UTPL

La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Itinerario 1-Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana. Medidas de Áreas y Volúmenes

Guía didáctica

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Departamento de Ciencias de la Educación

Itinerario 1-Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana. Medidas de Áreas y Volúmenes

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)*	VII

Autor:

Granda Lasso Euler Salvador

EDUC_1126

Universidad Técnica Particular de Loja

Itinerario 1-Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana. Medidas de Áreas y Volúmenes
Guía didáctica
Granda Lasso Euler Salvador

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-277-0

28 de septiembre, 2021

Índice

1. **Datos de información** **7**
    - 1.1. Presentación de la asignatura 7
    - 1.2. Competencias genéricas de la UTPL 7
    - 1.3. Competencias específicas de la carrera 7
    - 1.4. Problemática que aborda la asignatura 8
2. **Metodología de aprendizaje** **9**
3. **Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje** **11**

Primer bimestre **11**

Resultado de aprendizaje 1 11

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje 11

Semana 1 .... **12**

Unidad 1. Prismas, Pirámides, áreas y volúmenes **12**

- 1.1. Sistema tridimensional para la representación de cuerpos 13

Actividades de aprendizaje recomendadas 17

Semana 2 .... **18**

- 1.2. Definiciones básicas del prisma 18
- 1.3. Área de un prisma 20

Actividades de aprendizaje recomendadas 23

Semana 3 .... **24**

- 1.4. Volumen de un prisma 24
- 1.5. Construcción de prismas 27

Actividades de aprendizaje recomendadas 27

Semana 4 .... **29**

- 1.6. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes 29

Actividades de aprendizaje recomendadas 33

Semana 5 .... **34**

- 1.7. Definición y área superficial de una pirámide 34

Actividades de aprendizaje recomendadas 41

Semana 6 .... **42**

1.8. Volumen y construcción de una pirámide 42

Actividades de aprendizaje recomendadas 46

Semana 7 .... **47**

1.9. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de pirámides............. 47

Actividades de aprendizaje recomendadas 51

Semana 8 .... **53**

Actividades finales del bimestre.. 53

Actividades de aprendizaje recomendadas 53

Autoevaluación 1 55

Segundo bimestre **58**

Resultado de aprendizaje 2 58

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje 58

Semana 9 .... **59**

Unidad 2. Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes **59**

2.1. Cilindro circular recto, área, volumen y su construcción 60

Actividades de aprendizaje recomendadas 65

Semana 10 .... **66**

2.2. Los conos, área y volumen 66

Actividades de aprendizaje recomendadas 70

Semana 11 .... **71**

2.3. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de cilindros y conos.. 71

Actividades de aprendizaje recomendadas 77

Semana 12 .... **78**

2.4. Los poliedros 78

Índice

Actividades de aprendizaje recomendadas 88

Semana 13 .... **89**

2.5. Las esferas 89

Actividades de aprendizaje recomendadas 93

Semana 14 .... **94**

2.6. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de esferas, cilindros y conos 94

Actividades de aprendizaje recomendadas 100

Semana 15 .... **101**

2.7. Sólidos de revolución 101

Actividades de aprendizaje recomendadas 104

Semana 16 .... **105**

Actividades finales del bimestre 105

Actividades de aprendizaje recomendadas 105

Autoevaluación 2 107

4. Solucionario **110**

5. Glosario **117**

6. Referencias bibliográficas **119**

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física, basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.

- Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad, y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado en relación con las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.

- Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza-aprendizaje y de evaluación que integren la práctica de investigación acción hacia la producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

- Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

La matemática es considerada una ciencia formal por muchos docentes y representantes de la comunidad educativa, una ciencia poco congruente con la práctica diaria, insuficientemente relacionada con el entorno natural, lo cual ocasiona que muchos estudiantes no valoren su verdadero rol y propósito en la formación estudiantil.

Además, el limitado uso de herramientas tecnológicas no permite practicar la matemática experimentalmente, lo cual dificulta el logro de aprendizajes significativos respecto de los grandes conceptos del cálculo: derivación e integración.

La enseñanza de los conocimientos de matemática se enfoca al desarrollo de conceptos de manera teórica y textual, sin considerar que el aprendizaje deber ser experimental, partiendo de la manipulación de un material concreto y el uso adecuado de las herramientas virtuales, explorando detalles conceptuales que permiten plantear inquietudes, comunicando los aportes a otros estudiantes y docente, y verbalizando sus conclusiones matemáticas.

Por todas las consideraciones anteriores, en esta asignatura se trata de vincular la teoría conceptual con la práctica del convivir diario, aplicando herramientas tecnológicas convenientes para hacer un aprendizaje experimental y práctico, relacionado directamente con problemas del entorno natural y social, como la construcción de cartonería, paquetes y otros materiales que solucionen problemas reales de la ciudadanía.

2. Metodología de aprendizaje

Con la finalidad de hacer que el estudio de la asignatura, Aplicación de los conocimientos matemáticos en la vida cotidiana. Medidas de áreas y volúmenes, se convierta en una experiencia de aprendizaje permanente, se diseñarán actividades y estrategias fundamentadas en una metodología activa, en donde los estudiantes acceden a los aspectos iniciales de la conceptualización teórica, apoyándose de la observación y análisis de micro videos y accediendo a recursos planteados en el EVA, mientras que el trabajo en contacto con el docente tiene un enfoque experimental de tal manera que, el estudiante consolida los aprendizajes de manera práctica, apoyado en los recursos didácticos y herramientas tecnológicas.

Aunque no existe un procedimiento único, lo esencial para el estudio de este curso es la utilización del texto básico y micro videos; que permitirán la asimilación de los conceptos teóricos, que serán plasmados en la práctica, contando con la presencia física del profesor en algunos casos y casi siempre a través de videoconferencias, fomentando el trabajo colaborativo en función de los distintos estilos de aprendizaje y enfocados a lograr resultados de aprendizaje que orientan el desarrollo de las competencias.

En cada concepto, se partirá de la manipulación de herramientas virtuales, que permitirán la observación de situaciones de aprendizaje, actividades que posibilitan la comunicación entre el profesor y los estudiantes, finalizando con los aportes y conclusiones, todo este procedimiento relacionado con una metodología activa de Aprendizajes Basados en Problemas. ABP.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Utiliza leyes y teoremas fundamentales para el cálculo de áreas y volúmenes en prismas y pirámides aplicados en la resolución de problemas relacionados con el entorno natural y social.

Para conseguir el resultado de aprendizaje propuesto, se lleva a cabo una revisión sistemática de los conocimientos previos de áreas y volúmenes de prismas y pirámides, esto unido a la solución de problemas de aplicación, le permitirá a usted fomentar cambios e incentivar innovaciones en el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y creativo.

Observando el resultado de aprendizaje se considera que, la situación didáctica del aprendizaje y enseñanza de la matemática en general recomienda que, antes del desarrollo de ejercicios y resolución de problemas, es importante lograr un suficiente dominio teórico conceptual, partiendo de definiciones, teoremas y propiedades, analizando procesos o algoritmos apropiados para la aplicación ejemplos explicativos propuestos en el texto básico la guía virtualizada, y solo después de eso, desarrollar un suficiente número de ejercicios que brinde la experticia suficiente, así como resolver los problemas relacionados con el entorno natural y social.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Antes de iniciar el estudio de medidas, de áreas y volúmenes de figuras geométricas y su aplicación, se recuerda que, en ciclos anteriores estudiamos detalladamente los conceptos de los diferentes tipos de funciones: polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas; además, con el estudio de geometría plana y del espacio, y de la geometría analítica, estamos preparados para estudiar en el presente curso, primero la parte teórica y luego la práctica.

¡Bienvenido, ánimo y adelante!

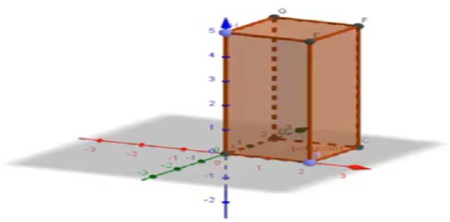
Semana 1

Unidad 1. Prismas, Pirámides, áreas y volúmenes

Por la importancia al momento de representar los cuerpos en el espacio, se estudia el sistema tridimensional que consta de altura, ancho y profundidad, elementos que se consideran en un cuerpo geométrico, En esta primera unidad se iniciará con el estudio de sistema tridimensional, el mismo que nos permitirá representar las áreas y volúmenes de los prismas y pirámides.

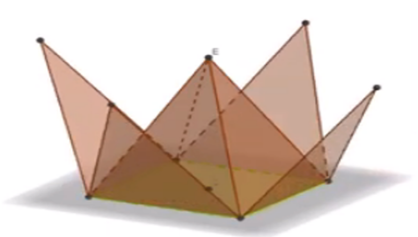
Como se puede observar en las figuras 1 y 2, el prisma y la pirámide están representados en el sistema tridimensional.

Figura 1.
Prisma.



Nota. Prima cuadrangular, elaboración propia.

Figura 2.
Pirámide.



Nota. Pirámide cuadrangular.

- Sistema tridimensional para la representación de cuerpos.
- Definiciones básicas del prisma, Área y Volumen de un prisma.
- Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de prismas.
- Definiciones y área superficial de una pirámide.
- Volumen y construcción de una pirámide regular.
- Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de pirámides.

Con base en las gráficas 1 y 2 podemos apreciar la construcción del prisma y pirámide en un sistema tridimensional, en donde se observa que está compuesta de tres dimensiones: altura, ancho y profundidad.

Estimado estudiante, antes de adentramos en el mundo fascinante del estudio de los prismas, sus áreas y volúmenes. Primero, demos respuesta a los siguientes cuestionamientos: ¿La matemática tiene aplicaciones en la vida real? ¿Existe un sistema especial para representar los prismas en el espacio? ¿Los prismas son cuerpos geométricos que se utilizan a diario? ¡Adelante, iniciemos con este estudio!

La geometría, no solo hace las cosas posibles en la vida cotidiana, sino que también las hace más fáciles al proporcionarnos una ciencia exacta para calcular volúmenes y áreas de figuras geométricas que son representados en un sistema tridimensional.

1.1. Sistema tridimensional para la representación de cuerpos

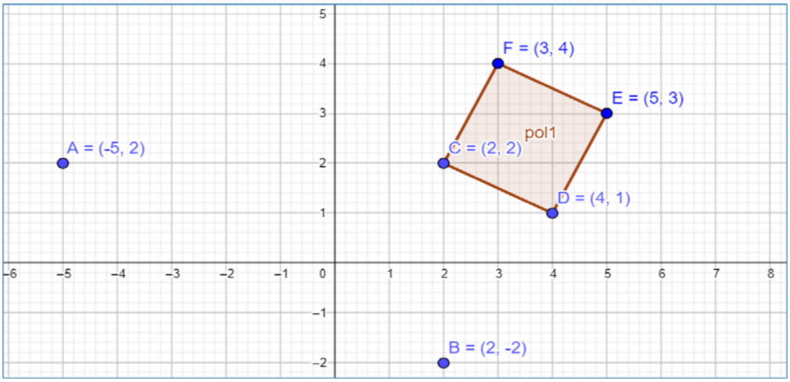
¿Qué se puede representar en un sistema bidimensional?

En un sistema bidimensional conocido como sistema cartesiano o sistema de coordenadas rectangulares se pueden representar, figuras geométricas de dos dimensiones en general.

Para poder diferencias los sistemas bidimensionales del tridimensional podemos observar la figura 3, que es un sistema con dos dimisiones ancho y largo.

Figura 3.

Sistema de coordenadas rectangulares.



Nota. Sistema de coordenadas rectangulares.

En este sistema bidimensional conocido como sistema de coordenadas rectangulares o simplemente como plano cartesiano, cada punto se representa a través de dos coordenadas (x, y). Por ejemplo, en la figura 3 el punto A (- 5, 2) está en una posición de 5 unidades a la izquierda del eje Y y 2 unidades arriba del eje X.

En la misma figura 3, la figura geométrica es un cuadrado que se puede representar a través de los puntos de sus cuatro vértices: C (2, 2); D (4, 1); E (5, 3) y F (3, 4).

¿Pero, cómo se pueden representar cuerpos geométricos en el espacio?

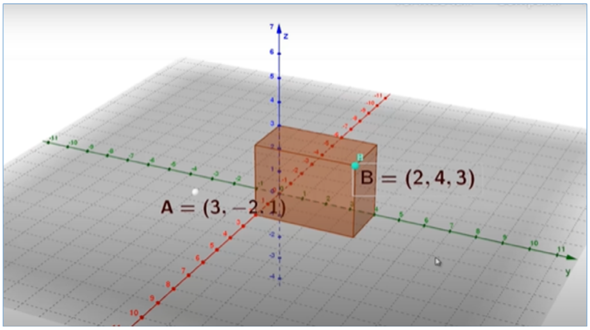
Primero, debemos entender cómo representar un punto en el espacio, es decir en un sistema ortogonal tridimensional, para esto, le invito a estudiar detenidamente las explicaciones del siguiente video: Puntos en el Sistema tridimensional.

En este video se observa con claridad cómo se construye un sistema ortogonal en tres dimensiones y cómo se representan puntos, los cuales quedan definidos a través de tres coordenadas (x, y, z). Por ejemplo, el punto A tiene de coordenadas (3, -2, 1) y el punto B tiene por coordenadas (2, 4, 3).

Vale puntualizar que, para trabajar en un sistema tridimensional se puede utilizar la aplicación GeoGebra en la vista gráfica 3D. Le invito para que practique la utilización de esta aplicación, representando los puntos A y B, y considerando que con cada punto se determina un cuerpo geométrico (son tres dimensiones-medidas).

La construcción del prisma como se ve en la imagen fue construida con la utilización del GeoGebra, herramienta tecnológica que nos facilita el desarrollo de las figuras geométricas en el sistema tridimensional.

Figura 4.
Sistemas de coordenadas tridimensionales.



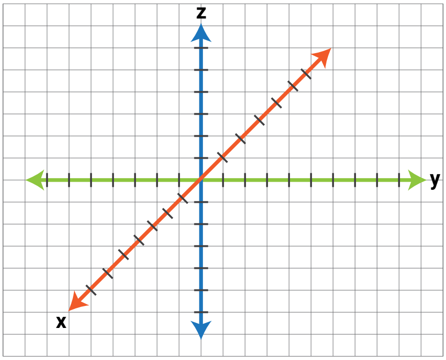
Nota. Sistema de coordenadas tridimensionales adaptado del video: Vectores y puntos en tres dimensiones, con gráfica.

En esta imagen 4 se puede apreciar las coordenadas de los puntos A y B, los cuales se representa en un mismo sistema tridimensional, logrando un paralelepípedo o prisma rectangular para el punto referencial B, como aparece en la figura 4.

Antes de contar con las calculadoras gráficas o virtuales como el Geogebra, se proyectaba un sistema tridimensional, como se observa en la figura 5 el eje X es de color rojo, el eje Y es de color verde, el eje Z es de color azul, se lo realizaba de una forma manual en una hoja cuadriculada.

Figura 5.

Sistema tridimensional dibujado en un papel.



Nota. Sistema tridimensional adaptado del video. Cómo ubicar puntos en un sistema de tres dimensiones.

Antiguamente se representaba el sistema tridimensional dibujando en una hoja de papel similar a la figura 5, actualmente es preferible utilizar aplicaciones para graficar en 3D, como es el caso de GeoGebra.

Longitud, altura y profundidad. Son las tres dimensiones que forman la representación tridimensional y, por tanto, están presentes en cualquier proyecto de animación 3D. De hecho, en nuestra realidad todo es tridimensional porque tiene longitud, altura y profundidad. Con estos antecedentes surge la interrogante:

¿Hay aplicaciones de las representaciones en un sistema tridimensional?

La representación de cuerpos geométricos regulares e irregulares en un sistema tridimensional, tienen infinitas aplicaciones, consideremos que todo lo que nos rodea está definido en tres dimensiones, con tres medidas: largo, ancho y profundidad. Actualmente los anuncios publicitarios para diferentes medios son en 3D, las simulaciones y modelados son una constante para atraer la atención de los clientes. Se aplican en videojuegos y apps, ahora es fundamental su estudio para creaciones referidas a la realidad virtual y realidad aumentada, y en películas animadas, lo cual permite investigar y hallar soluciones a diferentes problemáticas en diferentes ramas del conocimiento.

Nuevas tecnologías que usamos han podido desarrollarse gracias a la aplicación de las animaciones 3D. Con el auge del mundo virtual y la realidad aumentada, cada día es necesario contar con más profesionales expertos en estos procesos de aplicación de la animación 3D.

Recurso de aprendizaje

Con la finalidad de profundizar el análisis del sistema tridimensional, revise y analice el documento Geometría del espacio y del plano, en este apartado encontrará la composición del Sistema de coordenadas tridimensionales, también existen algunas explicaciones, desde cómo representar un punto en el espacio hasta la interpretación gráfica de una ecuación.

Es conveniente también que, estudie el microvideo Sistema de coordenadas en tres dimensiones, en donde se explica de forma muy didáctica y concreta, los elementos del sistema tridimensional utilizando tres planos que se cortan, y las características de los puntos en el espacio tridimensional.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego de revisar algunos temas introductorios y relacionados con nuestros conocimientos previos, es importante que usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando las actividades que aunque no son calificadas, son fundamentales para estudiar los temas siguientes de este curso.

Aplicando el GeoGebra y apoyándose en los microvideos, Puntos en el Sistema tridimensional, ejemplo ilustrativo de punto referencial, realice lo siguiente:

- Represente en un sistema tridimensional el punto referencial A (4, -2, 5) haga una captura de pantalla y escriba el nombre del cuerpo geométrico que se ha formado.
- Ubique en un sistema tridimensional el punto referencial B(-4, 4, 4) realice una captura de pantalla y anote el nombre del cuerpo geométrico que se ha construido,
- Determine la medida del largo, del ancho y la profundidad de la figura geométrica formada en un sistema tridimensional con el punto referencial P (5, -3, -8).

Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted podrá representar un punto en el sistema tridimensional, lo cual permitirá construir un paralelepípedo o prisma rectangular, algo sencillo pero muy valioso para los siguientes temas de estudio.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta primera semana en donde se ha podido recordar el uso y aplicación de GeoGebra, así como representar un prisma rectangular o paralelepípedo, le invito al estudio de los prismas en general, su representación y el cálculo del área y su volumen.

Semana 2

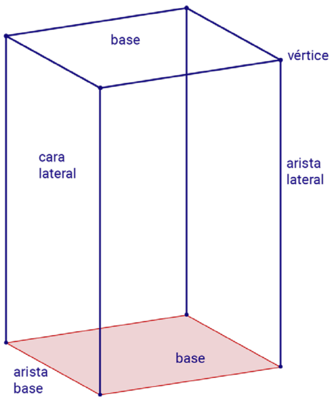
1.2. Definiciones básicas del prisma

Estimado estudiante, para llegar a la conceptualización del prisma, primero recordemos su definición: **Prisma recto** es aquel en donde las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base, mientras que el **prisma oblicuo** es aquel en donde las aristas laterales son oblicuas a las aristas de la base.

¿Cuáles son los principales elementos de un prisma?

Para aclarar un poco más este tema observe la siguiente imagen:

Figura 6.
Elementos de un prisma.



Nota. El prisma y los elementos que lo conforma.

Elementos de un prisma:

- Tiene dos bases.
- Tiene caras laterales como lados tienen bases.
- Existen aristas en las caras laterales.
- Existen aristas o lados en las bases.

En la figura 6 se puede observar los elementos que constituyen un prisma, como las bases, vértices, caras laterales y aristas laterales.

¿Cuáles son los tipos o clases de prismas?

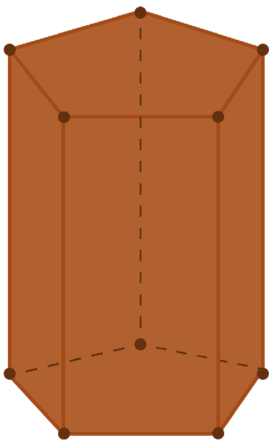
Los prismas se clasifican en prismas rectos y oblicuos. En la vida real se emplean y aplican con mayor frecuencia los prismas rectos y regulares.

En este curso, estudiaremos con atención las aplicaciones de aquellos prismas rectos y regulares, es decir sus bases son dos polígonos regulares. Para su dibujo, es fundamental que utilicemos alguna aplicación de la web como es Geogebra, al respecto lo invito a estudiar el siguiente video de construcción de prismas.

En esta explicación se detallan los pasos a seguir para la construcción y el desarrollo de un prisma recto de base regular pentagonal, como se presenta en la figura.

Figura 7.

Prisma pentagonal recto.



Nota. Construcción de prisma pentagonal.

En la figura 7 se observa que las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base pentagonal, recuerde que se trata de un prisma pentagonal recto.

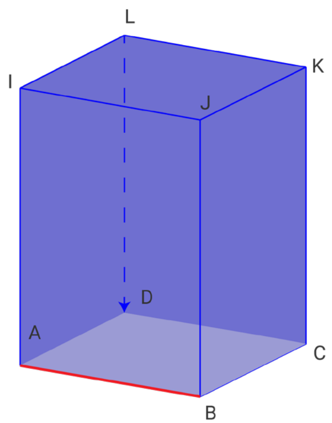
1.3. Área de un prisma

Estimado estudiante, un prisma recto se forma por las dos bases paralelas entre ellas y las caras laterales perpendiculares a las bases. Para su dibujo y representación es conveniente que utilicemos la aplicación Geogebra, recomiendo el análisis del video construcción y desarrollo de prismas en donde se explica con claridad la construcción de prismas, no solo regulares, y también se presenta el desarrollo de un prisma.

El desarrollo de un prisma permite ver con claridad que para calcular su área se debe sumar el área lateral con el área de las dos bases, esta definición se puede interpretar realizando un análisis de las siguientes figuras:

Figura 8.

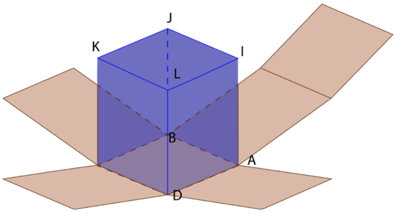
Prisma cuadrangular.



Nota. Prisma cuadrangular.

Figura 9.

Desarrollo del prisma cuadrangular.



Nota. Desarrollo del prisma cuadrangular.

> Cuando hablamos del área, nos referimos a un número que representa las unidades cuadradas correspondientes a una superficie. De donde se puede escribir que:
>
> Área del prisma = área lateral + área de las bases

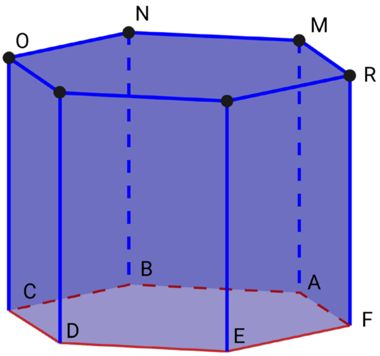
Le invito a continuar con el aprendizaje mediante la revisión del siguiente ejemplo:

Ejemplo explicativo 1

Calculemos el área de un prisma recto hexagonal cuyas bases miden 8 cm de lado, sabiendo además que su altura es de 25 cm.

Figura 10.

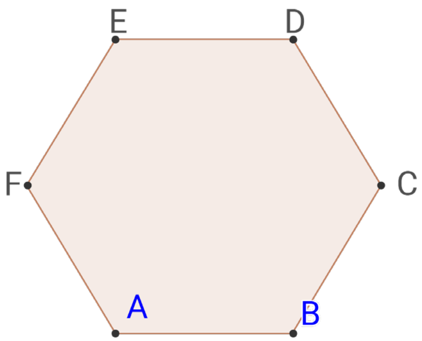
Prisma recto hexagonal.



Nota. Prisma recto hexagonal.

Figura 11.

Base hexagonal.



Nota. Base hexagonal.

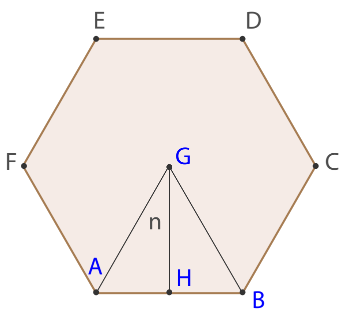
Primero consideramos la fórmula del área:

Área = área lateral + área de las bases

Como el área lateral es la suma de las áreas de las 6 caras laterales, las cuales son rectángulos que miden 8 cm por 25 cm, se tiene:

Área lateral = 6(8 cm x 25 cm)
Área lateral = 1200 cm^2

Ahora, como la base del prisma es un hexágono regular cuyo lado mide 8 cm, calculamos su área, considerando que se forman 6 triángulos equiláteros, como se observa en el siguiente gráfico, en donde primero calculamos la apotema (Distancia desde el centro de un polígono regular al centro de uno de sus lados) (a =*GH*) y luego aplicamos la fórmula base por altura sobre dos:



Apotema = $\sqrt{(\overline{GB})^2 - (\overline{HB})^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$

Área del triángulo ABG = $\frac{base\ x\ altura(a)}{2} = \frac{8 . 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$

Área de la base = $6 \times 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$ cm² $\approx 166{,}3$ cm^2

Entonces, el área del prisma será: A = 1200 cm^2 + 2(166,3 cm²) = 1532,6 cm²

Respuesta:

El área del prisma hexagonal calculada, nos da la idea de qué tanta superficie cubre dicha figura.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego de estudiar las definiciones básicas de los prismas y sus elementos, así como el cálculo del área de un prisma, es importante que usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando las actividades que, aunque no son calificadas, son fundamentales para las aplicaciones posteriores. Antes de eso, revise los ejemplos ilustrativos desarrollados en el texto básico a partir de la página 405.

Ahora, estimado estudiante solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL, aplicando los conceptos interiorizados en esta segunda semana, realice lo siguiente:

- Utilizando el GeoGebra, represente en un sistema tridimensional el prisma triangular con base regular de 4 unidades de lado y 8 unidades de altura.
- Obtenga el desarrollo de un prisma pentagonal con base un pentágono regular de 3 unidades de lado y una altura de 5 unidades.
- Dibuje con apoyo de GeoGebra un prisma pentagonal con base regular de 5 unidades de lado y una altura de 10 unidades. Luego, calcule el área lateral.
- Determine la medida de la altura de un prisma cuadrangular con base regular de 8 cm de lado, sabiendo que el área del prisma es 768 cm^2. Apóyese en el GeoGebra y trace la figura correspondiente.

- Identifique un cartón de leche con forma de prisma, tome una foto del recipiente, realice manualmente su desarrollo y calcule el área correspondiente.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted puede aplicar la conceptualización de los prismas rectos, lo cual facilita aprendizajes que serán duraderos y significativos en su futura profesión como docente de matemática.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta segunda semana en donde estudiamos la representación de prismas y su desarrollo, así como el cálculo del área lateral y área total de un prisma, iniciamos el estudio del volumen.

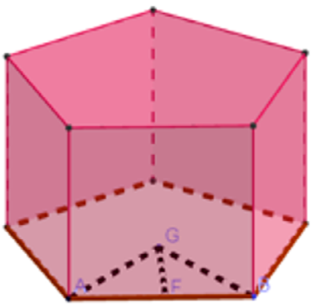
Semana 3

1.4. Volumen de un prisma

Estimado estudiante, el volumen de un cuerpo geométrico se refiere a la medida (número) en unidades cúbicas del espacio ocupado por dicho cuerpo. En esta parte del curso, estudiaremos principalmente el volumen de los prismas rectos y de bases regulares.

Para calcular el volumen de los prismas se multiplica el área de la base por la altura, obteniendo una medida en unidades cúbicas, descritas en la figura.

Figura 12.
Prisma pentagonal.



Nota. Prisma pentagonal.

Volumen del prisma = área de la base x altura

$$V = A_b \times h$$

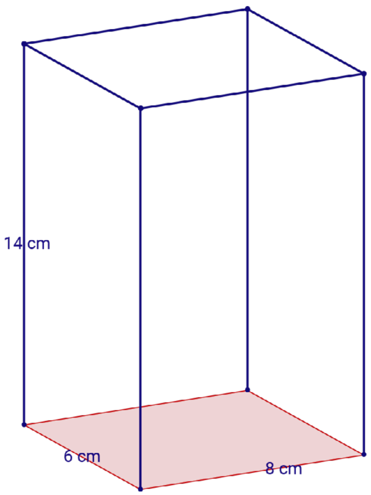
En la imagen 12 construida, se puede distinguir la base y la altura del prisma pentagonal elementos que permiten calcular el volumen.

Ejemplo explicativo 2

Determinemos el volumen de un prisma rectangular, sabiendo que su base tiene 8 cm por 6 cm y su altura mide 14 cm.

Figura 13.

Prisma cuadrangular.



Nota. Prisma cuadrangular.

Volumen = área de la base x altura

V = 6 cm x 8 cm x 14 cm

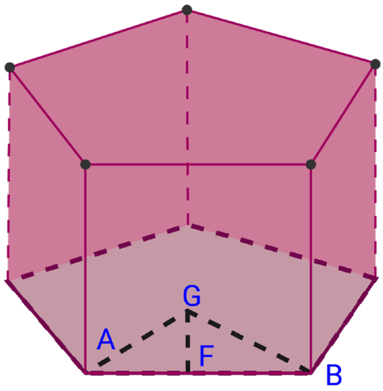
V = 672 cm^3

El resultado encontrado es el volumen que tiene el prisma después de multiplicar el área de base por la altura.

Ejemplo explicativo 3

Calculemos el volumen de un granero que tiene la forma de un prisma, sabiendo que tiene por base un pentágono regular cuyo lado mide 8 m y la altura mide 5 m.

Figura 14.
Prisma pentagonal.



Nota. Prisma pentagonal.

Volumen = Área de la base x altura

Calculamos el área de la base para lo cual, primero determinamos que el ángulo central mide 360 dividido para 5, es decir 72⁰.

Consideramos el triángulo FBG de la base y hallamos la apotema a = FG:

$$a = \frac{4}{tantan\ 36} = 5{,}5\ \text{m}$$

Ahora, calculamos en la base, el área del triángulo ABG:

$$A_{ABG} = \frac{base\ x\ apotema}{2}$$

$$A_{ABG} = \frac{8\ m\ x\ 5{,}5\ m}{2} = 22\ \text{m}^2$$

Entonces el área de la base del granero será:

$$Ab = 5 \times 22\ \text{m} = 110\ \text{m}^2$$

Por lo tanto, el volumen del granero en forma de prisma es:

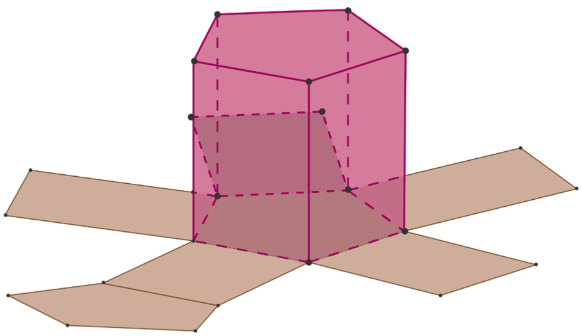
$$V = 110\ \text{m}^2 \times 5\ \text{m}$$
$$V = 550\ \text{m}^3$$

Este valor obtenido, corresponde al espacio que la forma ocupa.

1.5. Construcción de prismas

Para la construcción de un prisma en la vida real, primero se debe conseguir su modelo o dibujo del desarrollo del prisma, lo cual puede hacerlo ayudándose con la aplicación Geogebra. Por ejemplo, apoyados en esta aplicación hallamos el desarrollo del prisma recto con base regular en forma de pentágono.

Figura 15.
Prisma pentagonal.



Nota. Desarrollo de un prisma pentagonal.

Algunos modelos de desarrollos de distintos cuerpos geométricos se pueden encontrar también accediendo a la dirección desarrollo de cuerpos, en donde se detallan algunos moldes que pueden ser de gran utilidad.

Estos conocimientos básicos de geometría, son aplicados para la construcción de diferentes cajas y recipientes, realizando algunos trazos que permiten obtener diferentes prismas relacionados con cuerpos geométricos en forma de prismas que se utilizan en muchos productos comerciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, después de estudiar las fórmulas para el cálculo del volumen, revisar los procedimientos algorítmicos y conocer aspectos sobresalientes al respecto de la construcción de prismas, es necesario que usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando las actividades que, a pesar de no ser calificadas, son fundamentales para las aplicaciones posteriores.

Refuerce sus conocimientos revisando los ejemplos ilustrativos referentes al cálculo del volumen que se proponen en el texto básico de geometría, ejercicios que se encuentran a partir de la página 408.

Ahora, estimado estudiante, aplicando los conceptos interiorizados en esta tercera semana, realice lo siguiente:

- Utilizando el Geogebra, represente en un sistema tridimensional el prisma de base rectangular de 4 por 2 unidades y 5 unidades de altura.
- Determine el área y el volumen de un prisma rectangular similar al cartón de leche con medidas: 9,5 cm; 6,4 cm y 16,4 cm.
- Resuelva: Una caja de cartón tiene la forma de un prisma rectangular y mide en su base 7 cm por 5 cm. Sabiendo que su volumen es 490 cm^3, determine la altura de la caja.
- Construya con ayuda del Geogebra un cubo de 10 unidades de arista y halle su desarrollo.
- Construya manualmente un cubo de 10 cm de arista y tome una foto de su desarrollo previo.
- Responda. ¿Cuál es el máximo volumen del prisma que se puede construir con una cartulina de 30 x 30 cm?

Con el desarrollo de las actividades recomendadas, usted consiguió aplicar la conceptualización de los prismas rectos, lo cual permitirá que en su docencia futura comparta con sus estudiantes la posibilidad de relacionar la matemática a la vida real.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta tercera semana en donde analizamos los algoritmos para calcular el volumen de cuerpos en forma de prismas, con la finalidad de optimizar el material al momento de construir cajas de cartón, nos ocuparemos de estudiar máximos y mínimos con áreas y volúmenes de prismas.

Semana 4

1.6. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes

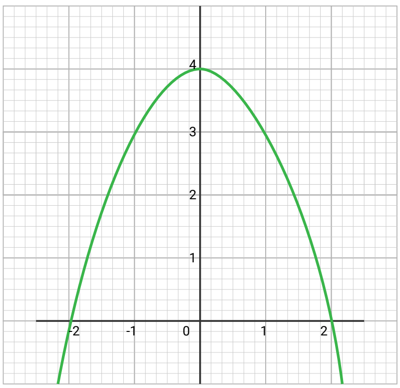
Entre las aplicaciones más importantes de la derivada tenemos la *solución de problemas de optimización* en donde se requiere hallar la manera adecuada y óptima la solución a un problema planteado, aquí aparecen entonces los problemas de máximos y mínimos de una función, es común observar procesos con los conceptos de áreas y volúmenes, por ejemplo, cuando se quiere construir una caja con mayor volumen posible, a partir de cierta área de algún material.

Antes de estudiar estas aplicaciones, conviene recordar los valores máximos y mínimos de una función, para lo cual partimos de dos definiciones importantes. **Valor máximo:** Una función f tiene un **valor máximo absoluto en un intervalo** cuando existe un número a en el intervalo de tal manera que $f(a) \geq f(x)$. **Valor mínimo:** Una función f tiene un **valor mínimo absoluto en un intervalo** cuando existe un número a en el intervalo de tal manera que $f(a) \leq f(x)$.

Ejemplo explicativo 4

Consideremos la función $f(x) = -x^2 + 4$ y el intervalo $(-2, 2)$. Determinemos gráficamente el valor máximo absoluto de la función en dicho intervalo.

Figura 16.
Valor máximo de la función.



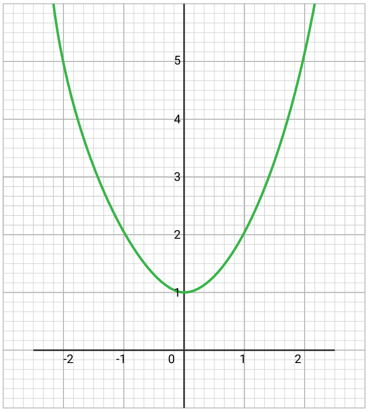
Nota. Calculo de valor máximo de una función.

La función $f(x) = -x^2 + 4$ tiene un valor máximo absoluto de 4, correspondiente a x = 0 en el intervalo (−2, 2). Este valor es $f(0) = 4$. Este es el extremo absoluto y el valor máximo del dominio de una función.

Ejemplo explicativo 5

En la función $f(x) = x^2 + 1$ determine la forma gráfica el valor mínimo absoluto de la función en dicho intervalo el intervalo (−2, 2).

Figura 17.
Valor mínimo de la función.



Nota. Cálculo de valor mínimo de una función.

La función $f(x)= x^2 + 1$ tiene un valor mínimo absoluto de 1 en el intervalo (−2, 2). Este valor es $f(0) = 1$. Este es el extremo absoluto y el valor mínimo del dominio de una función.

Ahora, la derivada de una función permite encontrar analíticamente los máximos y mínimos de una función, con lo cual se pueden resolver algunos tipos de problemas sobre la optimización. En este curso estudiamos únicamente aquellos referidos a las áreas y volúmenes. Para lo cual, se aplica el teorema de Fermat, el cual afirma que, si una función f es continua y tiene un máximo o un mínimo en c, entonces $f'(c) = 0$.

Teorema de Fermat

Si una función alcanza un máximo o mínimo local en, y si la derivada existe en el punto, entonces = 0.

Aplicando este teorema de la derivada de una función, se puede calcular analíticamente el máximo de una función. Por ejemplo, si tenemos la función $f(x) = -x^2 + 4$, entonces si hacemos $f'(c) = 0$, tenemos que:

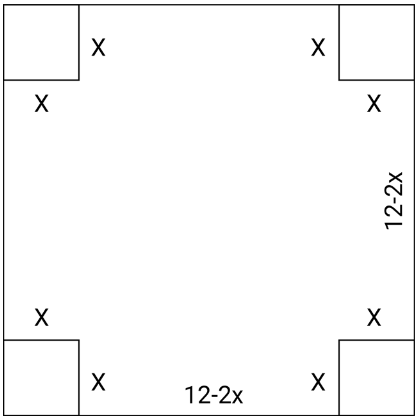
$f(x) = -x^2 + 4$
$f'(x) = -2x$; aplicando el Teorema de Fermat hacemos $f'(c) = 0$
$0 = -2x$, de donde $x = 0$. Esto quiere decir que, cuando $x = 0$ se produce un máximo o un mínimo, en este caso: $f(0) = 4$

Esta particularidad de la derivada de una función nos permite resolver muchos problemas de aplicación acerca de la optimización relacionada con las áreas y volúmenes.

Ejemplo explicativo 6

Un comerciante de joyas, desea construir cajas abiertas de metal a partir de planchas cuadradas que miden 12 cm de lado, cortando trozos cuadrados en las esquinas y doblando los lados. Determinemos la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener la caja con el máximo volumen.

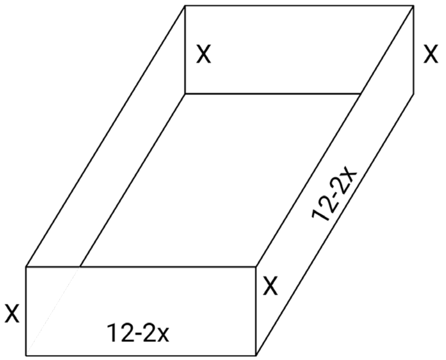
Figura 18.
Base de caja.



Nota. Base de la caja para calcular el máximo de una caja.

Figura 19.

Caja rectangular.



Nota. Calculo de volumen máximo.

En el dibujo anterior se observa la plancha cuadrada y el dibujo de la caja sin tapa que se quiere construir. Si se cortan pedazos cuadrados en las esquinas, el volumen *V* en cm^3 será:

$$V(x) = (12 - 2x).(12 - 2x).\ x$$
$$V(x) = (144 - 48x + 4x^2).\ x$$
$$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

Ahora, si consideramos que el dominio de esta función *V(x)* está en el intervalo [0, 6] y aplicando el teorema de Fermat concluimos que el volumen de la caja tiene un valor máximo absoluto en dicho intervalo. Por lo que, para determinarlo aplicamos la derivada a la función: $V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$ y luego igualamos a cero.

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$$
$$144 - 96x + 12x^2 = 0$$
$$12x^2 - 96x + 144 = 0$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$(x - 6)\ (x - 2) = 0$$
$$x_1 = 6\ ;\ x_2 = 2$$

Por lo tanto, los números críticos del volumen V son 2 y 6, los cuales están dentro del intervalo cerrado correspondiente al dominio de la función. Entonces, el valor máximo absoluto del volumen debe ocurrir en uno de estos números críticos o en un extremo del intervalo. Por lo que, hallamos los valores: V(0), V(2) y V(6).

$$V(0) = 144 - 96(0) + 12(0)^2 = 144$$
$$V(2) = 144 - 96(2) + 12(2)^2 = 0$$
$$V(6) = 144 - 96(6) + 12(6)^2 = 244 \text{ cm}^3$$

En consecuencia, concluimos que el valor máximo del volumen V en el intervalo [0, 6] es 244 cm^3 lo cual ocurre cuando x = 2.

Solución: El volumen máximo que se obtiene es de 244 cm^3 y se obtiene cuando la longitud del pedazo cuadrado que se corta en las esquinas es de 2 cm.

Recurso de aprendizaje

Estimado estudiante, después de estudiar una de tantas aplicaciones de los valores máximos y mínimos de una función en los prismas con áreas y volúmenes, aplicando el , conviene puntualizar que, existe una amplia variedad de problemas al respecto, por esta razón, usted debe desarrollar la mayor cantidad posible.

Al respecto sugiero que estudie el video de aplicación volumen máximo en donde se explica con claridad la conexión entre área, volumen y los conceptos de máximos y mínimos de una función.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte de nuestro estudio, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta cuarta semana, realice lo siguiente:

- Escriba el enunciado del problema y luego describa el desarrollo del caso presentado a través del video volumen máximo en donde se propone un problema de optimización.
- Determine el volumen máximo de una caja sin tapa con forma de prisma de base cuadrada que se puede armar con una plancha de cartón que tiene de área 600 cm^2.
- Un comerciante de frutas ecuatorianas desea construir cajas abiertas a partir de planchas rectangulares de cartón que miden 80 cm x 70

cm, cortando trozos cuadrados en las esquinas y doblando los lados. Determine la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener la caja con el máximo volumen.

- Construya con ayuda del Geogebra una caja abierta con forma de prisma que tenga el mayor volumen posible, a partir de una cartulina que mide 70 unidades x 100 unidades.
- Responda. ¿Aparte de los prismas, existen otros poliedros o cuerpos geométricos que tiene formas similares a las pirámides de Egipto?

Con el desarrollo de las actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de los prismas rectos en la resolución de problemas con máximos y mínimos relacionados con la optimización, lo cual permitirá que en su docencia futura comparta con sus estudiantes la posibilidad de relacionar la matemática a la vida real de la industria y el comercio.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta cuarta semana en donde estudiamos las aplicaciones de máximos y mínimos, la primera derivada en problemas con áreas y volúmenes de prismas, nos aprestamos para ingresar al mundo fascinante de las pirámides ¿Las pirámides fueron construidas por el hombre?

Según Adamas K (2010). Manifiesta que las pirámides fueron construidas por hombres libres y que gozaba de condiciones relativamente buenas.

Semana 5

1.7. Definición y área superficial de una pirámide

Primero observemos la belleza que constituyen las pirámides de Egipto y que son parte de las cosas más extraordinarias que existen en nuestro planeta.

Figura 20.
Pirámides de Egipto.

Nota. SAPhotog|shutterstock.com.

Definitivamente, como lo afirman muchos, las pirámides de Egipto son ¡Un prodigio de las matemáticas y la astronomía! Pero nos preguntamos:

¿Cómo se construyeron las pirámides de Egipto?

Aunque se han dedicado muchos esfuerzos para contestar esta pregunta, como lo narra Coll (2018), parece que nadie es capaz de demostrar con exactitud cómo ocurrió este proceso. Los científicos y arqueólogos no pueden dar una respuesta precisa al respecto.

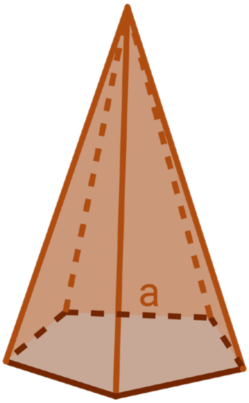
En cuanto al objetivo de su construcción, muchos coinciden y afirman que, se debe a que en esos tiempos había la creencia que cuando un faraón moría se convertía en un Dios por lo que disfrutaban del privilegio de ser sepultados en ellas.

1.7.1. Definición de pirámide

Se conoce que, una pirámide es un cuerpo geométrico que tiene por base un polígono y sus caras laterales son triángulos que coinciden en un vértice común. En este curso damos mayor atención a aquellas pirámides que tiene por base un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes.

Su definición formal aparece en el texto básico de Alexander y Koeberlein (2013).

Figura 21.
Pirámide regular pentagonal.



Nota. Elementos de la pirámide pentagonal.

La pirámide de la figura 21 es una pirámide recta, la cual se caracteriza porque su base es un pentágono regular, en consecuencia, tiene una base pentagonal de 5 lados, cuenta con 5 caras laterales que son triángulos congruentes, los cuales se unen en la parte superior y forman el vértice de la pirámide. La altura es la perpendicular trazada desde el vértice hasta el centro de la base.

En algunos textos de matemáticas los autores hablan de alturas inclinadas, pero en realidad se refieren a las aristas de la pirámide, las cuales son congruentes en el caso de las pirámides regulares.

Para encontrar la altura de una pirámide regular partiendo de los lados de la base (arista de la base) y de las aristas de las caras laterales, se aplica el teorema de Pitágoras, previamente se obtiene el valor de la apotema del polígono base.

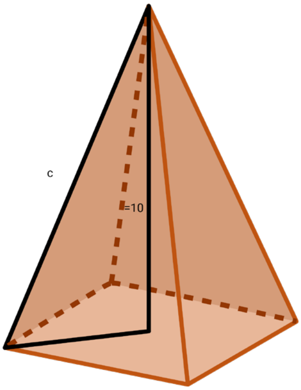
Le invito a continuar con el aprendizaje mediante la revisión del siguiente ejemplo:

Ejemplo explicativo 7

Determinemos el valor de la arista lateral de una pirámide regular cuya altura es 10 cm, sabiendo además que la base es un cuadrado cuyo lado mide 6 cm.

Figura 22.

Pirámide cuadrangular.



Nota. Calculo de la arista lateral pirámide cuadrangular.

Consideremos el triángulo con color negro, en donde el cateto inferior sobre la base es la mitad de la diagonal del cuadrado base. Determinamos su valor y luego aplicamos el Teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa que es la arista lateral de la pirámide.

El cateto sobre la base es la mitad de la diagonal del cuadrado de lado igual a 6 cm, por lo tanto:

$$c = \frac{\sqrt{6^2+6^2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ cm$$

Ahora, determinamos la arista de la pirámide:

(Arista)² = (altura)² + (cateto)²

$$l^2 = h^2 + c^2$$

$$l^2 = 10^2 + (3\sqrt{2})^2$$

$$l^2 = 100 + 18$$

$$l = \sqrt{100 + 18}$$

$$l = \sqrt{118}$$

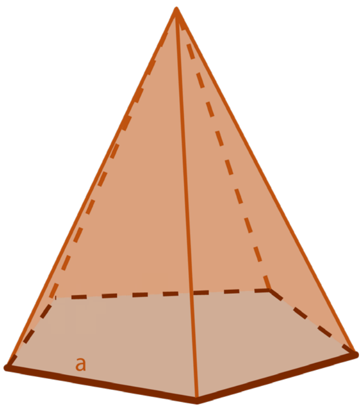
Solución: La arista lateral de la pirámide mide aproximadamente 10,86 cm.
La solución obtenida de 10,86 cm es el segmento que une a las dos caras de una pirámide.

1.7.2. Área superficial de una pirámide

Estimado estudiante, recordemos que, una pirámide regular recta se forma cuando la base es regular y perpendicular a la altura de la pirámide. Para su dibujo y representación es conveniente que utilicemos la aplicación GeoGebra, recomiendo el análisis del video construcción de pirámides en donde se explica con claridad la construcción de pirámide regulares rectas, partiendo del polígono base en una vista 2D.

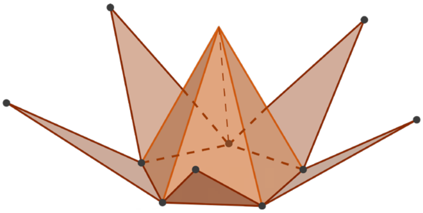
El desarrollo de una pirámide permite ver con claridad que, para calcular su área se debe sumar el área de las caras laterales (triángulos) con el área de la base.

Figura 23.
Prisma pentagonal.



Nota. Desarrollo de una pirámide pentagonal.

Figura 24.
Desarrollo de una pirámide pentagonal.



Nota. Construcción de una pirámide pentagonal.

En esta parte, vale puntualizar que cuando se habla del área, nos referimos a un número que representa las unidades cuadradas correspondiente a una superficie. Por lo que, se puede escribir:

Área del prisma = área lateral (L) + área de la base

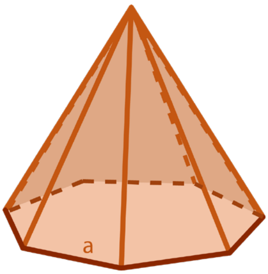
Para calcular el área lateral podemos aplicar la fórmula $L = n.\frac{1}{2}.s.l$, sin embargo y considerando que *(n.s)* es el perímetro del polígono regular, concluimos que $\frac{1}{2}l(n.s) = \frac{1}{2}l.P$, en donde *P* es el perímetro de la base. Sugiero que revise los procesos de deducción que se ofrecen en el texto básico.

Le invito a continuar con el aprendizaje mediante la revisión del siguiente ejemplo:

Ejemplo explicativo 8

Calculemos el área lateral de una pirámide heptagonal cuya base miden 10 cm de lado, sabiendo además que las aristas laterales miden 30 cm.

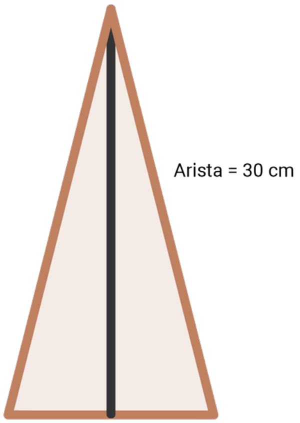
Figura 25.
Pirámide heptagonal.



Nota. Cálculo del área de la Pirámide heptagonal propia.

Figura 26.

Cara lateral.



Nota. Cálculo del área lateral de la Pirámide heptagonal.

Primero, consideramos la fórmula del área lateral:

$L = \frac{1}{2} l.\,P$; vemos que nos falta conocer el valor de *l*

Para calcular la altura del triángulo aplicamos el teorema de Pitágoras:

$l^2 = 30^2 - 5^2 = 875$; de donde $\quad l = 5\sqrt{35}$

Ahora que contamos con el valor de la altura inclinada de la pirámide, aplicamos la respectiva fórmula para hallar el área lateral, considerando que el perímetro de la base será el producto del número de lados (7) por el valor de cada lado (10):

$L = \frac{1}{2} l.\,P = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{35}\right)(7 \cdot 10)$

$L = 175\sqrt{35}\ \text{cm}^2$

El resultado obtenido del área lateral de la pirámide heptagonal, doto que nos sirve para el cálculo del área total, que es la suma de las caras laterales y su base.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego de estudiar las definiciones básicas de las pirámides y sus elementos, así como el cálculo del área lateral y área total de un prisma, es importante que usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando las actividades que a pesar de no ser calificadas, son fundamentales para las aplicaciones posteriores.

Antes de eso, revise la deducción de fórmulas y los ejemplos ilustrativos desarrollados en el texto básico a partir de la página 413. Este particular reforzará las habilidades para resolver problemas de aplicación con las áreas de los prismas.

Por lo tanto, estimado estudiante solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL, aplicando los conceptos interiorizados en esta quinta semana, realice lo siguiente:

- Utilizando Geogebra represente en un sistema tridimensional una pirámide triangular cuya base mida 4 unidades en cada lado y 8 unidades de altura.
- Obtenga el desarrollo de una pirámide pentagonal con base un pentágono regular de 4 unidades de lado y una altura de 3 unidades.
- Dibuje con apoyo de Geogebra una pirámide pentagonal cuya base mida 5 unidades en cada lado y tenga altura de 10 unidades. Luego, calcule el área lateral.
- Determine la medida de la altura de una pirámide con base cuadrangular de 8 cm de lado, sabiendo que el área de la pirámide es 768 cm^2. Apóyese en el Geogebra y trace la figura correspondiente.
- Identifique en el comercio algún producto cuyo empaque tenga la forma de una pirámide y calcule el área total en cm^2.

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de las pirámides regulares, lo cual facilita aprendizajes que serán duraderos y significativos en su futura profesión como docente de matemática.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta quinta semana en donde estudiamos la representación en el sistema tridimensional, definiciones básicas, elementos y el cálculo del área de pirámides, nos preparamos a continuar estudiando el concepto de volumen y de la construcción de pirámides regulares.

Semana 6

1.8. Volumen y construcción de una pirámide

1.8.1. Volumen de una pirámide

Figura 27.
Arquímedes.

Nota. German Vizulis|shutterstock.com.

Cuando recordamos el concepto de Volumen, no podemos olvidar el nombre de uno de los más grandes hombres de ciencia en la antigüedad, el científico Arquímedes, quien realizó importantes aportes a la Física y a la matemática.

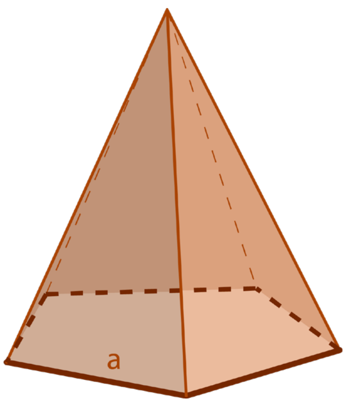
Le invito a realizar un análisis de los aportes científicos de Arquímedes, a través del video Eureka en donde el youtuber de RaizdePi, hace un repaso por la vida de esta figura tan importante para la ciencia, desde cuando se produce el descubrimiento del famoso principio de Arquímedes hasta su muerte.

Entonces, existe una relación directa entre los aportes de Arquímedes y el Volumen de un cuerpo ¿Puede contar cuál es esa relación?, Arquímedes descubrió la relación entre la superficie y el volumen de una esfera y el cilindro que la circunscribe.

Si necesita reforzar el contenido, le invito para que revise nuevamente el video propuesto.

En matemáticas y sus aplicaciones podemos afirmar que, el volumen de un cuerpo está relacionado con un número que representa la cantidad de espacio que ocupa el cuerpo. El volumen se mide en unidades cúbicas.

Figura 28.
Pirámide regular pentagonal.



Nota. Volumen de pirámide regular pentagonal.

Si B representa el área de la base y h es la altura, es decir la perpendicular trazada desde el vértice hasta el centro de la base, entonces el volumen V de la pirámide es la tercera parte del producto de la base B por la altura h.

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

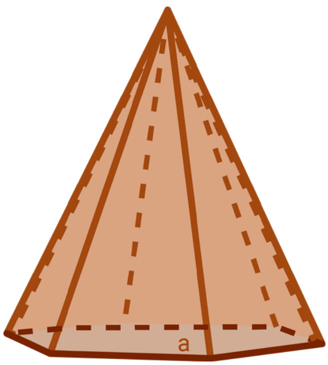
En la figura 28 se puede observar la composición de pirámide regular pentagonal, donde se nota la base y las cinco caras laterales.

Ejemplo explicativo 9

Hallemos el volumen de la pirámide que tiene de base un hexágono regular con 8 cm de lado y una arista lateral de 16 cm.

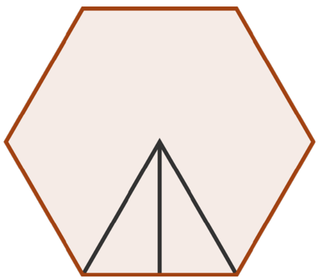
Figura 29.

Pirámide hexagonal.



Nota. Volumen de la pirámide hexagonal.

Calculamos primero el área de la base hexagonal, para esto se necesita determinar la apotema del hexágono.



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Entonces, el área de la base es:

$$B = \frac{1}{2}aP = \frac{1}{2}4\sqrt{3} \cdot 48 = 96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Para calcular la altura, aplicamos el teorema de Pitágoras considerando que, la arista lateral sería la hipotenusa igual a 16 cm y el cateto es igual a un lado de la base, entonces:

$$h = \sqrt{16^2 - (8)^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

Finalmente, el Volumen de la pirámide hexagonal sería:

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 96\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 768$$

El volumen de la pirámide es: V = 768 cm³, que representa la cantidad de espacio que ocupa el cuerpo.

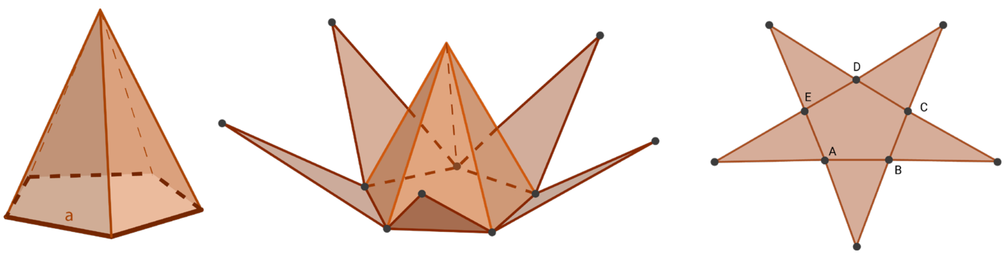
1.8.2. Construcción de una pirámide

Estimado estudiante, para la construcción de una pirámide de manera virtual nos apoyamos en Geogebra y colocando en Vista 3D accedemos al sistema tridimensional en donde realizamos la construcción y posterior desarrollo de la pirámide que se quiera construir, al respecto estudiemos en el video Desarrollo de una pirámide con Geogebra los pasos a seguir para primero, construir la pirámide y luego apreciar su desarrollo.

Los procesos estudiados para la construcción virtual y posterior desarrollo de una pirámide, permitirán hacerlo de manera manual para obtener una pirámide regular en físico, utilizando algún material sencillo y económico como la cartulina. Lo importante es que usted conozca las plantillas del desarrollo de un prisma y a partir de ellas, iniciar con la construcción manual. Apreciemos este desarrollo en las siguientes imágenes.

Figura 30.

Construcción de una pirámide.



Nota. Desarrollo de una pirámide.

Con las imágenes mostradas, puede construir una pirámide pentagonal para utilizarlo como material concreto.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, luego de estudiar las definiciones, elementos y fórmulas para calcular el volumen de pirámides regulares, así como el desarrollo virtual y físico de las mismas es importante que, usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando las actividades que, a pesar de no ser calificadas, son fundamentales para las aplicaciones posteriores.

Antes de eso, revise la deducción de fórmulas y los ejemplos ilustrativos desarrollados en el texto básico a partir de la página 417. Este particular reforzará las habilidades para resolver problemas de aplicación con el volumen de los prismas.

> Complemente sus aprendizajes revisando el video referente al Volumen de una pirámide en función de x, aquí se explica paso a paso el algoritmo para el cálculo del volumen de un prisma en un caso particular muy interesante.

A continuación, estimado estudiante, solicito que con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta sexta semana, realice lo siguiente:

- Calcule el volumen de una pirámide regular hexagonal que tiene 12 m en su base y una altura de 25 m.
- Determine el volumen de una pirámide regular heptagonal que tiene 8 cm por lado en su base y una altura de 12 cm.
- Construya con Geogebra una pirámide pentagonal regular cuya base mida 4 unidades en cada lado y tenga una altura de 10 unidades. Luego, calcule su volumen.
- En una pirámide cuadrangular regular el lado de la base mide 8 cm. Sabiendo que la altura de la pirámide es también de 8 cm, encuentre la arista lateral o altura inclinada.

- Identifique en el comercio algún producto cuyo empaque tenga la forma de una pirámide y calcule su volumen en cm^3.
- Construya en físico una pirámide regular de base cuadrangular que tenga un lado de 3 cm y 5 cm de altura.

Con el desarrollo de las seis actividades recomendadas, usted podrá aplicar la conceptualización de las pirámides regulares, su volumen, su desarrollo y su construcción física y virtual, lo cual facilita para aprendizajes que serán duraderos y significativos en su futura profesión como docente de matemática.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta sexta semana en donde estudiamos la representación física y virtual de pirámides, su desarrollo, su construcción y el cálculo de volúmenes, nos hacemos una pregunta ¿Cuál es el volumen máximo que se puede lograr al construir una pirámide con ciertas medidas de su área? Para contestar esta interrogante, lo invito a la siguiente semana de estudios.

Semana 7

1.9. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de pirámides

Estimado estudiante, continuamos con el estudio de las aplicaciones de la derivada respecto a la *solución de problemas de optimización*. En esta ocasión, nos referimos a aquellos problemas de máximos y mínimos relacionando con el área y el volumen de una pirámide.

En este tipo de problemas de aplicación de los conceptos de área y volumen de las pirámides es buscar la función que relacione el volumen a maximizar con alguna variable independiente que está inmersa en los datos y cálculos del área.

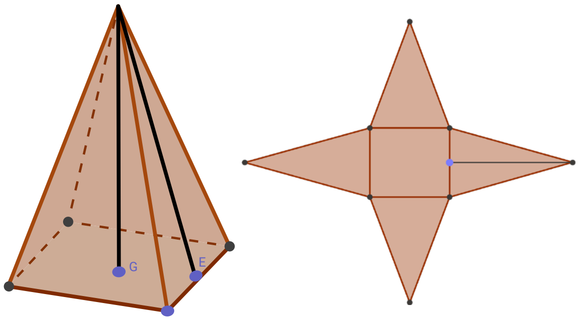
Ejemplo explicativo 10

Determinemos las medidas aproximadas de una carpa con forma de pirámide cuadrangular que se puede construir a partir de una superficie de lona de 16 metros.

Para mejor interpretación del ejercicio se describe los datos del problema en la pirámide cuadrangular como lo muestra la imagen:

Figura 31.

Pirámide Cuadrangular.



Nota. Calculo de máximos y mínimos de una pirámide.

Primero vamos a escribir la función a maximizar, el volumen:

$$V = \frac{1}{3} Base \cdot altura$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} l^2 \cdot h$$

Ahora, observamos que el volumen se encuentra en función de otras dos variables, por lo que buscamos relacionar a dichas variables, para esto primero consideremos que el área total de la pirámide (16 m) es la suma de la Base más el área lateral:

$$A = B + L = l^2 + 2lh_1 \text{ (Ecuación 1)}$$

También sabemos que la altura inclinada de la pirámide h_1 es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma y se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h_1{}^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h_1 = \sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}} \text{ (Ecuación 2)}$$

A continuación, reemplazamos la ecuación 2 (*h1*) en la ecuación 1:

$$A = l^2 + 2lh_1 = l^2 + 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$A = l^2 + 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

De esta última ecuación despejamos h y luego lo reemplazamos en el volumen que se quiere maximizar:

$$A = l^2 + 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$A - l^2 = 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{A - l^2}{2l}$$

$$h^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{A^2 - 2Al^2 + l^4}{4l^2}$$

$$h^2 = \frac{A^2 - 2Al^2 + l^4}{4l^2} - \frac{l^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{A^2 - 2Al^2}}{2l}$$

Seguidamente, reemplazamos el valor de (*h*) en la función a maximizar:

$$V(l) = \frac{1}{3}l^2 \cdot h$$

$$V(l) = \frac{1}{3}l^2 \cdot \frac{\sqrt{A^2 - 2Al^2}}{2l}$$

$$V(l) = \frac{1}{6}l \cdot \sqrt{A^2 - 2Al^2}$$

Ahora, sacamos la primera derivada de la función con la finalidad de obtener posteriormente los puntos críticos en donde seguramente se produzca un máximo valor del volumen:

$$V'(l) = \frac{1}{6}[l \cdot \frac{1}{2} \cdot (A^2 - 2Al^2\ )^{-1/2} \cdot (-4Al) + (A^2 - 2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}[l \cdot \frac{1}{2}\ \frac{-4Al}{(A^2-2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}} + (A^2 - 2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{-2Al+A^2-2Al^2}{(A^2-2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}}]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{-2Al^2+A^2-2Al^2}{(A^2-2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}}]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{+A^2-4Al^2}{(A^2-2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}}]$$

Reemplazamos A que es el área total de la lona e igual a 16 m^2:

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{16^2-4\cdot 16l^2}{\sqrt{16^2-2\cdot 16l^2}}]$$

Igualamos a cero la primera derivada para hallar los puntos críticos:

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{16^2-4\cdot 16l^2}{\sqrt{16^2-2\cdot 16l^2}}] = 0$$

$$16^2 - 4 \cdot 16l^2 = 0$$

$$l^2 = 4$$

$$(l+2)(l-2) = 0$$

Aplicamos el teorema del factor cero y hallamos los dos puntos críticos:

$$l_1 = 2;\ l_2 = \ -2$$

El valor del lado que se encuentra dentro del dominio [0, 4], es $l_1 = 2$ m.

Reemplazamos este valor en la fórmula de la altura y encontramos la altura:

$$h = \frac{\sqrt{A^2-2Al^2}}{2l} = \frac{\sqrt{16^2-2\cdot 16(2^2)}}{4} = \frac{\sqrt{128}}{4} = 2{,}83 \text{ m}$$

Por lo tanto, el máximo volumen que se puede obtener con la carpa de superficie 16 m^2 será:

$$V = \frac{1}{3}l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2{,}83 = 3{,}77\ m^3$$

Recurso de aprendizaje

Estimado estudiante, después de estudiar una de tantas aplicaciones de los valores máximos y mínimos de una función con áreas y volúmenes de los prismas aplicando el *Teorema de Fermat*; conviene puntualizar que, existe un amplio número de problemas de optimización, con la finalidad de alcanzar experticia en su aplicación y resolución, usted debe desarrollar la mayor cantidad posible de problemas.

Al respecto, sugiero que estudie el video de aplicación volumen máximo en donde se explica con claridad la conexión entre área, volumen y los conceptos de máximos y mínimos de una función.

A continuación, en el siguiente recurso le presentamos definiciones, ejercicios y videos de construcción de área y volúmenes de las figuras geométricas prismas y pirámides

Prismas, Pirámides, áreas y volúmenes

Como puede determinar, las aplicaciones de medidas de áreas y volúmenes de primas y pirámides son infinitas, sin embargo, depende mucho de la creatividad de las personas para su aplicación en la vida cotidiana.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Con esos mismos ánimos y ganas por aprender, experimente a través de la aplicación en Geogebra acerca del volumen máximo de una pirámide en donde se explica paso a paso el cálculo de las dimensiones de la pirámide de volumen máximo a partir de una superficie o área constante.

En esta parte, estimado estudiante, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta séptima semana, realice lo siguiente:

- Determine las medidas de la carpa con forma de prisma cuadrangular de mayor volumen que, puede construirse a partir de una superficie de lona que tiene un área igual a 20 metros cuadrados. *Sugerencia: Tome en cuenta también, la base de la pirámide cuadrangular.*

- Determine las medidas de la carpa con forma de prisma pentagonal de mayor volumen que, puede construirse a partir de una superficie de lona que tiene un área igual a 16 metros cuadrados. *Sugerencia: Tome en cuenta también, la base de la pirámide pentagonal.*

- Determine las medidas de la carpa con forma de prisma hexagonal de mayor volumen que, puede construirse a partir de una superficie de lona que tiene un área igual a 24 metros cuadrados. *Sugerencia: Tome en cuenta también, la base del prisma hexagonal.*

- Escriba el enunciado del problema y luego redacte su desarrollo del caso presentado a través del video Prisma inscrito en pirámide en donde se propone un problema de optimización aplicando y conectando los conceptos de prisma y pirámide.

Con el desarrollo de las actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de máximos y mínimos en la resolución de problemas prácticos en donde se determinan las medidas de las pirámides de mayor volumen que pueden construirse a partir de ciertas condiciones dadas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta séptima semana en donde estudiamos las aplicaciones de máximos y mínimos, empleando la primera derivada en problemas con áreas y volúmenes de pirámides, nos aprestamos para sistematizar todo lo estudiado en este primer bimestre ¿Usted conoce las actividades que debe desarrollar en esta siguiente semana ocho?

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Estimado estudiante, en la última semana de estudio, la invitación para que revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello, considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y,
- Evaluaciones parciales.

Recuerde

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en la primera unidad sobre sistemas tridimensionales para la representación de cuerpos, definiciones básicas del prisma, Área y Volumen de un prisma, Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de prismas, Definiciones y área superficial de una pirámide, Volumen y construcción de una pirámide regular, Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de pirámides

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del primer bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en la unidad planificada y desarrollada en este primer bimestre.

- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.

- Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

Luego de haber participado activamente de las diferentes actividades propuestas, es hora de poner en práctica los conocimientos adquiridos a través del desarrollo de la autoevaluación, con ello se evidenciará el dominio acerca de los principios de las energías alternativas.

Autoevaluación 1

Seleccione verdadero o falso en las siguientes proposiciones.

1. ( ) **El estudio de prismas, pirámides, permite el estudio y resolución de problemas de máximos y mínimos, con áreas y volúmenes de las figuras geométricas en el espacio.**

2. ( ) **El sistema ortogonal tridimensional permite representar un sistema de figuras geométricas lineales.**

3. ( ) **El sistema tridimensional tiene tres dimensiones representadas por los planos (x, y, Z).**

4. ( ) **El prisma recto es aquel donde las aristas laterales son oblicuas a las aristas de la base.**

En las siguientes preguntas identifique la alternativa correcta.

5. **El cuerpo geométrico que tiene por base un polígono y sus caras laterales son triángulos que coinciden en un vértice común se llama:**

   a. Prisma.
   b. Pirámide.
   c. Cono.

6. **El prisma que tiene las aristas laterales oblicuas a las aristas de la base se llama:**

   a. Recto.
   b. Oblicuo.
   c. Hexagonal

7. **Hallar el área y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 3 cm y la arista lateral 5 cm:**

   a. A_T = 46,242 cm² y V = 10,392 cm³ .
   b. A_T = 10,392 cm² y V = 46,242 cm³.
   c. A_T = 40,242 cm² y V = 11,392 cm³.

8. Calcular el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 4 cm de arista y una altura de 6 cm: T 2

a. A_T = 56,592 cm^2 *y* V = 22 cm^3.
b. A_T = 76,592 cm^2 *y* V = 42 cm^3.
c. A_T = 66,592 cm^2 *y* V = 32 cm^3.

9. Calcular el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 14 m y su altura es de 27 m:

a. A_T = 4286,416 cm^2 *y* V = 43748,616 cm^3.
b. A_T = 3286,416 cm^2 *y* V = 13748,616 cm^3.
c. A_T = 2286,41 cm^2 *y* V = 23748,616 cm^3.

10. Hallar el área total y el volumen de un prisma cuadrangular regular cuyo lado de la base mide 1,20 m y la altura de 4 m:

a. A_T = 20,00 cm^2 ; V = 4,00 cm^3.
b. A_T = 22,08 cm^2 ; V = 5,76 cm^3.
c. A_T = 24,08 cm^2 *y* V = 6,76 cm^3.

11. Un hombre desea construir una caja metálica abierta. La caja debe tener una base cuadrada, los lados de 9 pulgadas de altura y una capacidad de 5184 cúbicas. Determine el tamaño de la pieza cuadrada de metal que debe de comprar para construir la caja:

a. 576 pulgadas cuadradas.
b. 467 pulgadas cuadradas.
c. 756 pulgadas cuadradas.

Mediante una aplicación web o calculadora gráfica construya lo indicado:

12. Construya un prisma triangular.

13. Construya un prisma cuadrangular.

14. Construya una pirámide de base hexagonal.

15. Construya una pirámide de base pentagonal.

Ir al solucionario

Seguramente finalizó exitosamente la autoevaluación planteada, para verificar su correcto desarrollo compare sus respuestas con el solucionario que se encuentra al final del itinerario de medida de áreas y volúmenes. Si surgen dudas en una o más preguntas, vuelva al leer el contenido científico para que identifique la validez de su respuesta.

¡Felicitaciones por su participación activa… Continuemos!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

- Utiliza leyes y teoremas fundamentales para el cálculo de áreas y volúmenes en cilindros, conos, poliedros y esferas, aplicados en la resolución de problemas cotidianos relacionados con el entorno natural y social.

Al iniciar el segundo bimestre y con el propósito de lograr el resultado de aprendizaje 2, consideramos fundamental tomar en cuenta una adecuada situación didáctica del aprendizaje y enseñanza de la matemática, para lo cual se recomienda que, antes del desarrollo de ejercicios y resolución de problemas, es muy importante lograr un suficiente dominio teórico conceptual, partiendo de definiciones, teoremas, propiedades; analizando procesos o algoritmos apropiados para la aplicación, procedimientos propuestos en los ejemplos ilustrativos del texto base, guía virtualizada, y solo después de eso, desarrollar un suficiente número de ejercicios que nos brinde la experticia suficiente, así como resolver los problemas relacionados con el entorno natural y social.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

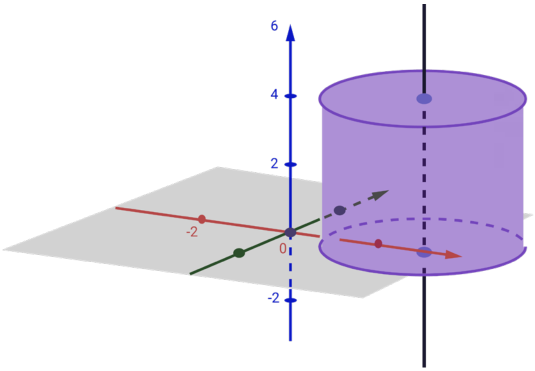
En esta segunda parte del periodo académico de la materia de Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana. Medidas de Áreas y Volúmenes, se abordarán los conceptos, fórmulas y ejemplos ilustrativos concernientes al resolución y cálculo de áreas y volúmenes en cilindros, conos, poliedros y esferas, relacionados con la modelización de situaciones reales de la vida cotidiana.

¡Bienvenido, ánimo y adelante!

Unidad 2. Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes

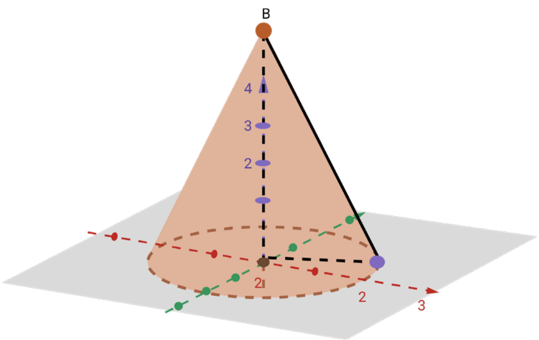
En la segunda unidad de estudios se analizan las diferentes aplicaciones con áreas y volúmenes de cilindros, conos, poliedros y esferas, para lo cual partimos de las definiciones adecuadas y la conceptualización de áreas y volúmenes de estos cuerpos geométricos, sin perder de vista la importancia de relacionar con los problemas de la vida cotidiana, los cilindros y conos serán objeto de estudio de los primeros temas como se ilustran en las gráficas y las demás temáticas que se describen a continuación:

Figura 32.
Cilindro.



Nota. Cilindro, elaboración propia.

Figura 33.
Cono.



Nota. Cono.

- Cilindros, áreas y volúmenes.
- Conos, áreas y volúmenes.
- Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de cilindros y conos.
- Los poliedros, clasificación, características y aplicación en problemas del entorno.
- Esferas, áreas y volúmenes.
- Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de esferas.

En las imágenes 32 y 33, se puede observar que un cilindro se puede construir al girar un rectángulo sobre uno de sus lados y el cono se forma al girar un triángulo sobre uno de sus catetos

Estimado estudiante, al adentrarnos en el mundo fascinante del estudio de los cilindros, conos, poliedros y esferas, sus áreas y volúmenes, vale orientar nuestros esfuerzos para dar respuesta a los siguientes cuestionamientos: ¿La matemática tiene aplicaciones en la vida real? ¿Cuáles son las características de los poliedros en general? ¿Cuáles son los poliedros más utilizados y aplicados en la vida cotidiana? ¿Cómo se determina el máximo volumen de los cilindros, conos y esferas a partir del área y otras condiciones?

Las figuras geométricas se usan para construir imágenes. En robótica, la geometría se aplica para planear la forma de mover objetos sin colisiones. En los diseños de ingeniería estructural, etc.

2.1. Cilindro circular recto, área, volumen y su construcción

Estimado estudiante, al iniciar este segundo bimestre estudiamos la definición de cilindro. De manera general se dice que, cilindro es un cuerpo geométrico en donde sus bases son dos círculos, también se define como la superficie cilíndrica que se forma cuando una recta llamada generatriz gira alrededor de un eje. En esta parte, vale aclarar que, al momento de tratar problemas de aplicación se debe diferenciar entre cilindro sólido o cilindro hueco. Observemos las siguientes figuras:

Figura 34.

Cilindro sólido y cilindro hueco.

Nota. Cilindro sólido y hueco.
Tomado de www.smartick.es

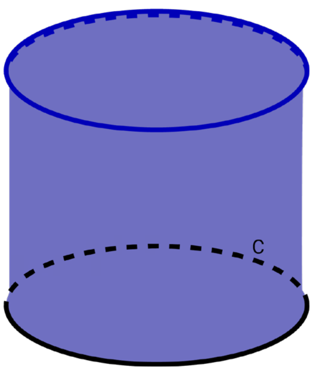
En la figura 34 se distingue con claridad la diferencia entre el cilindro sólido (vela encendida) y el cilindro hueco (cartón papel higiénico). Los dos cuerpos corresponden a ejemplos claros de aplicaciones del cilindro en la vida cotidiana.

¿Cuál es la definición de un cilindro circular recto?

En la presente materia referente al itinerario de aplicación de los conocimientos matemáticos de área y medidas, estudiaremos aquellos casos que corresponden al cilindro circular recto, el cual se define como el cuerpo geométrico formado al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, siendo las bases dos círculos paralelos y cuyo eje de revolución es perpendicular a las bases.

Figura 35.

Cilindro.



Nota. Altura de un cilindro.

La altura (h) del cilindro es la perpendicular que une dos puntos de las bases circulares.

El segmento de recta que une los centros de las bases circulares se denomina eje del cilindro.

En el cilindro circular recto el eje del cilindro es perpendicular a los planos de las bases circulares.

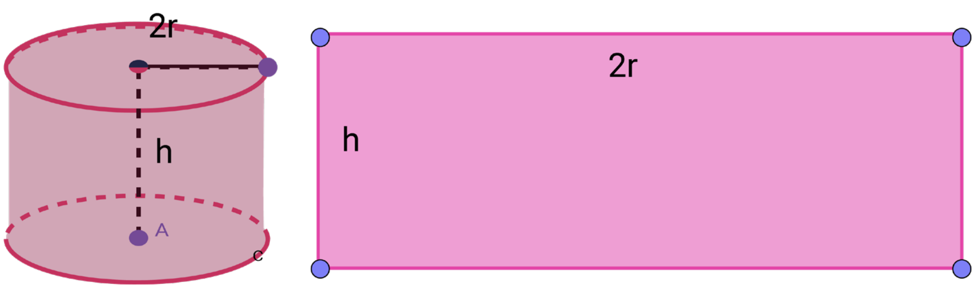
Para la construcción del cilindro a través de la aplicación GeoGebra sugiero revise el video Cómo hacer un cilindro en donde se explica con claridad la forma para construir el cilindro circular recto.

2.1.1. Área superficial de un cilindro

El área lateral de un cilindro recto es la que corresponde a su superficie lateral y es equivalente al área de un rectángulo que tiene por lados la altura y la longitud de la circunferencia de la base del cilindro:

Figura 36.

Cilindro.



Nota. Área lateral de un cilindro.

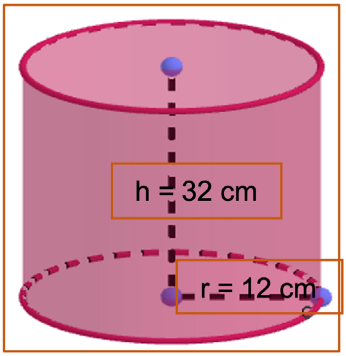
Entonces, el área lateral del cilindro es: $L = 2\pi r * h$

Mientras que el área de todo el cilindro será: $A = L + 2B = 2\pi r * h + 2\pi r^2$

Ejemplo explicativo 11

Determinemos el área total exacta del cilindro recto que tiene un radio de 12 cm en su base y una altura de 32 cm.

Figura 37.
Cilindro.



Nota. Área total de un cilindro.

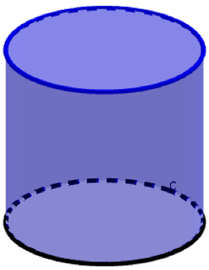
$A = L + 2B$
$A = 2\pi r * h + 2\pi r^2$
$A = 2\pi 12 * 32 + 2\pi(12)^2$
$A = 768\ \pi + 288\ \pi$
$A = 1056\ \pi\ cm^2$

El resultado encontrado es la suma del área de la superficie cilíndrica o área lateral, con las áreas de las dos bases.

2.1.2. Volumen de un cilindro recto

Para encontrar el volumen de un cilindro, similar a lo que sucedía con los prismas, se debe multiplicar el área de la base por la altura del cilindro, entonces:

Figura 38.
Cilindro.



Nota. Volumen de un cilindro.

V = área de la base por altura

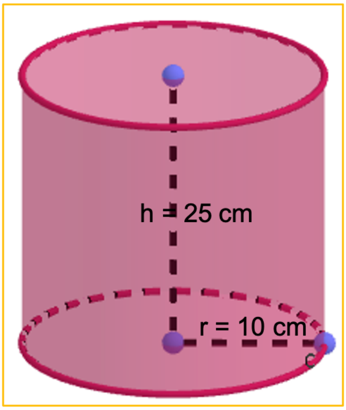
$V = r^2 * \pi * h$

Ejemplo explicativo 12

Determinemos de manera exacta el área total y el volumen de un cilindro cuyo radio de la base es 10 cm y su altura es 25 cm.

Figura 39.

Cilindro.



Nota. Área y volumen de un cilindro.

Primero, calculamos el área

$A = L + 2B$

$A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

$A = 2\pi 10 \cdot 25 + 2\pi (10)^2$

$A = 500\,\pi + 200\,\pi$

$A = 700\,\pi\ \text{cm}^2$

Ahora calculamos el volumen del cilindro recto

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h = (10)^2 \cdot \pi \cdot 25 = 2500\,\pi\ \text{cm}^3$

Luego de definir, caracterizar sus elementos más importantes y calcular el área y volumen de los cilindros, se deben reforzar los conocimientos mediante actividades que nos permitan ver la gran aplicación de estos conceptos en la vida cotidiana.

Recursos de aprendizaje

Revise la teoría del texto básico y estudie los ejercicios ilustrativos resueltos a partir de la página 424, aquí se explican de manera detallada algunas aplicaciones interesantes del cilindro, su área y el volumen.

Es conveniente que revise también el video acerca de la manera de construir un cilindro de forma manual en el enlace Cómo hacer un cilindro en donde se explica la forma de construir un cilindro a partir de una cartulina de formato oficio.

Estimado estudiante, con los mismos ánimos y ganas por aprender de siempre, experimente también a través de la aplicación Geogebra acerca de la aplicación y resolución de un problema práctico sobre Construcción de un cilindro en cartulina en donde se explica paso a paso cómo construir un cilindro y luego la forma de calcular el área lateral, área total y el volumen del cilindro.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

- Construya a través de la aplicación Geogebra un cilindro recto que tenga tres unidades de radio en la base y una altura de cinco unidades.
- Calcule el área lateral, el área total y el volumen del cilindro recto que tiene una altura de 25 cm y una base con un radio de 4 cm.
- Resuelva los ejercicios cuatro y cinco del texto básico que se encuentran en la página 431.
- Determine un cilindro en objetos o cuerpos de la vida cotidiana, por ejemplo, de un envase de refresco y calcule su área total en cm^2 y el volumen en cm^3.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar los conceptos de área y volumen de un cilindro, relacionando los conceptos a la vida cotidiana y haciendo que los aprendizajes sean más significativos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta novena semana en donde estudiamos los conceptos de área y volumen, así como la forma de construir manual y virtualmente los cilindros rectos, además de aplicar los conceptos en objetos de la vida cotidiana, nos aprestamos a estudiar conceptos relacionados con el cono ¿Conoce cuerpos u objetos de la vida cotidiana que tenga la forma de un cono?

Semana 10

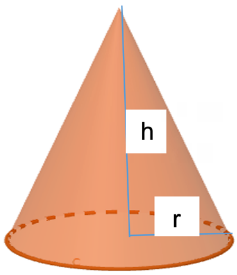
2.2. Los conos, área y volumen

En el presente curso estudiaremos aquellos casos que corresponden al cono circular recto, el cual se define como el cuerpo geométrico formado al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, siendo la base un círculo y cuyo eje de revolución es perpendicular a la base.

El cono circular recto se caracteriza porque tiene por base un círculo como se muestra en la figura 40.

Figura 40.

Cono.



Nota. Área y volumen de un cono.

La altura del cono (h) es la perpendicular trazada desde el centro de la base y que llega al vértice del cono.

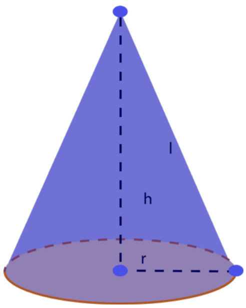
El segmento de recta que une el centro de la base circular con el vértice se denomina eje del cono.

> Para la construcción del cono circular recto a través de la aplicación GeoGebra sugiero que revise el video Construcción de un cono con deslizadores en donde se explica con claridad la creación de los deslizadores para el radio y para la altura, de tal manera que se puede experimentar cómo varía el área y volumen de un cono con el incremento del radio y de su altura.

2.2.1. Área superficial de un cono

Figura 41.

Cono.



Nota. Área superficial de un cono.

Similar a las consideraciones dadas en la pirámide regular recta, el área lateral de un cono circular recto (L) es: $L = \frac{1}{2} l.C$. En donde *l* representa la longitud inclinada del cono, es la altura del cono y *r* es el radio de la base circular, además C es la longitud de la circunferencia de la base.

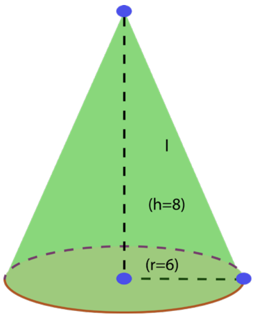
Para calcular el área total del cono (A) podemos aplicar la fórmula $A = L + B = l\pi r + r^2\pi$ $A = l\pi r + r^2 \pi$

> Para mayor claridad en los procesos de deducción de las fórmulas, sugiero se apoye en las explicaciones dadas en el texto base de Alexander y Koeberlein (2013), en las páginas 427 y 428, aclarando que la simbología cambia solo en la designación del área total del cono, que lo representa por T.

Ejemplo explicativo 13

Determinemos el área total exacta del cono circular recto que tiene por base un círculo de radio r = 6 cm, siendo la altura del cono 8 cm.

Figura 42.
Cono.



Nota. Cálculo de área total.

$$A = L + B = l\pi r + r2\ \pi$$

Primero observemos que, como dato dado tenemos la altura *h* del cono, pero en la fórmula trabajamos con la altura *l* inclinada , por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos su valor:

$$l^2 = h^2 + r^2$$
$$l = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

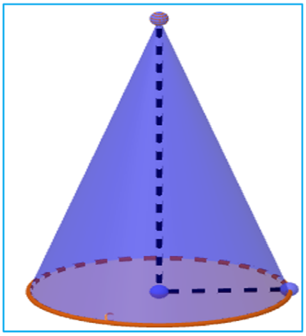
Ahora, luego de obtener el valor de la altura inclinada aplicamos la fórmula para encontrar el área total del cono:

$$A = L + B = l\pi r + r^2\pi$$
$$A = 10\pi \cdot 6 + 6^2 \cdot \pi$$
$$A = 60\pi + 36\pi$$
$$A = 96\pi\ cm^2$$

El cálculo del área obtenido del cono, es el resultado de la suma del área de la base más el área de la superficie lateral.

2.2.2. Volumen de un cono

Figura 43.
Cono.



Nota. Fórmula de cálculo del volumen.

Similar a los razonamientos con las pirámides en donde se determinó que el volumen es $V = \frac{1}{3}B \cdot h$, ahora en el volumen de un cono se debe multiplicar el valor de la base que es el área del círculo $B = \pi \cdot r^2$ por la altura *h*.

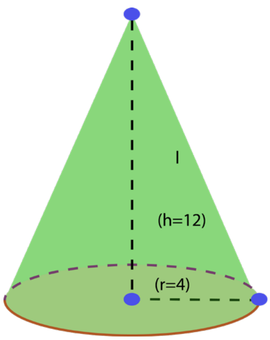
Entonces, el volumen de un cono se determina con la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejemplo explicativo 14

Calculemos el volumen de un cono cuyo radio en su base mide 4 cm y el valor de la altura es 12 cm.

Figura 44.
Cono.



Nota. Cálculo del volumen de un cono.

Se debe aclarar que no es necesario calcular el valor de la altura inclinada *l*, por lo que directamente aplicamos los valores en la fórmula del volumen de un cono circular recto:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (4)^2 \cdot 12$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 12$$

$$V = 64\pi \text{ cm}^3$$

El volumen encontrado del cono con un radio (r) es el resultado de la multiplicación de un tercio del área de la base (B) por la altura (h).

Recursos de aprendizaje

Revise la teoría del cono en el texto básico y estudie los ejercicios ilustrativos resueltos a partir de la página 427, aquí se explican de manera detallada algunas aplicaciones interesantes del cono, su área y el volumen.

Es conveniente que revise también el video sobre el cálculo del área y volumen del cono en donde se explica detalladamente y paso a paso todos los procesos al respecto.

Estimado estudiante, con esos mismos ánimos y ganas por aprender de siempre, experimente y construya un cono en cartulina revisando el video Cómo hacer un cono en donde se explica paso a paso cómo construir un cono.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

- Construya a través de la aplicación GeoGebra un cono recto que tenga dos unidades de radio en la base y una altura de cinco unidades.

- Calcule el área lateral, el área total y el volumen del cono recto que tiene una altura de 25 cm y una base con un radio de 5 cm.
- Resuelva los ejercicios 20 y 21 del texto básico, los mismos que se encuentran en la página 432.
- Determine un cilindro en objetos o cuerpos de la vida cotidiana, por ejemplo, de un cono de helado y calcule su área total en cm^2 y el volumen en cm^3.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar los conceptos de área y volumen de un cono, relacionando los conceptos a la vida cotidiana y haciendo que los aprendizajes sean más significativos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta décima semana en donde estudiamos los conceptos de área y volumen, así como la forma de construir manual y virtualmente los conos rectos, además de aplicar los conceptos en objetos de la vida cotidiana, nos aprestamos a estudiar conceptos relacionados con los sólidos de revolución en general ¿Conoce cuerpos u objetos de la vida cotidiana que tenga la forma de un sólido de revolución?

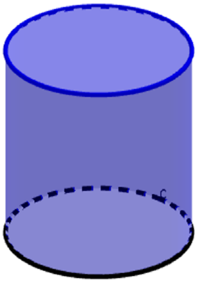
Semana 11

2.3. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de cilindros y conos.

Continuando con el estudio de las aplicaciones más importantes de la derivada, entre las cuales tenemos la *solución de problemas de optimización* en esta parte del curso se estudian aquellos casos en donde intervienen los cilindros y los conos.

Antes de analizar ejercicios explicativos, conviene recordar las fórmulas del área y volumen de estos cuerpos geométricos:

Figura 45.
Cilindro.



Nota. Área y volumen de un cilindro.

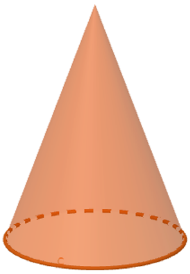
A = área lateral + área de las dos bases

$A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

V = área de la base x altura

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Figura 46.
Cono.



Nota. Área y volumen de un cono.

A = área lateral + área de la base

$$A = \frac{1}{2} l . C + r^2 \cdot \pi$$

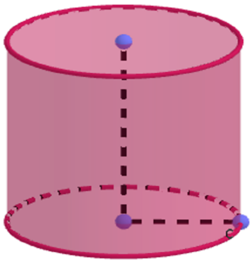
V = Un tercio del área de la base x altura

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejemplo explicativo 15

Hallemos las medidas del cilindro recto con máximo volumen que, se puede construir empleando una plancha de latón cuya área es de 36 cm².

Figura 47.
Cilindro.



Nota. Cálculo de máximos del cilindro.

Primero, recordemos que el volumen de un cilindro es igual al producto de la base circular por la altura:

$V = r^2 * \pi * h$

Este volumen es el que se quiere maximizar, pero en esta función tenemos dos variables independientes, por lo que buscaremos una relación entre ellas: radio (r) y altura (h).

Para esto, partamos del área total del prisma que es igual a 36 cm^2:

$A = 2\pi r * h + 2\pi r^2$
$36 = 2\pi r * h + 2\pi r^2$

En esta igualdad, despejamos h:

$$h = \frac{18 - \pi r^2}{\pi r}$$

Entonces, ahora reemplazamos por su equivalente en la fórmula del volumen a maximizar:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{18 - \pi r^2}{\pi r}$$
$$V = 18r - \pi r^3$$

Esta es la fórmula de la función del volumen a maximizar, en donde tenemos una sola variable independiente. Procedemos a encontrar la primera derivada:

$$V'=18-3\pi r^2$$

Aplicamos el teorema de Fermat y hallamos el punto crítico en donde el volumen será un máximo:

$$18-3\pi r^2=0$$
$$\pi r^2-6=0$$
$$r_1=\sqrt{\frac{6}{\pi}}; \qquad r_2=-\sqrt{\frac{6}{\pi}}$$

Consideramos el valor positivo del radio, que será el valor de *r* en donde la función volumen será maximizada. Luego, procedemos a encontrar el valor de la altura:

$$h=\frac{18-\pi r^2}{\pi r}$$
$$h=\frac{18-\pi\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right)^2}{\pi r}$$
$$h=\frac{18-\pi\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right)^2}{\pi\sqrt{\frac{6}{\pi}}}$$
$$h=2\sqrt{\frac{6}{\pi}}$$

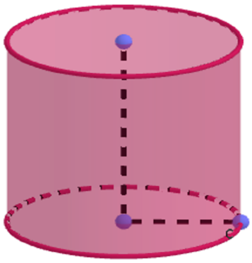
Solución: Las medidas del cilindro recto para obtener el volumen máximo posible han sido: $r=\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ cm y $h=2\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ cm.

Ejemplo explicativo 16

Se trata de construir un recipiente con la forma de un cilindro recto y que tenga un volumen de 40 cm³. Hallemos las medidas del cilindro para que la cantidad de material empleado (área total) sea mínima.

En este caso, se desea minimizar el área total del cilindro recto, la cual es:

Figura 48.
Cilindro.



Nota. Cálculo de mínimos del cilindro.

En este caso, se desea minimizar el área total del cilindro recto, la cual es:

$$A = \text{área lateral} + \text{área de las dos bases}$$
$$A = 2\pi r * h + 2\pi r^2$$

En esta función del área del cilindro, la cual se quiere minimizar, observamos que depende de dos variables: radio (r) y altura (h).

Entonces, buscaremos una relación entre estas variables, considerando además el dato del volumen: $V = 40\ cm^3$.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$40 = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$h = \frac{40}{\pi r^2}$$

Si reemplazamos este valor en la fórmula del área a minimizar, obtenemos:

$$A = 2\pi r \cdot \frac{40}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$
$$A = \frac{80}{r} + 2\pi r^2$$
$$A = 80r^{-1} + 2\pi r^2$$

Ahora, procedemos a encontrar la primera deriva de la función a minimizar, para encontrar los puntos críticos:

$$A = 80r^{-1} + 2\pi r^2$$
$$A' = -80r^{-2} + 4\pi r$$
$$A' = -\frac{80}{r^2} + 4\pi r$$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos a cero, según el teorema de Fermat.

$$-\frac{80}{r^2} + 4\pi r = 0$$
$$-80 + 4\pi r^3 = 0$$
$$\pi r^3 - 20 = 0$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$$

En este punto crítico $r = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$ se produce un valor mínimo del área, por lo que ahora procedemos a encontrar también, el valor de la altura (h) y resolver el problema:

$$h = \frac{40}{\pi r^2}$$
$$h = \frac{40}{\pi(\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}})^2}$$
$$h = \frac{40\cdot\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}}{\pi(\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}})^2\cdot\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}}$$
$$h = \frac{40\cdot\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}}{\pi\cdot\frac{20}{\pi}}$$
$$h = 2\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$$

Solución: Las medidas del cilindro recto que se quiere construir para que, la cantidad de material empleado (área total) sea mínima, son: Radio $r = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$ y altura $h = 2\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$.

Recursos de aprendizaje

Los respaldos teóricos del cilindro y del cono usted los puede verificar en el texto base, sistematizando las fórmulas del área y del volumen, fundamentales para este tipo de aplicaciones.

Además, con la finalidad de profundizar y afianzar los conocimientos en la resolución de problemas prácticos con máximos y mínimos del área y volumen de cilindros y conos, recomiendo analizar los videos: Optimización. Área de un cilindro en donde se explica detalladamente la relación entre las variables independientes, como son el radio y la altura.

También acceda al video Dimensiones de un cilindro para que el material sea mínimo en donde la profesora Lina explica muy detalladamente y paso a paso todas las operaciones para encontrar el punto crítico y resolver un problema de minimización del área de un cilindro recto.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

- Descubra el problema propuesto y anote el desarrollo explicado en el video Problemas de optimización, máximos y mínimos.
- Calcule el volumen máximo de un cilindro inscrito dentro de un cono de 18 cm de altura y 6 cm de radio en la base. Los ejes de los dos cuerpos coinciden.
- Determine las medidas del cilindro recto con máximo volumen que, se puede construir empleando una plancha de cartón cuya área es de 48 cm^2.
- Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro recto y que tenga un volumen de 40 cm^3. Halle las medidas del cilindro para que la cantidad de material empleado (área total) sea mínima.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar los conceptos de área y volumen de un cono, relacionando los conceptos a la optimización de recursos y a la vida cotidiana, de esta manera los aprendizajes serán más significativos y perdurables.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

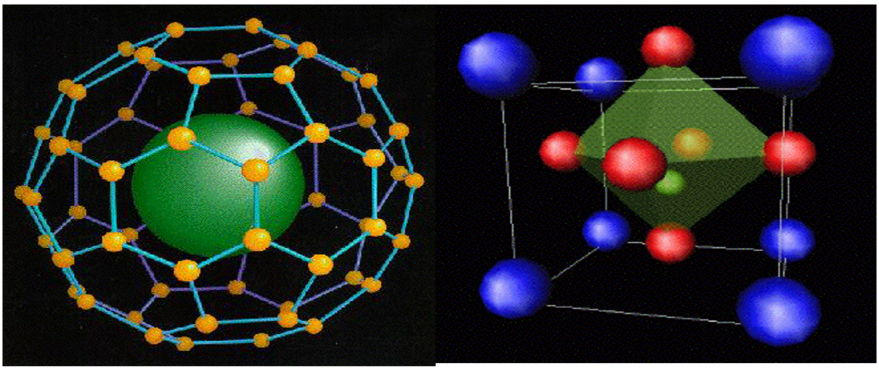
Luego del trabajo de esta semana en donde estudiamos los conceptos de máximos y mínimos de áreas y volúmenes, así como la forma de aplicar en problemas de la vida cotidiana, nos aprestamos a estudiar las características de los poliedros regulares en general y hacer una sistematización de sus propiedades. ¿Conoce cuántos vértices tiene un dodecaedro o un icosaedro?

Semana 12

2.4. Los poliedros

Existen varios tipos de cuerpos geométricos que se pueden representar en un espacio tridimensional, caso de los conos, cilindros, paralelepípedos y muchos otros. Entre todos ellos destacan con nitidez los conocidos como **poliedros regulares,** por cuanto toman formas muy peculiares y llamativas. En las figuras siguientes se aprecian algunos de ellos que de manera casi increíble se presentan en la naturaleza.

Figura 49.
Perovskita ABX3 y Fullereno C60.



Nota. *Perovskita ABX3 y Fullereno C60. Tomado de Unirioja. Poliedros, ciencia y tecnología.*

En figura 49 se puede apreciar las formas que toman algunos virus, en la parte izquierda se aprecia un virus envuelto (herpesvirus), en donde casi no se aprecia la forma poliedral, lo cual aparece con mayor detalle en la imagen de la derecha.

¿Cuáles son los poliedros regulares conocidos?

Un poliedro regular es un cuerpo en el espacio que se caracteriza por tener todos sus lados y ángulos iguales. Existen cinco poliedros regulares conocidos también como poliedros platónicos: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. A continuación, se describe las características del tetraedro.

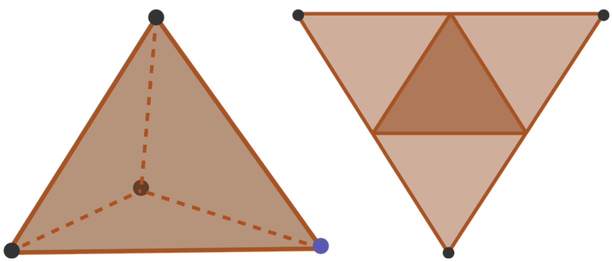
2.4.1. Tetraedro

El tetraedro es el primero de los sólidos perfectos o poliedros platónicos, es un poliedro regular de cuatro caras, las mismas que son triángulos equiláteros iguales, que tiene 6 aristas y cuatro vértices en donde concurren tres caras.

Para su construcción virtual en GeoGebra sugiero que revise el video Cómo crear un tetraedro en Geogebra, en donde se explica paso a paso cómo construir un tetraedro con la aplicación Geogebra, además se detalla la manera de presentar el desarrollo de tetraedro regular, dibujo que le facilitará la construcción manual.

Figura 50.

Tetraedro.

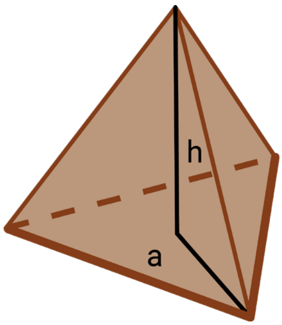


Nota. Poliedro platónico, poliedro de cuatro caras.

A la izquierda tenemos el dibujo del tetraedro y a la derecha se presenta su desarrollo dibujado con una escala de reducción, en donde se observan las cuatro caras que son triángulos equiláteros iguales.

2.4.1.1. Área y volumen del tetraedro

Figura 51.
Tetraedro.



Nota. Área y volumen del tetraedro.

El área de un tetraedro en función de su arista es igual a 4 veces el área de una de sus caras: $A = \sqrt{3}a^2$.

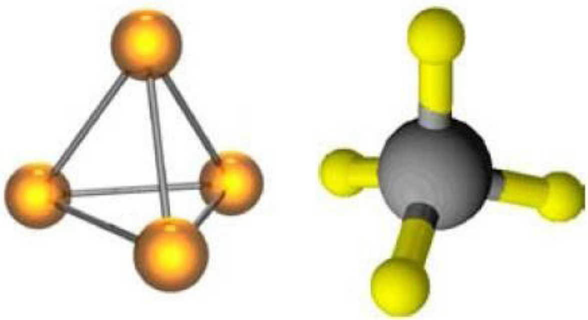
Mientras que el volumen del tetraedro en función de la arista se calcula con:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

.

En la vida cotidiana, los maestros de química orgánica explican a sus estudiantes, sobre la enorme cantidad de moléculas tetraédricas, de las cuales se distinguen aquellas que contienen un átomo en el centro del tetraedro y otras que no contienen.

Figura 52.
Molécula tetraédrica.



Nota. Moléculas tetraédricas sin y con un átomo central tetraedro en mi bolsa.

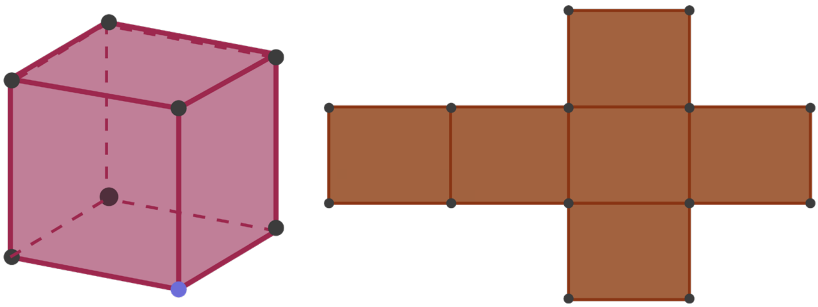
La molécula tetraédrica es un tipo de molécula en el que un átomo central se encuentra en el centro enlazado químicamente con cuatro sustituyentes que se encuentran en las esquinas de un tetraedro.

2.4.2. Hexaedro

El segundo poliedro regular parte de los llamados poliedros platónicos, es el hexaedro o vulgarmente conocido como Cubo. Se caracteriza porque es un poliedro regular de seis caras que son cuadrados iguales o congruentes, tiene 12 aristas y ocho vértices en donde concurren tres caras.

Para su construcción virtual en GeoGebra sugiero que revise el video Volumen del cubo en Geogebra, en donde se explica paso a paso cómo construir un hexaedro o cubo, además la pertinencia de tener un deslizados para experimentar la ampliación y reducción de sus medidas y, finalmente, se explica la forma de obtener el valor del volumen del cubo.

Figura 53.
Hexaedro.



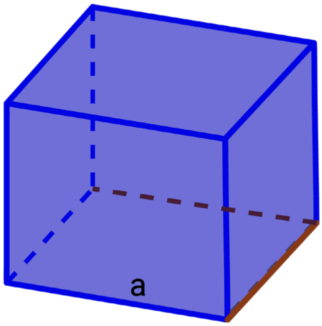
Nota. Hexaedro o más conocido como cubo.

A la izquierda aparece el hexaedro conocido generalmente como cubo y a la derecha, con una escala reducida se presenta su desarrollo, en donde se pueden observar las seis caras iguales.

2.4.2.1. Área y volumen de hexaedro

Figura 54.

Hexaedro.



Nota. Área y volumen de un hexaedro.

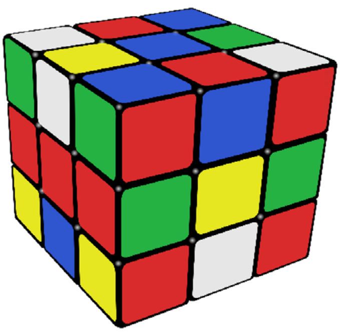
El área de un cubo en función de su arista es igual a la suma de las áreas de sus seis caras, es decir: $A = 6a^2$.

El volumen de un cubo en función de la arista se calcula con: $V = a^3$.

En la vida cotidiana, la aplicación de los cubos es muy amplia, encontramos diferentes objetos en forma de cubo, uno de los más conocidos fue el dado que cumplió un rol fundamental para la formación matemática lúdica de los niños, actualmente es muy conocido el Cubo de Rubik el cual es introducido con mucha frecuencia en las aulas de clase porque mejora la memoria y retención, la creatividad, paciencia y perseverancia y en general, desarrolla el razonamiento básico para la resolución de problemas.

Figura 55.

Cubo de Rubik.



Nota. Rubik, juego utilizado para mejorar la memoria. Desarrollo motriz con el Rubik.

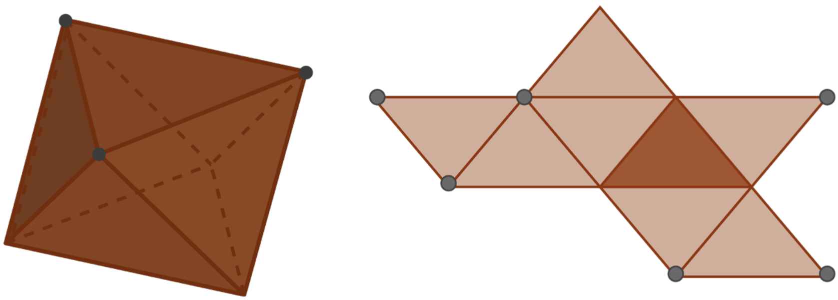
Un cubo Rubik posee seis colores uniformes. Un mecanismo de ejes permite a cada cara girar independientemente mezclando así los colores.

A continuación, le invito a profundizar su aprendizaje mediante la revisión del octaedro.

2.4.3. Octaedro

El tercer poliedro platónico es el octaedro, el cual corresponde a uno de los cinco poliedros regulares conocidos hasta hoy, uno de los cinco sólidos perfectos, el cual se caracteriza por tener ocho caras que son triángulos equiláteros congruentes, cuenta con 12 aristas y tiene 6 vértices en donde concurren cuatro caras en cada uno de ellos. Para su construcción virtual en GeoGebra sugiero que revise el video.

Figura 56.
Octaedro.



Nota. Octaedro sólido perfecto de ocho caras.

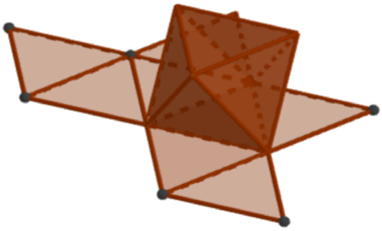
En las imágenes propuestas, a la izquierda aparece el octaedro y a la derecha, con una escala reducida se presenta su desarrollo, en donde se pueden observar las ocho caras iguales.

Octaedro regular, en donde se explica paso a paso cómo construir un octaedro, además se cuenta con claridad cómo obtener su desarrollo y diferenciar sus colores para una mejor apreciación. El dibujo del desarrollo del octaedro nos facilita su construcción manual en físico.

2 Bimestre

Figura 57.

Octaedro.



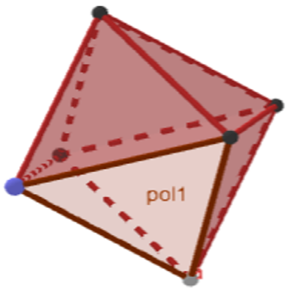
Nota. Construcción del octaedro.

Las ilustraciones anteriores realizadas con GeoGebra confirman la facilidad para la creación virtual de todos los poliedros platónicos, incluyendo en este caso la figura en donde se presenta el poliedro colocado encima de su desarrollo.

2.4.3.1. Área y volumen del octaedro

Figura 58.

Octaedro.



Nota. Área y volumen del octaedro.

El área de un octaedro en función de su arista es igual a la suma de las áreas de sus ocho caras, es decir: $A = 2\sqrt{3}a^2$.

El volumen de un octaedro en función de la arista se calcula con $V = \frac{1}{3}\sqrt{2}a^3$.

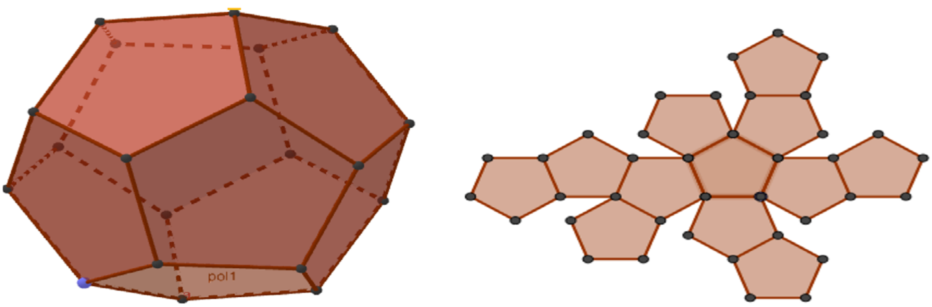
2.4.4. Dodecaedro

El cuarto poliedro platónico es el dodecaedro, uno de los cinco poliedros regulares conocidos hasta hoy, uno de los cinco sólidos perfectos, el cual se caracteriza por tener 12 caras que son pentágonos regulares congruentes, cuenta con 30 aristas y tiene 20 vértices en donde concurren tres caras en cada uno de ellos.

Para su construcción virtual en GeoGebra sugiero que revise el video Dodecaedro en Geogebra, en donde se explica paso a paso cómo construir un dodecaedro, además se cuenta con claridad cómo obtener su desarrollo. El dibujo del desarrollo del octaedro nos facilita su construcción manual en físico.

Figura 59.

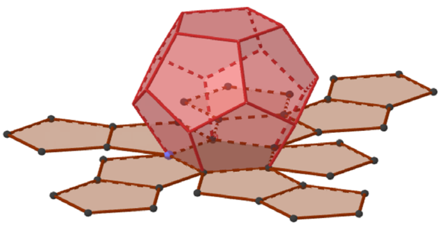
Dodecaedro.



Nota. Dodecaedro de 12 caras de pentágonos congruentes.

Figura 60.

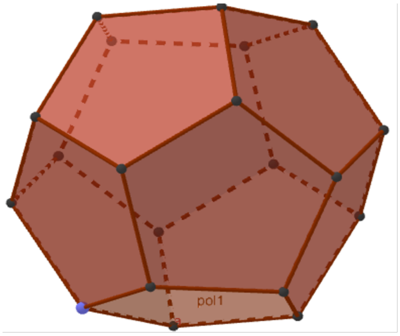
Dodecaedro.



Todas las figuras anteriores han sido obtenidas a través de la aplicación GoeGebra, primero se presenta la construcción del majestuoso dodecaedro con sus 12 caras visibles, a su izquierda tenemos el respectivo desarrollo y en la parte inferior se presenta las dos figuras a la vez. El reto previsto es que, con estas construcciones virtuales nos preparemos para la construcción manual física en algún material como una cartulina.

2.4.4.1. Área y volumen del dodecaedro

Figura 61.
Dodecaedro.



Nota. Área y volumen de un dodecaedro.

El área de un dodecaedro en función de su arista es igual a la suma de las áreas de sus doce caras pentagonales, es decir: $A = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\ a^2$.

También se puede aseverar que el valor aproximado del área de un dodecaedro es: $A = 20{,}68a^2$.

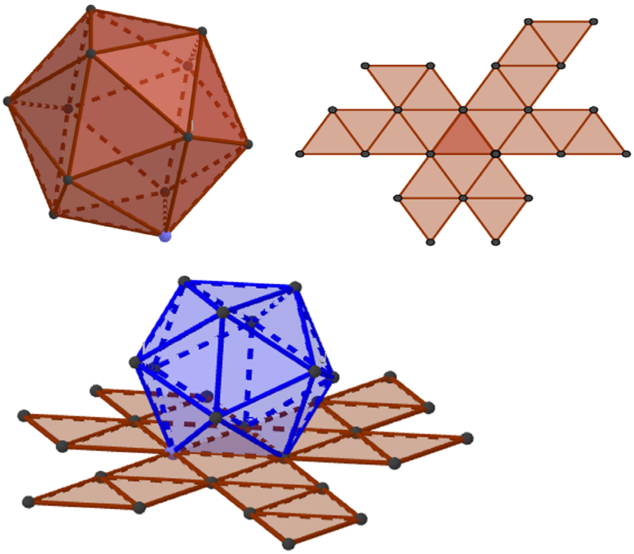
El volumen de un dodecaedro en función de la arista se calcula con: $V = \frac{1}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right)a^3$.

2.4.5. Icosaedro

El quinto poliedro platónico es el icosaedro, uno de los cinco sólidos perfectos descubiertos hace más de dos mil años, el cual se caracteriza por tener 20 caras que son triángulos regulares congruentes, cuenta con 30 aristas y tiene 12 vértices en donde concurren increíblemente cinco caras en cada uno de ellos.

Para su construcción virtual en GeoGebra sugiero que revise el video Poliedros regulares, en donde se explica paso a paso cómo construir todos los poliedros regulares o sólidos platónicos, iniciando con la construcción de tetraedro y llegando a la construcción del icosaedro.

Figura 62.
Icosaedro.



Nota. Desarrollo de un icosaedro de 20 caras, que son triángulos regulares congruentes.

En el primer gráfico de la izquierda se aprecia el poliedro regular icosaedro con su majestuosidad estructural de 20 caras, a la derecha su desarrollo que nos puede guiar para la construcción manual y debajo de ellos se presentan unificados.

Recursos de aprendizaje

Es valioso el estudio teórico de los poliedros regulares conocidos también como poliedros platónicos o sólidos perfectos y su construcción virtual por cuanto permitirá la posterior construcción manual y la experimentación de los conceptos matemáticos. Por esta razón, es necesario que usted revise el texto base en las páginas 433 y 435 en donde se presenta una síntesis de las principales características.

Además, con la finalidad de experimentar acerca de la construcción de los cinco poliedros a través de Geogebra, estudie el video Sólidos Platónicos en donde se detalla la construcción de estos sólidos perfectos y también se presenta su desarrollo.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

- Construya virtualmente los cinco poliedros regulares o poliedros platónicos con una arista de 3 unidades en cada uno y su respectivo desarrollo.
- Utilice la aplicación Geogebra para construir poliedros regulares con aristas que midan 2 unidades, luego calcule el área de los cinco poliedros regulares
- A través de la aplicación Geogebra construya los poliedros regulares con aristas que 5 midan unidades, luego calcule el volumen de cada uno de ellos.
- Utilice cartulina gruesa para construir manualmente un tetraedro que mida 3 cm de arista y luego, calcule su área.
- Construya con cartulina gruesa y de forma manual, un hexaedro regular o cubo que, mida 5 cm de arista.
- Aplique el teorema de Euler: *en todo poliedro, el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas aumentado en dos*, y complete la tabla propuesta, en donde:

  L = número de lados de cada cara.
  M = número de aristas que convergen en cada vértice.
  C = número de caras.
  V = número de vértices.
  A = Número de aristas del poliedro.

Tabla 1.

Teorema de Euler.

Poliedro regular	L	M	C	V	A
TETRAEDRO	3	3	4	4	6
OCTAEDRO	3	4	8	6	12
ICOSAEDRO	3	5	20	12	32
EXAEDRO	4	3	6	8	12
DODECAEDRO	5	3	12	20	30

Nota. En todo poliedro, el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas aumentado en dos teoremas de Euler.

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de los conceptos de los cinco poliedros regulares, su área y el volumen, además, pudo aplicar la teoría en la construcción virtual y gráfica de los populares poliedros platónicos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

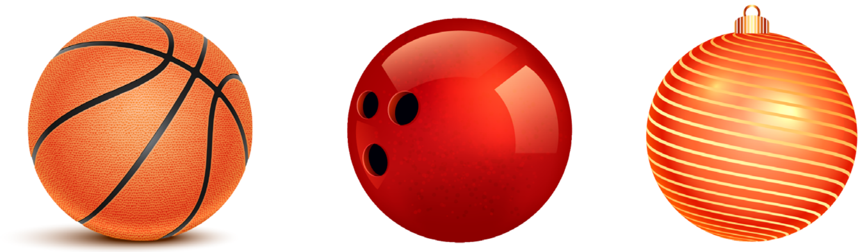
Luego del trabajo de esta semana en donde estudiamos los conceptos sobre la construcción virtual y manual, así como el cálculo de sus áreas y volúmenes, nos aprestamos a estudiar la conceptualización de las esferas, su construcción virtual y física, haciendo una sistematización de las características más importantes ¿Conoce cómo construir una esfera con Geogebra?

Semana 13

2.5. Las esferas

En la vida cotidiana nos encontramos a diario con cuerpos de forma esférica: pelotas de *básquet*, *fútbol*, tenis, bola de boliche, bombillas de navidad, entre algunas de las más conocidas. Las industrias que producen estos materiales deportivos y comerciales, en general aplican la teoría matemática para la construcción de estos cuerpos geométricos que, se caracterizan porque cada uno de los puntos de su superficie, se encuentra a una misma distancia de otro punto llamado centro.

Figura 63.
Esfera.



Nota. Utilidad en la vida cotidiana de la esfera. Mundo de las circunferencias.

Cuando se considera a la esfera como un cuerpo en el espacio, como lo afirma Alexander y Koeberlein (2013), existen tres formas o manera para definirla:

1. La superficie de una esfera es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a una distancia fija de otro punto que está en el interior de la esfera.

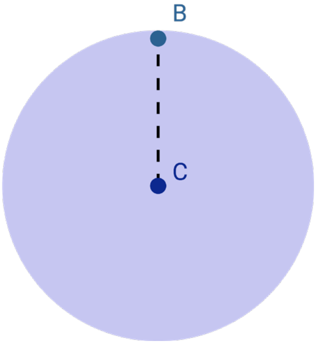
2. Una esfera es la superficie determinada cuando un círculo o un semicírculo rotan alrededor de su diámetro.

3. Una esfera está representada por una superficie que representa el límite teórico de un poliedro regular inscrito cuando su número de caras aumenta infinitamente.

Para nuestro estudio, cuando hablamos de una esfera no referimos al cuerpo sólido en el espacio, en donde cada uno de los puntos de su superficie se encuentran a una distancia fija de otro punto llamado centro.

Para construir virtualmente una esfera utilizamos el GeoGebra, recomiendo seguir el proceso sencillo explicado en el video Cómo hacer una esfera en Geogebra en donde se parte de un punto y se puede construir una esfera, denotando con centro punto o centro radio.

Figura 64.
Esfera.



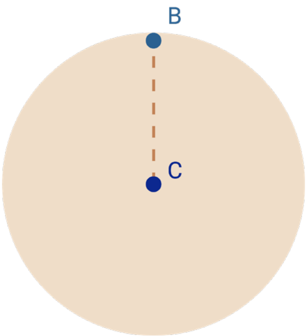
Nota. Construcción de una esfera.

2.5.1. Área y volumen de las esferas

El área superficial de una esfera en función del radio se calcula mediante la muy conocida fórmula: $A = 4\pi r^2$.

Mientras que, para calcular el volumen de una esfera en función de su radio se puede aplicar: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Figura 65.
Esfera.



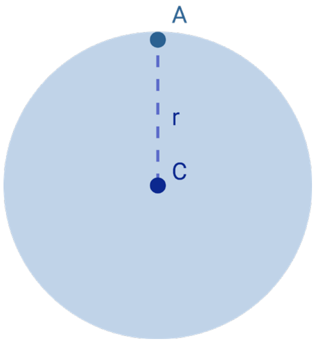
Nota. Área y volumen de la esfera.

Ejemplo explicativo 17

Determinemos el área superficial y el volumen de una bombilla navideña con forma esférica que tiene 6 cm de radio.

Figura 66.

Esfera.



Nota. Área y volumen de la esfera.

El área superficial de la bombilla con forma de esfera y con , es: *r = 6 cm*, es: $A=4\pi(6\ cm)^2=144\ \pi\ cm^2$.

El volumen de la bombilla navideña con es:
$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6\ cm)^3 = 288\pi\ cm^3$.

Recursos de aprendizaje

Las aplicaciones de los conceptos teóricos de la esfera tienen infinidad de aplicaciones. Por esta razón, es necesario que usted revise el texto base en las páginas 437 en donde se presentan algunos ejercicios ilustrativos con la aplicación del área y el volumen de una esfera.

Además, con la finalidad de experimentar acerca de la construcción de la esfera como un sólido de revolución a través de Geogebra, estudie el video Esfera generada por rotación en donde se detalla la construcción de este sólido de revolución o rotación, además de cómo varía el área superficial y el valor del volumen de la esfera que se construye, cuando varía el radio.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

- Construya virtualmente con la ayuda de GeoGebra una esfera, aplicando un deslizador para el radio, de tal manera que experimente la variación de la forma esférica de acuerdo a la variación del radio.
- Utilice la aplicación Geogebra para construir una esfera de 10 unidades de radio, y calcule el área superficial y su volumen.
- Calcule el área superficial y el volumen aproximado en centímetros cuadrados y en metros cuadrados, de una pelota de básquet.
- Sabiendo que el volumen aproximado de una pelota de fútbol es 7230 cm^3 determine su radio y luego calcule el área superficial.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo apreciar la importancia de la aplicación de los fundamentos teóricos de la esfera, el cálculo del área y el volumen, lo que le permitió consolidar aprendizajes significativos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

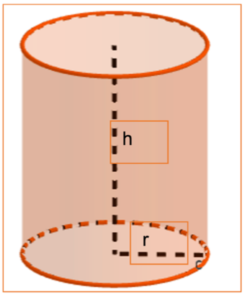
Luego del trabajo de esta semana en donde estudiamos los conceptos sobre la construcción virtual de la esfera, así como el cálculo de sus áreas y volúmenes, nos aprestamos a estudiar la aplicación de estos conceptos en el cálculo de máximos y mínimos de esferas, conos y cilindros. ¿Cuál es el balón esférico con mayor volumen que se puede construir a partir de una lámina cuadrada de 20 cm de lado?

2.6. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de esferas, cilindros y conos

Continuando con el estudio de las aplicaciones más importantes de la derivada, entre las cuales tenemos la ***solución de problemas de optimización***, en esta parte del curso, se estudian aquellos casos en donde intervienen las esferas, los cilindros y los conos.

Antes de analizar ejemplos ilustrativos, conviene recordar las fórmulas del área y volumen de estos cuerpos geométricos:

Figura 67.
Máximos y mínimos de cilindros, conos y esferas.

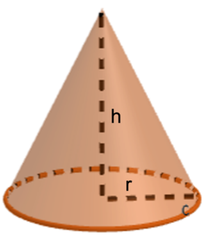


A = área lateral + área de las dos bases

A = $2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

V = área de la base x altura

V = $r^2 \cdot \pi \cdot h$

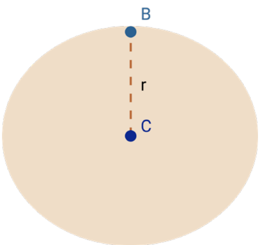


A = área lateral + área de la base

$$A = l\pi r + r^2 \cdot \pi$$

V = Un tercio del área de la base x altura

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$



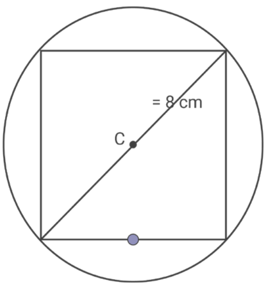
El área superficial de una esfera en función del radio se calcula mediante la fórmula: $A = 4\pi r^2$.

Para calcular el volumen de una esfera en función de su radio se puede aplicar: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ejemplo explicativo 18

Hallemos las medidas del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 8 cm.

Figura 68.
Máximos del cilindro.



Nota. Cálculo del máximo de un cilindro.

Primero vale señalar que, en el gráfico de la izquierda se representa una vista frontal del cilindro dentro de la esfera, en donde *R* es el radio de la esfera, *r* es el radio de la base d el cilindro y *h* es la altura del cilindro.

Ahora, como se trata de optimizar el volumen del cilindro, debemos escribir la función de su volumen:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

En esta fórmula observamos que, el volumen (variable dependiente) está escrito en función de dos variables independientes, por esta razón, aplicamos geometría para expresar el radio de la base en función de la altura del cilindro. Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$; despejamos $(2r)^2$

$(2r)^2 = (2R)^2 - h^2$; reemplazamos $R = 8$

$4r^2 = (2 \cdot 8)^2 - h^2;$

$$r^2 = \frac{256 - h^2}{4}$$

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{256 - h^2}$$

Reemplazamos este valor en la función volumen:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{256 - h^2}\right)^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \frac{1}{4}(256 - h^2) \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{(h)} = 64\pi h - \frac{\pi h^3}{4}$$

Ahora, aplicamos la primera derivada para hallar el punto crítico en donde se produce un máximo:

$$V'_{(h)} = 64\pi - \frac{3\pi h^2}{4}$$

Por el teorema de Fermat igualamos la primera derivada a cero para hallar el punto crítico:

2 Bimestre

$64\pi - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$

$256 - 3h^2 = 0$; Factorizamos

$(16 + \sqrt{3}h)(16 - \sqrt{3}h) = 0$; Aplicamos el teorema del factor cero

$h_1 = -\frac{16}{\sqrt{3}}; h_2 = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Considerando que el dominio de la función volumen es (0, 2R), es decir (0, 16), aceptamos el valor de $h = \frac{16\sqrt{3}}{3}$, que será el valor en donde se producirá un máximo, por lo que, ahora debemos calcular el valor de *r*.

$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - h^2}$; en esta fórmula reemplazamos el valor de h

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - \left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - \frac{256 \cdot 3}{9}}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - \frac{256}{3}}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{512}{3}}$$

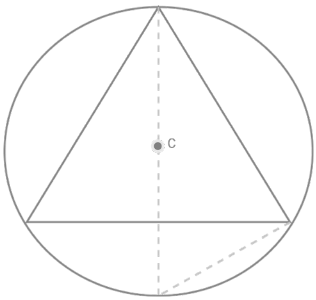
Por lo tanto, las medidas del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 8 cm, son:

Solución: Radio de la base: $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{512}{3}}$; Altura del cilindro: $h = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Ejemplo explicativo 19

Hallemos las medidas del cono de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera que tiene 6 cm de radio.

Figura 69.
Máximos de una esfera.



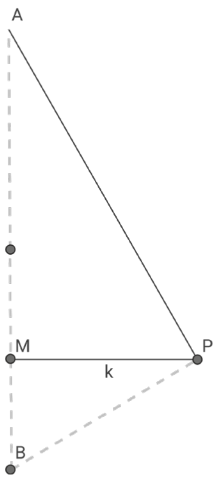
Nota. Cálculo del máximo de una esfera.

En el gráfico de la izquierda se representa una vista frontal del cono dentro de la esfera, en donde es su radio que tiene un valor de 6 cm, *r* es el radio de la base del cono y *h* es la altura del cono.

Ahora, como se trata de optimizar el volumen del cono, debemos escribir su función volumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Aquí se observa que el volumen del cono depende de los valores del radio *r* y altura *h* por lo que, se va a expresar *r* en términos de *h*.



Para esto, se considera la de la izquierda en donde, por el ***teorema de la altura*** y considerando que los dos triángulos tienen la misma altura se puede escribir:

$\frac{AM}{MP} = \frac{MP}{MB}$ En donde $\frac{h}{r} = \frac{r}{2R-h}$ y de aquí despejamos *r*.

Operando y despejando se obtiene: $r^2 = h(2R - h)$;

Reemplazando esta expresión en la función volumen, nos queda:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \quad V = \frac{1}{3}\pi \cdot h(2R - h) \cdot h$$

$V = \frac{1}{3}(2R\pi h^2 - \pi h^3)$; reemplazamos R = 6 y obtenemos la función volumen en donde la variable independiente es *h*.

$V_{(h)} = \frac{1}{3}(12\pi h^2 - \pi h^3)$;

Ahora procedemos a derivar, considerando que el dominio de la función volumen es polinómica y puede tomar cualquier valor en el intervalo (0, 2R) = (0, 12):

$$V'_{(h)} = \frac{1}{3}(24\pi h - 3\pi h^2)$$

Después, aplicamos el teorema de Fermat e igualamos a cero la primera derivada, para hallar los puntos críticos:

$$\frac{1}{3}(24\pi h - 3\pi h^2) = 0$$

Luego de factorizar y operar descubrimos que los puntos críticos son:

$h(8 - h) = 0$; de donde

$h = 0$; $h = 8$

Aceptamos el valor de h = 8 (altura del cono) en donde se produce un máximo volumen y calculamos el valor correspondiente de su radio:

$r^2 = h(2R - h)$

$r^2 = h(12 - h)$; reemplazamos $h = 8$

$r^2 = 8(12 - 8)$

$r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Por lo tanto, las medidas del cono recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 6 cm, son:

Solución: Radio de la base: $r = 4\sqrt{2}\ cm$; Altura del cilindro: *h = 8 cm.*

Recursos de aprendizaje

Para profundizar sobre la aplicación de los conceptos del volumen y área de la esfera, cilindro y cono, en los problemas de optimización, usted puede estudiar el video Volumen máximo del cilindro inscrito en una esfera en donde se explica muy detalladamente la manera de optimizar el volumen máximo del cilindro que se inscribe dentro de una esfera de radio R.

Es conveniente además que, revise también el video Volumen máximo del cono inscrito en una esfera en donde el autor explica con mucha pertinencia la forma de optimizar el máximo volumen del cono inscrito en una esfera de radio R. El estudio de estos dos videos son fundamentales en la teorización de este tema.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En este momento, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

- Determine las medidas del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir dentro de una esfera con radio igual a 12 cm.
- Calcule las medidas del cono recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera que tiene 18 cm de radio.
- Determine las medidas del cilindro circular recto de mayor área superficial lateral que pueda inscribirse en una esfera de 15 cm de radio.

- Halle las medidas del cono recto de mayor área superficial lateral que pueda inscribirse en una esfera de 12 cm de radio.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar los conceptos de área y volumen de un cono, cilindro y esfera, relacionando los conceptos a la optimización de recursos y a la vida cotidiana, de esta manera los aprendizajes serán más significativos y perdurables.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

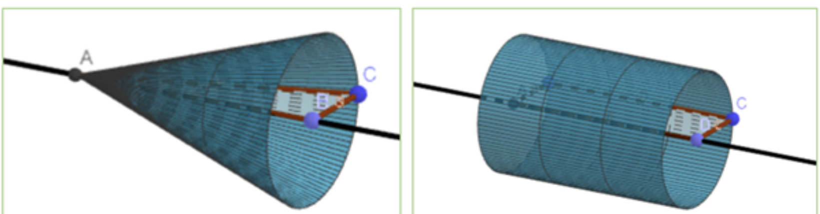
Luego del trabajo de esta semana en donde estudiamos los conceptos de máximos y mínimos de áreas y volúmenes de la esfera, cono y cilindro, nos aprestamos a estudiar el tema más interesante de nuestro curso. ¿Conoce cuáles son los sólidos de revolución más utilizados en la vida cotidiana?

Semana 15

2.7. Sólidos de revolución

Los sólidos de revolución son cuerpos geométricos representados en el espacio tridimensional, los cuales se forman o generan al girar una región plana alrededor de un eje. Por ejemplo, el cono es un sólido de revolución que se genera cuando un triángulo gira alrededor de uno de sus catetos. Otro ejemplo, el cilindro es un sólido de revolución que se genera cuando un rectángulo rota sobre uno de sus lados.

Figura 70.
Solidos de revolución.



Nota. Los sólidos de revolución son cuerpos geométricos representados en el espacio tridimensional. Sólidos de revolución.

En los dibujos anteriores, para la formación del cono, el triángulo ABC rota alrededor de su cateto AB que se constituye en el eje de rotación. En el otro caso, para la formación del cilindro, el rectángulo ABCD rota alrededor del lado AB que se constituye en el eje de rotación.

¿En dónde se aplican los sólidos de revolución?

Es lógico hacernos la pregunta ¿para qué estudiamos estos temas? para contestar la inquietud vale indicar que, estos sólidos los encontramos en la vida cotidiana, como lo manifiesta León (2017), las superficies de revolución y los sólidos en general se encuentran en la vida diaria en cosas tan simples como macetas, juguetes, árboles, albercas y en cosas un tanto complicadas como saber las medidas de un planeta o conocer el área y volumen para determinar la capacidad máxima, o para saber el valor exacto para obtener la máxima utilidad.

Además, tengamos en cuenta que, al momento de calcular volúmenes y áreas de cuerpos geométricos regulares, desde la antigüedad se aplicaron métodos tradicionales para hacerlo, pero cuando se trata de calcular u obtener áreas superficiales y volúmenes de cuerpos geométricos no regulares, solo a partir de aplicaciones fundamentadas con el ***Cálculo integral*** podemos hacerlo. En este mismo sentido, muchas industrias manufactureras aplican los conceptos de las superficies y de los sólidos de revolución para el diseño y producción con una altísima precisión (León, 2017, pág. 3).

¿Cómo se obtienen o construyen los sólidos de revolución?

Los sólidos de revolución dibujados en un plano bidimensional no ofrecen todos los detalles y características de los sólidos de revolución, por esta razón desde hace más de una década, contamos con softwares de Geometría dinámica que nos permiten experimentar y detallar con facilidad sus características y propiedades. El más sobresaliente de estas herramientas para construir y experimentar con sólidos de revolución es GeoGebra.

Al respecto del uso de este programa libre, Advíncula, Luna y Villogas (2017) manifiestan que, el software de geometría dinámica como Geogebra facilitan la experimentación en los estudiantes, dando oportunidad para que ellos logren explorar, visualizar, descubrir, conjeturar, verificar y comprender las propiedades de las figuras geométricas tridimensionales como los sólidos de revolución.

Por lo expuesto en los párrafos precedentes, es evidente la necesidad que nos adiestremos en la construcción de los sólidos de revolución y calculemos a través de Geogebra el área superficial y su volumen.

Recursos de aprendizaje

La construcción de los sólidos de revolución a través de GeoGebra es muy fácil, se debe trabajar en la vista 3D, haciendo rotar la figura poligonal o el área determinada por una función alrededor de un eje determinado. Sugiero que revise detenidamente ejemplos propuestos en la web, por ejemplo, en el video Cómo generar sólidos de revolución se explica paso a paso la manera de rotar a partir de un deslizador configurado en grados.

Estimado alumno, le recomiendo que estudie también el video sobre ejercicios con el tronco de cono en el video Área y volumen tronco de cono en donde se explica cómo construir el tronco de cono con la rotación de la gráfica de una función sobre el eje X limitada por dos rectas dadas.

A continuación, en el siguiente recurso le presentamos definiciones, fórmulas de área y volúmenes de las figuras geométricas, como el cilindro, cono, esfera y poliedros.

Cilindros, Conos, Poliedros, esferas, áreas y volúmenes

Como puede determinar, las aplicaciones de medidas de áreas y volúmenes de cilindros, conos, esferas y poliedros son infinitas, sin embargo, depende mucho de la creatividad de las personas para su aplicación en la vida cotidiana.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Seguidamente, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

- Construya un cono como sólido de revolución, partiendo de un triángulo rectángulo que mida en sus lados 3, 4 y 5 cm. respectivamente, y calcule con GeoGebra el volumen.

- Construya un cilindro a partir de un rectángulo que mida 6 cm. de ancho por 10 cm de largo. Luego, calcule con Geogebra su volumen.

- Halle volumen del tronco de cono formado por la rotación de la gráfica de la función $f(x) = x/2 - 2$ alrededor del eje X y las rectas $x = 6$ y $x = 12$. Construya el sólido con GeoGebra.

- Determine con GeoGebra el sólido de revolución con la rotación de la región limitada por las curvas $2x = y^2$; $x = 0$; $y = 4$; alrededor del eje Y.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de los conceptos de área y volumen de un cono, cilindro y esfera, relacionando los conceptos a la optimización de recursos y a la vida cotidiana, de esta manera los aprendizajes serán más significativos y perdurables.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego del trabajo de esta semana en donde estudiamos los conceptos de máximos y mínimos de áreas y volúmenes de la esfera, cono y cilindro, nos aprestamos a estudiar el tema más interesante de nuestro curso ¿Conoce cuáles son los sólidos de revolución más utilizados en la vida cotidiana?

Semana 16

Actividades finales del bimestre

Estimado estudiante, en la última semana de estudio, la invitación para que revise los contenidos del segundo bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y,
- Evaluaciones parciales.

Recuerde

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en la segunda unidad sobre cilindros y conos, máximos y mínimos con esferas y volúmenes de cilindros y conos, poliedros, esferas, máximos y mínimos con esferas, y los sólidos de revolución.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del segundo bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en la unidad planificada y desarrollada en este segundo bimestre.

- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.

- Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

Para comprobar sus conocimientos en los temas estudiados, le invito a realizar la autoevaluación que se describe a continuación:

Autoevaluación 2

Seleccione verdadero o falso en las siguientes proposiciones.

1. ( ) **El desplazamiento paralelo de una generatriz (recta) a lo largo de una directriz (curva plana). Cuando la generatriz resulta perpendicular a una directriz que es un círculo, se obtiene un cilindro recto y circular.**

2. ( ) **El cono es una figura geométrica tridimensional que se constituye al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.**

3. ( ) **La fórmula para encontrar el área lateral del cilindro es:** $L = 3\pi r * l$

4. ( ) **El área de todo el cilindro se calcula a través de la fórmula:** $A = L + 3B = 3\pi r * h + 3\pi r^2$

En las siguientes preguntas identifique la alternativa correcta.

5. **Calcular la cantidad de hojalata que necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 de altura:**

   a. A = 7853.98 cm^2.
   b. A = 7000.00 cm^2.
   c. A = 7500.98 cm^2.

6. **Hallar el volumen del cilindro, si el diámetro es 8cm y su altura es 5 m:**

   a. V = 351 m^3.
   b. V = 241 m^3.
   c. V = 251 m^3.

2 Bimestre

7. **Determinar el área total exacta del cono circular recto que tiene por base un círculo de radio r = 3 cm, siendo la altura del cono 4 cm:**

a. A = 26π cm^2.
b. A = 36π cm^2.
c. A = 16π cm^2.

8. **Calcular el volumen de un cono cuyo radio en su base mide 2 cm y el valor de la altura es 6 cm:**

a. V = 4π cm^3.
b. V = 8π cm^3.
c. V = 16π cm^3.

9. **Cuál es la razón entre el radio de la base y la altura que, con el volumen dado, tenga la superficie total mínima:**

a. La relación entre el radio y la altura es: $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$
b. La relación entre el radio y la altura es: $\frac{r}{h} = \frac{4}{3}$
c. La relación entre el radio y la altura es: $\frac{r}{h} = \frac{2}{2}$

10. **Calcular el área y el volumen de un dodecaedro de 10 cm de arista, sabiendo que la apotema de una de sus caras mide 6,88 cm:**

a. A = 2000 cm^2 V = 7000 cm^3.
b. A = 1064 cm^2 V = 6663,12 cm^3.
c. A = 2064 cm^2 V = 7663,12 cm^3.

11. **Hallar el área total de un octaedro en el que la distancia entre los vértices no contiguos es de 20 cm:**

a. A_t = 600,86 cm^2.
b. A_t = 692,86 cm^2.
c. A_t = 592,76 cm^2.

Mediante una aplicación web o calculadora gráfica construya lo indicado:

12. **Construya un cilindro.**

13. **Construya un cono.**

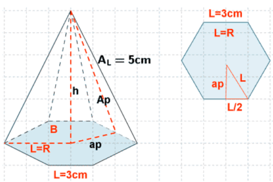
2 Bimestre

14. **Construya un tetraedro.**

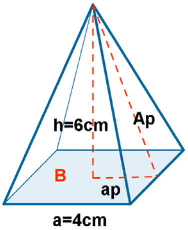
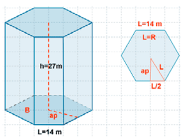
15. **Construya un hexaedro.**

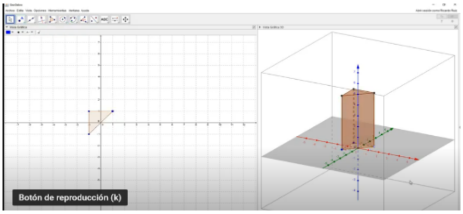
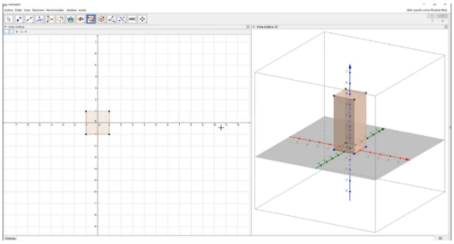
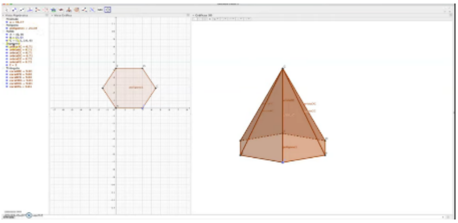
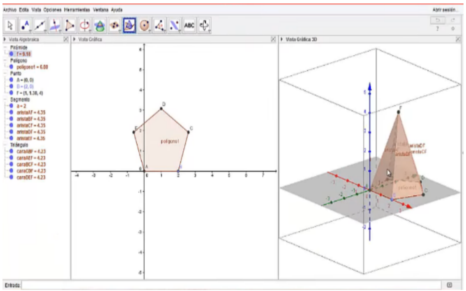
Ir al solucionario

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	Las figuras geométricas como el prisma y la pirámide permiten el cálculo de máximos y mínimos de sus áreas y volúmenes.
2	F	El sistema ortogonal tridimensional permite representar un punto en el espacio. Existen planos lineales para representar figuras lineales.
3	V	En el sistema tridimensional se puede localizar un punto especificando tres números dentro de cierto rango. Ejemplo: anchura, altura y profundidad.
4	F	Prisma recto es aquel en donde las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base.
5	b	Una pirámide es un cuerpo geométrico que tiene por base un polígono y sus caras laterales son triángulos que coinciden en un vértice común.
6	b	Prisma oblicuo es aquel en donde las aristas laterales son oblicuas a las aristas de la base.
7	a	$R = L$ $5^2 = h^2 + 3^2 \iff h = \sqrt{5^2 - 3^2} \approx 4\ cm$ P_B = Perimetro de la base. $P_B = n \cdot L \iff P_B = 6 \cdot 3 = 18\ cm$ Ap = Apotema de la piramide a_p = apotema de la base $ap = \frac{L}{2} \iff ap = \frac{3}{2} = 1{,}5\ cm$ $Ap^2 = (ap)^2 + h^2 \iff Ap = \sqrt{(ap)^2 + h^2}$ $Ap = \sqrt{1{,}5^2 + 4^2} \approx 4{,}272\ cm$  $A_L = \frac{P_B \cdot Ap}{2} \iff A_L = \frac{18 \cdot 4{,}272}{2} \approx 38{,}448\ cm^2$ $A_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L^2 \iff A_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^2 = 7{,}794\ cm^2$ $A_T = A_L + A_B \iff A_T = 38{,}448 + 7{,}794 = 46{,}242\ cm^2$ $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h \iff V = \frac{1}{3} \cdot 7{,}794 \cdot 4 = 10{,}392\ cm^3$

Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
8	c	$P_B = \text{Perimetro de la base.}$ $P_B = n \cdot L \quad \Leftrightarrow \quad P_B = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$ $Ap = \text{Apotema de la piramide}$ $a_p = \text{apotema de la base}$ $ap = \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ap = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$ $Ap^2 = (ap)^2 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad Ap = \sqrt{(ap)^2 + h^2}$ $Ap = \sqrt{2^2 + 6^2} \approx 6,324 \text{ cm}$ $A_L = \frac{P_B \cdot Ap}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A_L = \frac{16 \cdot 6,324}{2} \approx 50,592 \text{ cm}^2$ $A_T = A_L + A_B \quad \Leftrightarrow \quad A_T = 50,592 + 16 = 66,592 \text{ cm}^2$ $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 6 = 32 \text{ cm}^3$ 
9	b	$R = L$ $P_B = n \cdot L \quad \Leftrightarrow \quad P_B = 6 \cdot 14 = 84 \text{ m}$ $L^2 = ap^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad ap = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$ $ap = \sqrt{14^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2} \approx 12,124 \text{ m}$ $A_B = \frac{P_B \cdot ap}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A_B = \frac{84 \cdot 12,124}{2} = 509,208 \text{ m}^2$ $A_L = P_B \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad A_L = 84 \cdot 27 = 2268 \text{ m}^2$ $A_T = 2A_B + A_L \quad \Leftrightarrow \quad A_T = 2 \cdot 509,208 + 2268 = 3286,416 \text{ m}^2$ $V = A_B \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad V = 509,208 \cdot 27 = 13748,616 \text{ m}^3$ 
10	b	El área total está formada por dos cuadrados de 1,20 m de lado y 4 rectángulos de (1,20m x 4m). At = 2 $(1,20\text{m})^2$ + 4 (1,20m x 4m) At = 2 $(1,44\text{m}^2)$ + 4 $(4,8\text{m}^2)$ At = $2,88\text{m}^2 + 19,2\text{m}^2$ At = $22,08 \text{ m}^2$ El volumen es el producto entre el área de la base por la altura. V = $(1,20\text{m})^2$ x 4m V = $1,44\text{m}^2$ x 4m V = $5,76 \text{ m}^3$

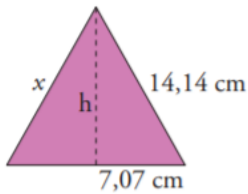
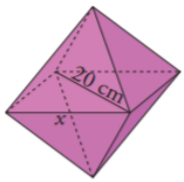
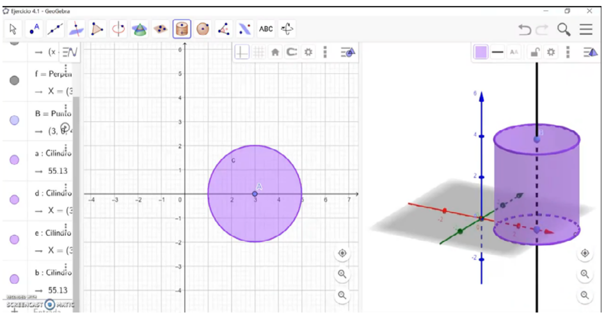
Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
11	a	576 pulgadas cuadradas. V=A base*h V=A base*9=5184 A base=5184/9 A base=576 pulgadas $a^2=576$ a=24 pulgadas Luego el tamaño de la pieza es de 576 pulgadas cuadradas y sus lados miden 24 pulgadas.
12		
13		
14		
15		

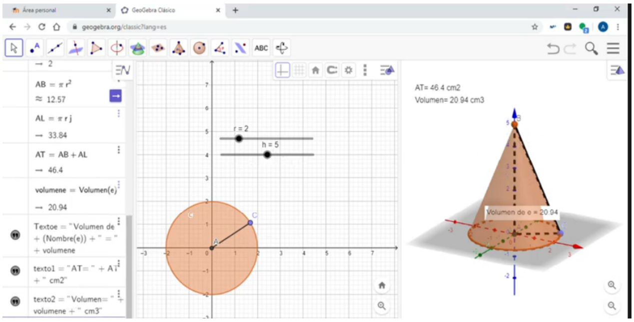
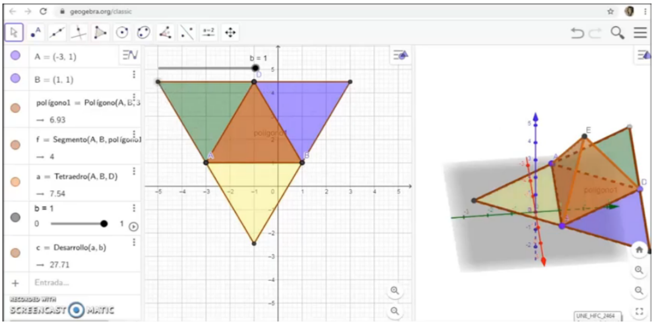
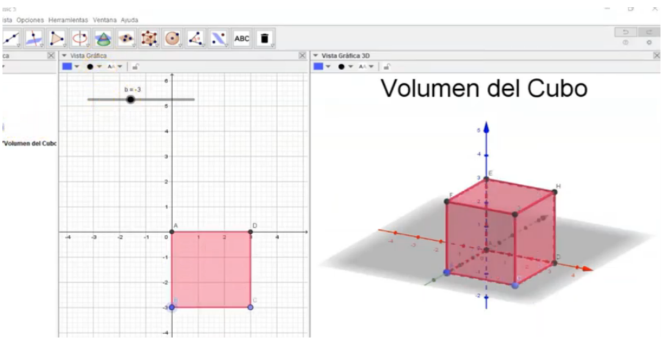
Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	El cilindro recto está formado por una superficie lateral curva y cerrada y dos planos paralelos que forman sus bases.
2	V	Un cono recto es un sólido de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.
3	F	La fórmula para el cálculo del área lateral del cilindro es: $L = 3\pi r * l$ El área lateral del cilindro es: $L = 2\pi r * h$
4	F	El área de todo el cilindro será: $A = L + 3B = 3\pi r * h + 3\pi r^2$ El área de todo el cilindro será: $A = L + 2B = 2\pi r * h + 2\pi r^2$
5	a	$A = 7853.98 cm^2$ $A = L + 2B$ $A = 2\pi r * h + 2\pi r^2$ $A = 2\pi 5 * 20 + 2\pi(5)^2$ $A = 628 + 175.398$ $A = 785.398\ cm^2$ $A = 785.398 \times 10 = 7853.98\ cm^2$
6	c	$V=251\ m^3$ $V = r^2\pi h$ $V = (4m)^2\ \pi 5m$ $V = 251m^3$
7	b	$l^2 = h^2 + r^2$ $l = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ $A = L + B = l\pi r + r^2\pi$ $A = 5\pi \cdot 4 + 4^2 \cdot \pi$ $A = 20\pi + 16\pi$ $A = 36\pi\ cm^2$
8	c	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (2)^2 \cdot 6$ $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 12$ $V = 16\pi\ \text{cm}^3$

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
9	a	$V = \pi r^2; h = \frac{V}{\pi r^2}$ $S_r = 2\pi h + 2\pi r^2$ $S_r = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$ Si la superficie total ha de ser mínima, la derivada respecto al radio se anula en dicho mínimo, es decir. $\frac{-2V}{r} + 4\pi r = 0$ donde $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} + 4\pi r = 0$ y $h = \frac{V}{\pi 3\sqrt{(\frac{V}{2\pi})^2}}$ Por tanto la relación entre el radio y la altura es $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$
10	c	A = 30 * a * ap A = 30 * 10 * 6.88 A = 2064 cm^2 $V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})10^3$ V = 7663.12 cm^3

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
11	b	Observe que la arista del octaedro es el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 20 cm. x = › 14,14 cm h = 12,25 cm A_T = 692,86 cm^2 $x^2 + x^2 = 20^2$ $x^2 = 200$ $x = \sqrt{200}$ x = 14.14 cm $h = \sqrt{(14.14)^2 - (7{,}07)^2}$ $h = 12.25cm$ $A_T = 8 \times \frac{14.14 \times 12.25}{2}$ $A_T = 692.86cm^2$  
12		

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
13		
14		
15		

Ir a la autoevaluación

Solucionario

5. Glosario

Prisma: es un poliedro que consta de dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y de caras laterales que son paralelogramos.

Pirámide: Sólido que tiene por base un polígono cualquiera y cuyas caras, tantas en número como los lados de aquel, son triángulos que se juntan en un solo punto, llamado vértice.

Área: es un concepto métrico que puede permitir asignar una medida a la extensión de una superficie, expresada en matemáticas como unidades de medida denominadas unidades de superficie.

Volumen: corresponde a la medida del espacio que ocupa un cuerpo. La unidad de medida para medir volumen es el metro cúbico (m^3).

Sistema tridimensional: en matemáticas, el sistema tridimensional se representa en el plano cartesiano con los ejes X, Y y Z. Por lo general, en estas representaciones se manejan las formas geométricas de tres dimensiones.

Geogebra: es un *software* de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo.

Máximos y mínimos de una función: en matemáticas, los máximos y mínimos de una función, conocidos colectivamente como extremos de una función, son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos).

Cilindro: es un cuerpo geométrico que está formado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

Cono: es el cuerpo de revolución obtenido al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Poliedros: un poliedro es un cuerpo geométrico de tres dimensiones cuyas caras son polígonos.

Esferas: cuerpo geométrico limitado por una superficie curva cuyos puntos están todos a igual distancia de uno interior llamado centro.

Cilindro circular recto: un cilindro circular recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por el giro de una región rectangular en torno a uno de sus lados o a uno de sus ejes de simetría.

Tetraedro: el tetraedro es aquel poliedro regular limitado por cuatro regiones triangulares equiláteras congruentes.

Hexaedro: o cubo es un poliedro regular con seis caras cuadradas. Tiene, además, doce aristas y ocho vértices.

Octaedro: es el poliedro regular con ocho caras que son triángulos equiláteros. Tiene además doce aristas y seis vértices. El poliedro dual del octaedro es un hexaedro cuyos vértices se encuentran en los centros de las caras del primero Icosaedro.

Sólidos de revolución: el sólido de revolución es un cuerpo geométrico que se puede formar haciendo girar una superficie plana en torno a una recta a la que se denomina eje.

6. Referencias bibliográficas

Advíncula, E., Luna, M. y Villogas, E. (2017). *Sólidos de revolución en un entorno de geometría dinámica.* http://funes.uniandes.edu.co/12393/1/Adv%C3%ADncula2017Solidos.pdf

Coll, A. (20 septiembre 2018*). Te desvelamos los 3 grandes misterios de las pirámides de Egipto.* https://lavozdelmuro.net/misterios-piramides-de-egipto-s0-17-9-18/

Díaz. M., (3 de junio 2015) *Paso a paso creación del cubo en Geogebra 3D.*. https://www.youtube.com/watch?v=VFEZVp_FgCw

Duvi. (12 de mayo 2016) *¿Cómo graficar superficies en R3(con Geogebra).* . https://www.youtube.com/watch?v=kNA68wrW-rA

Extremiana, J., Hernández, L. y Rivas, M. (2004). *Poliedros, Ciencia y Tecnología.* https://www.unirioja.es/cu/luhernan/Divul/POLIEDROS/pct.html

Fernández, C. (Mayo, 2021). Smartick. *Cilindro: características, ejemplos y cómo calcular área y volumen.* https://www.smartick.es/blog/matematicas/geometria/cilindros/

Física Matemática Profe William (2 de agosto 2020). *Geogebra 3D/Volumen y área de un paralelepípedo Prisma-Vista gráfica 3D* . https://www.youtube.com/watch?v=piOfqdrhL3g

Ge Math (28 de octubre 2020) ¿Cómo graficar sólidos de revolución con Geogebra? https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/dodecaedro/

León, F. (2017). *Aplicaciones de los sólidos y superficies de revolución*. https://www.studocu.com/es-mx/document/centro-de-ensenanza-tecnica-y-superior/calculo-integral/ensayos/aplicaciones-de-los-solidos-y-superficies-de-revolucion/3150434/view

MateFácil (2020). *Vectores y puntos en tres dimensiones, con gráfica | Cálculo vectorial.* https://www.youtube.com/watch?v=aevLlQfs9hY&t=730s

Matemáticas para Ti (2017). *Ejemplos resueltos de áreas y volúmenes de prismas.* https://matematicasparaticharito.wordpress.com/2015/05/05/ejemplos-resueltos-de-area-y-volumen-de-prismas/

Pérez, A. y Arroyo, R. (2008). *Un tetraedro en mi bolsa*. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0187-893X2008000300009

Pi-ensa Matematik (2018). *Cómo ubicar puntos en un sistema de tres dimensiones.* https://www.youtube.com/watch?v=5wx73gzPDCg

Rony Online (16 de junio 2021) *método anillo arandela/construcción con Geogebra.* https://www.youtube.com/watch?v=co3hzuRQ_uU

Ruiza, M., Fernández, T. y Tamaro, E. (2024*). Biografía de Arquímedes. En biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea. Barcelona* (España). https://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/arquimedes.htm

Universo de fórmulas (2019). *Dodecaedro*.https://www.youtube.com/watch?v=vrhGhZFknoI