UTPL
La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Álgebra Lineal

Guía didáctica

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Glosario

Referencias bibliográficas

Anexos

UTPL

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Departamento de Ciencias de la Educación

Álgebra Lineal

Guía didáctica

Carrera	*PAO Nivel*
▪ *Logística y Transporte* ▪ *Tecnologías de la Información* ▪ *Administración de Empresas* ▪ *Contabilidad y Auditoría* ▪ *Economía* ▪ *Finanzas*	II

Autor:

Morales Larreategui Gonzalo Fernando

MATE_1108

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Universidad Técnica Particular de Loja

Álgebra Lineal
Guía didáctica
Morales Larreategui Gonzalo Fernando

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-25-793-2

Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)
Usted acepta y acuerda estar obligado por los términos y condiciones de esta Licencia, por lo que, si existe el incumplimiento de algunas de estas condiciones, no se autoriza el uso de ningún contenido.

Los contenidos de este trabajo están sujetos a una licencia internacional Creative Commons **Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual** 4.0 (CC BY-NC-SA 4.0). Usted es libre de **Compartir** — *copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato.* **Adaptar** — *remezclar, transformar y construir a partir del material citando la fuente, bajo los siguientes términos:* **Reconocimiento**- *debe dar crédito de manera adecuada, brindar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios*. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante. *No Comercial-no puede hacer uso del material con propósitos comerciales. Compartir igual-Si remezcla, transforma o crea a partir del material, debe distribuir su contribución bajo la misma licencia del original*. No puede aplicar términos legales ni medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia. https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

30 de abril, 2020

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Pensamiento crítico y reflexivo

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Construir modelos específicos de ciencias de la computación mediante esquemas matemáticos y estadísticos, para propiciar el uso y explotación eficiente de datos e información.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

Utilizar software para simular el comportamiento de sistemas simples y complejos a partir de los modelos matemáticos que describen el proceso de transformación de que en ellos sucede, utilizando los fundamentos teóricos obtenidos en la carrera.

2. Metodología de aprendizaje

Para orientar el aprendizaje de esta asignatura se ha considerado diversas metodologías que permitirán un aprendizaje significativo enfocadas en aspectos como la investigación, cooperación, interacción, desarrollo de problemas, utilización de herramientas TIC y aprendizaje por pares.

Especial interés pondremos en el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP / PBL), que se ha convertido en una de las metodologías activas más eficaz y cada vez más extendida en nuestro sistema educativo.

Con esta metodología procuraremos que los alumnos lleven a cabo, en el transcurso del semestre, un proceso de investigación y creación que culmine con la respuesta a una pregunta, la resolución de un problema o la creación de un producto. Los proyectos han de planearse, diseñarse y ejecutarse con miras a que el alumno incorpore a su sistema cognitivo, los contenidos y estándares de aprendizaje establecidos en la programación respectiva.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Las TIC serán introducidas dentro de la programación en la medida que apunten a una mejor y más profunda comprensión de los conceptos, procedimientos y aplicaciones objeto del estudio de esta disciplina.

Haremos especial énfasis en lograr el contacto indispensable para el aprendizaje mediado entre profesor y alumnos.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

Capacidad para: analizar, interpretar y aplicar los conceptos de los sistemas de ecuaciones lineales.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

El proceso de aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales incluirá una recopilación de los conceptos básicos y procesos de resolución de estos sistemas de ecuaciones posiblemente ya estudiados en el bachillerato con la progresiva inclusión de nuevas metodologías orientándose finalmente a la adopción de procesos más eficaces en términos lógicos y computacionales.

Semana 1

Unidad 1. Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Ecuación lineal

Antes de nada, aclaremos un concepto: Ecuación. La palabra ecuación viene de aequus (igual, liso, uniforme) que es raíz también de palabras como igualdad, equitativo, equidad, etc.

Nada más normal, pues una ecuación es una igualdad matemática que contiene una o más incógnitas (lo que significa que desconocemos su valor) designadas con las letras x, y, z, etc. (las últimas del alfabeto). Estas letras también se llaman variables pues su valor puede cambiar, a diferencia de otras, llamadas constantes cuyo valor no cambia y que se suelen representar con las primeras letras del alfabeto.

Según el valor que tomen las variables la igualdad mencionada en la ecuación se cumplirá (será verdadera) o no (será falsa).

Por ejemplo: $x+3 = 5$ será verdadera si $x=2$, y falsa si x toma cualquier otro valor, por ejemplo 1.

Cuando conseguimos que la ecuación se cumpla (sea verdadera) se dice que hemos hallado una solución de la ecuación, en el ejemplo mencionado $x=2$ es una solución de la ecuación $x+3=5$.

En matemáticas solemos utilizar otras igualdades que no son ecuaciones, por ejemplo, $f(x)=x+3$ es una función, aquí lo que nos

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

interesa no es hallar una solución sino estudiar como varía f(x) a medida que le damos valores a x.

Otra igualdad que no es una función sería una identidad como la siguiente: 2(x+1)-x=x+2, esta igualdad, y todas aquellas que toman este nombre, se cumple para cualquier valor de x.

En general las variables de una ecuación pueden tener exponentes de cualquier magnitud (cuadrado, cubo, etc.), sin embargo, si los exponentes son iguales a 1 o 0, decimos que es una ecuación lineal.

x-2y+3z-4=0 sería una ecuación lineal con 3 variables.

A cada uno de los sumandos de la ecuación se los llama términos.

Cuando los términos tienen la misma parte literal se dice que son semejantes.

Los números que acompañan a las variables se denominan coeficientes, en el caso del ejemplo propuesto serían 3 para z, -2 para y, y 1(que no está escrito, pero se sobreentiende) para x.

Los términos que no corresponden a una variable se denominan términos independientes.

1.2. Sistemas lineales

Cuando varias ecuaciones comparten las mismas incógnitas y las mismas soluciones, decimos que forman un sistema de ecuaciones, si ninguna de las incógnitas tiene un exponente mayor que uno se dice que las ecuaciones son lineales.

1.3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones hay muchos métodos, veremos algunos:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Método gráfico

Consiste en representar las ecuaciones como si fueran funciones, generalmente en un plano cartesiano x, y; y encontrar los puntos donde estas se cortan, que serán las soluciones. Generalmente nos dan soluciones aproximadas, y no son prácticas cuando tenemos más de 2 incógnitas, sin embargo, es un método útil para anticipar la solución de un sistema y suele utilizarse como complemento de los demás métodos.

Por ejemplo, para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Para representar mediante rectas las funciones que representan a esas ecuaciones procuramos encontrar dos puntos de dichas rectas, por ejemplo, para la primera ecuación, si x=0, y=5/3, tenemos el par ordenado (0,5/3); si y=0 x=5/2, por lo que tenemos otro punto (5/2,0) la recta que une estos dos puntos representa todos los valores posibles de x e y que satisfacen la primera ecuación.

De manera muy similar encontramos dos puntos de la segunda ecuación, que serían (0,-2) y (2,0).

El punto de intersección de las dos rectas sería la solución del problema, en este caso el gráfico no es muy concluyente acerca de ello, diríamos que la solución es x=2.2 e y =0.2. En este caso el resultado coincide con una solución algebraica, en otros casos no hay garantía de que eso suceda, depende de la habilidad para graficar y para observar.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

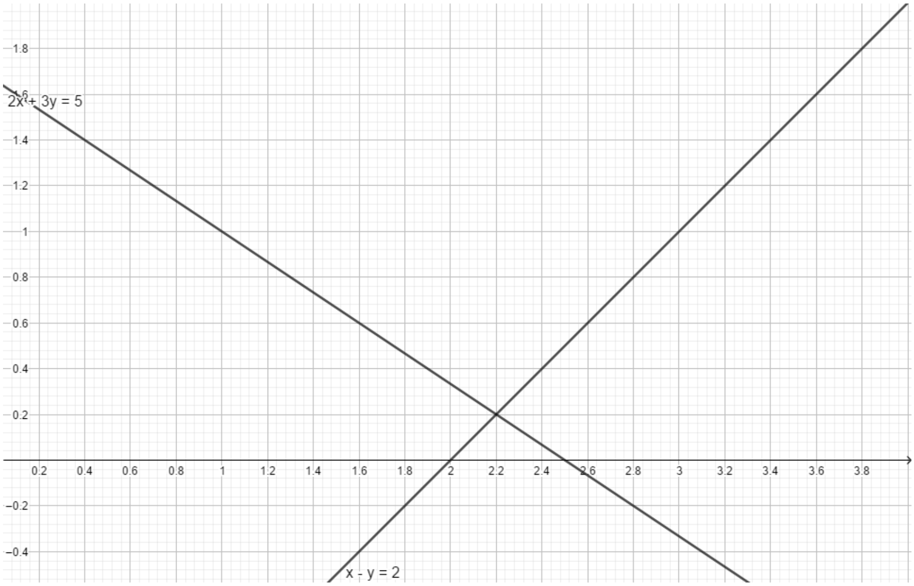


Gráfico 1.

Método de sustitución

En una de las ecuaciones del sistema despejamos una incógnita y luego reemplazamos este valor en las demás ecuaciones, tendremos un nuevo sistema con una incógnita menos (la que despejamos) y una ecuación menos (aquella en la que hicimos el despeje).

Método de igualación

Despejamos la misma variable en todas las ecuaciones y, como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, podemos combinar el primer despeje con todos los demás, obteniendo asimismo un nuevo sistema con una incógnita menos y una ecuación menos.

Método de reducción

Si dos igualdades se suman (o restan, multiplican o dividen) entre sí, se obtiene una nueva igualdad, asimismo si en ambos lados de la igualdad se hace lo mismo (sumar un número, o restarlo o multiplicar o dividir) la igualdad se mantiene.

En este método se aplica estas propiedades para buscar que los coeficientes de una incógnita tengan el mismo valor absoluto, pero signo contrario, de manera que al sumar las dos ecuaciones desaparece esa incógnita. Este método es el que dio origen a las matrices, al extraer solo los coeficientes de las ecuaciones y los términos independientes y trabajar con ellos.

A continuación, expongo la resolución de un sistema de ecuaciones por los 3 métodos (no utilizo el método gráfico por ser un sistema de 3 ecuaciones). Los sistemas de ecuaciones también se pueden resolver usando matrices y determinantes, pero eso lo veremos más adelante en esta misma asignatura.

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Resolución por sustitución

Despejamos x en la primera ecuación:

$$x=6-y-z$$

Reemplazamos en las 2 ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} (6 - y - z) + 2y + 3z = 14 \\ (6 - y - z) - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Reducimos términos semejantes

$$\begin{cases} y + 2z = 8 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Despejamos

y=8-2z

Reemplazamos en la ecuación restante

-3(8-2z)+2z=0

-24+6z+2z=0

$$8z = 24 \rightarrow z = \frac{24}{8} = 3$$

Resuelta z procedemos a encontrar y

y=8-2z=8-2(3)=8-6=2

Por último, encontramos x

x=6-y-z=6-2-3=1

Resolución por igualación:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Despejamos x en todas las ecuaciones:

x=6-y-z

x=14-2y-3z

x=6+2y-3z

Combinamos el primer despeje con el segundo y el tercero

$$\begin{cases} 6 - y - z = 14 - 2y - 3z \\ 6 - y - z = 6 + 2y - 3z \end{cases}$$

Reduciendo términos semejantes

$$\begin{cases} y + 2z = 8 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Despejamos y en ambas ecuaciones

$$y=8-2z$$

$$y = \frac{2}{3}z$$

Las igualamos

$$8 - 2z = \frac{2}{3}z$$

Multiplicando por 3 ambos lados de la ecuación

$$24-6z=2z$$

$$-8z=-24 \rightarrow z=3$$

Como

$$y=8-2z=8-2(3)=8-6=2$$

Además

$$x=6-2-3=1$$

Resolución por reducción

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Si restamos la segunda ecuación menos la primera

$$y+2z=8$$

Si restamos la tercera ecuación menos la primera

$$-3y+2z=0$$

Formamos un nuevo sistema con estas ecuaciones

$$\begin{cases} y + 2z = 8 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 3

$$\begin{cases} 3y + 6z = 24 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Sumamos las dos ecuaciones y obtenemos

$$8z = 24 \rightarrow z = \frac{24}{8} = 3$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva del texto básico (sección 1.1) y la guía, análisis e interpretación conceptos y propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales.
- Participar de las tutorías semanales, preguntar, opinar, sugerir, revisar videos.
- Revisar ejercicios resueltos en el texto y la guía, resolver ejercicios propuestos (1 al 14) en la sección 1.1 del texto básico.

Semana 2

1.4. Sistema lineal consistente

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. ¿cuándo se da cada caso?

Si tenemos una ecuación con una incógnita está claro que podemos despejar esa incógnita y encontrar la solución, ese "sistema" tendría solución única.

Si tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas podemos usar el método de reducción (o eliminación como lo llama el texto), para eliminar una de las incógnitas y quedarnos con una ecuación con una incógnita y así tendríamos nuevamente una solución única del sistema. Podemos aplicar el mismo sistema para tres ecuaciones con tres incógnitas, cuatro ecuaciones cuatro incógnitas y, en general, para n ecuaciones con n incógnitas. Parece claro que, si tenemos el mismo número de ecuaciones que de incógnitas el sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, PERO.... Si una de las ecuaciones se deriva de las otras, por ejemplo, tenemos

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Notaremos que no son dos ecuaciones independientes, en realidad es la misma ecuación solo que la segunda se ha obtenido multiplicando la primera por 2. Puede que sea muy difícil descubrir que una de las ecuaciones no es independiente de las otras (en realidad se dice linealmente independiente), por ejemplo, en

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 4x + 5y + 6z = 7 \\ 7x + 8y + 9z = 10 \end{cases}$$

La tercera ecuación se obtiene multiplicando a la segunda por 2 y restándole la primera, con lo que tendríamos en realidad 2 ecuaciones linealmente independientes con 3 incógnitas. Cuando hay más incógnitas que ecuaciones linealmente independientes hay infinitas soluciones al sistema, como ejemplo la ecuación x+y=1 (1 ecuación con 2 incógnitas) puede tener como soluciones x=1, y=0; x=0, y=1, x=2, y=-1, ...

1.5. Sistema lineal inconsistente

Otro caso que puede suceder es que el sistema sea inconsistente, por ejemplo, si decimos x+y=1 x+y=0 Esto es imposible que se cumpla, pues la suma de x+y o es 1 o es 0 pero no ambas cosas a la vez.

También es posible que una mezcla de ecuaciones (más adelante aprenderemos que el nombre adecuado es combinación lineal) nos dé una inconsistencia, pondremos un ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 4x + 5y + 6z = 7 \\ 7x + 8y + 9z = 9 \end{cases}$$

Pero más arriba vimos que si duplicamos la segunda ecuación y le restamos la primera obtenemos la ecuación 7x+8y+9z=10 que se contradice con la tercera ecuación del sistema propuesto y el sistema no tiene solución

Cuando tenemos más ecuaciones (linealmente independientes) que incógnitas el sistema no tiene ninguna solución, debido a que al eliminar cada incógnita tendremos también una ecuación menos, y al final nos quedará más de una ecuación con una sola incógnita.

Me explico con un ejemplo.

Sea el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Si restamos la segunda ecuación menos la primera se elimina x y queda y=0

Si restamos la tercera ecuación menos dos veces la primera eliminamos x y nos queda -y=-1 que equivale a y=1 que se contradice con la solución y=0, por lo tanto, el sistema no tiene solución. Se podría pensar en el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Que si tiene solución (x=1, y=0) Pero aquí en realidad sólo tenemos 2 ecuaciones linealmente independientes, la tercera ecuación se obtiene multiplicando la primera por 3 y restándole la segunda.

Así que al tener dos ecuaciones linealmente independientes y dos incógnitas el sistema tiene solución única.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva del texto básico (sección 1.1) y la guía, análisis e interpretación conceptos y propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales.
- Participar de las tutorías semanales, preguntar, opinar, sugerir, revisar videos.
- Revisar ejercicios resueltos en el texto y la guía, resolver ejercicios propuestos (15 a 28) en la sección 1.1 del texto básico.
- Realizar Cuestionario Teórico 1 en línea sobre "Sistemas de Ecuaciones Lineales"
- Realizar Cuestionario de Resolución de Problemas 1 en línea sobre "Sistemas de Ecuaciones Lineales"
- Foro Académico: Desarrollar los ejercicios teóricos de la sección 1.1 del texto básico.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 1

A continuación, se propone algunos ejercicios y actividades respecto al tema de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y formas de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales; esto le permitirán confirmar y afianzar sus conocimientos. Adicionalmente usted encontrará al final el solucionario a las preguntas propuestas.

Escriba en el paréntesis respectivo las letras V o F, según sean verdaderos o falsos los siguientes enunciados

1. ( ) Una ecuación de la forma y = mx que expresa la variable y en función de la variable x y la constante m, dicha ecuación puede ser denominada ecuación lineal.

2. ( ) La representación gráfica de una ecuación lineal corresponde a una parábola.

3. ( ) Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones, cada una de ellas con n incógnitas.

4. ( ) En la ecuación a1x1 + a2x2 + a3x3 + ... + an x n = b, los elementos a1, a2, a3... an se denominan variables.

5. ( ) Los sistemas lineales compatibles pueden no tener solución o pueden tener solución única.

6. ( ) Los sistemas lineales pueden no tener solución, o pueden tener solución única o infinita.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

7. En las siguientes expresiones, la que corresponde a una función lineal es:

   a. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b.$
   b. $a_1x_1^{\,2} + a_2x_2 + a_3x_3^{\,3} = b.$
   c. $3x^2 + 5y + z = b.$

8. Relacione las alternativas que gráficamente pueden presentar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

a.	Solución única	las rectas no se intersecan, no existe punto común.
b.	Sin solución	las rectas se intersecan exactamente en un solo punto
c.	Infinitas soluciones	las restas coinciden una con otra en toda su extensión

9. Relacione la denominación que se adjudica a un sistema lineal respecto a la resolución:

a.	Consistente	El sistema no posee solución
b.	Inconsistente	El sistema tiene una solución o infinitas soluciones
c.	No corresponde	El sistema siempre presenta infinitas soluciones.

10. En la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución, las líneas rectas:

    a. Tienen infinitos puntos de intersección.
    b. Tienen un único punto de intersección.
    c. No tienen puntos de intersección.

11. En la representación gráfica de un sistema lineal que tiene infinitas soluciones, las rectas:

a. Tienen infinitos puntos de intersección.
b. Tienen un único punto de intersección.
c. No tienen puntos de intersección.

12. En la representación gráfica de un sistema lineal que tiene solución única, las rectas:

a. Tienen infinitos puntos de intersección.
b. Tienen un único punto de intersección.
c. No tienen puntos de intersección.

13. Una solución de un sistema lineal, son los valores de las variables para los cuales:

a. Todas las ecuaciones del sistema se satisfacen
b. Todas las ecuaciones del sistema no se satisfacen
c. Al menos una de las ecuaciones del sistema se satisface

Ejercicios de aplicación

14. En el siguiente sistema lineal realizar la o las operaciones solicitadas, cada paso se aplicará al sistema resultante anterior:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ x + 2y + z = 13 \\ 3x + 6y - 9z = 10 \end{cases}$$

a. Multiplicar por 2 la ecuación 1.
b. Intercambiar la ecuación 1 por 3.
c. Adicionar a la ecuación 3, dos veces la ecuación 1.
d. multiplicar por 3 la ecuación 2.
e. Restar 1/3 veces la ecuación 2 a la ecuación 1.
f. Sumar las ecuaciones 1 y 2 a la ecuación 3

g. Restar la ecuación 3 a la ecuación 2.
h. Sumar 2 veces la ecuación 1 y una vez la ecuación 2 a la ecuación 3.
i. Intercambiar las ecuaciones 1 y 2.
j. Restar a la ecuación 1, las ecuaciones 2 y 3.

15. Indique qué operación u operaciones elementales entre ecuaciones se han realizado para obtener el segundo sistema lineal indicado.

a. $$\begin{cases} 2x + 4y - 10z = -3 \\ 10x - 20y + 34z = -29 \\ 13x + 26y - 31z = 68 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 5z = -3/2 \\ 10x - 20y + 34z = -29 \\ 13x + 26y - 31z = 68 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} x + 2y - 5z = -29 \\ -10x - 20y + 34z = -29 \\ 13x + 26y - 31z = 68 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 8y - 20z = -6 \\ -10x - 20y + 34z = -29 \\ 13x + 26y - 31z = 68 \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} 4x + 8y - 20z = -6 \\ -10x - 20y + 34z = -29 \\ 13x + 26y - 31z = 68 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 8y - 20z = -6 \\ -10x - 20y + 34z = -29 \\ 7x + 14y - 17z = 33 \end{cases}$$

d. $$\begin{cases} x + 4y - 8z = -6 \\ -2x - 10y + 3z = -2 \\ 3x + 24y - 7z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4y - 8z = -6 \\ -2x - 10y + 3z = -2 \\ 4x + 44y - 13z = 7 \end{cases}$$

e. $$\begin{cases} x + 4y - 8z = -6 \\ -2x - 10y + 3z = -2 \\ 3x + 24y - 7z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 24y - 7z = 3 \\ -2x - 10y + 3z = -2 \\ x + 4y - 8z = -6 \end{cases}$$

f. $$\begin{cases} x + 4y - 8z = -6 \\ -2x - 10y + 3z = -2 \\ 3x + 24y - 7z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4y - 8z = -6 \\ -2x - 10y + 3z = -2 \\ 5x + 32y - 23z = -9 \end{cases}$$

16. En el siguiente sistema lineal realizar la o las operaciones solicitadas, cada paso se aplicará al sistema resultante anterior:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 8z = -1 \\ -2x - 4y + 3z = -6 \\ -x + 2y - 2z = -1 \end{cases}$$

a. Intercambiar la ecuación 1 y 3.
b. Dividir la primera ecuación para el coeficiente de x.
c. Sumar a la ecuación 2, dos veces la ecuación 1 y a la 3 restar tres veces la ecuación 1.
d. Dividir la ecuación 2 para el coeficiente de y.
e. Restar a la ecuación 3, 10 veces la ecuación 2.
f. Despejar el valor de z.
g. Reemplazar el valor de z en la segunda ecuación, despejar y.
h. Reemplazar los valores de y, y de z en la ecuación 1, despejar el valor de ***x.***

17. Resolver y determinar si los sistemas son consistentes o inconsistentes, indicar si el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.

a. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 9y = 10 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \\ -x + 4y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \\ 5x + 4y = 5 \end{cases}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

e. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 9y = 7 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 9y = 7 \end{cases}$

g. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 4y + 5z = 7 \\ 2x + 4y + 4z = 4 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 3y + 2z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 2x + y + 5z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$

j. $\begin{cases} 2x + y + 5z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ 4x + 6y + 4z = 2 \end{cases}$

k. $\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ 2x - 3y + 5z = 2 \\ 3x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$

l. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 6z = 1 \\ 3x + 4y + 9z = 1 \end{cases}$

m. $\begin{cases} -2x + y + 7z + 3w = 2 \\ x + 2y + 3z + 2w = 3 \\ 3x + 3y + 4z + w = 4 \\ 5x + 4y + 2z + 4w = -2 \end{cases}$

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma en cómo se resuelven paso a paso.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios

- Es indispensable revisar las propiedades de los exponentes en la determinación del grado de una ecuación para determinar si es lineal o no.
- Considerar que m representa el número de ecuaciones lineales y n el número de incógnitas o variables presentes en un sistema.
- Si se tiene un único punto de intersección entre las rectas estas tendrán una única solución, si estas rectas están superpuestas se tendrán infinitas soluciones. Si las rectas no se cruzan en ningún punto en el espacio evidentemente no se tendrá ninguna solución al sistema de ecuaciones.
- Para el desarrollo de los ejercicios se debe tener presente que existe consistencia cuando el sistema presenta al menos una solución, inconsistencia cuando no existe solución.
- Se pueden aplicar diversas metodologías en la solución de un sistema de ecuaciones aplicando operaciones fundamentales entre ellas hasta encontrar la solución definitiva.

Ir al solucionario

> Ha desarrollado su primera autoevaluación, seguro que lo realizó con éxito, ¡Felicitaciones! con la misma dedicación y esmero le invito a continuar con el resto de unidades.

Resultado de aprendizaje 2

Capacidad para: analizar, interpretar y aplicar los conceptos de matrices.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

El desarrollo de los aprendizajes relativos a matrices implica una combinación inicial de conceptos básicos y ejemplos primarios que servirán para la comprensión y aplicación de los mismos, incluirá, por lo tanto, una recopilación de conceptos básicos, definiciones, aplicación de las mismas y procesos de resolución de problemas sobre matrices.

Semana 3

Unidad 2. Matrices

2.1. Conceptos básicos y definiciones

Si lo pensamos bien, el método de eliminación, también llamado de reducción, nos brinda un procedimiento infalible para encontrar las soluciones de cualquier sistema de ecuaciones, podríamos

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

simplificarlo aún más si trabajamos solamente con los coeficientes, a condición de conservar el orden de esos coeficientes según la incógnita con la que tratamos.

Por ejemplo:

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Puede representarse simplemente por los coeficientes

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Si encerramos estos números en un paréntesis tenemos una matriz, la matriz de los coeficientes.

Si además consideramos el término independiente que está al otro lado de la igualdad tendríamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Note que se ha separado la última columna que representa a los términos independientes.

Por lo tanto, una matriz sería un arreglo rectangular ordenado de números en filas y columnas.

2.2. Operaciones básicas con matrices

Se puede definir las operaciones de suma y producto de matrices.

Para sumar dos matrices simplemente sumamos los números que se encuentran en la misma ubicación de las matrices que se están sumando.

Para multiplicar una matriz por un escalar (número) multiplicamos cada elemento de la matriz por el número.

Cuando multiplicamos una matriz por el escalar -1 obtenemos el negativo de la matriz. Si sumamos una matriz con su negativo obtenemos una matriz nula, formada exclusivamente por ceros.

Asimismo, se puede señalar que dos matrices son iguales cuando son iguales cada uno de los elementos que la conforman

Por ejemplo

Si

$$\begin{pmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Determine a, b, c y d.

Si dos matrices son iguales, sus respectivos elementos son iguales, así que tendríamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} a+2b=4 \\ 2a-b=-2 \\ 2c+d=4 \\ c-2d=-3 \end{cases}$$

Note que las ecuaciones 1 y 2 tienen como incógnitas a: a y b; y las ecuaciones 3 y 4 tienen como incógnitas a c y d, por lo que podríamos descomponer el sistema de 4 ecuaciones en dos sistemas de dos ecuaciones.

El sistema de las dos ecuaciones iniciales sería

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 2a - b = -2 \end{cases}$$

Para eliminar b multiplicamos la segunda ecuación por 2 y la sumamos a la primera

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 4a - 2b = -4 \end{cases}$$

Queda

$$5a=0 \rightarrow a=0$$

$$0+2b=4 \rightarrow b=2$$

Tomando las ecuaciones 3 y 4 tenemos

$$\begin{cases} 2c + d = 4 \\ c - 2d = -3 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2

$$\begin{cases} 4c + 2d = 8 \\ c - 2d = -3 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones queda

$$5c=5 \rightarrow c=1$$

$$4(1)+2d=8 \rightarrow 2d=8-4=4 \rightarrow d=2$$

Plantearemos algunos ejercicios adicionales que implican operaciones elementales con matrices

Sean A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, B= (12 5 2) , C= $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ y D= (-3 3 8); realice las siguientes operaciones indicadas:

$$-\frac{1}{2}A + C - D$$

Resolución:

$$-\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -1 \\ 3 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}A + C = \begin{pmatrix} 3 & 17/2 & -1 \\ 3 & 2 & 17/2 \end{pmatrix}$$

No se puede restar D porque no es del mismo orden que A y C

D+B-A

Resolución:

D+B=(9 8 10))

No se puede restar A porque no es del mismo orden que D y B

Sean A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y C=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calcule

2A-BC

Resolución:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2)(1)+(1)(0)+(4)(-1) & (-2)(2)+(1)(1)+(4)(0) & (-2)(-1)+(1)(-2)+(4)(3) \\ (3)(1)+(-1)(0)+(-2)(-1) & (3)(2)+(-1)(1)+(-2)(0) & (3)(-1)+(-1)(-2)+(-2)(3) \\ (1)(1)+(0)(0)+(0)(-1) & (1)(2)+(0)(1)+(0)(0) & (1)(-1)+(0)(-2)+(0)(3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

No se puede restar 2A-BC porque no son del mismo orden.

2.3. Producto punto y multiplicación de matrices

Si queremos multiplicar dos matrices el asunto se complica un poco (solo un poco).

Cada elemento de la nueva matriz se obtiene multiplicando los elementos de la fila por los elementos de la columna en la que se encuentra la matriz.

Necesitamos aclarar con un ejemplo:

Si multiplicamos las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Podemos multiplicar cada una de las filas (4) de la primera matriz por cada una de las columnas (3) de la segunda matriz y así obtener la matriz producto que tendrá 4 filas y 3 columnas.

Para obtener el elemento que está en la primera fila y primera columna multiplicamos los elementos correspondientes de la primera fila por la primera columna.

1x1+2x3=7

Para el elemento que está en la primera fila y segunda columna multiplicamos la primera fila por la segunda columna

1x2+2x4=10

Y así sucesivamente hasta encontrar el elemento que está en la cuarta fila y tercera columna

7x3+8x5=61

Note que si el número de columnas de la primera matriz no fuera igual al número de filas de la segunda matriz nos quedarían números que no podemos multiplicar.

Me gustaría que usted completara los cálculos y confirmara que el resultado de multiplicar las 2 matrices propuestas es.

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 15 & 22 & 129 \\ 23 & 34 & 45 \\ 31 & 46 & 61 \end{pmatrix}$$

Como ejercicio podemos plantear los siguiente:

Sean A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y C=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calcule

Resolución:

$$BC = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -7 & 29 \\ 15 & 12 & -27 \end{pmatrix}$$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Glosario

Referencias bibliográficas

Anexos

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis e interpretación de conceptos, definiciones, operaciones y propiedades de las matrices en las secciones 1.2 y 1.3 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en las secciones 1.2 y 1.3 del texto básico.

Semana 4

2.4. Propiedades de las operaciones con matrices

Si una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas, se dice que es una matriz cuadrada

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Una matriz cuyos elementos son todos 0 se dice que es una matriz nula.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar cualquier matriz por una matriz nula el resultado es otra matriz nula.

Los elementos de una matriz cuadrada que están en la misma fila y columna se dice que están en la diagonal principal, en otras palabras, todos los elementos que están en la línea que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha están en la diagonal principal de la matriz.

En la primera matriz: a, e i están en la diagonal principal.

Los elementos que están en la línea que va de la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda están en la diagonal secundaria.

Los elementos c, e y g están en la diagonal secundaria

Si en una matriz todos los elementos que no están en la diagonal principal son ceros, se dice que es una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Si los elementos de la diagonal principal en una matriz diagonal son todos 1, tenemos la matriz identidad, que se representa con la letra I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos (siempre y cuando esto sea posible) cualquier matriz por la matriz identidad el resultado es la matriz original. A*I=A; I*B=B.

Si en una matriz transformamos las filas en columnas y las columnas en filas tenemos dos matrices que son transpuestas la una de la otra, La matriz transpuesta de A se denomina A^T

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

Si transponemos dos veces una matriz volvemos a la matriz original, en otras palabras, la transpuesta de la transpuesta de una matriz es la misma matriz.

Si todos los elementos por encima de la diagonal principal de una matriz cuadrada son ceros, tenemos una matriz triangular inferior.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son ceros, tenemos una matriz triangular superior.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

La transpuesta de una matriz triangular inferior es una matriz triangular superior y viceversa.

2.5. Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizamos la matriz aumentada, en la misma que constan todos los coeficientes del sistema de ecuaciones ordenados de acuerdo a las incógnitas que preceden, luego aplicamos las operaciones elementales de filas, que equivaldrían a intercambiar ecuaciones, multiplicar ecuaciones por un número o sumar una ecuación con otra multiplicada por un determinado número, mostraremos lo que queremos decir:

La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} e & f \\ c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ puesto que se han intercambiado las filas 1 y 3, esto lo simbolizamos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F3} \begin{pmatrix} e & f \\ c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ puesto que se ha multiplicado la fila 1 por 2, esto lo simbolizamos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \xrightarrow{2F1} \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ puesto que se ha sumado a la fila 1 el doble de la fila 2, esto lo simbolizamos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \xrightarrow{F1-2F2} \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

La idea es ir transformando paulatinamente la parte izquierda de la matriz en una matriz escalonada por filas (Método de Gauss) o en una matriz escalonada reducida por filas (método de Gauss Jordan), una matriz escalonada por filas es una matriz en la que si nos vamos moviendo desde la primera fila y de izquierda a derecha, en cada nueva fila hay más ceros iniciales que en la anterior y una matriz escalonada reducida por filas generalmente es una matriz en la que en cada fila hay máximo un número diferente de 0, y ese número está más a la derecha que en la fila anterior.

Podemos ilustrar lo que acabamos de decir con un ejemplo

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Resolución:

Trabajamos con la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3-2F1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3-F2]{F1-F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos 2 variables libres (x_3 y x_4) que pueden tomar cualquier valor, entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - 6x_4 \\ -7 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Un sistema homogéneo es aquel en el que todos los términos independientes son 0, siempre tiene al menos una solución, que todas las incógnitas sean 0, a la que se le llama solución trivial.

Un ejemplo de sistema homogéneo es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolución:

Trabajamos con la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F3-F1]{F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F2/6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F2+3F2]{F1+2F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F3/5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F2+F3]{F1-2F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

De donde $x_1=0$, $x_2=0$ y $x_3=0$

2.6. Inversa de una matriz

Si el producto de dos matrices da como resultado la matriz identidad, se dice que una matriz es la inversa de la otra, eso se denomina poniendo -1 como exponente a la letra que representa la matriz.

Si $AB=I$, $B=A^{-1}$, o $A=B^{-1}$

Una matriz que no puede invertirse se denomina matriz singular, a aquella que si podemos hacerlo de la denomina no singular.

Para obtener la matriz inversa, el primer método que vamos a aplicar es colocar la matriz a invertir y, a la derecha de ella la matriz identidad, luego vamos realizando operaciones elementales de fila. Por ejemplo, vamos a invertir la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Planteamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F2/5} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1-2F2} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F3/2} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1-5F3} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 2/5 & -5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F5/2} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 2/5 & -5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[=F3-F5]{F1+7F5} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2/5 & -5/2 & 0 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & -5/2 & 0 & -7/2 \\ 0 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

Invirtamos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Planteamos la matriz ampliada:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[F3+F2]{F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F3/4} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F2-2F3]{F1+3F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & 3/4\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4\end{array}\right)$$

Porlo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-1/2 & -1/4 & 3/4\\ 1 & 1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

Dadas las siguientes matrices, realice las operaciones indicadas entre estas:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\ y\ D = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

A^tC_1-2B

Resolución:

$$A^t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^tC = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^tC - 2B = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$(AB-C_2)^{-1}$

Resolución:

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$AB-C_2=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\1&2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F2+F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&0&1&1&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F2/2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1/2&1/2&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3-2F2]{F1-F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&-1/2&0\\0&1&0&1/2&1/2&0\\0&0&2&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F3/2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&-1/2&0\\0&1&0&1/2&1/2&0\\0&0&1&-1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)$$

$$(AB-C_2)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\1/2&1/2&0\\-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

Dada la función f(x) y la matriz A, calcule en los siguientes ejercicios f(A) y A^{-2}

Sea $f(x)=3x^2-4x+8$ y $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}$

Resolución:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3&1\\-1&4&-4\\-3&-1&4\end{pmatrix}$$

$$f(A)=3A^2-4A+8I=3\begin{pmatrix}5&3&1\\-1&4&-4\\-3&-1&4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}19&13&-5\\5&20&-16\\-13&-11&20\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3+3F1]{F2-5F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 23 & -19 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -13 & 16 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F2}{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{23} & \frac{1}{23} & \frac{5}{23} & 0 \\ 0 & -13 & 16 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3+13F2]{F1+4F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{16}{23} & \frac{4}{23} & -\frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{23} & \frac{1}{23} & \frac{5}{23} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{121}{23} & \frac{13}{23} & -\frac{4}{23} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{23F3}{121}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{16}{23} & \frac{4}{23} & -\frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{23} & \frac{1}{23} & \frac{5}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{121} & -\frac{4}{121} & \frac{23}{121} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F2+\frac{19F3}{23}]{F1-\frac{16F3}{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12/121 & -13/121 & -16/121 \\ 0 & 1 & 0 & 16/121 & 23/121 & 19/121 \\ 0 & 0 & 1 & 13/121 & -4/121 & 23/121 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$A^{-2} = \begin{pmatrix} 12/121 & -13/121 & -16/121 \\ 16/121 & 23/121 & 19/121 \\ 13/121 & -4/121 & 23/121 \end{pmatrix}$$

Sea f(x)=-x3-x-1 y A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = -A^3 - A - I = -\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2+3F1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F1+\frac{3F2}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$A^{-2} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales, partamos del hecho de que, matricialmente $Ax=b$

Donde A es la matriz de los coeficientes, x es la matriz de las incógnitas y b es la matriz de los términos independientes, como x y b constan de una sola columna también suelen ser llamados vectores.

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por A^{-1},

$A^{-1}Ax=A^{-1}b$

A^{-1a} es la matriz identidad I

$Ix= A^{-1}b$

La matriz identidad por cualquier matriz nos da la misma matriz

$x= A^{-1}b$

Lo que implica que el valor de las incógnitas lo obtenemos multiplicando la inversa de la matriz de los coeficientes por la matriz de los términos independientes.

Por ejemplo, tomemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ \quad y + 2z = 5 \\ \quad 2x + y = 1 \end{cases}$$

Cuya matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y cuya inversa la encontramos en un ejercicio anterior

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 3/4 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema de ecuaciones será

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 3/4 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \\ -1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lo que significa que x=0, y=1 y z=2

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis e interpretación de conceptos, definiciones, operaciones y propiedades de las matrices en las secciones 1.4, 1.5 y 1.6 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en las secciones 1.4, 1.5 y 1.6 del texto básico.
- Chat académico “Matrices”: Desarrollar un ejercicio de matrices asignado por el profesor.
- Realizar Cuestionario Teórico 2 en línea sobre “Matrices”
- Realizar Cuestionario de Resolución de Problemas 2 en línea sobre “Matrices”

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 2

A continuación, se propone algunos ejercicios y actividades respecto al tema de matrices, operaciones con matrices y casos especiales; esto le permitirá confirmar y afianzar sus conocimientos. Adicionalmente usted encontrará al final el solucionario a las preguntas de la autoevaluación.

Indique con una V (verdadero) o F (falso) las siguientes expresiones:

1. ( ) Un sistema lineal es el conjunto de ecuaciones lineales.
2. ( ) Resolver un sistema lineal es determinar los valores de las variables que al sustituirlos satisfacen en todas las ecuaciones.
3. ( ) Todos los sistemas lineales son consistentes.
4. ( ) Un sistema lineal puede tener una única solución, infinitas soluciones o no tener solución.
5. ( ) La matriz de orden m x n es aquella formada por n filas.
6. ( ) Una matriz es igual a otra cuando sus elementos de la diagonal principal son iguales.
7. ( ) El resultado de multiplicar una matriz fila (1xm) por una matriz columna (mx1), resulta una matriz de orden m x m.
8. ( ) Según las propiedades de la multiplicación de matrices AB = BA.

9. ( ) Una matriz B es matriz inversa de A, si AB = A.

10. ( ) La forma escalonada por renglón implica transformar a 1, el elemento pivote de cada fila.

11. ( ) Una operación elemental por renglón implica sumar una constante diferente de cero a cada elemento de un renglón.

12. ( ) El método Gauss-Jordan implica transformar una matriz a una forma escalonada reducida.

13. ( ) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, no está en la forma escalonada por renglón debido a que el primer elemento diferente de cero en el segundo renglón no es 1.

14. ( ) Dado que $A.A^{-1}=I$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ es la inversa de A.

15. ( ) El último renglón de una matriz tiene todos sus elementos nulos luego de su transformación, significa que es una matriz no singular.

16. ( ) Una matriz equivalente no necesita haberle realizado previamente una operación fundamental de renglón.

Ejercicios de aplicación

17. Por eliminación de variables determine los valores de x, y, z.

a. $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 11 \\ 3x + 6y - 5z = 16 \end{cases}$

18. Realice la multiplicación matricial AB, AC y BC, siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y C= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

19. Por el método de Gauss-Jordan determine si es factible solucionar los

siguientes sistemas lineales:

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + 8y - 6z = 2 \\ 6x + 12y - 10z = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + 6y - 6z = 9 \\ 2x - 5y + 4z = 6 \\ 5x + 28y - 26z = -8 \end{cases}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

20. Determine la inversa de la matriz si existe.

a. $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

b. $A=\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

c. $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma cómo se resuelven paso a paso.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- Considerar que ni la ley de la cancelación ni la propiedad conmutativa se aplican en la multiplicación de matrices por lo que si AB=AC, no necesariamente B=C, asimismo, AxB generalmente no es igual a B x A
- Si un producto AxB es la matriz cero, en general, no se puede inducir a la conclusión de que A=0 o B=0
- La manera más rápida de calcular un producto es aplicando las leyes fundamentales de potenciación o radicación según el caso del producto propuesto, para esto debe comprender efectivamente como es su representación.
- En las operaciones con matrices debe recordar la ley de los signos para su uso correcto en la solución de los problemas.

Ir al solucionario

Ha desarrollado su segunda autoevaluación, seguro que lo realizó con éxito, ¡Felicitaciones! con la misma dedicación y esmero le invito a continuar con el resto de unidades.

Resultado de aprendizaje 3

Capacidad para: analizar, interpretar y aplicar los conceptos de determinantes.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Iniciaremos formalmente usando la definición de Leibnitz de un determinante, utilizaremos luego sus propiedades para definir la forma más práctica de calcular un determinante de un orden dado.

Semana 5

Unidad 3. Determinantes

3.1. Definición y propiedades

Aunque en realidad los determinantes aparecieron antes que las matrices, modernamente se considera que el determinante lo es de una matriz cuadrada. El nombre de determinante aparece porque "determina" si un sistema de ecuaciones tiene o no solución única.

Aclaremos esto:

Una matriz cuadrada aparece cuando el número de incógnitas de un sistema es igual al número de ecuaciones, esto debería determinar una solución única SI ES QUE las ecuaciones son linealmente independientes una de otra. Si el determinante de los coeficientes de un sistema de ecuaciones es diferente de 0, esas ecuaciones son independientes, si el determinante es 0 las ecuaciones no son linealmente independientes y tendrá infinitas soluciones (puesto que ahora tendríamos menos ecuaciones que incógnitas) o no tendrá solución (si las ecuaciones que no son independientes implican una contradicción, por ejemplo, x+y=0 y x+y=1.

¿Cómo se calcula un determinante?

El determinante de matrices 2x2 y 3x3 es sencillo de calcular y se enseña en los colegios, para calcular el determinante de una matriz de orden mayor ya no lo es tanto y se complica a medida que aumenta el rango de la matriz.

Por ejemplo, el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

que se simboliza

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

será igual a ad-bc, es decir el producto de los elementos que están en la diagonal principal menos el producto de los elementos que están en la diagonal secundaria.

Notemos que hay dos términos, la mitad con el signo positivo y la otra mitad con el signo negativo, cada término es el producto de 2 factores.

En un determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Su valor será aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh

Una manera de recordarlo es agregando dos filas o dos columnas y trazando 3 líneas que siguen la dirección de la diagonal principal y 3 que tienen la dirección de la diagonal secundaria, cada línea enlaza 3 coeficientes de la matriz que se multiplican. A esta forma de calcular determinantes se le llama Regla de Sarrus, debido a la persona que la inventó.

Hay que anotar que esta regla solo sirve para determinantes de orden 3, NO para determinantes de orden 4 o superior.

Entonces cuando tenemos un determinante de orden 3 hay 6 términos (¡6=3! =3x2x1) de 3 factores cada uno, 3 de esos términos son positivos y 3 son negativos, en cada término los 3 factores están en diferente fila y columna cada 1.

En un determinante de orden 4 habrá 24 términos (factorial de 4=4! =4x3x2x1) (12 positivos y 12 negativos) de 4 factores cada uno, que estarán en diferente fila y columna.

En un determinante de orden 5 habrá 120 términos (factorial de 5) (60 positivos y 60 negativos) de 5 factores cada uno, que estarán en diferente fila y columna.

En general para un determinante de orden n la fórmula (descubierta por Leibnitz) es

det(A)=|A|= $\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{\sigma=1}^{n} a_{\sigma(i)}^{i}$

donde $\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)$representa la sumatoria de todas las permutaciones (representadas por el signo σ, de factores que estén en diferente fila y columna entre sí, $\prod_{\sigma=1}^{n} a_{\sigma(i)}^{i}$ representa el producto de esos factores y $sgn(\sigma)$ es el signo positivo o negativo determinado por el las variaciones en el orden de los factores, si el número de variaciones de orden es par el signo será positivo, si es impar el signo será negativo. por ejemplo, en un determinante de orden 3

aei son los elementos a_{11} a_{22} a_{33} está ordenado, 0 variaciones, su signo es positivo.

ceg son los elementos $a_{13}a_{22}a_{31}$ está en desorden, mientras el número que corresponde a la fila asciende, el que corresponde a la columna desciende, pero si cambiamos el 3 del 31 con el 1 del 13, se ordenaría, el número de permutaciones para ordenarlo (o desordenarlo según se vea) es 1. En otras palabras, con un cambio lo ordenamos, o de la forma ordenada, con un cambio llegamos a la forma desordenada.

cdh son los elementos a_{13} a_{21} a_{32} para ordenarlo debemos hacer dos cambios, el 1 de 21 cambiarlo con el 3 del 13 y este a su vez con el 2 del 32. Como hay dos permutaciones el signo es positivo.

Para abundar en el tema de las permutaciones expresemos lo siguiente:

Una permutación es el cambio en el orden de un conjunto de elementos, por ejemplo ABC, CBA, CAB, ACB, BAC y BCA son las permutaciones de los tres elementos.

Si tomamos como base ABC, CBA es una permutación impar, porque la base ABC se obtiene intercambiando los elementos C y A.

En cambio CAB es una permutación par porque la base ABC se obtiene luego de dos intercambios, que podrían ser CAB->ACB->ABC.

En el caso de un determinante de orden 5, por ejemplo, tenemos que sumar todos los productos que estén en diferente fila y columna, $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$ sería uno de esos productos y lo vamos a tomar como base, sabemos que todos los elementos están en diferente fila y columna porque el primer subíndice no se repite, lo mismo pasa con el segundo subíndice.

Otro producto podría ser $a_{53}a_{32}a_{25}a_{14}a_{41}$, asimismo podríamos comprobar que los subíndices no se repiten.

Por la propiedad conmutativa de la multiplicación podríamos escribir: $a_{14}a_{25}a_{32}a_{41}a_{53}$, donde vemos que el primer subíndice ya está ordenado, pero el segundo subíndice no, los números de este segundo subíndice son 45213, veamos cuantas permutaciones necesitamos para convertirlo en 12345

45213->15243->12543->12345

Se necesitaron 3 permutaciones (la forma inicial no se cuenta), por lo tanto es una permutación impar y debería llevar signo negativo.

Hay que recordar que como es una matriz n x n cada término llevará n factores, así en una matriz 4x4 cada término debe tener 4 factores

Para ver cuantos términos tiene un determinante hagamos el siguiente análisis:

El determinante de una matriz 1x1 tiene 1 término (el determinante es igual al número que integra la matriz

El determinante de una matriz 2x2 tiene 2 términos

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

El determinante de una matriz 3x3 tiene 6 términos (resulta de multiplicar el número anterior por 3

El determinante de una matriz 4x4 tiene 24 términos (4x6=4x3x2x1)

El determinante de una matriz 5x5 tiene 120 términos

El determinante de una matriz 6x6 tiene 720 términos
6!=6x5x4x3x2x1

El determinante de una matriz n x n tiene n! términos n!=n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1)

Volviendo a los determinantes, este método de calcular el determinante de una matriz no es muy práctico, por eso se suele utilizar el método de Sarrus para determinantes de orden 3 o 2, y para determinantes de orden 4 para arriba se usa el método de los cofactores.

3.2. Desarrollo por cofactores

Decíamos que la aplicación de la fórmula es poco práctica, para determinantes de orden mayor o igual a 4 suele utilizarse más el método de los cofactores.

En este método, para calcular el valor de un determinante de orden n, elegimos una fila o una columna y multiplicamos cada uno de estos elementos por el determinante menor correspondiente (el determinante menor es el que elimina la fila y la columna del elemento) considerando el signo, que puede ser más o menos, si al sumar la posición en la fila y la columna nos da un valor par el signo es positivo, si nos da un valor impar el signo es negativo.

Con este método un determinante de orden 5 se transformaría en 5 determinantes de orden 4 (cada uno multiplicado por los elementos de la fila o columna y el respectivo signo). Cada determinante de orden 4 se transformaría en 4 determinantes de orden 3 (cada uno multiplicado por los elementos de la fila o columna y el respectivo signo).

Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Realicemos algunos ejercicios aplicando las propiedades de los determinantes:

Si $A \in M_{22}$, $B \in M_{33}$, $|A|=4$ y $|B|=6$. Calcule $|A||B|-|B^t|$

Resolución:

$|A||B|-|B^t|=4x6-6=18$

Calcular

$$A_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1(2n-1)} & a_{1(2n)} \\ 1 & 2^2 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2(2n-1)} & a_{2(2n)} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & a_{3(2n-1)} & a_{3(2n)} \\ 0 & 0 & 2 & 3^2 & \cdots & a_{4(2n-1)} & a_{4(2n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & (n+1)^2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Trabajamos por bloques

$$A_{2n\times 2n}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1(2n-1)} & a_{1(2n)} \\ 1 & 2^2 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2(2n-1)} & a_{2(2n)} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & a_{3(2n-1)} & a_{3(2n)} \\ 0 & 0 & 2 & 3^2 & \cdots & a_{4(2n-1)} & a_{4(2n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & (n+1)^2 \end{pmatrix}$$

Tenemos una matriz triangular (por bloques, donde cada bloque es de orden 2x2)

Sabemos que en una matriz triangular el determinante es igual a la traza de la matriz, es decir al producto de los valores que están en la diagonal principal.

Como esta matriz está formada por bloques, la traza es el producto de los determinantes de las matrices que están en la diagonal principal.

En la primera matriz de la diagonal el determinante es: $2^2-1=3$

En la segunda matriz el determinante es: $3^2-2^2=5$

En la última matriz el determinante es $(n+1)^2-n^2=2n+1$

En general en el lugar k el determinante de la matriz es $(k+1)^2-k^2=2k+1$

El determinante de la matriz A es:

$|A|= (3)(5)(7) \ldots(2k+1) \ldots(2n+1)$

Para encontrar este producto multiplicamos y dividimos por todos los números pares desde 2 hasta 2n, entonces tenemos:

$|A|= (2x3x4x5x6x7x\ldots2nx2n+1) / (2x4x6x\ldots x2n) = (2x3x4x5x6x7x\ldots 2nx2n+1) / \{(1x2x3x\ldots xn)\ (2^n)\} =(2n+1)!\ /(n!2^n)$

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis e interpretación conceptos y propiedades de las determinantes en las secciones 3.1 y 3.2 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en las secciones 3.1 y 3.2 (ejercicios 1 a 6) del texto básico.

Semana 6

3.3. Aplicaciones de los determinantes

Decíamos que, en una matriz cuadrada cualquiera, el menor de uno de sus elementos es el determinante de la matriz que queda al eliminar la fila y la columna en la que se ubica el elemento de la matriz, queda claro entonces que en una matriz tendremos tantos menores como elementos tiene la matriz. Generalmente al menor del elemento a_{ij} de una matriz A de lo denomina M_{ij}.

Si al menor de la matriz le asignamos un signo debido a su ubicación tenemos un cofactor de la matriz, al que llamamos $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

La matriz adjunta de una matriz la definimos entonces como la matriz de los cofactores de la matriz inicial transpuesta.

Esta definición nos proporciona otro método para calcular la inversa de una matriz, calculando la transpuesta de esa matriz adjunta y dividiendo cada término para el valor del determinante de la matriz original.

$$A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{|A|}$$

Note que este método impone un requisito, que el valor del determinante de A des diferente de 0, pues en caso contrario no sería posible la división requerida en él.

Ejercicios

Verifique si la siguiente matriz es invertible y, en caso afirmativo calcule la matriz inversa usando cofactores.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -11 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Para determinar si una matriz es invertible hay que calcular su determinante, si este es diferente de 0 la matriz es invertible.

Calculamos:

Tomando la primera fila

$$|A| = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -11 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2(27-27) - (27-27) = 0$$

La matriz no es invertible.

Calculemos ahora la inversa de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 4 \\ 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Su determinante será:

|A|=6+160+84+96+35-24=357, que es diferente de cero, por lo tanto, la matriz tiene inversa

Calculamos ahora su matriz adjunta

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 2-8 & -(-7-32) & 14+16 \\ -(-5-12) & -3-48 & -(6-40) \\ 20+12 & -(12-42) & -6-35 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 39 & 30 \\ 17 & -51 & 34 \\ 32 & 30 & -41 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & 17 & 32 \\ 39 & -51 & 30 \\ 30 & 34 & -41 \end{pmatrix}$$

Finalmente dividimos la matriz adjunta para el valor del determinante

$$A^{-1} = \frac{1}{357}\begin{pmatrix} -6 & 17 & 32 \\ 39 & -51 & 30 \\ 30 & 34 & -41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/357 & 17/357 & 32/357 \\ 39/357 & -51/357 & 30/357 \\ 30/357 & 34/357 & -41/357 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/119 & 1/21 & 32/357 \\ 13/119 & -1/7 & 10/119 \\ 10/119 & 2/21 & -41/357 \end{pmatrix}$$

Nota: Podría ser más cómodo al inicio calcular cada cofactor por separado

Otra aplicación de los determinantes sería la resolución de sistemas de ecuaciones utilizando el método descubierto por Cramer, el mismo que se simplifica en la siguiente fórmula:

$$AX = b \rightarrow x = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Donde cada incógnita se calcula dividiendo dos determinantes, en el denominador está el determinante de la matriz de los coeficientes, en el numerador estará el determinante donde se ha reemplazado la columna de los coeficientes de la incógnita que se va a encontrar por los valores de los términos independientes b.

Por ejemplo:

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 2 \\ x + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = -5 \end{cases}$$

Si calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes para averiguar si se puede aplicar esta regla, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 16 - 0 + 4 - 12 = 26$$

Como su valor es diferente de 0 podemos continuar

Para calcular x reemplazamos la primera columna del determinante por los valores de los términos independientes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{26} = \frac{0 - 40 + 0 - 0 - 0 - 12}{26} = \frac{-52}{26} = -2$$

Para calcular y reemplazamos la segunda columna del determinante por los valores de los términos independientes.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{26} = \frac{0 + 8 - 30 - 0 + 2 + 20}{26} = 0$$

Ahora, para calcular z reemplazamos la tercera columna del determinante por los valores de los términos independientes.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{26} = \frac{6 + 20}{26} = 1$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis, interpretación y aplicación de los conceptos y propiedades de las determinantes en la sección 3.2 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en la sección 3.2 (ejercicios 7 a 25) del texto básico.
- Realizar Cuestionario Teórico 3 en línea sobre "Determinantes"
- Realizar Cuestionario de Resolución de Problemas 3 en línea sobre "Determinantes"

Autoevaluación 3

Es tiempo de comprobar sus conocimientos de la tercera unidad, estoy seguro que ahora le resultará más fácil resolver los problemas planteados en la siguiente autoevaluación con el éxito esperado, recuerde que en el solucionario podrá comparar sus respuestas.

Indique con una V (verdadero) o F (falso) las siguientes expresiones:

1. ( ) En una matriz de orden 1x1, el valor su determinante será el valor correspondiente a a_{11}.
2. ( ) Si A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el det(A)=$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$
3. ( ) Si A=$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, el det(A)=det($A^T$)
4. ( ) Si A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, y B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$es el resultado de intercambiar filas, entonces det(A)=det(B)
5. ( ) Si A es una matriz cuadrada que posee una fila nula, el valor del determinante no existe.
6. ( ) El cofactor de 3 en la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es -8
7. ( ) () El cofactor A_{ij} de a_{ij} es definido como $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$
8. ( ) Si A tiene inversa, entonces aplicando determinantes y su adjunta es factible $A^{-1}=\frac{\det(A)}{Adj(A)}$

9. ( ) En un sistema lineal es factible obtener el valor de x1, conociendo el determinante de la matriz de coeficientes (A) y el determinante de la matriz A_1 obtenida de reemplazar la columna de la variable x1 en A por los términos independientes del sistema lineal (b).

10. ( ) Es factible utilizar la regla de Cramer cuando existe solución única del sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicios de Aplicación

11. Si A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, determine para a11 y para a32, sus respetivos menor (M) y cofactor.

12. Obtenga el valor del determinante de la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, aplicando desarrollo de cofactores, obtenga la adjunta y finalmente obtenga la inversa.

13. Resuelva el sistema lineal aplicando la regla de Cramer

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -20 \end{cases}$$

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma en cómo se resuelven paso a paso.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- Recordar que un matriz cuadrada A es invertible si y solo si determinante de $A \neq 0$
- En algunos ejercicios requerirá tener presente las propiedades de los determinantes para poder contestar adecuadamente.
- El determinante de una matriz 1x1 es: $\det(x)=x$
- Si una matriz A tiene una fila de ceros pues entonces $|A|=0$

Ir al solucionario

Ha desarrollado la tercera autoevaluación ¡Felicitaciones! Su constancia y esfuerzo le han permitido realizar con éxito esta prueba, si existió alguna dificultad, es momento de profundizar un poco más los temas analizados y solucionar las inquietudes que han surgido.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Resultado de aprendizaje 4

Capacidad para: analizar, interpretar y aplicar los conceptos y operaciones de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes y Vectores en Rn

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 7

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en los capítulos 1 (ejercicios complementarios y examen del capítulo) y 3 (ejercicios adicionales y examen del capítulo) del texto básico.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Semana 8

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en los capítulos 1 (ejercicios complementarios y examen del capítulo) y 3 (ejercicios adicionales y examen del capítulo) del texto básico.
- Desarrollar la evaluación presencial.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 5

Capacidad para: analizar, interpretar y aplicar operaciones los conceptos y operaciones con vectores.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estudiaremos inicialmente los vectores en el plano, ampliaremos estos conceptos a vectores de cualquier dimensión, especialmente los vectores en el espacio, analizaremos el producto cruz y su aplicación al estudio de rectas y planos.

Semana 9

Unidad 4. Vectores

4.1. Vectores en R^2 y R^3

En física se suele decir que un vector es la representación de una magnitud que tiene dirección y sentido.

En matemática la definición es un poco más general, es simplemente un conjunto ordenado de números, lo cual quiere decir que la posición que ocupan esos números también es importante, se suele representar con los números entre paréntesis separados por una coma, en algunos casos se suele usar un punto y coma para separarlos.

Los números que integran el vector se llaman componentes y se diferencian por su orden, así hablamos de primera componente, segunda componente, etc.

Al número de componentes que lo conforman se denomina dimensión del vector.

Inicialmente trataremos con vectores de dimensiones 2 y 3, que son más fáciles de identificar y representar, porque corresponden a las dimensiones en un plano y en el espacio.

Para representar un vector necesitamos un sistema de coordenadas, para ello trazamos rectas perpendiculares entre sí, que coinciden en un punto llamado origen, generalmente una de estas rectas es horizontal y se la llama eje de las x o abscisas, la otra es vertical y

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

suele nombrarse eje de las y u ordenadas. En R^3 necesitamos un tercer eje, perpendicular a los otros dos, al que se llama eje de las z. En conjunto forman un sistema de coordenadas rectangulares.

4.2. Longitud, distancia

A la longitud de un vector, también llamada norma del mismo se la calcula con una aplicación del teorema de Pitágoras, y siempre será igual a la raíz cuadrada de la suma cuadrática de sus componentes. Cuando hablamos de suma cuadrática queremos decir que las componentes deben elevarse al cuadrado antes de sumarlas. La distancia entre dos puntos puede calcularse mediante la norma del vector que une dichos puntos, para ello restamos las coordenadas del punto inicial a las coordenadas del punto final.

Dos vectores son paralelos si uno de ellos puede obtenerse multiplicando al otro por una constante c, que puede ser cualquier número real positivo o negativo.

El área de cualquier triángulo en el plano puede calcularse como la mitad del valor absoluto del determinante formado por las coordenadas de los tres vértices, adicionando en la tercera columna unos. Así:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} | \begin{vmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{vmatrix}$$

Se suele definir una operación llamada suma, entre vectores, usualmente como la suma de sus respectivas componentes, es decir el vector suma de dos vectores (de la misma dimensión) es otro vector (de esa dimensión) cuya primera componente es la suma de las primeras componentes de los vectores sumandos, la segunda componente del vector suma es la suma de las segundas componentes de los sumandos, y así sucesivamente, ej. (2, 3, 4) + (5, 7, 3)= (7, 10, 7)

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

La definición de la suma de dos vectores puede variar según el capricho o las necesidades del matemático, la que hemos mencionado es la más usada, pero no la única.

Otra operación usual es el producto de un vector por un escalar, que usualmente se define como otro vector en el que cada componente es el producto del escalar por la respectiva componente del vector original, ej. $3*(2, 3, 4) = (6,9,12)$

Un escalar es un elemento de un conjunto que cumple ciertas propiedades, al que en matemática se denomina cuerpo (o estructura de cuerpo), las propiedades que debe cumplir el cuerpo son la asociativa, conmutativa, elemento inverso y elemento neutro para la suma y la multiplicación, y la distributiva de la multiplicación respecto a la suma, los números racionales, reales y complejos conforman cada uno un cuerpo con las definiciones usuales para la suma y multiplicación (podrían, según capricho y/o necesidad establecerse otras definiciones, en ese caso habría que comprobar si siguen cumpliendo las propiedades indicadas).

A veces se habla de vector fila o vector columna como matrices una de cuyas dimensiones es 1, surge entonces la pregunta ¿Un vector es una matriz?

Hay diferencias, con los vectores solemos hacer cosas que no hacemos con una matriz, por ejemplo, el producto punto, producto cruz, hallamos la norma, encontramos vectores unitarios, etc., que iremos desarrollando en estas semanas.

Cuando los vectores y la operación suma y producto por un escalar cumplen ciertas propiedades forman lo que se llama un espacio vectorial.

Ejercicios

Use determinantes para calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4,-2) y (-3,1).

Resolución:

Debemos calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2x - 3y + 4 - 6 - 4y - x = -3x - 7y - 2 = 0$$

La ecuación quedaría 3x+7y+2=0

Verifique si las siguientes tres rectas son concurrentes: 4x+3y-5=0, x+2y-4=0 y 2x-y+3=0

Resolución:

Para verificar si las rectas son concurrentes calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 24 + 5 + 20 - 9 - 16 = 0$$

Por lo tanto, las rectas son concurrentes.

Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P_1(0,-2), P_2(5,3) y P_3(2,-6).

Resolución:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \\ 40 & 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix}0 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ 2 & -6 & 1\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 34 & 3 & 1\\ 40 & -6 & 1\end{vmatrix}+y\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 34 & 5 & 1\\ 40 & 2 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}4 & 0 & -2\\ 34 & 5 & 3\\ 40 & 2 & -6\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)(0-4-30-6+10+0)-x(12-80-204-120+68+24)\\ +y(20+0+68-200-0-8)-(-120-136+0+400-0-24)\\ =0\end{aligned}$$

$$-30(x^2+y^2)+300x-120y-120=0$$

$$(x^2+y^2)-10x+4y+4=0$$

$$x^2+y^2-10x+4y+4=0$$

Calcule el área del triángulo formado por los puntos $P_1=(2,5)$, $P_2=(2,-2)$ y $P_3=(-1,1)$

Resolución

Área= $\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2 & 5 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|-4-5+2-2-10-2|=\frac{1}{2}|-21|=10,5$

Calcule el volumen del paralelepípedo formado por $P_1=(2,1,1)$, $P_2=(1,5,1)$ y $P_3=(2,1,3)$

Resolución:

Volumen=$\left|\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\right|$=|30+2+1-10-3-2|=|18|=18

Calcule el volumen del tetraedro que tiene como vértices a los puntos $P_1=(3,4,1)$, $P_2=(1,1,-2)$, $P_3=(4,2,-2)$ y $P_4=(-1,2,1)$

Resolución:

Tomando la cuarta columna para calcular el determinante

Volumen=1/6

$$\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = {}^{1}/_{6}\left| -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} \right| = {}^{1}/_{6}\left|-(2+2-16-4-4+4)+(6+8+8+2-16+12)-(3+8+2+1-4+12)+(-6-32+2-4+8+12)\right| = {}^{1}/_{6}\left|-(-16)+(20)-(22)+(-20)\right| = {}^{1}/_{6}\left|16+20-22-20\right| = {}^{1}/_{6}\left|-6\right| = {}^{1}/_{6}(6) = 1$$

Calcule el wronskiano de las siguientes funciones x^2+x-1, $-x^2+2$, x^3-2 y x^3+x-1

(el wronskiano es un determinante formado por las funciones y sus derivadas sucesivas)

Resolución:

$$w = \begin{vmatrix} x^2+x-1 & -x^2+2 & x^3-2 & x^3+x-1 \\ 2x+1 & -2x & 3x^2 & 3x^2+1 \\ 2 & -2 & 6x & 6x \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

Restando a la columna 4 la columna 3

$$w = \begin{vmatrix} x^2+x-1 & -x^2+2 & x^3-2 & x+1 \\ 2x+1 & -2x & 3x^2 & 1 \\ 2 & -2 & 6x & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -6\begin{vmatrix} x^2+x-1 & -x^2+2 & x+1 \\ 2x+1 & -2x & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -6[0+2(-x^2+2) \\ &\quad - 2\big((2x+1)(x+1)+4x(x+1)-0+2(x^2+x-1)\big] \\ &= -6(-2x^2+4-4x^2-6x+2+4x^2+4x+2x^2+2x-2) = -6(4) \\ &= -24 \end{aligned}$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis, interpretación y aplicación de los conceptos y propiedades de los vectores en la sección 4.1 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en la sección 4.1 (ejercicios 1 a 18) del texto básico.

Semana 10

4.3. Producto punto entre vectores

Ángulo entre dos vectores, vectores ortogonales, propiedades del producto punto, vectores unitarios.

Llamamos producto punto entre dos vectores **u** y **v** de dimensión n a la sumatoria entre el producto de las respectivas componentes, es decir:

$$\vec{u}.\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Si aplicamos la ley de los cosenos a la diferencia entre dos vectores obtendríamos

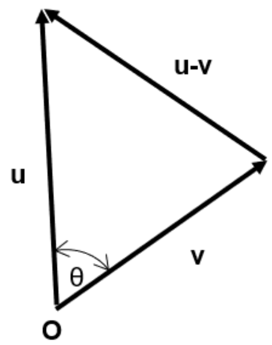


Gráfico 2.

$||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2=||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2-2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos\theta$

Si operamos con los respectivos componentes tenemos:

$||u1-v1,u2-v2|\,|^2=||u||^2+||v||^2-2||u||\;||v||\cos\theta$

$||(u1-v1)^2+(u2-v2)^2\;|=||u|\,|^2+||v||^2-2||u||\;||v||\cos\theta$

$||u1^2-2u1v1+v1^2+u2^2-2u2v2+v2^2|=||u||^2+v^2-2||u||\;||v||\cos\theta$

$||-2u1v1-2u2v2|=-2||u||\;||v||\cos\theta$

$||u||\;||v||\cos\theta=(u1v1+u2v2)$

Despejando cosθ y tomando en cuenta que **u.v**=u1v1+u2v2

$$cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$$

Podemos deducir de ello que dos vectores que no sean nulos son ortogonales si su producto escalar es 0.

Un vector unitario es nada más que un vector que tiene magnitud uno, se puede convertir cualquier vector en unitario si dividimos el vector para su magnitud, vectores unitarios especiales son aquellos que tienen la dirección de los ejes positivos x, y, z, que toman los nombres de î, ĵ y $\hat{k}$.

Ejercicios

Encontrar el producto escalar entre los siguientes vectores

Sean $\vec{v} = (5, 2, -3, 5)$ y $\vec{u} = (3, 5, 0, -1)$.

Sean $\vec{v} = (5{,}2, -3{,}5)$ y $\vec{u} = (3{,}5{,}0, -1)$

Resolución:

(5,2,-3,5).(3,5,0,1)=15+10+0-5=20

Sea $\vec{v} = (2, 3, -4)$ y $\vec{u} = (5, -3, 1)$.

Sean $\vec{v} = (2{,}3, -4)$ y $\vec{u} = (5{,}3, -1)$

Resolución:

(2,3,-4).(5,-3,1)=10-9-4=-3

Sean $\vec{v} = (0, -3{,}2{,}5{,}1)$ y $\vec{u} = (6, -2{,}1{,}2, -5)$ calcular 4 $\vec{v}.\vec{u}$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Glosario

Referencias bibliográficas

Anexos

Resolución

4(0,-3,2,5,1).(6,-2,1,2,-5)=(0,-12,8,20,4).(6,-2,1,2,-5)=0+24+8+40-20=52

Calcular la norma del vector dado

Sea $\vec{v} = (5, 2, 3, -5)$

Resolución:

v^2=25+4+9+25=63à $\|\vec{v}\| = \sqrt{63}$

Sea $\vec{v} = (2,3, -4,0, a)$

Resolución:

v^2=4+9+16+0+a^2=29+a^2à $\|\vec{v}\| = \sqrt{29 + a^2}$

Sea $\vec{u} = (2, -4,2)$

Resolución:

u^2=4+16+4=24à $\|\vec{u}\| = \sqrt{24}$

¿Para qué valor de x, el vector (4, 3, x) tiene norma 5?

Resolución:

$4^2+3^2+x^2$=25àx^2=25-16-9=0àx^2=0àx=0

¿Existirá un valor para el que la norma de (2, 3, a, -3) sea 2?

Resolución:

4+9+a^2+9=4àa^2=4-4-9-9=-18, esto es imposible si a∈R.

Para qué valor de x, el vector (4,3,x) tiene norma √45 ?

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Glosario

Referencias bibliográficas

Anexos

Resolución:

16+9+x^2=41àx^2=41-16-9=16àx=±4

Verificar que el vector dado es unitario

Sea $\vec{v} = (2,-2,-1,1)/\sqrt{10}$

Resolución:

v^2=(4+4+1+1)/10=10/10=1à$\|\vec{v}\| = 1$

Sea $\vec{v} = (3,0,-4)/5$

Resolución:

v^2=(9+0+16)/25=25/25=1à$\|\vec{v}\| = 1$

Determinar un vector $\vec{v}$ de sentido opuesto al vector $\vec{u}$=(2,3), cuya norma sea igual a 2

Resolución:

El vector opuesto de $\vec{u}$ sería - $\vec{u}$=(2,3), pero este tiene norma de $\|-\vec{u}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, para que la norma de $\vec{v}$ sea 2 2 hay que dividir a - $\vec{u}$ para √13 (se transforma en un vector unitario) y luego multiplicarlo por 2, entonces $\vec{v} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{u} = (-\frac{4}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}})$

Calcular la distancia entre p1 y p2 ; p1=(0,1,1,1), p2=(2,1,1,2)

Resolución:

$$\overrightarrow{p_2p_1} = \overrightarrow{Op_2} - \overrightarrow{Op_1} = (2,1,1,2) - (0,1,1,1) = (2,0,0,1)$$

dp1p2=$\|p_2p_1\|\sqrt{2^2+0^2+0^2+1^2} = \sqrt{5}$

Sean $\vec{v}$=(2,3,-4,0) y $\vec{u}$=(5,-3,1,0), calcular el ángulo entre los vectores

Resolución:

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(10-9-4+0)}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{25+9+1+0}} = cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{29}\sqrt{35}} = cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{1015}} = cos^{-1}(0{,}0941647) = 95{,}4°$$

(Se toma el ángulo menor de las posibles respuestas, en el primero o segundo cuadrantes)

Obtener el producto punto entre los siguientes pares de vectores e indicar si son ortogonales.

Sea (-2,2), (3,3)

Resolución:

(-2,2).(3,3)=-6+6=0 à Son ortogonales

Sea (4,2,0), (-1,2,-3)

Resolución:

(4,2,0).(-1,2,-3)=-4+4+0=0 à son ortogonales

Sean (2,-1,-2,5), (-1,3,2,-2,1)

Resolución:

(2,-1,-2,4,5).(-1,3,2,-2,1)=-2-3-4-8+5=-12 àno son ortogonales

Calcule el ángulo entre los siguientes vectores e indique si son ortogonales, paralelos u otro.

(4,6), (3,-2)

Resolución:

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(12-12)}{\sqrt{16+36}\sqrt{9+4}} = cos^{-1}(0) = 90°$$

Son vectores ortogonales

(-1,2,3), (-5,10,15)

Resolución:

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(5+20+45)}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{25+100+225}} = cos^{-1}\frac{70}{\sqrt{14}\sqrt{350}}$$
$$= cos^{-1}\frac{70}{\sqrt{4900}} = cos^{-1}(70/70) = cos^{-1}(1) = 0°$$

Son vectores paralelos

(2,-1,3,5), (-4,2,6,-10).

Resolución:

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(-8-2-18-50)}{\sqrt{4+1+9+25}\sqrt{16+4+36+100}} = cos^{-1}\frac{-78}{\sqrt{39}\sqrt{156}}$$
$$= cos^{-1}\frac{-78}{\sqrt{6084}} = cos^{-1}(-78/78) = cos^{-1}(-1) = 180°$$

Son vectores opuestos (antiparalelos)

(3,-4,5,-1,0), (2,-1,-1,1,1).

Resolución:

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(6+4-5-1+0)}{\sqrt{9+16+25+1+0}\sqrt{4+1+1+1+1}} = cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{51}\sqrt{8}}$$
$$= cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{408}} = cos^{-1}(0{,}198) = 78{,}6°$$

No es paralelo, antiparalelo ni perpendicular

Determine un vector unitario que sea paralelo al vector $\vec{v}$=(-1,1,2).

Resolución:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(-1,1,2)}{\sqrt{1+1+4}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Determine un vector de norma 5 que sea ortogonal al vector $\vec{v}$=(-1,0,0,2,-2).

Resolución:

Sea el vector $\vec{u}$ que cumple con las condiciones del problema, sus componentes serán u_1, u_2, u_3, u_4 y u_5.

$$\vec{u}.\vec{v} = -u_1 + 0 + 0 + 2u_4 - 2u_5 = 0$$

Por ser perpendiculares, está claro que u_2 y u_3 puewden tomar cualquier valor.

La solución má sencilla sería que u_1=u_4=u_5=0 (existen infinitos otros valores que cumplen con la ecuación)

Para dar valores a u_2 y u_3 buscamos que u_2^2+u_3^2=25 (para que la norma del vectore sea 5)

Nuevamente existen infinitos valores que lo cumplen, hay varias soluciones inmediatas: u_2=0, u_3=5; otra sería u_2=3, u_3=4.

En resumidas cuentas una solución sería $\vec{u}$=(0,0,5,0,0); otra sería $\vec{u}$ =(0,3,4,0,0); e infinitas soluciones más.

Determine todos los vectores que sean paralelos al vector $\vec{v}$=(-1,0,1,-2).

Resolución

Los vectores paralelos son múltiplos del vector dado.

Sea $\vec{u}$=t$\vec{v}$=(-t,0,t,-2t); t∈Z

Determine todos los vectores que sean ortogonales al vector $\vec{v}$ = (-1,0,1,-2).

Resolución

Sea el vector $\vec{u}$ que cumple con las condiciones del problema, sus componentes serán u_1, u_2, u_3y u_4.

$$\vec{u}.\vec{v} = -u_1 + 0 + u_3 - 2u_4 = 0$$

Por ser perpendiculares, u_2 y puede tomar cualquier valor.

Vemos que $u_1=u_3-2u_4$

Si u_2=α, u_3=β y u_4=γ, expresado en forma matricial el vector ortogonal sería

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donde α, β y γ ∈Z

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, determinar las partes paralela y ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$\vec{u} = (6{,}3)$ y $\vec{v} = (3{,}0)$

Resolución:

Dibujemos los vectores:

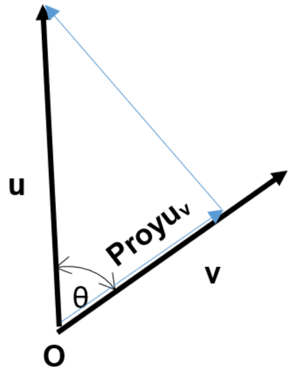


Gráfico 3.

A la parte de un vector paralela a otro la llamamos proyección de ese vector en la dirección del otro, en nuestro caso llamaremos proyección de u en la dirección de v, simbolizándola $Proy_v u$.

Para encontrar la norma de esa proyección multiplicamos la norma de u por el cosθ. Luego, para transformarla en un vector la multiplicamos por el vector unitario de v

$$Proy_v\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\|\vec{u}\|\hat{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

Como la suma de la parte paralela y la parte ortogonal de $\vec{u}$ dan como resultado $\vec{u}$ es fácil deducir que la parte ortogonal se calcula con $\vec{u}$-$Proy_v\vec{u}$

Resolución:

Parte paralela

$$Proy_v\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{18+0}{9}(3,0) = 2(3,0) = (6,0)$$

Parte ortogonal:

$\vec{u}$-$Proy_v\vec{u}$=(6,3)-(6,0)=(0,3)

$\vec{u}$=(-3,-2), $\vec{v}$=(4,-1)

Resolución:

Parte paralela:

$$\text{Proy}_v\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{-12+2}{16+1}(4,-1) = \frac{-10}{17}(4,-1) = \left(-\frac{40}{17},\frac{10}{17}\right)$$

Parte ortogonal:

$$\vec{u}\text{-Proy}_v\vec{u}=(-3,-2)-\left(-\frac{40}{17},\frac{10}{17}\right)=\left(-\frac{11}{17},-\frac{44}{17}\right)$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis, interpretación y aplicación de los conceptos y propiedades de los vectores en la sección 4.2 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en la sección 4.2 (ejercicios 19 a 30) del texto básico.
- Foro Académico: “Vectores”: Desarrollar un ejercicio propuesto por el docente, del tema vectores del texto básico y exponerlo en la plataforma EVA.

Semana 11

4.4. Producto cruz en R^3

En R^3 (exclusivamente) se define una operación llamada producto vectorial (porque el resultado es otro vector en R^3) o producto cruz (para diferenciarla del producto punto), de la siguiente manera:

Al multiplicar dos vectores perpendiculares entre sí el resultado es otro vector perpendicular a los dos anteriores, cuya magnitud es el producto de las magnitudes (normas) de los vectores que se multiplican y la dirección de este nuevo vector está dada por la regla de la mano derecha, su el índice de esa mano apunta en la dirección del primer vector, y el dedo medio apunta en la dirección del segundo vector, el resultado apunta en la dirección del pulgar de la mano derecha, ello implica que si cambiamos el orden de la multiplicación el resultado cambia a la dirección opuesta.

Cuando multiplicamos (con el producto cruz) dos vectores que están en la misma dirección el resultado es 0.

Cuando multiplicamos dos vectores que no son perpendiculares ni paralelos podemos descomponer uno de los vectores en direcciones paralela y perpendicular al otro vector, se hace 0 la parte paralela y queda $\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta\ \mathbf{e}$, siendo e un vector unitario perpendicular a u y v según la regla de la mano derecha y θ el ángulo entre los vectores.

Una formula práctica de calcular el producto cruz es un “determinante” cuya primera fila son los vectores unitarios i, j y k, la segunda fila son las componentes del primer vector, y la tercera fila son los componentes del segundo vector.

El producto vectorial tiene muchas aplicaciones en Ciencia, tecnología y matemáticas, en este curso veremos cómo sirve, por ejemplo, para calcular el área de un triángulo y de un paralelogramo, el volumen de un paralelepípedo, la ecuación de una recta en R2, de un plano en R3, de una recta en R3, etc.

Ejercicios

Sean los vectores $\vec{u}$=(3,1,-2) y $\vec{v}$ =(0,2,4).

a. Encontrar el vector $\vec{u}x\vec{v}$
b. Probar que $\vec{u}x\vec{v}$ y $\vec{u}$ son ortogonales
c. Probar que $\vec{u}x\vec{v}$ y $\vec{v}$ son ortogonales

Resolución

a. $\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (8,-12,6)$

b. (8,-12,6).(3,1,-2)=24-12-12=0, à $\vec{u}x\vec{v}$ y $\vec{u}$ son ortogonales
c. (8,-12,6).(0,2,4)=0-24+24=0, à $\vec{u}x\vec{v}$ y $\vec{v}$ son ortogonales

Sean los vectores $\vec{u}$=(-1,2,3) y $\vec{v}$ =(-5,3,0), encontrar el vector $\vec{u}x\vec{v}$

Resolución:

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (9,15,7)$$

Sean los vectores $\vec{u}$=(0,-2,0) y $\vec{v}$ =(1,1,-2), encontrar el vector $\vec{u}x\vec{v}$

Resolución:

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4{,}0{,}2)$$

En cada una de las parejas de vectores anteriores, encuentre, si es posible, un vector ortogonal a ambos de magnitud 5.

Resolución:

a.

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (9{,}15{,}7)$$

$$\vec{w} = 5\frac{\vec{u}x\vec{v}}{\|\vec{u}x\vec{v}\|} = 5\frac{(9{,}15{,}7)}{\sqrt{81+225+49}} = \frac{(45{,}75{,}35)}{\sqrt{355}} = \left(\frac{45}{\sqrt{355}}, \frac{75}{\sqrt{355}}, \frac{35}{\sqrt{355}}\right)$$

b.

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4{,}0{,}2)$$

$$\vec{w} = 5\frac{\vec{u}x\vec{v}}{\|\vec{u}x\vec{v}\|} = 5\frac{(4{,}0{,}2)}{\sqrt{16+0+4}} = \frac{(20{,}0{,}10)}{\sqrt{20}} = \left(\frac{20}{\sqrt{20}}, 0, \frac{10}{\sqrt{20}}\right) = (\sqrt{20}, 0, \frac{\sqrt{20}}{2}$$

En cada una de las parejas de vectores de los ejercicios anteriores y el vector $\vec{w}$ =(1,0,1) calcule el triple producto escalar.

Resolución:

a.

$$\vec{u}x\vec{v}.\vec{w} = (9{,}15{,}7).(1{,}1{,}0) = 9 + 15 + 0 = 24$$

b.

$$\vec{u}x\vec{v}.\vec{w} = (4{,}0{,}2).(1{,}1{,}0) = 4 + 0 + 0 = 4$$

Sean las parejas de vectores de los ejercicios anteriores y el vector $\vec{w}$ =(1,1,k), encuentre el valor de k, para que el triple producto escalar sea cero.

Resolución:

a.

$$\vec{u}x\vec{v}.\vec{w} = (9{,}15{,}7).(1{,}1,k) = 9 + 15 + 7k = 24 + 7k = 0 \rightarrow k = -\frac{24}{7}$$

b.

$$\vec{u}x\vec{v}.\vec{w} = (4{,}0{,}2).(1{,}1,k) = 4 + 0 + 2k = 0 \rightarrow k = -2$$

Calcule el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$ =(4,1,0), $\vec{v}$=(0,-2,1) y $\vec{w}$=(1,-1,1)

Resolución:

V=$|\vec{u}x\vec{v}.\vec{w}| = \left|\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right| = |-8 + 1 + 4| = 3$

Sean P_1= (1,-2,3), P_2= (2,3,-1) y P_3= (-1,0,3) los vértices del triángulo, determinar sus ángulos interiores y perímetro.

Resolución:

$P_1P_2=(1,5,-4)$; $P_2P_3=(-3,-3,4)$; $P_3P_1=(2,-2,0)$

$$||P_1P_2|| = \sqrt{1+25+13} = \sqrt{42}$$

$$||P_2P_3|| = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}$$

$$||P_3P_2|| = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8}$$

Perímetro = $\sqrt{45}+\sqrt{34}+\sqrt{48}=15,14$

$$Cos\theta_1 = -\frac{(1,5,-4).(-3,-3,4)}{\sqrt{42}\sqrt{34}} = -\frac{-3-15-16}{\sqrt{1428}} = \frac{34}{\sqrt{1428}} = 0,8997 \rightarrow \theta_1 = 25,88°$$

$$Cos\theta_2 = -\frac{(-3,-3,4).(2,-2,0)}{\sqrt{34}\sqrt{8}} = -\frac{-6+6+0}{\sqrt{272}} = \frac{0}{\sqrt{272}} = 0 \rightarrow \theta_2 = 90°$$

$$Cos\theta_3 = -\frac{(2,-2,0).(1,5,-4)}{\sqrt{8}\sqrt{42}} = -\frac{2-10+0}{\sqrt{336}} = \frac{8}{\sqrt{336}} = 0,4364 \rightarrow \theta_1 = 64,12°$$

4.5. Rectas y planos

Una recta en R^2 tiene una ecuación de la forma ax+by+c=0, si sabemos que una recta está determinada por dos de sus puntos, podemos deducir que conoceremos la ecuación de la recta si conocemos las coordenadas de dos de sus puntos a los que llamaremos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), como esos puntos son parte de la recta cumplen con su ecuación, y así podemos formar un sistema con la ecuación original:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema homogéneo, y tiene al menos una solución, la trivial, cuando a=b=c=0, pero sabemos que debe haber infinitas soluciones ya que una ecuación de la recta puede ser múltiplo de otra, por lo tanto, la matriz de los coeficientes es singular y su determinante es 0 (recuerde que en este caso las incógnitas son a, b y c), por lo tanto, la ecuación de la recta estará dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como la tercera columna no afecta los resultados de las multiplicaciones, algunos autores simplifican la formula usando otro "determinante" que excluye esa tercera columna

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio:

Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-3,-5) y (0,2)

Resolución

Planteamos el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Lo resolvemos

x(-5-2)-y(-3+0)+(-6+) = 0

Finalmente, la ecuación queda:

-7x+3y-6=0

La situación en R^3 presenta algunas semejanzas y diferencias, por ejemplo, dos puntos siguen determinando una recta, pero la ecuación de la misma solo puede representarse en forma paramétrica o simétrica, como lo veremos en el ejercicio.

En este caso utilizaremos otra forma de determinar una recta, que es mediante un punto que pertenezca a ella y la dirección de la misma, en caso de que nos den dos puntos el vector entre ellos nos dará la dirección de la recta.

Cualquier punto de la recta (x, y, z) será la suma de dos vectores: el punto inicial, de coordenadas (x_0, y_0, z_0) sumado al vector que da la dirección (a, b, c) multiplicado por una constante cualquiera t a la que llamaremos parámetro.

Matemáticamente

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$

De donde podemos extraer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Que es la ecuación de la recta en R^3 de forma paramétrica.

Si despejamos t en cada ecuación tenemos

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

La parte

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Corresponde a la forma simétrica de la ecuación de la recta en R^3

Ejercicio

Determine las ecuaciones paramétrica y simétrica de la recta que pasa por (1,2,3) y (2,3, 1)

Resolución:

Determinamos el vector que da dirección a la recta restando las coordenadas de los puntos (en cualquier orden)

(2,3,1) -(1,2,3) = (1,1,-2)

Tomamos uno de los dos puntos (cualquiera)

(x, y, z) = (1,2,3) + t(1,1,-2)

La ecuación en forma paramétrica quedaría:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Y en la forma simétrica

$$x - 1 = y - 2 = \frac{3 - z}{2}$$

En el caso de un plano, en el espacio su forma es ax+by+cz+d=0, y sabiendo que tres puntos (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3) determinan un plano, podríamos formar el sistema homogéneo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \end{cases}$$

Que para tener infinitas soluciones debe cumplir que:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Otra forma de encontrar la ecuación de un plano en el espacio es conociendo un vector normal al mismo, llamado $\vec{n}$=(a,b,c) y un punto del plano (x_0,y_0,z_0), un vector cualquiera del plano sería $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ y su producto punto con el vector normal (perpendicular) al plano sería igual a 0, con lo que tendríamos la ecuación:

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

Un método alternativo al del determinante, si conocemos 3 puntos del plano sería hallar dos vectores con esos puntos, hacer el producto vectorial con ellos y encontraríamos el vector normal al plano, luego tomaríamos uno de los tres puntos y aplicaríamos el segundo método.

Ejercicio

Determine la ecuación del plano normal a (1,3,-2) que pasa por el punto (1,0,-2)

Resolución

Tenemos los siguientes datos:

$\vec{n}$ = (1,3,-2); vector en el plano: (x-1, y-0, z+2)

El producto vectorial y la ecuación quedan

$$1(x-1) + 3(y-0) - 2(z+2) = 0$$

La ecuación quedaría

$$x+3y-2z-5=0$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis, interpretación y aplicación de los conceptos y propiedades de los vectores en las secciones 5.1 y 5.2 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en las secciones 5.1 y 5.2 del texto básico.
- Realizar Cuestionario Teórico 4 en línea sobre "Vectores"
- Realizar Cuestionario de Resolución de Problemas 4 en línea sobre "Vectores"

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 4

Hay que validar nuestros conocimientos de la cuarta unidad, estoy seguro que ahora le resultará más fácil resolver los problemas planteados en la siguiente autoevaluación con el éxito esperado, recuerde que en el solucionario podrá comparar sus respuestas.

Indique con una V (verdadero) o F (falso) las siguientes expresiones:

1. ( ) El segmento de recta dirigido que se extiende desde el punto P al punto Q en R^2 es denotado por $\overrightarrow{PQ}$.
2. ( ) Dos segmentos de rectas son equivalentes si tienen la misma magnitud y dirección.
3. ( ) Un vector v en R^2, es un par ordenado de números reales (a, b), los números a y b se denominan componentes del vector v.
4. ( ) El vector cero en R^2 es el vector (0,0).
5. ( ) $v = (a, b)$, entonces $||v|| = \sqrt{a^2 + b^2}$
6. ( ) La adición de vectores $u = (1,-2,5)$ y $v = (3,2,-1)$ en R^3 se realiza operando $(u1 + v1, u2 + v2, u3 + v3)$, por lo que $u + v = (4,0,4)$.
7. ( ) Dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero.
8. ( ) La distancia entre los puntos (1,2,3) y (3,5,-1) es $\sqrt{2^2+3^2+4^2}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

9. ( ) $(i + 3k - j).(k-4j+2i) = 9$.

10. ( ) $(i - j + 2k)x(2i+3j-4k) = -2i + 8j + 5k$.

Ejercicios de aplicación

11. Si **a** = (2,3,4), **b** = (1,-2,5) y el escalar *c* = 2 determine:

    a. *c*.a =
    b. a + b =
    c. a.b =
    d. llall =
    e. axb =

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma en cómo se resuelven paso a paso.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- Un vector se forma cuando un punto se desplaza una distancia dada en una dirección dada.
- Es conveniente recordar que se puede tener un vector [0,0] también llamado vector cero.
- Si se tiene vectores en R^3 entonces tendrá tres coordenadas cada punto en el plano cartesiano.
- Para resolver vectores en R^n hay que recordar la aritmética de los números reales ya que no se podrán dibujar para las explicaciones.

- Siempre es importante revisar las propiedades algebraicas (distributiva, asociativa, conmutativa) de los vectores en R^2, R^3, R^n, respectivamente, para resolver los ejercicios.

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Resultado de aprendizaje 6

Capacidad para: analizar, interpretar y aplicar operaciones los conceptos y operaciones con espacios vectoriales.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estudiaremos inicialmente las características, definiciones y propiedades de los espacios y subespacios vectoriales, ampliaremos estos conceptos a espacio generado e independencia lineal, concluyendo en los conceptos de rango y nulidad y su aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones.

Semana 12

Unidad 5. Espacios vectoriales reales

5.1. Espacios Vectoriales

Para tener un espacio vectorial necesitamos vectores, escalares y dos operaciones: suma entre dos vectores y el producto de un escalar por un vector.

Los vectores no necesariamente son los vectores tales como los conocemos, pueden ser matrices, funciones, polinomios, etc.

La suma de vectores y el producto de un vector por un escalar pueden no definirse de la manera usual.

Los escalares deben formar una estructura algebraica llamada cuerpo o campo, en la cual las operaciones llamadas adición y multiplicación (que pueden ser definidas de manera diferente a la usual) se pueden realizar y cumplen las propiedades: asociativa, conmutativa y distributiva de la multiplicación respecto de la adición, además poseen de inverso aditivo, inverso multiplicativo y elemento neutro para la adición y otro para la multiplicación, los cuales permiten efectuar las operaciones de sustracción y división (excepto la división por cero).

Los números racionales, reales y complejos con la suma y multiplicación usuales son ejemplos de escalares, cuando los componentes de los vectores y el campo escalar son los números reales estamos ante un espacio vectorial real.

Volviendo al espacio vectorial, si tenemos al conjunto V de los vectores, al campo K de los escalares, para tener un espacio vectorial las operaciones de suma y multiplicación deben tener las siguientes propiedades:

Suma: Cerradura (clausurativa), conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento opuesto.

Producto de un vector por un escalar: cerradura, asociativa, neutro o idéntico multiplicativo y distributiva en dos versiones, respecto a la suma de vectores $a(v+u) = av+au$ y respecto a la suma de escalares $(a+b)v = av + bv$.

Los vectores usuales, con cualquiera de los campos escalares ya mencionados y las definiciones usuales de suma de vectores y multiplicación de un escalar por un vector son (y se puede demostrar), un espacio vectorial.

Pero también las matrices y los polinomios con los números reales y las definiciones usuales de producto por un escalar y suma, son espacios vectoriales.

Podemos elegir cualquier definición de vector, escalar, suma de vectores, producto de un escalar por un vector, si cumple con las propiedades enunciadas, formará un espacio vectorial.

La manera, entonces de demostrar que algo es un espacio vectorial es demostrar que cumple esas propiedades.

Por ejemplo, si tomamos los vectores de R2, el cuerpo de los reales como escalar, definimos el producto de un escalar por un vector de la manera usual y definimos la suma de vectores (a, b) + (c, d) como (a+c+1; d+d+1)

Podemos demostrar que este no es un espacio vectorial debido a que no tiene la propiedad distributiva para la suma de vectores, es decir:

Si hacemos primero la suma de vectores

m[(a, b) + (c, d)] = m(a+c+1, b+d+1) = (ma + mc + m, mb + md + m)

Pero si aplicamos la propiedad distributiva obtenemos un resultado diferente

m[(a, b) + (c, d)] = m(a, b) + m(c, d) = (ma, mb) + (mc, md) = (ma + mc + 1, mb + md + 1)

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Ejercicios:

Pruebe si los siguientes conjuntos son o no espacios vectoriales, se supone que la operación interna suma y el producto por un escalar son los usuales.

V =M_c de orden n x n.

Resolución:

Como las matrices en general son espacios vectoriales, las matrices cuadradas serán un espacio vectorial si cumplen las propiedades de cerradura para la suma y el producto.

Ac + Bc = Cc (La suma de dos matrices cuadradas es otra matriz cuadrada).

αAc=Bc (La multiplicación de un escalar por una matriz cuadrada es otra matriz cuadrada)

Como estas propiedades se cumplen, las matrices cuadradas si forman un espacio vectorial

Sea Ax=B un sistema de ecuaciones lineales y V = {**v**|**Av** = **B**}

Resolución:

Como se trata de un sistema de ecuaciones lineales cualquiera, no es un espacio vectorial debido a que no cumple necesariamente con la propiedad del elemento neutro, es decir $0 \notin v$ (la solución del sistema no es, necesariamente $x_1=0$, $x_2=0$, ..., $x_n=0$).

Verifique si el conjunto de matrices M*D* de orden *n x n*, donde todos los *di* $\in R^+$. Con la suma para *D*1, *D*2 $\in$M*D*, definida *D*1 ⊕ *D*2 =*D*1*D*2. Mientras que el producto por un escalar $\alpha \in R$ definido por $\alpha d_i = d_i^{\alpha}$ y con las componentes fuera de la diagonal el producto común.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Glosario

Referencias bibliográficas

Anexos

Resolución:

De acuerdo a la definición el elemento neutro aditivo es la matriz identidad I, ya que

$D \oplus I = I \oplus D = ID = DI = D$.

Sin embargo, hay un elemento, la matriz 0 que no tendrá inverso aditivo ya que

$0 \oplus D = D \oplus 0 = 0 \neq I$.

Por lo tanto, no es un espacio vectorial.

En los siguientes ejercicios mostrar vectores que sí pertenezcan al subconjunto *H* y que no pertenezcan a este.

Si $H \subset R^3$, donde $H = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = (x, 2x, y)\}$

Resolución:

$(2,4,1) \in H$; $(0,1,2) \notin H$

Si $H \subset R^3$, donde $H = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = (1, y, -y)\}$,

Resolución:

$(1,3,-3) \in H$; $(2,1,0) \notin H$

Si $H \subset R^3$, donde $H = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = (x, y, x+y)\}$,

Resolución:

$(1,2,3) \in H$; $(0,1,2) \notin H$

Probar si $H = \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} = (x, y, z)$ con $x + 3y - z = 0\}$ es un espacio vectorial.

Resolución:

$x+3y-z=0 \rightarrow z=x+3y$;

como $H \subset R^3$ y R^3 es un espacio vectorial, solo debemos probar las propiedades de cerradura.

Para la suma:

$(x_1, y_1, x_1 + 3y_1) + (x_2, y_2, x_2 + 3y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, x_1+3y_1+x_2+3y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, ((x_1+x_2) + 3(y_1+y_2))$

Vemos que al sumar dos elementos de H el resultado es también otro elemento de H, tiene la propiedad de cerradura para la suma.

Para el producto por un escalar

$\alpha(x, y, x + 3y) = (\alpha x, \alpha y, \alpha(x + 3y) = (\alpha x, \alpha y, \alpha x + 3\alpha y)$

Vemos que, al multiplicar un elemento de H por un escalar, el resultado también es un elemento de H, también tiene la propiedad de cerradura para el producto por un escalar, por lo tanto, es un espacio vectorial.

Demostrar si $H=\{\mathbf{v}\in V|\mathbf{v}= (x, y, z)$ con $x + 3y - z = 1\}$ es un espacio vectorial.

Resolución:

Si $x+3y-z=1 \rightarrow z=x+3y-1$

Esto quiere decir que H no tiene al elemento 0, ya que si x=0, y=0, z=0+3(0)-1=-1, lo que implica que el elemento $(0,0,0) \notin H$, H no tiene elemento neutro para la suma.

Sea $V = R$, demostrar si H = {El conjunto de los números enteros positivos} es un subespacio vectorial.

Resolución

No tiene el elemento neutro para la suma, ya que 0 no es un entero positivo, por lo tanto, no es un espacio vectorial.

Demostrar si $H = \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} = (x, y) \text{ con } y = x^2\}$ es un espacio vectorial.

Resolución:

$v_1 \in V = (x_1, x_1^2)$, $v_2 \in V = (x_2, x_2^2)$;

$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2) \neq (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2)$

Por lo tanto, $v_1 + v_2 \notin V$

5.2. Subespacios

Dentro de la matemática, que es una disciplina abstracta, el álgebra lineal es una de las más abstractas, especialmente el tema de los espacios vectoriales.

Para tener un espacio vectorial se debe tener un conjunto no vacío V, al que se llama "vectores", pero que puede ser cualquier cosa, los vectores conocidos, matrices, polinomios, funciones, rotaciones, traslaciones, etc., también necesitas un cuerpo o campo de números, a los que llamamos escalares, generalmente son los números reales, o complejos, o imaginarios, pero podría ser cualquier conjunto de números que cumpla las propiedades necesarias para ser un cuerpo o campo, por ejemplo los números pares (positivos y negativos incluyendo el cero).

Además de los escalares necesitamos dos operaciones, a las que llamamos "suma de vectores" y "producto de un escalar por un vector" que pueden definirse de la manera que nosotros queramos, ya sea de la manera usual o no, en alguno de los problemas hemos definido (a,b) + (c, d) = (a+c+1, b+d+1), igual podría ser cualquier definición que necesitemos o que se nos ocurra.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Si esas operaciones cumplen con las propiedades necesarias (cerradura, conmutativa, asociativa, elemento cero, elemento inverso para la suma; y cerradura, asociativa, distributiva de vectores, distributiva de escalar y vector, elemento unidad para el producto).

El conjunto V, con las operaciones "+" y "." dentro del campo K, tiene la propiedad de la cerradura para "+" si al sumar dos elementos de V el resultado también es elemento de V.

Por ejemplo, si V son rotaciones en el plano, y si definimos la suma de rotaciones como una rotación que suma los ángulos rot(A)+rot(B)=rot(A+B), al sumar dos rotaciones el resultado es otra rotación.

Si V es el conjunto de los números impares, y definimos la suma de la manera usual, la suma no tendría la propiedad de cerradura, pues la suma de dos números impares no es un número impar; pero si la definimos como a+b+1 la suma de números impares con esta definición si tendría la propiedad mencionada.

Vectores, matrices, polinomios, funciones, con las definiciones usuales de suma y producto, y el campo de los reales como escalar son espacios vectoriales, sin embargo, si tomamos un subconjunto de esos conjuntos mencionados, o si cambiamos la definición de suma y/o producto por un escalar, no sabríamos si son o no un espacio vectorial.

Si V, "+" y "." son un espacio vectorial para demostrar que un subconjunto de V, con las mismas definiciones de "+" y "." y el mismo campo escalar es también un espacio vectorial basta con demostrar que V, "+" y "." cumplen la propiedad de cerradura. A este subconjunto de V, "*" y "." se lo llama subespacio vectorial de V, "+" y ".".

Todo espacio vectorial tiene al menos dos subespacios vectoriales, él mismo y el subespacio 0, formado por el elemento nulo.

Si tenemos un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_k \in V$, y $u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_k v_k$, se dice que el vector u es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_k$

Si W contiene una combinación lineal de vectores de V, W es un subespacio vectorial de V.

Si S = $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es un subconjunto de V, entonces el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de los vectores de S se denomina gen S o gen $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$

En las condiciones mencionadas gen S es un subespacio vectorial de V.

Ejercicios:

Sea H= $\left\{\begin{pmatrix} a & 3a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}, |a,b \in R\right\} \subseteq M_{22} = V$ ¿es un subespacio vectorial?

Resolución:

Sean $A_{22} = \begin{pmatrix} a_1 & 3a_1 - b_1 \\ b_1 & a_{1+}b_1 \end{pmatrix}$ y $B_{22} = \begin{pmatrix} a_2 & 3a_2 - b_2 \\ b_2 & a_{2+}b_2 \end{pmatrix}$

La suma

$A_{22} + B_{22} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 3a_1 - b_1 + 3a_2 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_{1+}b_1 + a_{2+}b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 3a_1 + 3a_2 - b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_{1+}b_1 + a_{2+}b_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 3(a_1 + a_2) - (b_1 - b_2) \\ b_1 + b_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \end{pmatrix}$ que también pertenece a H

Veamos ahora el producto por un escalar:

$$\alpha \begin{pmatrix} a & 3a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(3a-b) \\ \alpha b & \alpha(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & 3\alpha a - \alpha b \\ \alpha b & \alpha a + \alpha b \end{pmatrix}$$

Vemos que el producto por un escalar también pertenece a H, por lo tanto cumple con las dos propiedades de la cerradura y, como es un subconjunto de un espacio vectorial, también es espacio vectorial.

Determine cuál es el espacio vectorial generado por los vectores (2,-1,-2,4,5) y (-1,3,2,-2,1)

Resolución:

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\\4\\5\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\\w\end{pmatrix}$$

Planteamos la matriz amplicada y escalonamos:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&x\\-1&3&y\\-2&2&z\\4&-2&u\\5&1&w\end{array}\right)\xrightarrow[R1\leftrightarrow R2]{}\left(\begin{array}{cc|c}-1&3&y\\2&-1&x\\-2&2&z\\4&-2&u\\5&1&w\end{array}\right)\xrightarrow[R1=-R1]{}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&-y\\2&-1&x\\-2&2&z\\4&-2&u\\5&1&w\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R2=R2-2R1\\R3=R3+2R1\\R4=R4-4R1\\R5=R5-5R1}]{}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&-y\\0&5&x+2y\\0&-4&z-2y\\0&10&u+4y\\0&16&w+5y\end{array}\right)\xrightarrow[R2=R2/5]{}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&-y\\0&1&(x+2y)/5\\0&-4&z-2y\\0&10&u+4y\\0&16&w+5y\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R1=R1+3R2\\R3=R3+4R2\\R4=R4-10R2\\R5=R5-16R2}]{}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-y+3/5(x+2y)\\0&1&(x+2y)/5\\0&0&z-2y+4/5(x+2y)\\0&0&u+4y-2(x+2y)\\0&0&w+5y-16/5(x+2y)\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{cc|c}1&0&(3x+y)/5\\0&1&(x+2y)/5\\0&0&z+2/5(2x-y)\\0&0&u-2x\\0&0&w-(16x+7y)/5\end{array}\right)$$

Este sistema tiene solución múltiple solo cuando

z=-2/5(2x-y); u=2x; w=(16x+7y)/5,

que puede transformarse en

x=u/2;

w=(8u+7y)/5ày=(5w-8u)/7=5/7w-8/7u;

z=-2/5(u-(5w-8u)/7)=-2/5u+2/7w-16/35u=2/7w-6/7u

por lo que, y haciendo a $u=t_1$ y $w=t_2$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -8/7 \\ -6/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5/7 \\ 2/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinar si los siguientes vectores generan el espacio vectorial indicado:

v_1= (2,-4,6), v_2= (2,-3,1) ¿generan a V= R^3?

Resolución:

m (número de vectores)=2; n (número de componentes de cada vector)=3, no genera a R^3

v_1=(1,-2,3), v_2=(1,1,1) y v_3=(0,4,5) ¿Generan a R^3?

Resolución:

m=3; n=3, calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 10 - 4 = 23$$

Lo que quiere decir que son linealmente independientes y si genera a R^3

$v_1=(6,-3)$ y $v_2=(-2,1)$ ¿Generan a R^2?

Resolución:

m=2; n=2, calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

Lo que quiere decir que no son linealmente independientes y por lo tanto no generan a R^2

Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes.

$v_1=(1,-2,7)$, $v_2=(-3,-1,6)$, $v_3=(2,8,4)$ y $v_4=(2,0,4)$

Resolución:

Como tenemos cuatro vectores y 3 componentes, son linealmente dependientes.

$v_1=(2,4)$ y $v_2=(4,8)$

Resolución:

Como $v_2=2v_1$, son linealmente dependientes.

Determinar si los siguentes vectores forman una base de V.

(5,4,-1), (0,-1,0) con $V=R^3$.

Resolución:

Solo tenemos dos vectores, necesitamos 3, por lo tanto no forman una base de R^3.

(5,-1,1), (1,2,3), (0,1,1) y $V=R^3$.

Resolución:

Como tenemos tres vectores, procedemos a calcular el determinante para ver si son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =10+1+1-15=-3$$

Dado que es diferente de 0, si forman una base de R^3.

$p_1(x)=1-x$, $p_2(x)=2+4x$, $p_3(x)=8+10x$, $V=P_1(x)$

Resolución:

$P_1(x)$ necesita solo dos elementos en la base, los 3 polinomios son linealmente dependientes y no forman una base.

5.3. Espacio generado e independencia lineal

Si todos los vectores de un espacio vectorial V, son generados por una combinación lineal de $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, se dice que S genera a V, que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ genera a V, que V es generado por S o que V=gen S.

Los vectores $e_1 = i = (1, 0)$ y $e_2 = j = (0, 1)$, generan a R^2.

Un grupo de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente independientes si la única solución a $c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_kv_k=0$ es $c_1=c_2=\ldots=c_k=0$

Si esto no ocurre se dice que los vectores son linealmente dependientes.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Los vectores e_1 y e_2 en R^2 son linealmente independientes.

Los vectores no nulos $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en V son linealmente dependientes si, y solo si, alguno de los vectores a partir del segundo es una combinación lineal de los vectores que lo preceden.

Ejercicios:

¿Cuáles de los siguientes vectores generan a R^2?

(1,2), (-1,1)

Resolución:

En R^2 como son 2 vectores sólo hay que comprobar que uno de ellos no es múltiplo del otro, este es el caso y esos dos vectores si generan a R^2.

(0,0), (1,1), (-2,-2)

Resolución:

No genera, (0,0) no cuenta, y (-2,-2) es múltiplo de (1,1).

(1,3), (2,-3) y (0,2)

Resolución:

Si genera a R2, porque 2 de ellos (1,3) y (2,-3) son linealmente independientes.

(2,4) y (-1,2)

Resolución:

Si genera porque los vectores son linealmente independientes (ninguno es múltiplo del otro)

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores generan a R^3?

{(1,-1,2), (0,1,1)}

Resolución:

No, se necesitan 3 vectores linealmente independientes

{(1,2,-1), (6,3,0), (4,-1,2), (2,-5,4)}

Resolución

Necesitamos 3 vectores linealmente independientes, lo primero que tenemos que hacer es comprobar que ninguno de los vectores es múltiplo de los otros, a simple vista se comprueba que no es así.

Luego veremos si los tres primeros vectores son linealmente independientes, para ello calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =6+6+12-24=0$$

No los linealmente independientes, eliminemos uno de ellos (cualquiera) y reemplacémoslo por el cuarto vector.

Tomemos los vectores segundo, tercero y cuarto, elaboremos una matriz y calcularemos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -24 + 12 - 48 + 60 = 0$$

No genera a R^3 porque no hay 3 vectores linealmente independientes.

{(2,2,3), (-1,-2,1), (0,1,0)}

Calculamos el determinante para comprobar si los tres vectores son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$$

Por lo tanto, los tres vectores si generan a R^3.

{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)}

Resolución:

Vemos que los tres primeros vectores forman la base canónica de R^3, por lo tanto, son linealmente independientes y generan R3.

¿Cuáles de los siguientes vectores generan a R^4?

(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,1,1,1), (1,1,1,0)

Como son 4 vectores formaremos una matriz y calcularemos su determinante para comprobar si son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1$$

Como el determinante es diferente de 0, los cuatro vectores son linealmente independientes y si generan a R^4.

(1,2,1,0), (1,1,-1,0), (0,0,0,1)

Resolución:

Al ser solo 3 vectores no pueden generar a R^4.

(6,4,-2,4), (2,0,0,1), (3,2,-1,2), (5,6,-3,2), (0,4,-2,1)

Resolución:

Si 4 de estos 5 vectores son linealmente independientes, pueden generar R^4.

Lo primero que cabría hacer (por si acaso), es comprobar si uno de los vectores es múltiplo de otro, visualmente determinamos de inmediato que el primero es múltiplo del tercero, eliminando el primer vector nos quedan 4, usamos el determinante para verificar si los 4 que quedan son linealmente independientes. Si no hubiera sido así deberíamos ir eliminando consecutivamente un vector a la vez para comprobar si los 4 restantes son linealmente independientes

Excluyendo el primer vector

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -2(-6-8-24+24+6+8)+(-36-20+20+36)=0$$

Concluimos que no hay 4 vectores linealmente independientes, por lo tanto, los vectores dados no generan a R^4.

(1,1,0,0), (1,2,-1,1), (0,0,1,1), (2,1,2,1)

Resolución:

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Los cuatro vectores si generan a R^4.

¿Generan los polinomios t^3+2t+1, t^2-t+2, t^3+2, $-t^3+t2-5t+2$ a P_3?

Resolución

Usamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4-5-4+10-2+4+1 = 15-15 = 0$$

Vemos que no generan a P_3.

Determine un conjunto de vectores que genere el espacio solución de Ax=0, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Resolvemos el sistema de ecuaciones usando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F4-F1]{\substack{F2-F1 \\ F3-2F1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F4\leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3\leftrightarrow F4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F4-F2]{F3-2F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Encontramos que:

$$x^1+x^3=0 \rightarrow x^1=-x^3$$

$$x^2+x^3+x^4=0 \rightarrow x^2=-x^3$$

$x^4=0$

$$x = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ genera al espacio solución.

¿Cuáles de los siguientes vectores en R^3 son linealmente dependientes? Cuando lo sean exprese un vector del conjunto como una combinación lineal de los demás.

{(1,2,-1), (3,2,5)}

Resolución:

No son múltiplos, son linealmente independientes

{(4,2,1), (2,6,-5), (1,-2,3)}

Resolución:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 72 - 10 - 4 - 6 - 12 - 40 = 0$$

Son linealmente dependientes

$$a(4,2,1) + b(2,6,-5) = (1,-2,3)$$

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 2a + 6b = -2 \\ a - 5b = 3 \end{cases}$$

Tomando la segunda ecuación y multiplicando la tercera por -2

$$\begin{cases} 2a + 6b = -2 \\ -2a + 10b = -6 \end{cases}$$

Queda

$$16b = -8 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Despejando de la tercera ecuación y reemplazando

$$a = 3 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}(4,2,1) - \frac{1}{2}(2,6,-5) = (1,-2,3)$$

$$\left(2,1,\frac{1}{2}\right) - \left(1,3,-\frac{5}{2}\right) = (1,-2,3)$$

{(1,1,0), (0,2,3), (1,2,3), (3,6,6)}

Resolución:

Son linealmente dependientes debido a que el espacio es de dimensión 3 y tenemos 4 vectores.

Planteemos el sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F2}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F3-3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F3/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F2-F3/2]{F1-F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Luego (aplicando estos coeficientes)

$2(1,1,0) + (0,2,3) + (1,2,3) = (3,6,6)$

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis, interpretación y aplicación de los conceptos y propiedades de los espacios vectoriales en las secciones 6.1, 6.2 y 6.3 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en las secciones 6.1, 6.2 y 6.3 del texto básico.

Semana 13

5.4. Bases y dimensión

El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, subconjunto de V es una base de V si, y solo si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente independientes y $\text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}=V$

La base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ se denomina base natural, estándar o canónica, estas bases tienen la forma $e_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ donde el único 1 (los demás componentes son ceros) está ubicado en la posición i, todos los elementos de esta base son, por lo tanto, unitarios y perpendiculares entre sí (ortonormales).

Un espacio vectorial es de dimensión finita si existe un subconjunto finito de V que es una base para V; caso contrario dicho espacio es de dimensión infinita.

Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces cada elemento de V se puede escribir de una sola forma como combinación lineal de los elementos de S.

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto de vectores no nulos de un espacio vectorial V, y sea W=gen S. Entonces algún subconjunto de S es una base de W.

Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, y $T = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V, entonces $r \leq n$.

Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $T = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ son bases de un mismo espacio vectorial, entonces n=m

Llamamos dimensión de un espacio vectorial al número de vectores que tiene cualquier base de ese espacio vectorial, en base a ello podemos decir que el espacio vectorial {0} tiene dimensión 0, la dimensión de R^n es n, la dimensión de Pn es n+1.

Asimismo, en todo subespacio W de V $\dim(W) \leq \dim(V)$

Un conjunto linealmente independiente de vectores de V puede ampliarse a una base de V.

Ejercicios

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^2?

{(1,3), (1,-1)}

Resolución

Como son 2 y son linealmente independientes (ninguno es múltiplo del otro), si es una base para R^2.

{(0,0), (1,2), (2,4)}

Resolución

Al ser 3 no pueden ser linealmente independientes, no constituyen una base para R^2, además uno de ellos es el vector nulo, que no puede formar parte de una base, los otros dos son múltiplos entre sí.

{(1,2), (2,-3), (3,2)}

Resolución

Al ser 3 no pueden ser linealmente independientes, no constituyen una base para R^2.

{(1,2), (-2,6)}

Resolución

Como son 2 y son linealmente independientes (ninguno es múltiplo del otro), si es una base para R^2.

¿Cuáles de los siguientes vectores son bases en R^3?

{(1,2,0), (0,1,-1)}

Al ser sólo dos vectores no constituye una base en R^3.

{(1,1,-1), (2,3,4), (4,1,-1), (0,1,-1)}

Respuesta

Son 4 vectores, no puede ser una base en R^3.

{(3,2,2), (-1,2,1), (0,1,0)}

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Son tres vectores, falta comprobar la independencia lineal calculando el determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

Como el determinante es diferente de cero, los 3 vectores son linealmente independientes, conforman, por lo tanto, una base en R^3.

{(1,0,0), (0,2,-1), (3,4,1), (0,1,0)}

Resolución:

Al ser 4 vectores no son linealmente independientes y, por lo tanto, no conforman una base.

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^4?

{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,1,1,1), (0,1,1,1)}

Al ser 4 vectores necesitamos solamente comprobar su independencia lineal, usaremos la reducción a la forma escalonada (alternativa al uso del determinante).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que se conservan las cuatro filas, por lo tanto, los vectores son linealmente independientes y, por lo tanto, conforman una base en R^4.

{1,-1,0,2), (3,-1,2,1), (1,0,0,1)}

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Resolución:

Son solo tres vectores, no conforman una base en R^4.

{(-2,4,6,4), (0,1,2,0), (-1,2,3,2), (-3,2,5,6), (-2,-1,0,4)}

Resolución:

Al ser cinco vectores no pueden formar una base en R^4.

{(0,0,1,1), (-1,1,1,2), (1,1,0,0), (2,1,2,1)}

Resolución:

Al ser cuatro vectores podrían formar una base en R^4, solo falta comprobar si son linealmente independientes, utilizaremos la reducción a la forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F4+F2]{F3+F2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-2F3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para P_2?

{$-t^2+t+2, 2t^2+2t+3, 4t^2-1$}

Como P_2 es de dimensión 3 y tenemos 3 vectores en el conjunto, podría ser una base de P_2, hace falta comprobar su independencia lineal, lo haremos comprobando el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 16 + 2 = 0$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Como el valor del determinante es cero, los tres vectores no son linealmente independientes y, por lo tanto, no constituyen una base en P_2.

$\{t^2+2t-1,\ 2t^2+3t-2\}$

Resolución:

El conjunto tiene dos vectores, y el espacio necesita 3, por lo tanto, no constituye una base.

$\{t^2+1,\ 3t^2+2t,\ 3t^2+2t+1,\ 6t^2+6t+3\}$

Resolución:

Hay cuatro vectores en el conjunto, no puede ser una base de P_2.

Demuestre que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, forman una base del espacio vectorial de todas las matrices cuadradas M_{22}.

La dimensión del espacio vectorial y el número de matrices coincide, hace falta ver si son linealmente independientes, para ello las escribimos en forma de vectores verticales y formamos una matriz, luego la reducimos a la forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-F3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la forma escalonada conserva 4 filas, las cuatro matrices son linealmente independientes y el conjunto de cuatro matrices forma una base del espacio vectorial de todas las matrices cuadradas M_{22}.

Determine Cuál de los subconjuntos dados forma una base para R3. Luego exprese el vector (2,1,3) como combinación lineal de los vectores en cada conjunto que sea una base.

{(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)}

Resolución:

Al ser tres vectores podrían formar una base, debemos comprobar antes que son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

Al ser el determinante diferente de cero, confirmamos que los tres vectores son linealmente independientes y forman una base en R^3.

{(1,2,3), (2,1,3), (0,0,0)}

Resolución:

Al ser uno de los vectores del conjunto el vector cero, este no puede ser una base.

{(2,1,3), (1,2,1), (1,1,4), (1,5,1)}

Resolución:

Son 5 vectores, por lo tanto, no pueden ser una base de R3.

{(1,1,2), (2,2,0), (3,4,-1)}

Resolución:

Como son 3 vectores podrían, si son linealmente independientes, conformar una base para R^3, vamos a comprobarlo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 16 - 12 + 2 = 4$$

Si forman una base en R3, vamos ahora a expresar el vector (2,1,3) como una combinación lineal de los vectores de esta base, para ello conformamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos este sistema utilizando el método de Cramer

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4 + 24 - 18 + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-1 + 16 + 9 - 6 + 2 - 12}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6 + 4 - 8 - 6}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Aplicamos estos valores y comprobamos

1(1,1,2)+2(2,2,0)-1(3,4,-1)=(1+4-3,1+4-4,2+1)=(2,1,3)

Determine si los subconjuntos dados forman una base Para P_2, si ello ocurre exprese $5t^2-3t+8$ como combinación lineal de los vectores en cada subconjunto que sea una base.

$\{t^2+t, t-1, t+1\}$

Resolución:

Resolveremos el sistema por la forma escalonada reducida, así rencontraremos los valores para la combinación lineal al tiempo que averiguamos si los vectores son linealmente independientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, se puede expresar $5t^2-3t+8$ como

$5(t^2+t) - 8(t-1) + 0(t+1) = 5t^2+5t-8t+8 = 5t^2-3t+8$

$\{t^2+1, t-1\}$

Resolución:

Al ser solo dos vectores, no pueden ser una base para P2.

$\{t^2+t, t^2, t^2+1\}$

Resolución:

Al ser tres vectores podrían conformar una base en R3, lo comprobaremos al tiempo que encontramos los coeficientes de la combinación lineal usando operaciones elementales de fila para reducir la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Como si es una base, utilizamos los coeficientes encontrados para comprobar la combinación lineal.

$$-3(t^2+t)+0(t^2)+8(t^2+1)=-3t^2-3t+8t^2+8=5t^2-3t+8$$

$\{t^2+1, t^2-t+1\}$

Resolución:

Necesitamos al menos tres vectores en la base, por lo tanto, el conjunto dado no puede ser base de P_2.

Considere el siguiente subconjunto de P3: S = $\{t^3+t^2-2t+1, t^2+1, t^3-2t, 2t^3+3t^2-4t+3\}$. Determine una base para el subespacio de W=gen S. ¿Cuál es dim W?

Resolución:

Usamos la reducción a la forma escalonada para comprobar si los 4 vectores son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F4-F1]{\substack{F2-F1 \\ F3+2F1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se conservan 3 renglones no nulos tenemos solo 3 vectores linealmente independientes, conservamos los tres primeros (podríamos tomas tres cualquiera de los cuatro)

B = $\{t^3+t^2-2t+1, t^2+1, t^3-2t\}$

La dimensión del subespacio es 3.

Determine una base para los vectores de la forma (a+c, a-b, b+c, -a+b)

Resolución:

El vector general de este subespacio se puede expresar de la forma:

$$(a+c, a-b, b+c, -a+b) = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Para ver si los tres vectores involucrados $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes formamos una matriz y la transformamos a la forma reducida

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F4+F1]{F2-F1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-F2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[F4-F2]{F3-F2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Vemos que solo 2 de los 3 vectores son linealmente independientes, podemos tomar dos cualquiera de ellos, por ejemplo, el tercero y el primero

$$Base = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Determine todos los valores de a para los cuales $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ es una base para R^3.

Resolución:

Para que el conjunto de vectores propuesto sea una base de R3, deben ser linealmente independientes, una de las maneras de comprobarlo es que el determinante de la matriz formada por los tres vectores sea diferente de cero.

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a+1)(a-1) \neq 0$$

Para ello

$$a \neq 0,\ a \neq 1,\ a \neq,-1$$

Determine la dimensión del subespacio de P3 formado por los vectores de la forma at^3+bt^2+ct+d, donde $b=3a-5d$ y $c=d+4a$.

Resolución:

De acuerdo a los datos del problema este se puede expresar de la forma

$$at^3 +(3a-5d)t^2 + (d+ 4a)t+ d= a(t^3 + 3t^2) + d(-5t^2 + t + 1)$$

Y como los dos vectores t^3+3t^2+4t y $-5t^2+t+1$ y no son múltiplos el uno del otro, son linealmente independientes, por lo tanto forman una base del subespacio y la dimensión del mismo es 2.

5.5. Sistemas homogéneos

Recordemos que un sistema lineal homogéneo Ax=b es aquel en el que el vector b es el vector nulo, quedando Ax=0. Todo sistema lineal homogéneo tiene al menos una solución, a la que llamamos trivial y es que el vector x (las incógnitas), es igual al vector nulo 0, en otras palabras, todas las incógnitas son iguales a cero.

Si A es una matriz de orden mxn, llamaremos nulidad de A (nulidad A) a la dimensión del espacio nulo de A.

Si x_p es una solución particular del sistema homogéneo Ax=b, b≠0 y x_h es una solución del sistema homogéneo asociado Ax=0, entonces x_p+x_h es una solución del sistema Ax=b.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Toda solución x del sistema lineal no homogéneo Ax=b es de la forma x_p+x_h, donde x_p es una solución particular del sistema no homogéneo y x_h es una solución del sistema homogéneo asociado Ax=0.

Ejercicios

Si A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, determine el conjunto de soluciones de Ax=0; exprese cada solución como una combinación lineal de vectores en R^3; Grafique estos vectores en un sistema de coordenadas tridimensional para mostrar que el espacio solución es un plano que pasa por el origen.

Resolución:

Reducimos la matriz a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F4+4F1]{F2+2F1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación que representa la única línea es

$$2x-y-2z=0$$

Que es la ecuación de un plano que pasa por el origen, despejamos y

$$y=2x-2z$$

Si x=r y z=s

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x-2z \\ z \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Graficamos en el espacio tridimensional

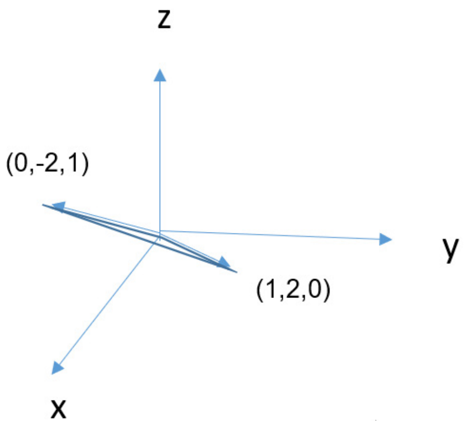


Gráfico 4.

Si nos imaginamos el plano xy como el piso de una habitación y los planos yz y xz como dos paredes que se juntan, el vector (1,2,0) estará en el piso de la habitación (z=0) y (0,-2,1) estará en la continuación de la pared yz (x=0 e y negativo). El plano por el que pasan estos dos vectores será el espacio solicitado.

Determine una base para el espacio nulo de la matriz A=
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Llevamos la matriz a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F2-2F1 \\ F3-3F1 \\ F4-F1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F3+2F2 \\ F4+F2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1-2F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que, cuando z=t y w=s equivale a las ecuaciones

$$x=5t-3s$$

$$y=2s-4t$$

Que vectorialmente se pueden expresar así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que una base de este espacio vectorial sería:

$$Base = \{\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Determine una base para el espacio solución del sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)x=0$ para cada escalar λ y matriz A.

$\lambda=1$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución

Calculamos

$$(\lambda I_n - A)$$

$$1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & -2 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego resolvemos el sistema $(\lambda I_n - A)x=0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2+F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que nos queda la ecuación

x+y=0→x=-y;y=t

En forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

Base=$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

λ=3, A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos

$$\lambda I_3 - A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-1 & -1 & 2 \\ 1 & 3-2 & -1 \\ 0 & -1 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Reducimos a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1\leftrightarrow F2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2\leftrightarrow -F3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F3+3F2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Vemos que tiene una solución única, que será la trivial, por lo tanto, no existe una base para el espacio vectorial.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Determine todos los números reales λ tales que el sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)x = 0$ tiene una solución no trivial.

A= $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Resolución:

Calculamos $\lambda I_n - A$

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -2 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0 para que el sistema tenga múltiples soluciones.

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+2) = 0$$

Encontramos que hay dos soluciones:

$$\lambda=3; \lambda=-2$$

A= $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Resolución:

Calculamos $\lambda I_n - A$

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 3 \\ 0 & -4 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0 para que el sistema tenga múltiples soluciones.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 3 \\ 0 & -4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-5)+12(\lambda+2) = 0$$

$(\lambda+2)[(\lambda+2)(\lambda-5)+12]=0$

$(\lambda+2)[\lambda^2-3\lambda+2]=0$

$(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$

Con lo que el conjunto solución es:

$$\lambda \in \{-2,1,2\}$$

Resuelva el sistema lineal

$$\begin{cases} x+2y-z-w=3 \\ x+y+3z+2w=-2 \\ 2x-y+4z+3w=1 \\ 2x-2y+8z+6w=8 \end{cases}$$

Y escriba la solución x como x=xp+xh, donde xp es una solución particular del sistema dado y xh es una solución del sistema homogéneo asociado.

Resolución:

Transformamos el sistema a la forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 8 & 6 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F4-2F1]{\substack{F2-F1 \\ F3-2F1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & -6 & 10 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & -6 & 10 & 8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F4+6F2]{F3+5F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -14 & -10 & 32 \\ 0 & 0 & -14 & -10 & 32 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F3/14}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -16/7\\ 0 & 0 & -14 & -10 & 32\end{array}\right)\xrightarrow{F4+14F3}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -16/7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Si las columnas representan a las incógnitas x, y, z y w, y hacemos w=t, encontraremos (de abajo hacia arriba)

$$z=-\frac{16}{7}-\frac{5}{7}t$$

$$y=5+4\left(-\frac{16}{7}-\frac{5}{7}t\right)+3t=-\frac{29}{7}+\frac{1}{7}t$$

$$x=3-2\left(-\frac{29}{7}+\frac{1}{7}t\right)+\left(-\frac{16}{7}-\frac{5}{7}t\right)+t=9-t$$

Esta respuesta se puede expresar vectorialmente como:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-t\\ -\frac{29}{7}+\frac{1}{7}t\\ -\frac{16}{7}-\frac{5}{7}t\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ -\frac{29}{7}\\ -\frac{16}{7}\\ 0\end{pmatrix}+\frac{t}{7}\begin{pmatrix}-7t\\ t\\ -5t\\ 7t\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}9\\ -\frac{29}{7}\\ -\frac{16}{7}\\ 0\end{pmatrix}$ sería la solución particular y $\begin{pmatrix}-7t\\ t\\ -5t\\ 7t\end{pmatrix}$ la solución homogénea

5.6. Rango de una matriz

Llamamos espacio fila (columna) de A al subespacio de R^n generado por las filas (columnas) de la matriz A. Si dos matrices son equivalentes por filas, sus espacios filas son iguales, la dimensión del espacio fila (columna) de A se denomina rango fila (columna)de

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

A. El rango fila y el rango columna de una matriz son iguales y son el rango de la matriz.

Para encontrar el rango de una matriz la llevamos a la forma escalonada y contamos el número de filas no nulas.

Si A es una matriz mxn, entonces rango A + nulidad A=n, una matriz es no singular si, y solo si, rango A =n, esto equivale a decir que el rango de A = n si, y solo si, |A|≠0. Otras definiciones equivalentes son: el sistema lineal Ax=b tiene solución única si, y solo si, rango A = n; un conjunto de vectores es linealmente independiente si, y solo si, el determinante formado por los mismos no es igual a 0; un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas tiene una solución no trivial si, y solo si el rango A<n; un sistema lineal Ax=b tiene solución si, y solo si, el rango A =rango (A|b)

Ejercicio:

Sea S = {v1, v2, v3, v4, v5}, donde v1 = (1, 2, 1, 1), v2 = (2, 1, 3, 1), v3 = (0, 2, 1, 2), v4 = (3, 2, 1, 4) y v5 = (5, 0, 0, -1). Determine una base para el subespacio de R4, V=gens.

Transformamos la matriz a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F2-2F1 \\ F4-3F1 \\ F5-5F1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2\leftrightarrow F3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{F2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F3+3F2 \\ F4+4F2 \\ F5+10F2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F3/5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F4/5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow{F5-4F4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos las filas no nulas y estas forman la base pedida

$$Base = \{(1,2,1,1), \left(0,1,\tfrac{1}{2},1\right), \left(0,0,1,\tfrac{4}{5}\right), (0,0,0,1)\}$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis, interpretación y aplicación de los conceptos y propiedades de los espacios vectoriales en las secciones 6.4 a 6.6 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en las secciones 6.4, a 6.6 del texto básico.
- Chat académico "Espacios Vectoriales": Desarrollar un ejercicio propuesto por el docente, del tema espacios vectoriales.

Semana 14

5.7. Bases y Dimensión

En una base ordenada $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de un espacio vectorial V, el orden de los elementos de la misma es importante, aunque tuviera los mismos elementos, pero en diferente orden sería una base diferente. Si un vector v, del espacio vectorial V se puede expresar como $v = c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n$ con $c_1, c_2, ..., c_n$ números reales, se dice que $[v]_S = (c_1, c_2, ..., c_n)$ son las coordenadas de v en la base S.

Un mismo vector puede tener diferentes representaciones en bases diferentes, en ese contexto la matriz de transición de la base T a la base S ($P_{SßT}$) es una matriz formada por los vectores en columna de los elementos de la base T en la base S.

Para trasladar las coordenadas de la base T a la base S hay que multiplicar la matriz de transición de la base S por las coordenadas del vector en la base T. $[v]_S= P_{SßT}\ [v]_T$.

La matriz de transición de la base S a la base T es la inversa de la matriz de transición de la base T a la base S. $P_{TßS}=(P_{SßT})^{-1}$

Ejercicios:

Calcule el vector de coordenadas de $v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ con respecto a la base $S=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ para M_{22}.

Resolución:

Expresamos el vector como una combinación lineal de los elementos de la base

$$a\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

Lo que nos lleva al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a+c+d=1\\ -a+b=3\\ b-d=-2\\ c=2 \end{cases}$$

Que lo resolvemos usando el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3\leftrightarrow F4]{F2\leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F1+F4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F4-F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F1-F3]{F4-F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F4/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F2+F4]{F1-F4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Con lo que podemos decir que las coordenadas de v en la base pedida son (-3,0,2,2)

Calcule el vector $v \in P_2$ si $[v]_S=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$ y $S=\{t^2+1, t+1, t^2+t\}$

Resolución:

Aplicamos las coordenadas a la base

$$3(t^2+1)-1(t+1)-2(t^2+t)=t^2-3t+2$$

Otra forma de hacerlo es multiplicando la matriz formada por los vectores de la base por las coordenadas, el resultado es el mismo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-2 \\ 3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = t^{\wedge 2}-3t+2$$

Sean S= {(1,2), (0,1)} y T= {(1,1), (2,3)} bases para R2. Sean v= (1,5) y w= (5,4).

a. Determine los vectores de coordenadas v y w con respecto a la base T.
b. ¿Cuál es la matriz de transición $P_{\text{SßT}}$ de la base T a la base S?
c. Determine los vectores de coordenadas v y w con respecto a S utilizando $P_{\text{SßT}}$.
d. Determine directamente los vectores de coordenadas de v y w con respecto a S.
e. Determine la matriz de transición $Q_{\text{TßS}}$ de la base S a la base T.
f. Determine los vectores de coordenadas v y w con respecto a T utilizando $Q_{\text{TßS}}$. Compare las respuestas con las de a).

Resolución:

a. Establecemos dos sistemas de ecuaciones, uno para cada vector, los podemos resolver simultáneamente por el método de Gauss-Jordan de la siguiente manera (recuerde que usamos los vectores de la base T):

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-F1} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1-2F2} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Con lo que obtenemos

$$v = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\4\end{bmatrix}_T$$

y

$$w = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}_T$$

b. Para la matriz de transición debemos expresar los vectores de T en función de la base S, usamos un procedimiento similar.

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-2F1} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Con lo que la matriz de transición nos queda

$$P_{S\leftarrow T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c. Para determinar los vectores dados en la base S utilizamos la matriz de transición.

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}_T = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S$$

d. Ahora calculamos directamente estos vectores en S

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F1-2F1} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Resultando los vectores $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S$ y $w = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S$

e. Hallamos ahora Q$_{TßS}$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-F1} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1-2F2} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Con lo que

$$Q_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

f. Utilizamos esta matriz para calcular las coordenadas de los vectores v y w

$$v = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}_T$$

y

$$w = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}_T$$

Que resultan ser las mismas respuestas encontradas en a)

Sean S={v1,v2} y T={w1,w2} bases para R^2, donde v1=(1,2), v2=(0,1) si la matriz de transición de S a T es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine los vectores de la base T

Resolución:

Es suficiente aplicar la matriz de transición a los vectores de la base S para obtener los vectores de la base T.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}_T$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_T$$

5.8. Bases ortonormales

Se dice que un conjunto de vectores es ortogonal si todos los vectores son perpendiculares entre sí, y es ortonormal si además de ser ortogonal todos los vectores son unitarios.

La base canónica, aquella cuyos vectores tienen como componentes casi todos ceros y tienen un uno, sucesivamente en las diferentes posiciones, es un conjunto ortonormal.

Un conjunto de vectores ortogonales (ortonormales) no nulos es linealmente independiente.

Un vector v se puede expresar en una base ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ como $v=c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n$, donde $c_i=v.u_i$.

Un vector v se puede expresar en una base ortogonal $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ como $v=c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n$, donde $c_i = \frac{v.u_i}{u_i.u_i}$

Todo subespacio no nulo de R^n tiene una base ortonormal.

Ejercicios:

¿Cuáles de los siguientes son conjuntos ortogonales de vectores?

{(1,-1,2), (0,2,-1), (-1,1,1)}

Resolución:

(1,-1,2).(0,2,-1)=0-2-2=-4 Rta. No

{(1,2,-1,1), (0,-1,-2,0), (1,0,0,-1)}

Resolución:

(1,2,-1,1).(0,-1,-2,0)=0-2+2+0=0

(1,2,-1,1). (1,0,0,-1) =1+0+0-1=0

(0,-1,-2,0). (1,0,0,-1) =0+0+0+0=0 Rta. Si

{(0,1,0,-1), (1,0,1,1), (-1,1,-1,2)}

Resolución:

(0,1,0,-1). (1,0,1,1) =0+0+0-1=-1 Rta. No es un conjunto ortogonal de vectores

Sean u=$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y v=$\left(a,\frac{1}{\sqrt{2}},-b\right)$. ¿Para qué valores de a y b el conjunto {u, v} es ortonormal}

Resolución:

El producto punto de los dos vectores debe ser igual a cero

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\left(a,\frac{1}{\sqrt{2}},-b\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}+0-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{a-b}{\sqrt{2}}=0\rightarrow a-b=0\rightarrow a=b$$

La norma de los vectores debe ser 1

$$||u||=\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

$$||v||=\sqrt{a^2+\frac{1}{2}+a^2}=\sqrt{2a^2+\frac{1}{2}}=1\rightarrow 2a^2+\frac{1}{2}=1\rightarrow 4a^2+1=2\rightarrow 4a^2=1\rightarrow a^2=\frac{1}{4}\rightarrow a=b=\pm\frac{1}{2}$$

Utilice el proceso de Gram-Schmidt para determinar una base ortonormal para el subespacio de R4 con base {(1,1,-1,0), (0,2,0,1), (-1,0,0,1)}

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Resolución:

Como primer vector podemos tomar cualquier vector de la base, por ejemplo, el primero: (1,1,-1,0)

Para el segundo vector tomamos toro de los de la base, y le quitamos su proyección en la dirección del primero.

$$v_2 = (0,2,0,1) - \frac{(0,2,0,1).(1,1,-1,0)}{3}(1,1,-1,0) = (0,2,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,-1,0)$$
$$= (0,2,0,1) - \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},0\right) = \left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3},1\right)$$

Podemos eliminar los denominadores, nos interesa por ahora solamente la dirección del vector, que quedaría:

$$v_2=(-2,4,2,3)$$

Para el vector restante tomamos el que queda y le quitamos sus componentes en la dirección de los anteriores.

$$v_3 = (-1,0,0,1) - \frac{(-1,0,0,1).(1,1,-1,0)}{3}(1,1,-1,0) - \frac{(-1,0,0,1).(-2,4,2,3)}{33}(-2,4,2,3)$$

$$v_3 = (-1,0,0,1) + \frac{1}{3}(1,1,-1,0) - \frac{5}{33}(-2,4,2,3) = \frac{1}{11}(-4,-3,-7,6) \rightarrow (-4,-3,-7,6)$$

Transformamos ahora los vectores ortogonales en ortonormales haciéndolos vectores unitarios

$$\widehat{v_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1,0) = (\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$$
$$\widehat{v_2} = \frac{1}{\sqrt{33}}(-2,4,2,3) = \left(-\frac{2\sqrt{33}}{33},\frac{4\sqrt{33}}{33},\frac{2\sqrt{33}}{33},\frac{\sqrt{33}}{11}\right)$$

$$\widehat{v_3} = \frac{1}{\sqrt{110}}(-4,-3,-7,6) = (\frac{-2\sqrt{110}}{55}, \frac{-3\sqrt{110}}{110}, \frac{-7\sqrt{110}}{110}, \frac{3\sqrt{110}}{55})$$

Tome la base ortonormal de R^3 $S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), (0,1,0)\right\}$. Escriba el vector (2,-3,1) como combinación lineal de los vectores en S.

Resolución:

Recordemos que si tenemos una base ortonormal formada por vectores $\hat{u}_i$, cualquier vector $\vec{v}$ se puede expresar como $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$, donde $c_i = \vec{v}.\vec{u}_i$

Aplicando esto al problema tenemos

$$c_1 = (2,-3,1).\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5} - 0 + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$c_2 = (2,-3,1).\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{-4\sqrt{5}}{5} - 0 + \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

c3 = (2,-3,1)(0,1,0)=0-3+0=-3

Con lo que

$$(2,-3,1) = \frac{4\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{3\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 3(0,1,0)$$

5.9. Complementos ortogonales

Si W es un subespacio de R^n, un vector u de R^n es ortogonal a W si es ortogonal a cada vector de W, el conjunto de todos los vectores en R^n ortogonales a W se denomina complemento ortogonal de W en R^n ($W\perp$).

En base a esto podemos hacer algunas precisiones: el complemento ortogonal de R^n es el subespacio cero y el complemento ortogonal

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

del subespacio cero es R^n; $W\perp$ es un subespacio de R^n; Los subespacios W y $W\perp$ son disjuntos, ($W\cap W\perp=\{0\}$); cualquier elemento de R^n se puede expresar como la suma de un vector de W y otro de $W\perp$ ($R^n=W\oplus W\perp$). El complemento ortogonal del complemento ortogonal de W es el mismo W, simbólicamente $(W\perp)\perp=W$ (W y $W\perp$ son mutuamente complementos ortogonales)

Para una matriz:

El espacio nulo de la matriz es el complemento del espacio fila de la misma y el espacio nulo de la matriz transpuesta es el complemento del espacio columna de dicha matriz.

Las proyecciones de un vector sobre un subespacio vectorial tienen algunas propiedades muy útiles que pueden aprovecharse de diferentes maneras, como veremos:

Si W es un subespacio de R^n con una base ortonormal $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ y v es un vector de R^n, entonces existen $w\in W$ y $u\in W\perp$ (únicos), tales que $v = w+u$.

Como se trata de bases ortonormales podemos calcular $w = (v.w_1)w_1 + (v.w_2)w_2 + \ldots + (v.w_n)w_n$. A w se lo denomina proyección ortogonal de v sobre W ($proy_W v$)

En el caso de una base ortogonal

$$w = \frac{v.w_1}{w_1.w_1} w_1 + \frac{v.w_2}{w_2.w_2} w_2 + \ldots + \frac{v.w_n}{w_n.w_n} w_n$$

Podemos calcular la distancia de v a W usando $\|v-proy_W v\|$. En otras palabras, el vector en W más cercano a v es $proy_W v$ o, lo que es lo mismo, $\|v-w\|$ es mínima cuando $w=proy_W v$.

Ejercicios

Sea W un subespacio de R^3 con base $\{w_1, w_2\}$, donde $w_1 = (1,0,1)$ y $w_2 = (1,1,1)$. Exprese el vector v = (2,2,0) como suma de un vector en W y otro vector en W⊥.

Resolución:

Tomemos un vector u=(a,b,c)∈W⊥, este vector será perpendicular a cualquier vector de W, en particular a los de la base

$$(a,b,c)(1,0,1) = a+c = 0 \rightarrow a=-c$$

$$(a,b,c)(1,1,1) = a+b+c = b = 0$$

Si c=t

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que podemos afirmar que

Base de W⊥=(-1,0,1)

De acuerdo a lo solicitado en el problema:

(2,2,0)=vector en W+vector en W⊥

(2,2,0)=[d(1,0,1)+e(1,1,1)]+f(-1,0,1)

Planteamos el sistema de ecuaciones y lo transformamos mediante operaciones elementales de fila

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F3/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

f=-1

e=2

d+e-f=2→d=2-e+f=2-2+(-1)=-1

(2,2,0)=-1(1,0,1)+2(1,1,1)-1(-1,1,0)=(1,2,1)+(1,0,-1)

Donde (1,2,1) pertenece al subespacio W y (1,0,-1) pertenece a W⊥, puede además comprobar que los dos vectores son ortogonales.

Sea W un subespacio de R3 generado por el vector $\vec{w}$=(2,-3,1). Determine una base para W⊥.

Resolución:

Sea (a, b, c) un vector de W⊥, este vector será perpendicular a cualquier vector de W, en especial a (2,-3,1)

$$(a,b,c).(2,-3{,}1) = 2a - 3b + c = 0; c = t; a = r \to 3b = 2r + t \to b = \frac{1}{3}(2r+t)$$

Expresamos paramétricamente el vector (a, b, c)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \frac{1}{3}(2r+t) \\ t \end{pmatrix} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{r}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que

Base W⊥={(0,1,3),(3,2,0)}

Podríamos añadir que el subespacio W es la recta que pasa por el origen y por (2,3,-1) y W⊥ es el plano perpendicular a esa recta que también pasa por el origen.

Calcule los cuatro espacios vectoriales asociados con A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$ y compruebe que el espacio nulo de A es el complemento del espacio fila de A y que el espacio nulo de A^T es el complemento ortogonal del espacio columna de A.

Resolución:

Transformamos la matriz A para encontrar el espacio fila y el espacio nulo de A.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1\leftrightarrow F3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F4-F1]{F3-2F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F4+F2]{F3-F2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos: z=t;s=r

Tomamos la ecuación de la segunda fila (igualando a 0) y despejamos y

$$-3y + 7z - 2s = 0 \rightarrow y = \frac{7t - 2r}{3}$$

Tomamos la ecuación de la primera fila (igualando a 0) y despejamos x

$$x + y - 2z + 3s = 0 \rightarrow x = -\frac{7t - 2r}{3} + 2\mathrm{t} - 3\mathrm{r} = \frac{-t - 7r}{3}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -t - 7r \\ 7t - 2r \\ 3t \\ 3r \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{t}}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r/3\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y obtenemos que $S=\left\{\begin{pmatrix}-1\\7\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-7\\-2\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$ es una base para el espacio nulo de A

Y

T={(0,-3,7,-2),(1,1,-2,3)}

Es una base para el espacio fila de A.

Se puede verificar que los vectores de S y T son ortogonales entre sí.

Nos toca ahora trabajar con A^T para el espacio columna.

$$A^T = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 1 & 4\\ 3 & 7 & -2 & -9\\ 4 & -2 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F1\leftrightarrow -F2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -4\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 7 & -2 & -9\\ 4 & -2 & 3 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[F4-4F1]{\substack{F2-2F1\\F3-3F1}}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -4\\ 0 & -6 & 3 & 9\\ 0 & -2 & 1 & 3\\ 0 & -14 & 7 & 21\end{pmatrix}\xrightarrow{F2\leftrightarrow -F3}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -4\\ 0 & 2 & -1 & -3\\ 0 & -6 & 3 & 9\\ 0 & -14 & 7 & 21\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F4+7F2]{F3+3F2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -4\\ 0 & 2 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Encontramos que para el espacio nulo de A^T (y haciendo z=t y s=r):

$$y=\frac{t+3r}{2}$$

$$x=-3y+t+4r=-3\frac{t+3r}{2}+t+4r=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}r$$

Con lo que queda

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\end{pmatrix}=\frac{t}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{r}{2}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\end{pmatrix}$$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Glosario

Referencias bibliográficas

Anexos

Con lo que una base del espacio nulo de A^T será:

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Y la base del espacio columna será:

$$T' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Se puede comprobar que cada vector de S' es perpendicular a cada vector de T', con lo que concluimos que el espacio nulo de A^T es complemento ortogonal del espacio columna de A.

Determine la $proy_W v$ para el vector v=(3,4,-1) y el subespacio de R^3 con base $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

Resolución:

La fórmula de la proyección para vectores ortonormales es:

$$Proy_W\, v=(v.u_1)\, u_1+(v.u_2)u_2$$

Reemplazando

$$Proy_W v = (3,4,-1).(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}) + (3,4,-1).(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$Proy_W v = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{7}{\sqrt{5}}(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$Proy_W v = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) - (-\frac{14}{5}, 0, \frac{7}{5})$$

$$Proy_W v= (3,0,-1)$$

Determine la $proy_W v$ para el vector v=(-5,0,1) y el subespacio de R^3 con base $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

Resolución:

Aplicamos nuevamente la fórmula

$$Proy_W\, v=(v.u_1)\,u_1+(v.u_2)\,u_2$$

Reemplazando

$$Proy_W v=\left(-5,0,1).(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}})+(-5,0,1).(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$Proy_W v=-\frac{3}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}})+\frac{11}{\sqrt{5}}(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$Proy_W\, v=(-5,0,1)$$

Note usted que $Proy_W v=v$, esto sucede debido a que v está en W; podría suceder también que la proyección sea 0, en este caso se debería a que v es ortogonal a W.

Sea W el subespacio de R^3 con base ortonormal $\{w_1, w_2\}$, donde w_1 = (0,1,0) y $w_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Escriba el vector v = (1,2,-1) como w+u, con w en W y u en W⊥.

Resolución:

Como sabemos

$$w=Proy_W\, v=(v.u_1)\,u_1+(v.u_2)u_2$$

Reemplazando los datos del problema

$$w=Proy_W v=(1,2,-1).(0,1,0)(0,1,0)+(1,2,-1).\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$w=Proy_W v=2\,(0,1,0)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$w = Proy_W v = \ (0{,}2{,}0) - \ \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$$

$$w = Proy_W v = \ \left(-\frac{1}{5}, 2, -\frac{2}{5}\right)$$

Buscamos ahora el vector u

$$u=v-w=v-Proy_W\ v$$

$$u = (1{,}2,-1) - \left(-\frac{1}{5}, 2, -\frac{2}{5}\right)$$

$$u = \left(\frac{6}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

Comprobemos ahora que v=w+u

$$(1{,}2,-1) = \left(-\frac{1}{5}, 2, -\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{6}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

Comprobemos además que w y u son ortogonales

$$\left(-\frac{1}{5}, 2, -\frac{2}{5}\right) . \left(\frac{6}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right) = -\frac{6}{25} + \frac{6}{25} = 0$$

Determine la distancia del punto (2,3,-1) al plano 3x-2y+z=0.

Resolución:

Como ese plano pasa por el origen, constituye un subespacio en R3, determinaremos una base ortonormal del mismo.

Despejamos z

$$z=2y-3x$$

Un punto cualquiera del plano sería

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que una base para el plano sería

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Pero esta base no es ortogonal, para hacerla tomamos cualquiera como primer vector, por ejemplo (0,1,2), el segundo vector será (quitándole su proyección en la dirección de W)

$$(1{,}0,-3) - \frac{(1{,}0,-3).(0.1.2)}{5}(0{,}1{,}2)$$

$$(1{,}0,-3) + \frac{6}{5}(0{,}1{,}2)$$

$$\left(1,\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right) \rightarrow (5{,}6,-3)$$

Una base ortogonal sería

{(1,0,-3),(5,6,-3)

Y la base ortonormal sería

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right),\left(\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{3}{\sqrt{70}}\right)\right\}$$

La proyección del vector (2,3,-1) en el plano sería

$$Proy_{W}\ v=(v.u_{1})\,u_{1}+(v.u_{2})u_{2}$$

$$= (2,3,-1).\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$
$$+ (2,3,-1).(\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{3}{\sqrt{70}})(\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{3}{\sqrt{70}})$$
$$= \frac{5}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{31}{\sqrt{70}}(\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{3}{\sqrt{70}})$$
$$= \left(\frac{1}{2},0,-\frac{3}{2}\right) + (\frac{31}{14},\frac{93}{35},-\frac{93}{70})$$
$$= (\frac{19}{7},\frac{93}{35},-\frac{18}{7})$$

El vector ortogonal sería

$$(2,3,-1) - \left(\frac{19}{7},\frac{93}{35},-\frac{198}{70}\right) = (-\frac{5}{7},\frac{12}{35}, \ -\frac{268}{70})$$
$$= (-\frac{50}{70},\frac{24}{70}, \ -\frac{268}{70})$$

La norma de este vector sería la distancia del punto (2,3,-1) al plano 3x-2y+z=0

$d = \frac{1}{70}\sqrt{50^2 + 24^2 + 268^2}$ =3.91

5.10. Mínimos cuadrados

En muchos casos el sistema de ecuaciones Ax=b es inconsistente, es decir no tiene una solución que satisfaga todas las ecuaciones, muchas veces una alternativa es encontrar $A\hat{x}=\text{proy}_W v$ que sería la solución más próxima a todas las ecuaciones dadas.

Si nos planteamos $A\hat{x}$-b=0 y lo multiplicamos por A^T tenemos:

$A^T(A\hat{x}-b)=0$à$A^TA\hat{x}=A^Tb$ (solución por mínimos cuadrados de Ax=b)

Con lo que $\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$

Este procedimiento se utiliza mucho para encontrar el ajuste de una recta (en general de un polinomio) a un grupo de datos que supera el necesario para tener una solución exacta del problema.

Ejercicio

Determine una solución por mínimos cuadrados de Ax=b

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; b=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Encontramos la transpuesta de A

$$A^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos A^T con A y A^T con b

$$A^TA=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^Tb=\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con estos resultados formamos la matriz aumentada y resolvemos el sistema por cualquier método

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F1\leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-6F1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -17 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{-F2/17} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{17} \end{array}\right) \xrightarrow{F1-3F2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{24}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{17} \end{array}\right)$$

La solución por mínimos cuadrados de este sistema sería x_1=24/17 y x_2=-8/17

Repitamos el ejercicio con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} y\ b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

La transpuesta de A es

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicándola por A y por b obtenemos

$$A^T A = \begin{pmatrix} 19 & 18 & 14 \\ 18 & 39 & 24 \\ 14 & 24 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Formamos el sistema y resolvemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 19 & 18 & 14 & -3 \\ 18 & 39 & 24 & 2 \\ 14 & 24 & 16 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F1/19} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{18}{19} & \frac{14}{19} & -\frac{3}{19} \\ 18 & 39 & 24 & 2 \\ 14 & 24 & 16 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3-14F1]{F2-18F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{18}{19} & \frac{14}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & \frac{417}{19} & \frac{204}{19} & \frac{92}{19} \\ 0 & \frac{204}{19} & \frac{108}{19} & \frac{80}{19} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2\frac{19}{417}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{18}{19} & \frac{14}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & \frac{68}{139} & \frac{92}{417} \\ 0 & \frac{204}{19} & \frac{108}{19} & \frac{80}{19} \end{array}\right) \xrightarrow[F3-\frac{204}{19}F2]{F1-\frac{18}{19}F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{38}{139} & -\frac{51}{139} \\ 0 & 1 & \frac{68}{139} & \frac{92}{417} \\ 0 & 0 & \frac{60}{139} & \frac{236}{139} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{38}{139} & -\frac{51}{139} \\ 0 & 1 & \frac{68}{139} & \frac{92}{417} \\ 0 & 0 & \frac{60}{139} & \frac{236}{139} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{139}{60}F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{38}{139} & -\frac{51}{139} \\ 0 & 1 & \frac{68}{139} & \frac{92}{417} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{59}{15} \end{array}\right) \xrightarrow[F2-\frac{68}{139}F3]{F1-\frac{38}{139}F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3007}{2085} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6532}{57963} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{59}{15} \end{array}\right)$$

La solución, por mínimos cuadrados del sistema, sería:

x_1=-3007/2085; x_2=6352/57963 y x_3=59/15

En el caso de regresión lineal la matriz A tiene como primera columna los valores de x, en la segunda columna son todos unos y el vector b tiene en su columna los valores de y, esto debido a que todas las ecuaciones del sistema son de la forma y=mx+b, por ello la primera solución nos daría la pendiente de la recta de regresión, y la segunda solución nos daría la intersección de esa recta con el eje y.

Un productor elabora la siguiente tabla con sus ventas anuales por año.

Año	2015	2016	2017	2018	2018	2020
Ventas anuales (millones de dólares)	1.2	2.3	3.2	3.6	3.8	5.1

Si representamos los años 2015, …, 2020 como 0, 1, 2, 3, 4, 5, respectivamente; sea x el año y, y las ventas anuales (en millones de dólares)

a. Determine la recta de mínimos cuadrados que relaciona x con y.
b. Utilice la ecuación obtenida en a) para estimar las ventas anuales para el año 2024.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Resolución:

Escribamos las matrices A y b

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.3 \\ 3.2 \\ 3.6 \\ 3.8 \\ 5.1 \end{pmatrix}$$

Escribimos A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por A y b

$$A^T A = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 59.8 \\ 19.2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema usando la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = 330 - 225 = 105$$

$$\begin{vmatrix} 59.8 & 15 \\ 19.2 & 6 \end{vmatrix} = 358.8 - 288 = 70.8$$

$$\begin{vmatrix} 55 & 59.8 \\ 15 & 19.2 \end{vmatrix} = 1056 - 897 = 159$$

$$m = \frac{70.8}{105} = 0.674$$

$$b = \frac{159}{105} = 1.514$$

La ecuación de la recta que pasa más cerca de todos los puntos quedaría

y=mx+b=0.674x+1.514

Para realizar la predicción solicitada en el literal b) reemplazamos x por 9

y=0.674(9)+1.514=7.6

Se prevé una venta de 7.6 millones para el año 2024.

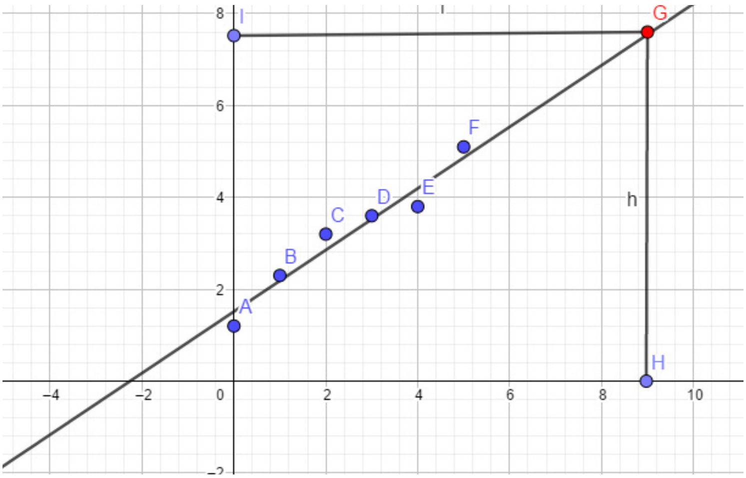


Gráfico 5.

En regresión polinómica se van agregando columnas a la izquierda de la matriz A con los cuadrados, cubos, etc., de los datos de x hasta llegar al grado del polinomio deseado. B continua igual.

El distribuidor de un producto nuevo ha obtenido los siguientes datos:

Número de semanas desde la presentación del producto	Ventas por semana (en millones de dólares)
1	0.8
2	0.5
3	3.2
4	4.3
5	4
6	5.1
7	4.3
8	3.8
9	1.2
10	0.8

Sean x los ingresos brutos por semana (en millones de dólares) y t las semanas después de la presentación del producto.

a. Determine un polinomio cuadrático de mínimos cuadrados para los datos dados.
b. Utilice la ecuación del literal a) para estimar los ingresos brutos 12 semanas después de la presentación del automóvil.

Resolución:

Escribimos las matrices A y b, note que en la primera columna de A los valores corresponden a los cuadrados de x, en la segunda columna van los valores de x y en la tercera columna solo unos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 81 & 9 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ 3.2 \\ 4.3 \\ 4 \\ 5.1 \\ 4.3 \\ 3.8 \\ 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Escribimos la transversa de A

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la transpuesta por A y b

$$A^T A = \begin{pmatrix} 25333 & 3025 & 385 \\ 3025 & 385 & 55 \\ 385 & 55 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1015.1 \\ 158.5 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Formamos el sistema de ecuaciones con estos dos resultados y los resolvemos por el método más conveniente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 25333 & 3025 & 385 & 1015.1 \\ 3025 & 385 & 55 & 158.5 \\ 385 & 55 & 10 & 28 \end{array}\right)$$

el resultado es

Término cuadrático a=-0.2129

Termino lineal b=2.3962

Término independiente c=-2-.1833

La parábola que más se acerca a los datos es $y = -0.2129x^2 + 2.3962x - 2.1833$

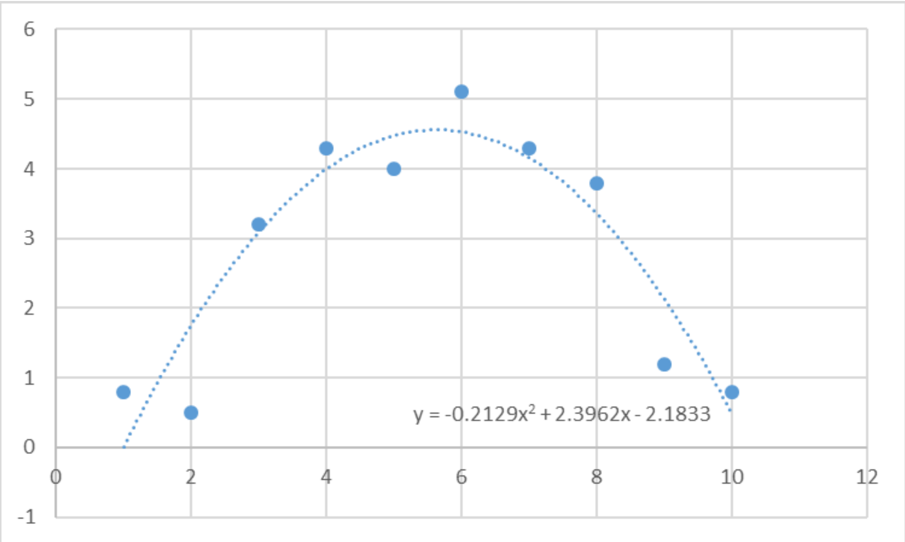


Gráfico 6.

Para la semana 12, vemos en el gráfico que las ventas serían negativas, lo cual es imposible, lo que nos alerta del riesgo de extrapolar resultados (ir más allá de los datos, menos de una o más de 10 semanas, interpolar sería buscar proyecciones entre los datos)

Confirmemos calculando

$y=-0.2129(12)^2+2.3692(9)-2.8133=--30.6576+21.3228-2.8133=-12.1$ millones

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis, interpretación y aplicación de los conceptos y propiedades de los espacios vectoriales en las secciones 6.7 a 6.10 del texto básico.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en las secciones 6.7, a 6.10 del texto básico.
- Realizar Cuestionario Teórico 5 en línea sobre "Espacios Vectoriales"
- Realizar Cuestionario de Resolución de Problemas 5 en línea sobre "Espacios Vectoriales"

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 5

Una unidad más de estudios culminada, es necesario determinar lo aprendido, le invito a desarrollar la autoevaluación 5, lo cual le será de mucha ayuda para un autoanálisis del nivel de sus conocimientos y competencias adquiridas respecto a la unidad estudiada. Usted puede encontrar las respuestas al final de la guía didáctica.

Indique con una V (verdadero) o F (falso) las siguientes expresiones:

1. (   ) Un espacio vectorial real es un conjunto de vectores que cumple propiedades de la suma y multiplicación por escalar entre ellos.
2. (   ) Si u y v son elementos cualesquiera de V, dado que $u \oplus v$ está en V, dicha característica constituye la propiedad de cerradura en Å.
3. (   ) Si V es un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V que no cumple las operaciones de suma y multiplicación por escalar, W es subespacio de V.
4. (   ) Todo espacio vectorial tiene el subespacio {0}.
5. (   ) Un subespacio cumple las condiciones de la operación $\oplus$ y o en un espacio vectorial.
6. (   ) Un espacio vectorial V no puede ser expresado con un conjunto finito de vectores contenidos en V.
7. (   ) Cada vector de un espacio vectorial V puede ser generado por un conjunto de vectores del espacio vectorial V, por lo que el conjunto de vectores no se puede denominar generador de V.

8. ( ) Para establecer si un conjunto de vectores genera al espacio vectorial V, se selecciona un vector arbitrario v en V, luego se determina si v es una combinación lineal de los vectores dados.

9. ( ) Un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, son linealmente dependientes si existen constantes todas iguales a cero tal que al ser multiplicadas por los vectores mencionados el resultado sea 0.

10. ( ) Un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, forman una base para V, si generan a V y son linealmente independientes.

11. ( ) Un espacio vectorial es de dimensión finita si existe un subconjunto finito de V que es una base para V.

12. ( ) El número de vectores en una base para V, es la dimensión de un espacio vectorial.

13. ( ) La dimensión del espacio fila de A se denomina rango fila de A y la dimensión del espacio columna de A se denomina rango columna de A.

14. ( ) El rango fila y el rango columna de una matriz $A = (a_{ij})$ de mxn no son iguales.

15. ( ) Para obtener el rango de una matriz A, se debe llevar a su forma escalonada reducida por filas, el número de las filas no nulas constituye el rango.

Ejercicios de aplicación

16. Determine si el conjunto dado V es cerrado (constituye o no espacio vectorial) bajo las operaciones ⊕ y o.

    a. V = {(x, y) / y = 2x+1, x∈R, es decir V, es el conjunto de puntos en R^2 que están sobre la recta y=2x+1, suponga 2 puntos para las operaciones (x_1, y_1) y (x_2, y_2), los cuales están en V.

    b. V, es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y), donde x>0 y *y*>0; donde las operaciones están definidas como:

    (x, y) ⊕ *(x*1*, y*1*)* = *(x+ x*1*, y+ y*1*)* y

    *c*O*(x, y)* = *(cx, cy)*

17. Determine si el conjunto *W*, formado por todos los puntos de R^2, que tiene la forma (x, x), es una línea recta y si puede ser considerado un subespacio.

18. Determine si los vectores $v_1 = (1,2,0,1)$, $v_2 = (1,0,-1,1)$ y $v_3 =$ (1,6,2,0) son linealmente independientes.

19. Sea *S* = {v1, v2, v3, v4}, donde v1 = (1,2,2), v2 = (3,2,1), v3 = (11,10,7), y v4 = (7,6,4). Determine una base para el subespacio R^3, y la dimensión.

20. Determine el rango y nulidad de A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 7 & 8 & -5 & -1 \\ 10 & 14 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma en cómo se resuelven paso a paso.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios

- Las propiedades que se debe tomar en cuenta para los espacios vectoriales serían: Cerradura, conmutativa, asociativa y distributiva
- Recuerde que las propiedades que definen un espacio vectorial son las mismas que se aplican directamente a los números reales
- Puede resumirse los espacios vectoriales de la siguiente manera:
- R= conjunto de todos los números reales
- R^2= conjunto de todos los pares ordenados
- R^3= conjunto de todas las tercias ordenadas
- R^n= conjunto de todas las n-adas ordenadas
- Para la solución de los ejercicios de aplicación cabe señalar que es importante tener en cuenta el producto por un escalar y este debe cumplir con las propiedades para ser un espacio vectorial.

Ir al solucionario

Actividades finales del bimestre

Semana 15

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en los capítulos 4 (ejercicios complementarios y examen del capítulo), 5 (ejercicios complementarios y examen del capítulo) y 6 (ejercicios adicionales y examen del capítulo) del texto básico.

Semana 16

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en los capítulos 4 (ejercicios complementarios y examen del capítulo), 5 (ejercicios complementarios y examen del capítulo) y 6 (ejercicios adicionales y examen del capítulo) del texto básico.
- Desarrollar la evaluación presencial.

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	Si y=mx tenemos una recta que pasa por el origen
2	f	La representación gráfica de una ecuación lineal es una recta
3	v	Si tenemos m ecuaciones con n incógnitas en total, tenemos un sistema de ecuaciones lineales
4	f	a1, a2, a3, … son los coeficientes de la ecuación
5	f	Los sistemas lineales compatibles tienen solución única o infinitas soluciones
6	v	Existen tres alternativas en un sistema lineal, no tiene solución, tiene solución única o tienen infinitas soluciones, no existen sistemas lineales con 2, 3, 4, … soluciones
7	a	En b y c tenemos incógnitas elevadas a una potencia distinta de uno.
8	1b, 2a,3c	Si las rectas se cortan en un solo punto tenemos una solución única, si las rectas coinciden tenemos infinitas soluciones, si las rectas no se cortan no tenemos solución.
9	1b, 2a	En los sistemas consistentes hay alguna solución (una o infinitas), en los sistemas inconsistentes no hay solución.
10	c	Los puntos de intersección representan las soluciones del sistema
11	a	Los puntos de intersección representan las soluciones del sistema
12	b	Los puntos de intersección representan las soluciones del sistema

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
13	a	Los valores de las incógnitas deben ser los mismos para todas las ecuaciones del sistema
	14	
a	$\begin{cases} 2x+4y-6z=12 \\ x+2y+z=13 \\ 3x+6y-9z=10 \end{cases}$	Note que la primera ecuación se ha multiplicado por 2
b	$\begin{cases} 3x+6y-9z=10 \\ x+2y+z=13 \\ 2x+4y-6z=12 \end{cases}$	Hemos intercambiado las ecuaciones 3 y 1
c	$\begin{cases} 3x+6y-9z=10 \\ x+2y+z=13 \\ 8x+16y-24z=32 \end{cases}$	A la ecuación 3 se le suma el doble de la ecuación 1
d	$\begin{cases} 3x+6y-9z=10 \\ 3x+6y+3z=39 \\ 8x+16y-24z=32 \end{cases}$	La ecuación 2 se ha multiplicado por 3
e	$\begin{cases} 2x+4y-10z=-3 \\ 3x+6y+3z=39 \\ 8x+16y-24z=32 \end{cases}$	Restamos la ecuación 1 -1/3 de la ecuación 2
f	$\begin{cases} 2x+4y-10z=-3 \\ 3x+6y+3z=39 \\ 13x+26y-31z=68 \end{cases}$	A la ecuación 3 le sumamos las ecuaciones 1 y 2
g	$\begin{cases} 2x+4y-10z=-3 \\ -10x-20y+34z=-29 \\ 13x+26y-31z=68 \end{cases}$	Ecuación 2 menos la ecuación 3
h	$\begin{cases} 2x+4y-10z=-3 \\ -10x-20y+34z=-29 \\ 7x+14y-17z=33 \end{cases}$	A ecuación 3 le sumamos la ecuación 2 y el doble de la ecuación 1
i	$\begin{cases} -10x-20y+34z=-29 \\ 2x+4y-10z=-3 \\ 7x+14y-17z=33 \end{cases}$	Intercambiamos las ecuaciones 1 y 2
j	$\begin{cases} -19x-38y+61z=-59 \\ 2x+4y-10z=-3 \\ 7x+14y-17z=33 \end{cases}$	Ecuación 1 menos las ecuaciones 2 y 3
	15	
a	Dividir la ecuación 1 para 2	Hemos dividido la primera ecuación para 2
b	Multiplicar la ecuación 1 por 4	Se ha multiplicado la primera ecuación por 4
c	Sumar a la ecuación 3 la ecuación 1 y 2	Se ha sumado la tercera ecuación con la primera y la segunda

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
d	Restar dos veces la ecuación 2 a la 3	A la ecuación 3 se le ha restado el doble de la ecuación 2
e	Intercambiar la ecuación 1 con la 3	Hemos cambiado de lugar las ecuaciones 1 y 3
f	Ecuación 3 más dos veces la 1	A la ecuación 3 le hemos sumado el doble de la ecuación 1
	16	
a	$\begin{cases} -x+2y-2z=-1 \\ -2x-4y+3z=-6 \\ 3x+4y-8z=-1 \end{cases}$	Las ecuaciones 1 y 3 se han intercambiado
b	$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ -2x-4y+3z=-6 \\ 3x+4y-8z=-1 \end{cases}$	La ecuación 1 se ha dividido para -1, lo que equivale a cambiar de signo la ecuación
c	$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ -8y+7z=-4 \\ 10y-14z=-4 \end{cases}$	A la ecuación 2 se le suma el doble de la ecuación 1 y a la ecuación 3 se le resta tres veces la ecuación 1
d	$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ y-\frac{7}{8}z=\frac{1}{2} \\ 10y-14z=-4 \end{cases}$	Dividimos la ecuación 2 para 8 y le cambiamos de signo
e	$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ y-\frac{7}{8}z=\frac{1}{2} \\ -\frac{21}{4}z=-9 \end{cases}$	Restamos a la ecuación 3 10 veces la ecuación 2
f	z = 12/7	Despejamos el valor de z
g	y = 2	Reemplazamos el valor de z en la segunda ecuación y despejamos y
h	x = 11/7	Reemplazamos los valores de y, y z en la primera ecuación y despejamos x
	17	
a	Consistente, solución única Rta: x=-1, y=2	Compruebe la solución

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
b	Inconsistente, no tiene solución	Los coeficientes de x e y de la segunda ecuación son el triple de la primera, pero el término independiente no lo es.
c	Inconsistente, no tiene solución	Entre la primera ecuación y la segunda hay una solución, y entre la segunda y la tercera hay otra, por ende, no hay una solución común a las tres ecuaciones.
d	Consistente, solución única Rta: x= 5, y= -5	Compruebe la solución en las tres ecuaciones
e	Inconsistente, el sistema no tiene solución	Los coeficientes de x e y en la segunda ecuación son el triple de la primera, pero en el término independiente no
f	Consistente, infinitas soluciones	La segunda ecuación es el triple de la primera, básicamente son la misma ecuación que tiene infinitas soluciones
g	Consistente, solución única, Rta: x = - 10/11, y = 8/11, z = 10/11	Compruebe la solución en todas las ecuaciones
h	Consistente, solución única, Rta: x= 0, y= 0, z = 1	Compruebe la solución en todas las ecuaciones
i	Inconsistente, sin solución	Al intentar resolver el sistema no encontramos solución
j	Consistente, solución única. Rta: x = -4/11, y = 1/11, z = 8/11	Compruebe la solución en todas las ecuaciones

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
k	Consistente, solución única, Rta: x= -22/85, y= 57/85, z = 77/85	Compruebe la solución en todas las ecuaciones
l	Consistente, infinitas soluciones	La tercera ecuación se obtiene sumando la primera y la segunda, tendríamos entonces solamente dos ecuaciones independientes y tres incógnitas
m	Consistente, única solución. Rta: x = -40/11, y = 295/44, z = -8/11, w =-101/44	Compruebe la solución en las cuatro ecuaciones

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	v	Un conjunto de ecuaciones lineales es un sistema lineal
2	v	Resolver un sistema de ecuaciones lineales es encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones
3	f	Algunos sistemas de ecuaciones lineales pueden no tener una solución, es decir ser inconsistentes.
4	v	Las tres opciones que tiene un sistema lineal son: infinitas soluciones, solución única o no tener solución.
5	f	m representa el número de filas y n el de columnas
6	f	Una matriz es igual a otra cuando todos sus elementos son respectivamente iguales
7	f	El resultado es una matriz de orden 1x1
8	f	La multiplicación de matrices no tiene la propiedad conmutativa
9	v	Dos matrices son inversas, la una de la otra, si su producto es igual a la matriz identidad
10	v	En la forma escalonada el elemento pivote de cada fila es 1
11	f	Las operaciones elementales por fila o renglón son: intercambio de filas, multiplicación de la fila por un número diferente de 0; y restar a una fila otra multiplicada por un número.
12	v	El método de Gauss-Jordan consiste en transformar la parte izquierda de la matriz ampliada a la forma escalonada reducida.
13	v	El primer elemento de cada fila diferente de 0 debe ser 1
14	f	Los elementos de la segunda y tercera filas de la matriz producto no son iguales a los de la matriz identidad
15	f	No necesariamente, depende del número de filas
16	f	Para tener una matriz equivalente debemos haber realizado previamente una operación fundamental por renglón
17	a	Compruebe los valores obtenidos

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
18	BC, no se puede multiplicar	Compruebe
19	a	Compruebe las soluciones
20	b	Compruebe multiplicando la matriz original con su inversa, el resultado debe ser la matriz identidad

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	v	El determinante de una matriz con un único elemento será el valor de ese único elemento
2	v	El valor del determinante es a11a22-a12a21
3	v	El determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales
4	f	Cuando intercambiamos una vez filas, el valor del determinante cambia de signo
5	f	El valor del determinante es 0, existe
6	f	El valor del cofactor es 8
7	v	La fórmula enunciada es correcta
8	f	La fórmula proporcionada está invertida
9	v	Correcto, es parte del método de Cramer
10	v	Correcto, es la condición (que tenga solución única)
11		Verifique
12	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	Verifique multiplicando por A, el resultado debe ser la matriz identidad
13		Verifique los valores

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	v	El enunciado es correcto
2	v	El enunciado es correcto
3	v	El enunciado es correcto
4	v	El enunciado es correcto
5	v	El enunciado es correcto
6	v	El enunciado es correcto
7	v	El enunciado es correcto
8	v	El enunciado es correcto
9	v	El enunciado es correcto
10	v	El enunciado es correcto
11		
a	c.a = (4,6,8)	Multiplicamos los componentes de a por 2
b	a + b = (3,1,9)	Sumamos los respectivos componentes de a y b
c	a.b = 16	(2)(1) + (3)(-2) + (4)(5) = 16
d	llall = $\sqrt{29}$	$2^2+3^2+4^2=29$
e	axb = 23i – 6j - 7k	Verificamos aplicando un método diferente al usado para llegar a la respuesta

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 5		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	v	El enunciado es correcto
2	v	El enunciado es correcto
3	f	Para que sea un subespacio vectorial debería cumplir con la propiedad de cerradura de las operaciones mencionadas
4	v	El enunciado es correcto
5	v	El enunciado es correcto
6	f	Si existen los espacios vectoriales con finitos elementos, por ejemplo, los binarios.
7	f	Si cada vector de V puede ser generado por un conjunto de vectores, a este conjunto de lo denomina generador de V
8	v	El enunciado es correcto
9	f	El enunciado debería decir "diferentes" de cero
10	v	El enunciado es correcto
11	v	El enunciado es correcto
12	v	El enunciado es correcto
13	v	El enunciado es correcto
14	f	El rango fila y el rango columna de una matriz son iguales
15	v	El enunciado es correcto
16		
1	no constituye un espacio vectorial.	No contiene al vector (0,0)
2	no es un espacio vectorial	No contiene al vector (0,0)
3	Puede ser considerado un subespacio vectorial de R2	Es parte del espacio vectorial R2 y cumpla las propiedades de cerradura para la suma y el producto escalar
4	Los vectores son linealmente independientes	Se puede comprobar a través de la definición

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Autoevaluación 5		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
5	Base posible v1, v2, dimensión =	Solo dos de los vectores son linealmente independientes
6	Rango=2, nulidad=2	Se reduce a la forma escalonada usando operaciones elementales de fila, solo hay dos filas no

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

5. Glosario

Determinante: Es una matriz A cuadrada, en donde se pueden combinar para encontrar un número real “determinante”, y que luego se utiliza para resolver ecuaciones lineales simultáneamente

Ecuación: Es una igualdad algebraica que contiene números y letras que representan números, así por ejemplo se tiene que: $x+3y+6z=7$, es una ecuación.

Ecuación lineal: La ecuación de primer grado está representada por incógnitas que tienen una potencia 1, por ejemplo: $6(x-2)+3x=-3x$, para este caso se tiene una ecuación de primer grado o también definida como “lineal”.

Espacio vectorial: Determinado por un conjunto de elementos definidos como vectores y un conjunto de números reales definidos como escalares; se puede realizar la adición vectorial y la multiplicación por un escalar.

Igualdad: Es una expresión matemática que contiene una igualdad “=”.

Igualación: un tipo de método de resolución de sistemas lineales, despeja una variable en ambas ecuaciones para igualar entre sí las expresiones obtenidas, finalmente se tiene una ecuación con una sola incógnita que se resuelve.

Identidad: Es una expresión algebraica que muestra evidencia ser verdadera.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos

Matriz cuadrada: Es una matriz A que tiene el mismo número de filas y columnas.

Matriz identidad: Es una matriz A de dimensión mxn en donde se tiene un valor de uno en la diagonal principal y cero en el resto de elementos.

Matriz Inversa: Una matriz cuadrada A inversa cuando existe una matriz B con la propiedad de que AxB=1.

Reducción: Un tipo de método de resolución de sistemas lineales, en la que se promueve que una de las dos variables aparezca con coeficientes opuestos, para que, al realizar la adición entre las expresiones, se elimine, obteniendo una ecuación con una única variable. La otra variable se obtiene sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones originales, el valor de la variable conocida.

Sistema compatible: Sistema lineal que tiene solución.

Sistema compatible definido: Sistema que tiene una única solución.

Sistema incompatible: Sistema que no tiene ninguna solución.

Subespacio: Es un subconjunto W de un espacio vectorial V que es cerrado bajo la operación de la suma y la multiplicación por un escalar.

Sustitución: Un tipo de método de resolución de sistemas lineales, que despeja una las variables de una de las dos ecuaciones y sustituye la expresión algebraica resultante en esa misma variable, pero en la segunda ecuación.

Término: Es un sumando cualquiera utilizada en una expresión algébrica.

Vector: Es el nombre genérico para cualquier elemento de un espacio vectorial.

Vector unitario: Es un vector de longitud 1.

6. Referencias bibliográficas

Kolman, B. & Hill, D.R. (2013). *Algebra lineal fundamentos y aplicaciones*. Bogotá: Pearson.

Larson, R. y Falvo, D. (2010). Fundamentos de Álgebra Lineal. México: Cengage Learning.

7. Anexo

USO DE EXCEL EN MATRICES Y DETERMINANTES

Para Multiplicar Matrices

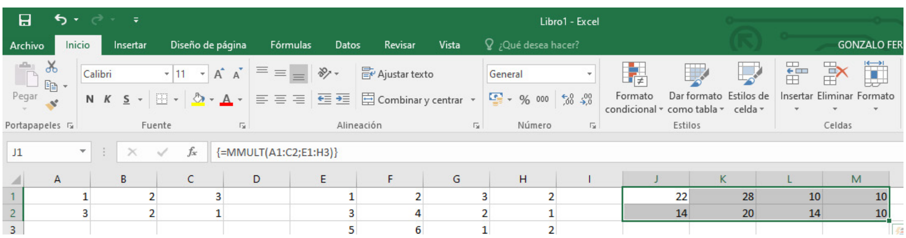
Primero “sombree” (marque) el espacio donde va a escribirse el resultado, recuerde que para que la multiplicación pueda realizarse el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz y que la matriz resultante tendrá tantas filas como la primera matriz y tantas columnas como la segunda matriz.

El segundo lugar, en la parte superior izquierda del espacio sombreado debe escribir el siguiente comando:

=MMULT(rango matriz 1; rango matriz 2)

Donde rango matriz 1 es la ubicación de la primera matriz que va a multiplicar; rango matriz 2 es la ubicación de la segunda matriz a multiplicar.

Finalmente presiona simultáneamente las teclas Control + Mayúscula (Shift) y Enter (Intro).



Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Glosario

Referencias bibliográficas

Anexos

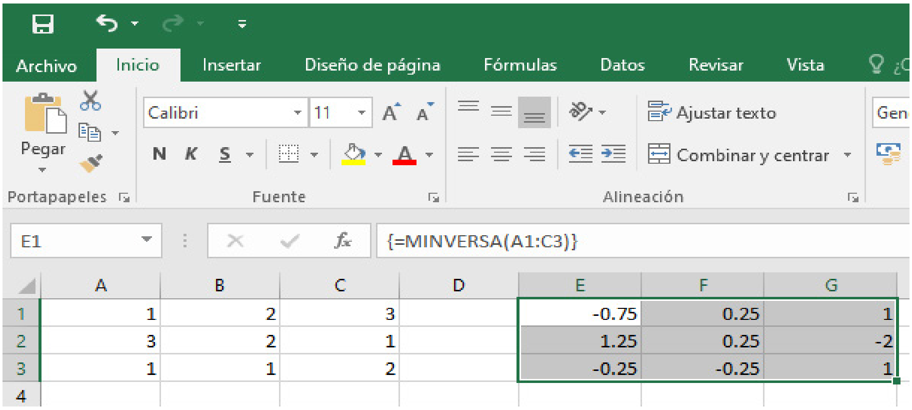
Para encontrar la inversa de una matriz

Seleccionamos el espacio donde va a ir la matriz inversa, recordemos que, si la matriz original es de orden mxn, la matriz inversa será de orden nxm.

Escribimos luego el comando:

=MINVERSA(rango de la matriz a invertir)

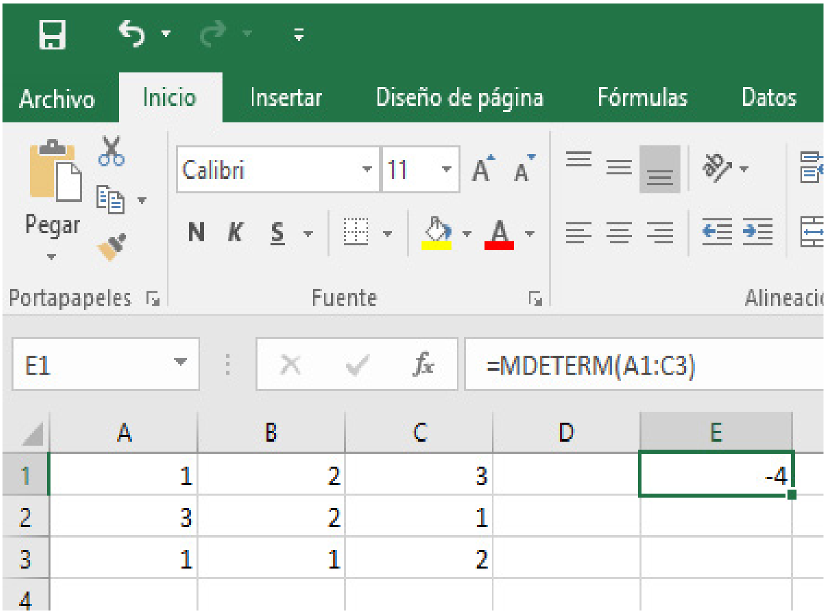
Y finalmente presionamos al mismo tiempo las teclas Control (Ctrl)+Mayúscula (Shift) + Enter (Intro).



Para encontrar el determinante de una matriz

En la celda donde queremos que aparezca el valor del determinante escribimos:

=MDETERM(rango de la matriz) y luego presionamos enter.



Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas
Anexos