \mathcal{F}^{-1}(\psi_1)$ tatsächlich den Träger $[-T/2, T/2]$ besitzt, folgt direkt aus der Identität $\lambda_1 \hat{v} = I_{B,T}(\hat{v})$, denn damit ist

$$\lambda_1 v = \mathcal{F}^{-1}((2\pi)^{-1} S_T * (\chi_{[-B/2, B/2]} \hat{v})) = \chi_{[-T/2, T/2]} \mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-B/2, B/2]} \hat{v}) = (2\pi)^{-1} \chi_{[-T/2, T/2]} (S_B * v).$$

Die numerische Berechnung der spheroidal wave functions kann durch Iteration der Abschnideooperationen kombiniert mit Methoden zur Eigenwertberechnung erfolgen. Die Matlab-Funktion `dpss.m` der Signal Processing Toolbox bestimmt die Fensterfolge und gibt den Eigenwert λ_1 an. Hinreichend gute Approximationen dieser Funktionen für den Filterentwurf wurden von Kaiser (1966, 1974) angegeben.

Beispiel 4.12 (Kaiser-Fenster) Mit I_0 bezeichnen wir die modifizierte Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung (in Matlab `besseli(0, x)`). Das *Kaiser-Fenster* der Länge $M + 1$ wird mit $a := M/2$ und einem Parameter $b > 0$ definiert durch

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0(b(1 - ((n - a)/a)^2)^{1/2})}{I_0(b)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\beta = 0$ ist das Kaiser-Fenster gerade das Rechteckfenster. Die beiden folgenden Bilder zeigen die Folgen fast identischer “Slepian-Fenster” und Kaiser-Fenster mit $M = 20$:

