UTPL

La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Cálculo Diferencial

Guía didáctica

UTPL

Facultad de Ingenierías y Arquitectura

Departamento de Ciencias de la Computación y Electrónica

Cálculo Diferencial

Guía didáctica

Carrera	*PAO Nivel*
▪ *Tecnologías de la Información*	II

Autor:

Riofrío Calderón Guido Eduardo

MATE_1114

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Universidad Técnica Particular de Loja

Cálculo Diferencial

Guía didáctica

Riofrío Calderón Guido Eduardo

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-757-7

27 de marzo, 2023

Índice

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

Pensamiento crítico y reflexivo.

1.3. Competencias específicas de la carrera

Construir modelos específicos de ciencias de la computación mediante esquemas matemáticos y estadísticos, para propiciar el uso y explotación eficiente de datos e información.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

- Conocer y comprender los principios elementales del cálculo diferencial.
- Abstraer, escribir y describir con el lenguaje matemático los fenómenos propios de la titulación.
- Resolver problemas con el empleo correcto de herramientas matemáticas.

2. Metodología de aprendizaje

Para el aprendizaje de cálculo diferencial se cuenta con diversas metodologías centradas en diversos aspectos, tales como investigación, cooperación, interacción, desarrollo de problemas, utilización de herramientas *TIC* y aprendizaje por pares.

En esa dirección, la metodología ABP (aprendizaje basado en problemas) permite que el profesor asuma un nuevo rol en el proceso de enseñanza – aprendizaje y promueva que el estudiante sea sujeto activo en su aprendizaje, desarrollando la capacidad de analizar, modelar y proponer soluciones a partir de la utilización de herramientas de cálculo en problemas propios de su entorno real.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultados de aprendizaje 1 y 2

- Conoce las características de una función.
- Opera con funciones continuas.

Estimados estudiantes, en el campo del cálculo diferencial, es esencial tener conocimiento sobre las características de una función, así como también operar con funciones continuas, ya que son temas esenciales para entender conceptos avanzados en matemáticas y son pasos importantes en su formación académica. Los animo a poner su empeño y perseverancia para entender y dominar estos temas. Recuerden que el esfuerzo y la determinación son clave para alcanzar cualquier objetivo. ¡Confíen en sus habilidades, siempre mantengan una actitud positiva y nunca se rindan!.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 1

Estimados estudiantes. ¡Bienvenidos al curso de Cálculo Diferencial! Como estudiantes de Tecnologías de la Información, es importante que comprendan los conceptos matemáticos fundamentales para poder aplicarlos en sus futuros proyectos. El Cálculo diferencial es una herramienta esencial para la optimización de algoritmos y la resolución de problemas. Estoy emocionado de tenerlos en este curso y espero que trabajemos juntos para aprender y comprender los conceptos fundamentales de esta materia. ¡Juntos, podremos dominar los contenidos y prepararnos para tener éxito en esta asignatura y en la carrera de Tecnologías de la Información! ¡Empecemos!

El cálculo diferencial es una rama de las matemáticas que se enfoca en el estudio de tasas de cambio y tasas de variación. Es una herramienta esencial para el análisis y el diseño de sistemas en campos como la física, la ingeniería, las finanzas y las ciencias de la computación. En el cálculo diferencial se utilizan conceptos como derivadas, diferenciales, máximos y mínimos, y análisis de concavidad para analizar cómo una función cambia en relación con sus variables independientes. Es una herramienta esencial para la optimización y resolución de problemas.

1.1. Tipos de números

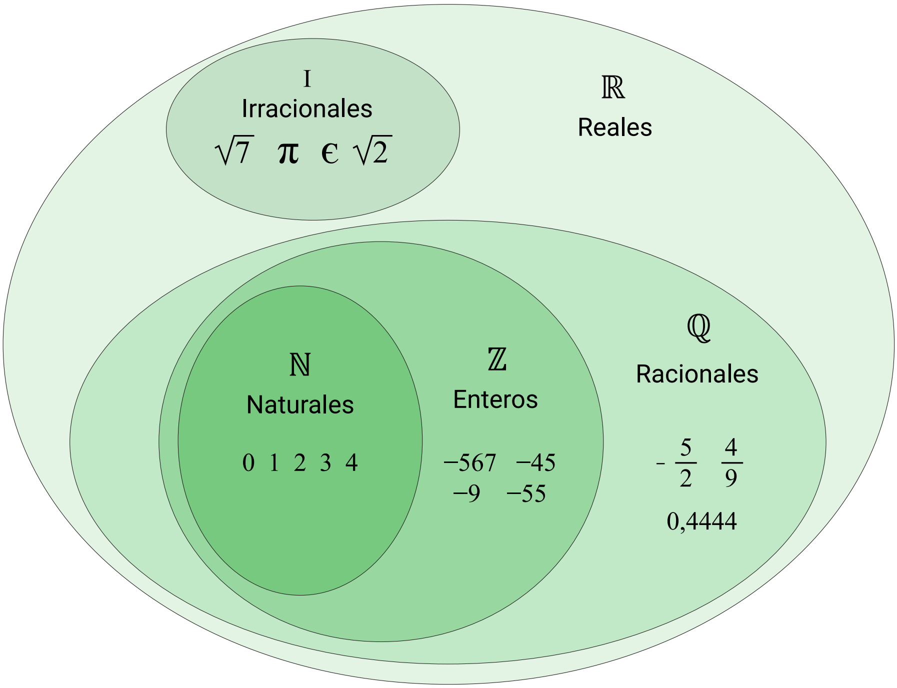
Vamos a empezar el estudio de esta asignatura haciendo un repaso a las funciones, pero antes de eso revisemos los sistemas de numeración.

Existen varios tipos de números, revisemos a continuación esta clasificación, en la cual se muestran los tipos más importantes:

- **Números naturales (*N*):** son aquellos que se utilizan para contar objetos y no tienen fracciones ni decimales, como 1, 2, 3, 4, etc.
- **Números enteros (*Z*):** son aquellos que incluyen a los números naturales y también incluyen números negativos, como -1, -2, -3, etc.
- **Números racionales (*Q*):** son aquellos que pueden ser expresados como fracciones de números enteros, como 1/2, 3/4, -5/6, etc.
- **Números irracionales (*I*):** son aquellos que no pueden ser expresados como fracciones de números enteros, como $\sqrt{2},\ \pi,\ \varepsilon,$ etc.
- **Números reales (*R*):** son aquellos que incluyen a todos los números anteriores, tanto racionales como irracionales.
- **Números complejos:** son aquellos que incluyen una parte real y una parte imaginaria. Por ejemplo, 3 + 4i donde 3 es la parte real e 4 i es la parte imaginaria.

Algunas clasificaciones adicionales son los números cardinales, los números ordinales, los números algebraicos, los números trascendentes, los números transfinitos.

Figura 1.
Tipos de números



Nota. Riofrío, G., 2023.

1.2. Intervalos

En matemáticas, un intervalo es un conjunto de números que se encuentran entre dos límites específicos. Los límites pueden ser números finitos o infinitos, y pueden incluir o excluir los límites mismos. Los intervalos se utilizan comúnmente en análisis matemático, estadísticas y otras áreas.

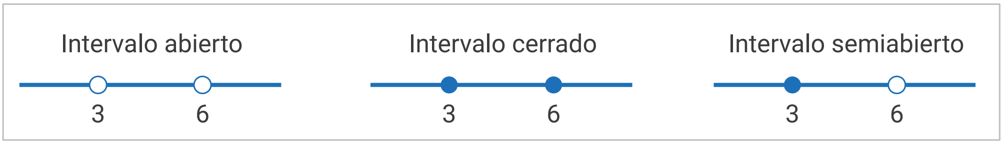
Existen varios tipos de intervalos, pero algunos de los más comunes son:

- **Intervalo abierto:** un intervalo que no incluye sus límites. Por ejemplo, (3, 6) es un intervalo abierto que incluye todos los números entre 3 y 6, pero no incluye ni 3 ni 6.

- **Intervalo cerrado:** un intervalo que incluye sus límites. Por ejemplo, [3, 6] es un intervalo cerrado que incluye todos los números entre 3 y 6, incluyendo 3 y 6.
- **Intervalo semiabierto:** un intervalo que incluye uno de sus límites, pero no el otro. Por ejemplo, [3, 6) es un intervalo semiabierto que incluye todos los números entre 3 y 6, incluyendo 3 pero no incluyendo 6.
- **Intervalo infinito:** un intervalo que tiene uno o ambos límites infinitos. Por ejemplo, (-∞, 6] es un intervalo infinito que incluye todos los números menores o iguales a 6.

Los intervalos son herramientas importantes en la teoría de conjuntos, el análisis matemático, la estadística, la teoría de control y otras áreas. En la figura 2, se muestra la representación gráfica de estos intervalos, se recomienda revisar y entender esta representación, puesto que la misma es la base para temas más avanzados en este curso.

Figura 2.
Intervalos numéricos

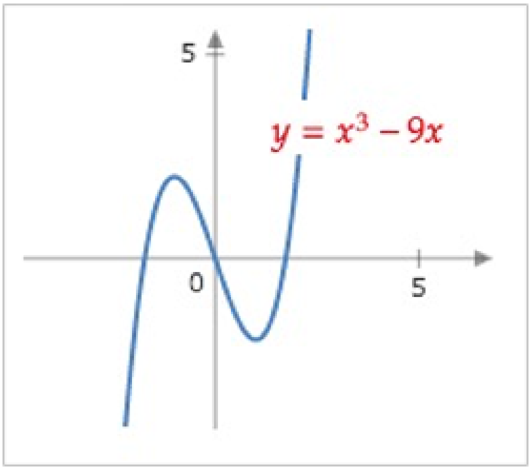


Nota. Riofrío, G., 2023.

1.3. Repaso de funciones

Una función matemática es una relación entre un conjunto de elementos llamados elementos de entrada o dominio y un conjunto de elementos llamados elementos de salida o codominio. Cada elemento de entrada se asigna a un solo elemento de salida de manera única y definida por medio de una regla o fórmula matemática. De esta manera, una función puede ser representada mediante una ecuación y su gráfica puede ser representada en un plano cartesiano. Las funciones matemáticas juegan un papel fundamental en la resolución de problemas en una gran variedad de áreas, incluyendo la ciencia, la tecnología, la economía, entre otras.

Figura 3.
Función matemática



Nota. Riofrío, G., 2023.

1.4. Componentes de una función. Variable dependiente e independiente

Continuando con esta revisión básica de las funciones, veamos ahora cuáles son los componentes básicos de una función, me refiero a las variables dependiente independiente de una función.

En una función matemática, una variable se considera independiente si su valor puede variar libremente, mientras que otra variable se considera dependiente, ya que su valor depende del valor de la variable independiente.

La variable independiente se denota comúnmente como "x" y su valor se encuentra en el dominio de la función. Es el valor que se utiliza como entrada para calcular el valor de la variable dependiente.

Por otro lado, la variable dependiente se denota comúnmente como "y" y su valor se encuentra en el rango de la función. Es el valor calculado a partir del valor de la variable independiente.

Por ejemplo, en una función matemática del tipo y = f(x), donde "f" es una función matemática, "x" es la variable independiente y "y" es la variable dependiente. En este caso, el valor de "x" puede variar libremente, mientras que el valor de "y" depende del valor de "x".

1.5. Tabla de valores y gráfica de una función.

Una vez repasados los tipos de números y las componentes básicas de una función veamos las herramientas fundamentales para su estudio y análisis: La tabla de valores y la gráfica.

Una tabla de valores es una representación numérica de una función, que muestra los valores de la variable independiente (normalmente "x") y los valores correspondientes de la variable dependiente (normalmente "y"). Estos valores se presentan en una tabla con dos columnas, una para "x" y otra para "y". Por ejemplo, si tenemos una función y = 2x + 1, una tabla de valores podría verse como la tabla 1:

Tabla 1.
Tabla de valores

x	y = f(x) = 2x + 1
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

Nota. Riofrío, G., 2023.

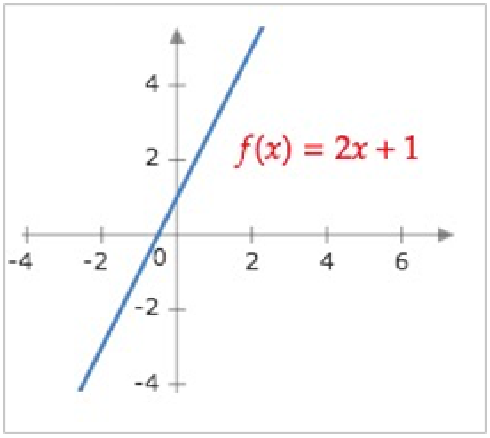
Una gráfica de una función es una representación visual de la función. Se trata de una curva que se dibuja en un sistema de coordenadas, donde el eje x representa la variable independiente y el eje y representa la variable dependiente. La curva traza todos los puntos (x, y) que cumplen la ecuación de la función.

La tabla de valores y la gráfica de una función son herramientas valiosas para entender y analizar las características de una función, como el dominio, el rango, las asíntotas, los puntos de inflexión, los extremos, los símbolos de una función, etc.

La tabla de valores es útil para entender el comportamiento de una función en un rango específico, mientras que la gráfica es útil para entender el comportamiento general de una función a lo largo del dominio completo. Juntas, la tabla de valores y la gráfica de una función proporcionan una representación completa de la función y ayudan a entender cómo se relacionan las variables independiente y dependiente.

En la figura 4, se presenta la gráfica para la tabla de valores presentada anteriormente.

Figura 4.
Función lineal



Nota. Riofrío, G., 2023.

1.6. Dominio y rango

Ya hemos repasado los fundamentos básicos sobre funciones, continuemos con la revisión de otros elementos igualmente importantes en el estudio de las funciones y sus fenómenos asociados.

El dominio de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (normalmente x) para los cuales la función está definida y tiene un valor finito. Por ejemplo, si tenemos la función $y = \frac{1}{x}$, el dominio sería todos los números excepto x=0, ya que en ese caso la función no está definida, es decir el resultado sería infinito (∞).

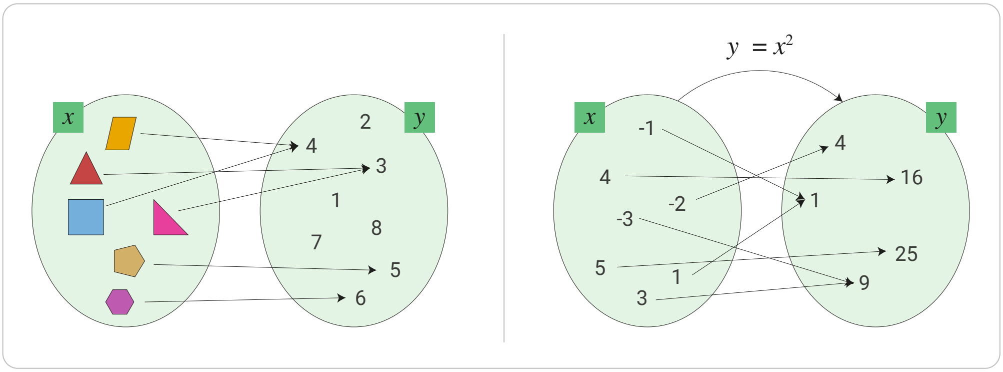
El rango de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (normalmente y) para los valores del dominio. Por ejemplo, si tenemos la función $y = \frac{1}{x}$, el rango sería todos los números distintos de cero, ya que, en cualquier valor distinto de cero en x, la función tomará un valor distinto de cero.

Es crucial tener en cuenta que no siempre es fácil determinar el dominio y el rango de una función analíticamente, a veces se requiere de una representación gráfica de la función para entender su comportamiento. Por ejemplo, una función puede tener un dominio muy complejo, como un conjunto de números reales menos un conjunto finito de puntos, o un conjunto de números complejos.

Además, hay funciones que no tienen un dominio o rango finito, es decir, que se extienden infinitamente, como puede ser el caso de funciones exponenciales o logarítmicas.

Figura 5.

Dominio y rango de una función



Nota. Riofrío, G., 2023.

1.7. Prueba de la recta vertical

Tal como vimos anteriormente la gráfica de una función es una herramienta muy importante para su análisis, para comprobar si una gráfica pertenece a una función determinada existe una estrategia muy interesante denominada **"La prueba de la recta vertical"**.

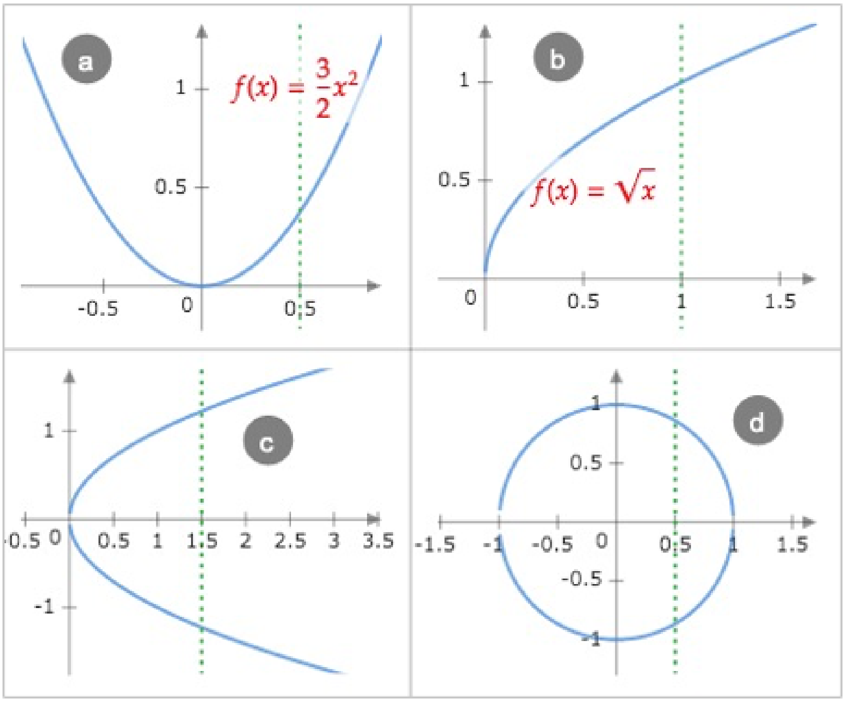
La prueba de la recta vertical es una técnica para determinar si una gráfica es la curva de una función. La idea principal detrás de esta prueba es que, si una gráfica es la curva de una función, entonces para cualquier punto de la gráfica, no debe haber dos valores distintos de la variable dependiente "y" correspondientes al mismo valor de la variable independiente (x).

Para llevar a cabo la prueba de la recta vertical, se elige un punto cualquiera de la gráfica y se traza una recta vertical que pase por ese punto. Si la recta corta la gráfica en un solo punto, entonces es probable que la gráfica sea la curva de la función. Si la recta corta la gráfica en más de un punto, entonces la gráfica no es la curva de la función.

Es importante tener en cuenta que esta prueba no es concluyente, ya que hay algunas funciones que tienen puntos de discontinuidad (como las funciones polinómicas racionales) o tienen un comportamiento extraño en algunas regiones (como las funciones exponenciales o logarítmicas) y esta prueba podría dar un falso negativo.

Sin embargo, es una buena herramienta para determinar si una gráfica es la curva de una función en la mayoría de los casos, y se recomienda hacer esta prueba varias veces para diferentes puntos de la gráfica para tener una mejor idea de si es la curva de una función o no.

Figura 6.
Prueba de la recta vertical



Nota. Riofrío, G., 2023.

En la figura 6, nos podemos dar cuenta que las imágenes a y b sí corresponden a funciones, es decir a cualquier valor de la variable “x” le corresponde un solo valor de la variable “y”, de forma contraria podemos ver que en las imágenes c y d el comportamiento es diferente: un valor de la variable “x” tiene asociado más de un valor para “y”.

1.8. Función, ecuación y polinomio

Función, ecuación y polinomio, son conceptos muy relacionados, pero es necesario presentar ciertas características de tipo conceptual las cuales marcan la diferencia entre estos 3 conceptos.

La diferencia entre una función, una ecuación y un polinomio es que:

- Una función es una relación entre dos variables, donde cada valor de la primera variable (llamada variable independiente o entrada) tiene un único valor correspondiente de la segunda variable (llamada variable dependiente o salida). Por ejemplo, la función $y = 2x + 1$ describe cómo calcular el valor de y dado un valor específico de “x”.

- Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas. Puede involucrar varias variables y puede no ser necesariamente una función. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ describe una circunferencia en el plano cartesiano, y cada par de valores (x, y) que satisface la ecuación está en la circunferencia, pero no hay una relación uno a uno entre “x” y “y”.

- Un polinomio es una expresión matemática compuesta por una suma de términos, cada uno de los cuales es una potencia de una variable independiente (como x) multiplicada por una constante (como un número). Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 2x -3$ es un polinomio de grado 2.

En resumen, una función es una relación entre dos variables, una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas y un polinomio es una expresión matemática compuesta por una suma de términos cada uno de los cuales es una potencia de una variable independiente multiplicada por una constante.

Tabla 2.

Función, ecuación y polinomio

Elemento	Descripción	Ejemplo
Función	Una función es una relación que a cada elemento de un conjunto llamado dominio, le asigna un único elemento de otro conjunto llamado codominio. Por ejemplo, la función, $f(x) = x^2 + 3x + 2$ donde el dominio es todos los números reales y el codominio es todos los números reales también.	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
Ecuación	Una ecuación es una igualdad que relaciona distintas variables y constantes. Por ejemplo, la ecuación $2x + 3 = 7$, donde la incógnita es x.	$2x + 3 = 7$
Polinomio	Un polinomio es una función matemática que consta de una suma de términos potencias de una variable (generalmente x), con coeficientes constantes. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$, donde el grado del polinomio es 3.	$P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

Nota. Riofrío, G., 2023.

1.9. Tipos de funciones

Continuando con el estudio de las funciones revisemos ahora ciertos tipos de funciones mismas que son utilizadas en contextos y aplicaciones específicas:

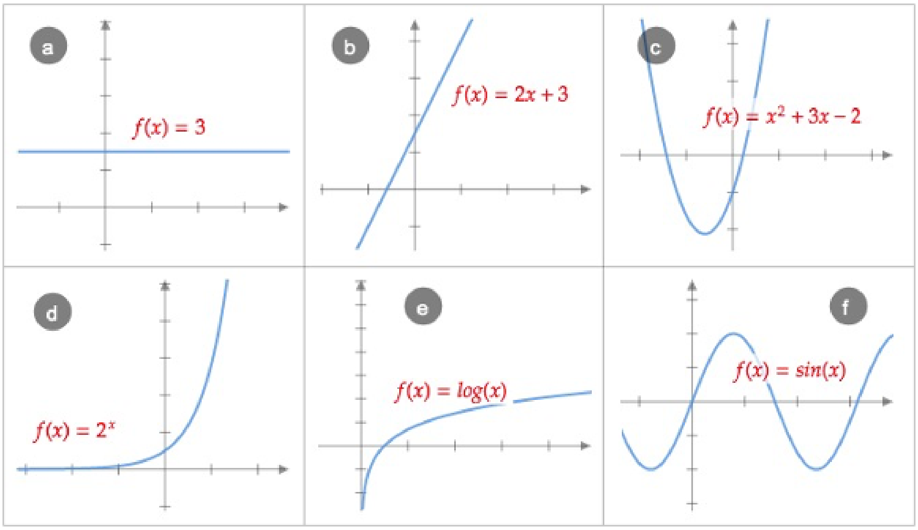
Existen varios tipos diferentes de funciones, cada uno con sus propias características y comportamientos únicos. Algunos de los tipos más comunes son:

- **Funciones constantes:** son aquellas en las que el valor de la variable dependiente "y" es igual para todos los valores de la variable independiente "x". Por ejemplo, $y = 3$ es una función constante, ver figura 7 (a).
- **Funciones lineales:** son aquellas en las que la variable dependiente "y" es una combinación lineal de la variable independiente "x". Por ejemplo, $y = 2x + 3$ es una función lineal. Estas funciones tienen una pendiente y un punto de intercepción con el eje y, ver figura 7 (b).
- **Funciones cuadráticas:** son aquellas en las que la variable dependiente "y" es un polinomio de segundo grado en la variable independiente "x". Por ejemplo, $y = x^2 + 3x - 2$ es una función cuadrática. Estas funciones tienen una parábola como gráfica, ver figura 7 (c).

- **Funciones exponenciales:** son aquellas en las que la variable dependiente "y" es una potencia de una base constante (generalmente e o a) elevada a una potencia de la variable independiente "x". Por ejemplo, $y = 2^x$ es una función exponencial, ver figura 7 (d).
- **Funciones logarítmicas:** son aquellas en las que la variable dependiente "y" es el logaritmo de una base constante (generalmente e o 10) de la variable independiente "x". Por ejemplo, *y = log x* es una función logarítmica, ver figura 7 (e).
- **Funciones trigonométricas:** son aquellas en las que la variable dependiente "y" es una función trigonométrica (seno, coseno, tangente, etc.) de la variable independiente "x". Por ejemplo, *y = sin x* es una función trigonométrica, ver figura 7 (f).

Cada tipo de función tiene un comportamiento y una forma distinta, lo que las hace útiles en diferentes situaciones y campos del conocimiento.

Figura 7.
Tipos de funciones



Nota. Riofrío, G., 2023.

1.10. Características de una función

Continuando con el estudio de las funciones, revisemos ahora ciertas características, igualmente importantes para entender el comportamiento de los fenómenos subyacentes:

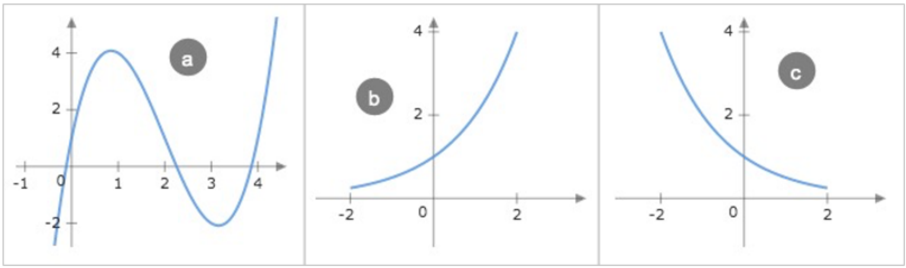
Una función puede tener varias características, algunas de las cuales son:

- **Creciente:** una función es creciente en un intervalo si para todos los puntos en ese intervalo, a medida que el valor de "x" aumenta, el valor de "y" también aumenta.

- **Decreciente:** una función es decreciente en un intervalo si para todos los puntos en ese intervalo, a medida que el valor de "x" aumenta, el valor de "y" disminuye.

Figura 8.

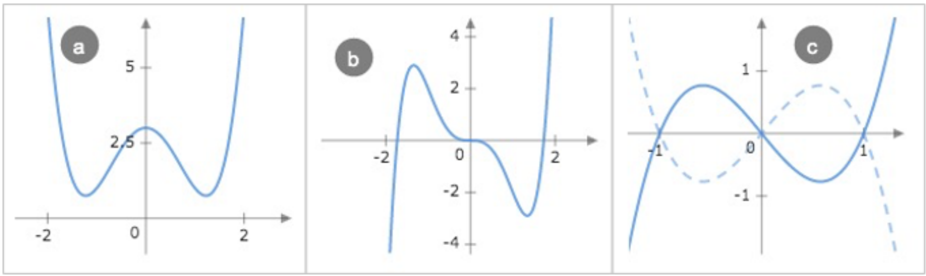
Funciones crecientes y decrecientes



Nota. Riofrío, G., 2023.

- **Simetría:** una función es simétrica con respecto a un eje (generalmente el eje x o y) si su gráfica es igual a su reflejo en ese eje. Por ejemplo, una función cuadrática es simétrica con respecto al eje y si el coeficiente de x^2 es positivo.

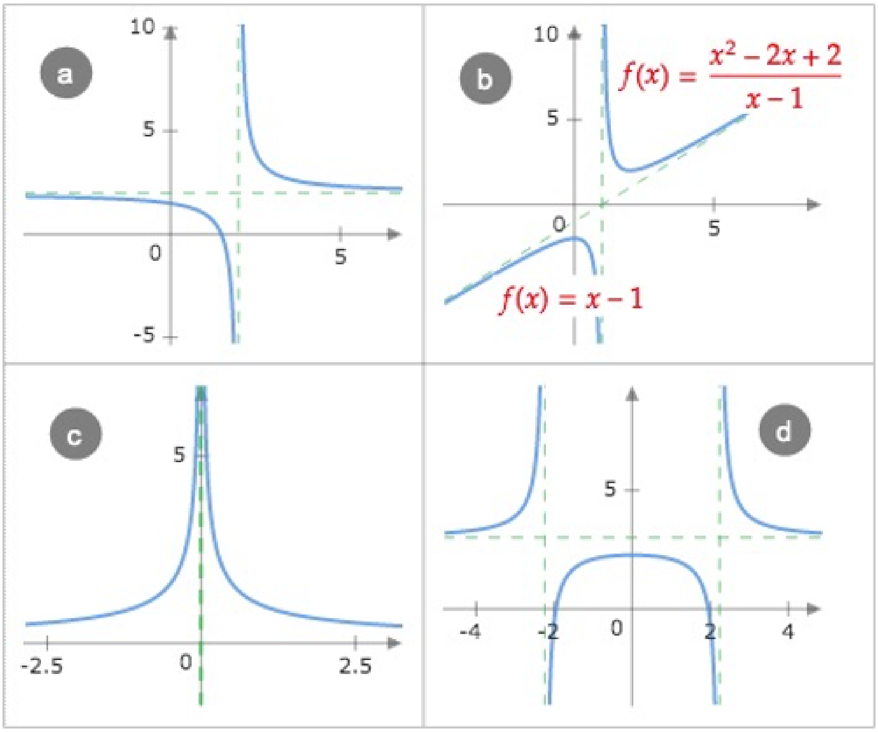
Figura 9.
Simetría de funciones



Nota. Riofrío, G., 2023.

- **Asíntotas:** una asíntota es una línea a la cual una función se acerca, pero nunca toca. Una función puede tener varios tipos de asíntotas, como horizontales (paralelas al eje x), verticales (paralelas al eje y) y oblicuas (inclinadas con respecto a los ejes).

Figura 10.
Asíntotas



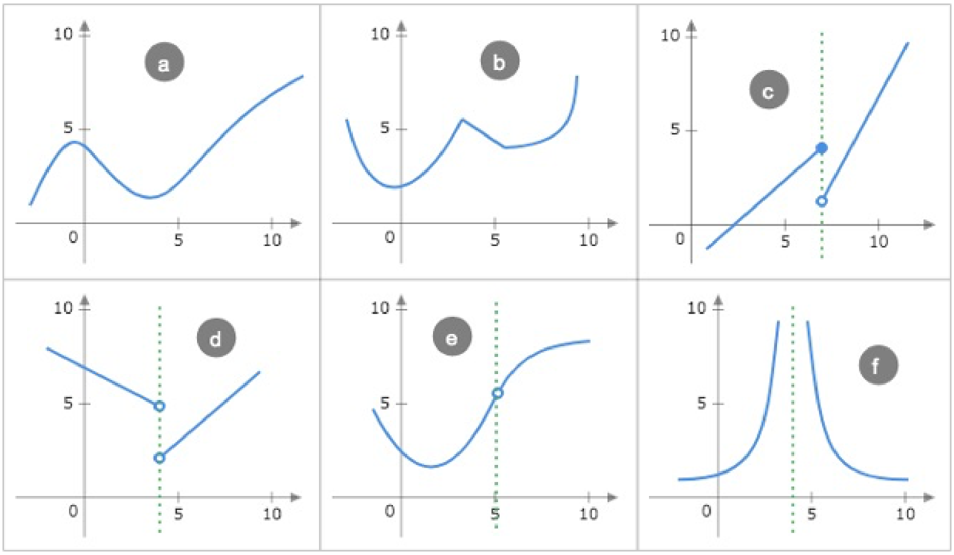
Nota. Riofrío, G., 2023.

- **Continuidad**: una función es continua en un punto si el valor de la función en ese punto es igual al límite de la función cuando “x” se acerca al punto en cuestión desde ambos lados, en la figura 11, las gráficas (a) y (b) son continuas.

- **Discontinuidad:** es un punto donde la función no es continua. Puede ser de dos tipos, discontinuidad en un punto donde la función tiene un salto y discontinuidad en un punto donde la función no esta definida, en la figura 11, las gráficas (c), (d), (e), y (f) son discontinuas.

Figura 11.

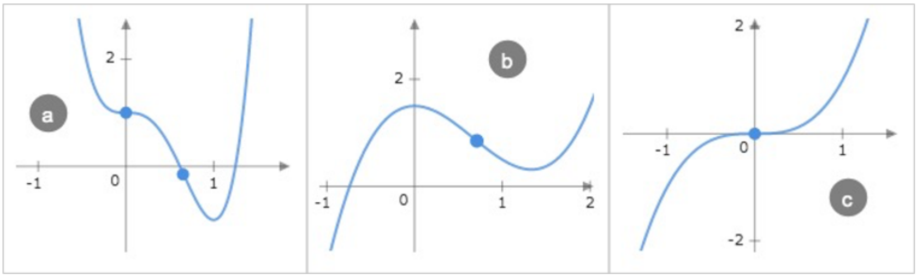
Continuidad y discontinuidad



Nota. Riofrío, G., 2023.

- **Punto de inflexión:** es un punto donde la concavidad de la curva cambia, es decir, donde pasa de ser cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Figura 12.
Punto de inflexión



Nota. Riofrío, G., 2023.

Tenga en cuenta que algunas funciones no tienen todas estas características, y algunas funciones pueden tener características adicionales.

1.11. Continuidad y discontinuidad de funciones

La continuidad y discontinuidad son propiedades fundamentales de las funciones. Una función se considera continua si su gráfica no tiene saltos, huecos ni quiebres en el intervalo en el que se está evaluando. Es decir, una función es continua en un punto si el límite de la función en ese punto es igual al valor de la función en ese punto.

Por otro lado, una función se considera discontinua si existe al menos un punto en el que la función no es continua. Las discontinuidades pueden ser de diferentes tipos, entre ellos:

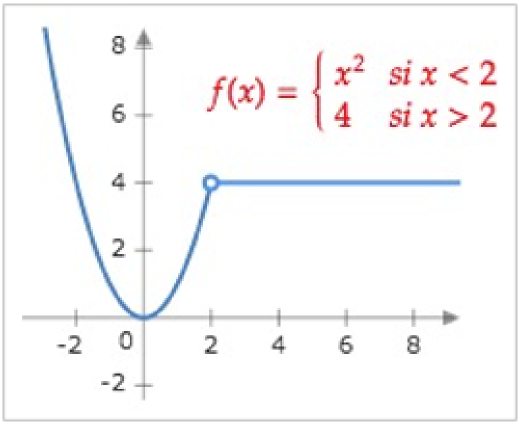
1. **Discontinuidad evitable**. Cuando el límite de la función en un punto existe, pero no es igual al valor de la función en ese punto. En este caso, se puede eliminar la discontinuidad simplemente redefiniendo la función en ese punto.
2. **Discontinuidad de salto.** Cuando el límite por la izquierda y por la derecha en un punto existen, pero son diferentes entre sí. En este caso, la función tiene un salto en ese punto.
3. **Discontinuidad infinita.** Cuando el límite de la función en un punto no existe, puede ser porque la función se acerca a valores infinitos o porque la función oscila de forma irregular.

4. **Discontinuidad esencial**. Cuando el límite de la función en un punto no existe y no es posible eliminar la discontinuidad mediante una redefinición de la función.

La continuidad es una propiedad que permite que la función tenga un comportamiento suave y predecible, mientras que la discontinuidad indica que la función puede tener comportamientos bruscos e impredecibles en ciertos puntos.

La figura 13, presenta el caso de una discontinuidad evitable.

Figura 13.
Discontinuidad evitable



Nota. Riofrío, G., 2023.

Si redefinimos la función conseguimos una función continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 2 \\ 4 & si\ x \geqslant 2 \end{cases}$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. **Lectura**

   - En la guía didáctica, haga una lectura compresiva de los temas de repaso de funciones mismos que corresponden a la semana 1 del curso.

   - Revise el recurso educativo: "Khan Academy", en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas**

   - Establezca las diferencias entre los diferentes tipos de funciones y sobre todo es importante que entienda el comportamiento de las mismas.

   - Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.

   - Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

Semana 2

Estimados estudiantes, al iniciar la semana 2, quiero evidenciar que en el mundo que nos rodea, muchos fenómenos naturales pueden ser descritos y modelados mediante funciones matemáticas. Estas funciones nos permiten representar de manera clara y precisa los comportamientos y relaciones que existen entre distintos aspectos de la naturaleza. Al conocer y comprender el uso de las funciones matemáticas, podemos predecir y entender mejor el comportamiento de los fenómenos naturales, lo cual es fundamental en muchas áreas, incluyendo la ciencia, la tecnología y la ingeniería. Por lo tanto, es importante que, durante el curso de cálculo diferencial, desarrollen habilidades en el modelamiento de fenómenos naturales mediante funciones matemáticas, lo cual les será muy útil en su futuro profesional.

1.12. Las funciones pueden modelar comportamientos naturales

Como se ha mencionado en la primera parte de este curso, las funciones son especialmente relevantes, puesto que son una representación formal o modelan ciertos comportamientos naturales, para hacer más dinámico y atractivo este curso considero importante presentar ejemplos reales de su aplicación.

Hay muchos ejemplos de funciones que se utilizan para modelar comportamientos reales en diferentes campos. Algunos ejemplos los puede analizar en la siguiente infografía:

Comportamientos naturales en diversas áreas

Como nos podemos dar cuenta la aplicación de funciones está presente en muchas áreas, veamos con más detalle un ejemplo muy familiar para nosotros, puesto que ya lo hemos estudiado desde el colegio.

La ecuación del movimiento parabólico de un proyectil en un plano cartesiano con la aceleración de la gravedad como única fuerza que actúa es:

$$y = x \cdot tan\,\theta - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot cos\,\theta} \cdot x^2$$

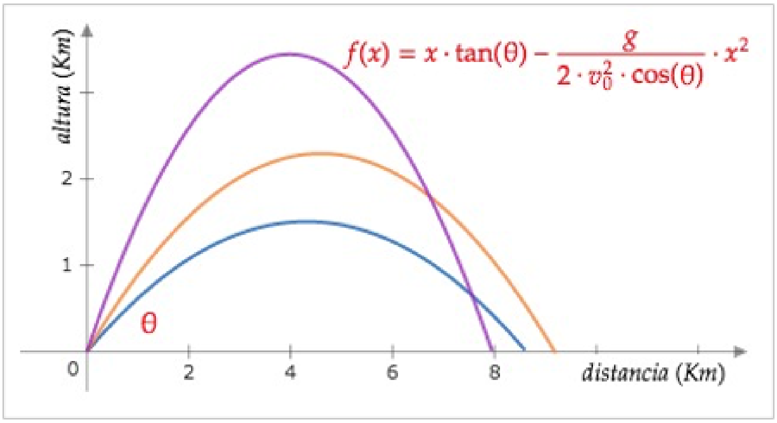
donde:

- "y" es la altura del proyectil en metros.
- "x" es la distancia horizontal recorrida por el proyectil en metros.
- θ (theta) es el ángulo de lanzamiento del proyectil, medido en radianes.
- g es la aceleración de la gravedad en metros por segundo al cuadrado.
- v_0 es la velocidad inicial del proyectil en metros por segundo.

Esta ecuación muestra que la trayectoria del proyectil describe una parábola en el plano cartesiano, y que depende de la velocidad inicial y el ángulo de lanzamiento. La altura máxima del proyectil se alcanza cuando $f(x) = \frac{v_0^2*(\sin\theta)^2}{2*g}$ y su alcance máximo se produce cuando el ángulo (theta) es igual a 45 grados.

Figura 14.

Movimiento de proyectiles



Nota. Riofrío, G., 2023.

1.13. Funciones racionales

Un tipo importante de función son las funciones racionales, veamos que se tratan.

Una función racional es una función que puede ser expresada en la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde *p(x)* y *q(x)* son polinomios. El conjunto de todos los valores de “x” para los cuales *q(x)* es diferente de cero se conoce como el dominio de la función.

Una de las características de una función racional es que su gráfica es una curva cerrada, es decir, no tiene ramificaciones, y no tiene puntos singulares.

En general, las funciones racionales son útiles para modelar situaciones en las que la relación entre dos variables cambia de manera continua y puede ser expresada mediante una fracción de polinomios.

Las asíntotas.

En las funciones racionales se presenta un comportamiento propio de estas: "las asíntotas" estas líneas son igualmente importantes y son el elemento fundamental para analizar tales funciones.

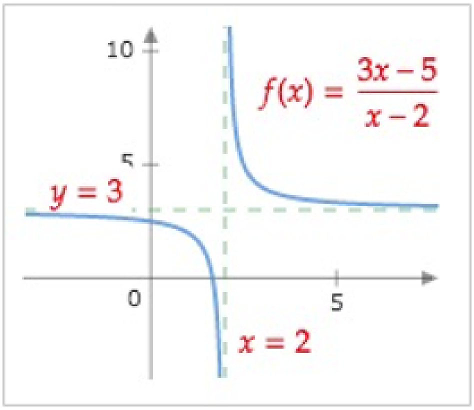
En una función racional, las asíntotas son líneas rectas que se acercan a la curva de la función, pero nunca la tocan. Pueden ser horizontales o verticales.

- Una **asíntota horizontal** ocurre cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador en la función racional. El valor de la asíntota horizontal es el cociente entre los términos de mayor grado del numerador y del denominador.
- Una **asíntota vertical** ocurre cuando el denominador de la función racional es igual a cero en ciertos puntos, pero el numerador no es cero en esos mismos puntos. La asíntota vertical es una línea vertical que pasa por esos puntos.

En resumen, las asíntotas son líneas que indican los límites de las posibles soluciones de una función, y son una herramienta valiosa para entender el comportamiento de una función en ciertos puntos.

Figura 15.

Asíntotas de una función



Nota. Riofrío, G., 2023.

En la figura 15, podemos ver que la asíntota vertical es 2, puesto que cuando "x" es igual a 2 el denominador es 0, por lo tanto, el cociente tiende a infinito, pero la función nunca tiene un valor definido cuando x = 2. De igual manera, la asíntota horizontal es 3, puesto que al transformar la función (términos de y) en el denominador nos queda 3 - y, es decir si y = 3 hace que el denominador sea cero.

$$f(y) = \frac{5 - 2y}{3 - y}$$

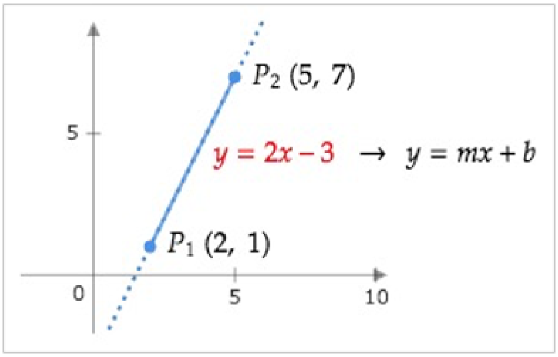
1.14. La recta y la pendiente

Si bien es cierto la ecuación de la recta es la más sencilla de todas, pero en esta primera parte del curso la revisaremos de forma breve, puesto que es fundamental comprender su comportamiento en los siguientes capítulos de este curso.

Una función lineal es aquella que se puede representar en forma de una recta en un plano cartesiano. La ecuación de una recta es de la forma y = mx + b, donde m es la pendiente (también conocida como coeficiente angular) y b es la ordenada al origen (también conocida como término independiente).

La pendiente m se puede calcular a partir de dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la recta mediante la fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. La pendiente representa la inclinación de la recta, es decir, la cantidad de unidades que aumenta o disminuye "y" por cada unidad de aumento en "x".

Figura 16.
Pendiente de una recta



Nota. Riofrío, G., 2023.

Aplicamos la fórmula anterior para calcular la pendiente de la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{7-1}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$$

Finalmente, vemos que el valor de m = 2 calculado corresponde al coeficiente de la componente “x” de la ecuación (2x).

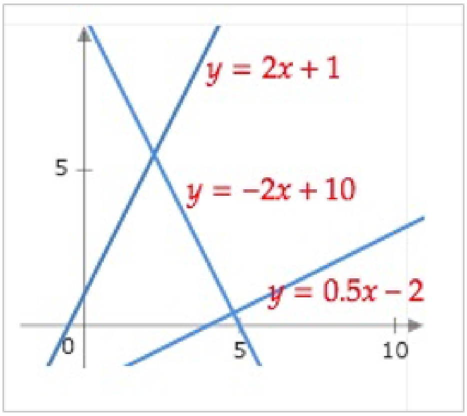
La ordenada al origen b se puede calcular a partir de un punto cualquiera (x, y) en la recta y la pendiente m mediante la fórmula: b = y - mx. La ordenada al origen representa el valor de “y” cuando “x” es igual a 0.

Una función lineal tiene un comportamiento constante, es decir, no tiene cambios abruptos en su comportamiento, si se aumenta “x” en una unidad, “y” también aumentará en una cantidad igual a la pendiente, si se disminuye “x” en una unidad, “y” también disminuirá en una cantidad igual a la pendiente.

Ejemplos de funciones lineales son:

- $y = 2x + 1$, la pendiente es 2 y la ordenada al origen es 1.
- $y = -2x + 10$, la pendiente es -2 y la ordenada al origen es 10.
- $y = 0.5x - 2$, la pendiente es 0.5 y la ordenada al origen es -2.

Figura 17.
Funciones lineales



Nota. Riofrío, G., 2023.

Es importante mencionar que una función lineal solo puede tener una sola recta como gráfica, y su dominio y rango son todos los números reales.

Importancia y aplicaciones de la pendiente.

La pendiente de una recta puede ayudar a explicar una variedad de comportamientos reales, algunos de los cuales incluyen:

1. **Crecimiento económico:** la pendiente de una recta puede usarse para medir la tasa de crecimiento económico, ya que indica la tasa de cambio de una variable económica como el PIB.
2. **Velocidad:** la pendiente de una recta puede emplearse para medir la velocidad de un objeto, puesto que indica la tasa de cambio de la posición del objeto en relación con el tiempo.

3. **Cambio en la concentración de una sustancia:** la pendiente de una recta puede utilizarse para medir la tasa de cambio en la concentración de una sustancia en una solución.

4. **Población:** la pendiente de una recta puede usarse para medir la tasa de crecimiento de la población, ya que indica la tasa de cambio en el número de personas en una determinada área geográfica.

5. **Tasa de interés:** la pendiente de una recta puede emplearse para medir la tasa de interés, puesto que indica la tasa de cambio en el precio de un activo financiero.

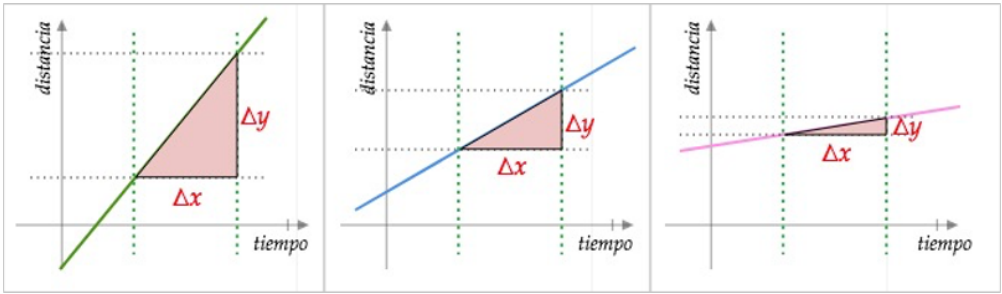
6. **Cambio en la temperatura:** la pendiente de una recta puede utilizarse para medir la tasa de cambio en la temperatura.

Hay muchos otros comportamientos reales que se pueden explicar mediante el uso de la pendiente de una recta, estos son solo algunos ejemplos.

Una de las aplicaciones más importantes de la pendiente se puede ver en la relación distancia/tiempo, lo cual equivale a la velocidad de un objeto. En la figura 18, existen 3 pendientes diferentes y en todos los casos el intervalo de tiempo Δx es el mismo, si comparamos las gráficas (a) y (c), nos podemos dar cuenta que el valor de la distancia Δy es mayor en la primera gráfica, si recordamos que la pendiente se calcula mediante la fórmula $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ es decir el resultado de esta relación será mayor en la gráfica (a).

Figura 18.

La pendiente en la relación espacio-tiempo



Nota. Riofrío, G., 2023.

Entender esta relación es muy importante, puesto que el valor de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto específico es la base fundamental en esta asignatura, esta relación la estudiaremos en el segundo bimestre y se la conoce como "Derivada".

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimados estudiantes, continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. **Lectura**

   - En la guía didáctica, realice una lectura compresiva de los temas de la recta y la pendiente mismos que corresponde corresponden a la semana 2 de nuestro curso.

   - Revise el recurso educativo: "Khan Academy" en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas**

   - Haga una búsqueda en la *Web* sobre las aplicaciones e importancia de la pendiente de una recta.

   - Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.

   - Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

Semana 3

Es importante que comprendan la importancia de las funciones exponenciales y logarítmicas en la matemática y en la vida cotidiana. Estas funciones son esenciales para modelar y resolver una amplia variedad de problemas, desde el crecimiento de poblaciones hasta la evaluación de intereses y la solución de ecuaciones diferenciales.

Además, las funciones exponenciales y logarítmicas son interdependientes y pueden ser utilizadas en conjunto para resolver problemas complejos y aplicaciones en campos como las finanzas, la ciencia y la tecnología.

Los animo a que continúen el aprendizaje y practiquen lo aprendido para que puedan aplicar estos conocimientos en su futuro profesional y en su vida cotidiana.

1.15. Funciones exponenciales y logarítmicas

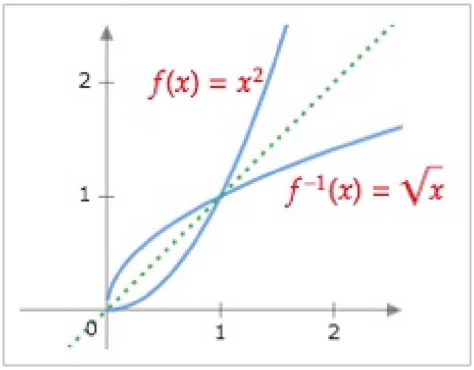
Empecemos la revisión de otro tipo de funciones igualmente relevantes, las funciones exponenciales y logarítmicas, pero antes de iniciar su estudio revisemos las funciones inversas.

Una función inversa es una función que “deshace” la acción de otra función. Dado un conjunto de elementos A y otro conjunto B, una función f es una relación entre A y B si para cada elemento a en A existe un único elemento b en B tal que f(a) = b. La función inversa de f es una función $\frac{1}{f^{-1}}$ tal que para cada elemento b en B, existe un único elemento a en A tal que $f^{-1}(b) = a$ y $f(f^{-1}(b)) = b$ para todo b en B.

Un ejemplo de función inversa es la función inversa de la función cuadrática *f(x)* = x^2. La función inversa de f(x) sería $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Esta función toma un valor “x” y devuelve su raíz cuadrada, “deshaciendo” la acción de elevar al cuadrado.

Figura 19.

Funciones inversas



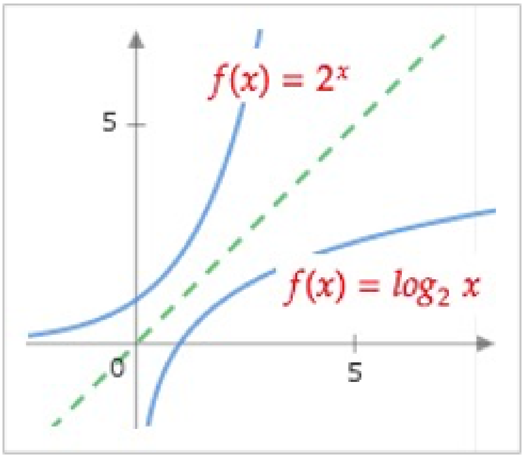
Nota. Riofrío, G., 2023.

Otro ejemplo de función inversa es la función de conversión de grados Celsius a grados Fahrenheit, $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$. La función inversa de esta función sería $F^{-1}(C) = (F - 32)\frac{5}{9}$. Esta función toma un valor en grados Fahrenheit y devuelve su equivalente en grados Celsius, “deshaciendo” la acción de convertir de grados Celsius a grados Fahrenheit.

Las funciones exponenciales y logarítmicas son un ejemplo de funciones inversas, veamos el siguiente ejemplo:

Figura 20.

Funciones inversas (exponenciales y logarítmicas)



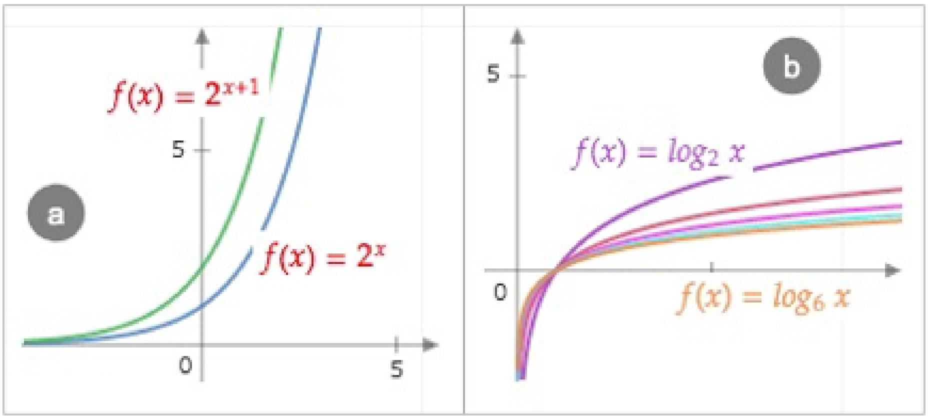
Nota. Riofrío, G., 2023.

Una vez que hemos revisado las funciones inversas veamos con más detalle las funciones exponenciales y logarítmicas, empecemos con una explicación de cada una.

Una función exponencial es una función matemática en la cual el argumento (el valor de entrada) es la variable independiente y el valor de salida es el resultado de elevar una base constante a una potencia que es una función lineal de la variable independiente. Es decir, si $y = b^x$, entonces b es la base de la función exponencial y "x" es la variable independiente. El valor de b debe ser un número positivo distinto de 1. La función exponencial se utiliza en muchas áreas de las matemáticas y las ciencias, como la física, la química y la biología, para modelar procesos que tienen un crecimiento o un decaimiento exponencial.

Por otra parte, una función logarítmica, es una función matemática en la cual el valor de salida (el resultado) es el logaritmo de una variable independiente respecto a una base dada. Es decir, si $y = \log_b x$, entonces $b^y = x$. Donde b es la base del logaritmo, y puede ser cualquier número positivo distinto de 1. La variable independiente "x" es el argumento de la función logarítmica y el resultado "y" es el logaritmo de "x". El logaritmo con base 10 se llama logaritmo decimal y el logaritmo con base e (2.71828...) se llama logaritmo natural. La función logarítmica se utiliza en muchas áreas de las matemáticas y las ciencias, como la física, la química y la biología, para resolver problemas relacionados con proporciones y escalas.

Figura 21.
Funciones exponenciales y logarítmicas



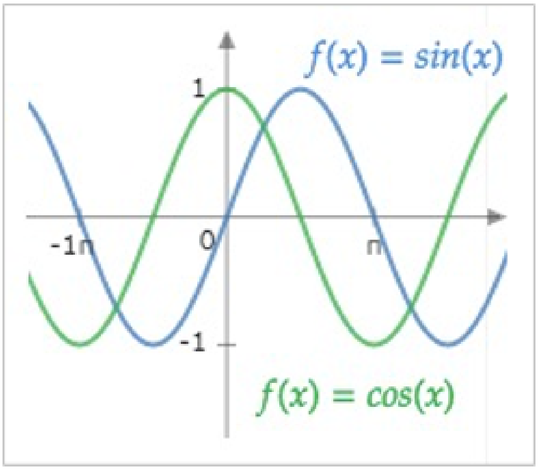
Nota. Riofrío, G., 2023.

1.16. Funciones trigonométricas

Una gráfica de una función trigonométrica es una representación gráfica de una función matemática que relaciona un ángulo con un valor numérico. Las funciones trigonométricas más comunes son el seno, coseno y tangente. Cada una de estas funciones tiene una gráfica característica que se repite periódicamente. La gráfica de una función trigonométrica puede ser utilizada para analizar patrones en fenómenos cíclicos como el movimiento de los cuerpos celestes, las olas del mar, la electricidad y la mecánica.

Figura 22.

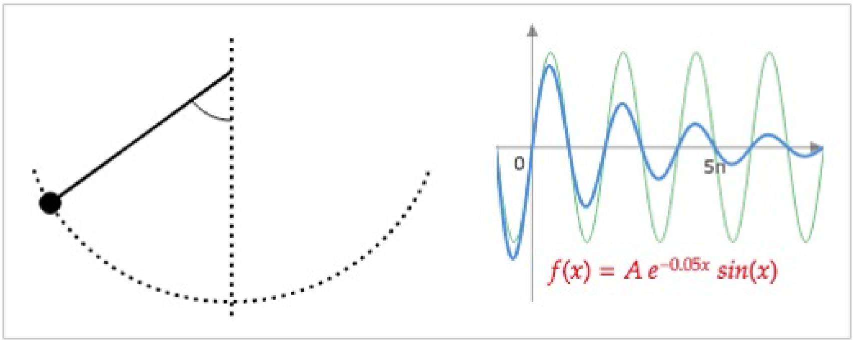
Función trigonométrica



Nota. Riofrío, G., 2023.

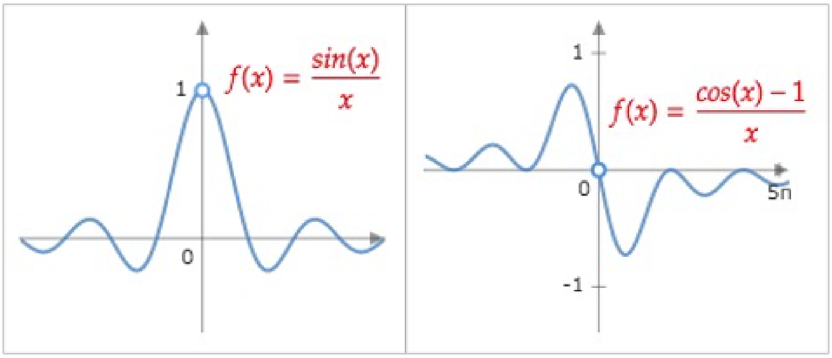
Un ejemplo práctico de una gráfica de una función trigonométrica es el movimiento de un péndulo. El péndulo es un objeto que cuelga de un punto fijo y se balancea debido a la gravedad. El ángulo formado entre la cuerda del péndulo y la vertical varía con el tiempo, y este ángulo puede ser relacionado con el tiempo mediante la función seno o coseno. La gráfica de la figura 23, es una función trigonométrica que describe el movimiento del péndulo y puede ser usada para analizar la frecuencia y la amplitud del movimiento. Otro ejemplo podría ser el movimiento de una rueda de bicicleta al pedalear, el cual se puede analizar con una función trigonométrica para determinar la velocidad y la distancia recorrida, finalmente en la figura 24, se muestran 2 imágenes propias del tratamiento de señales en las cuales se utilizan las funciones trigonométricas.

Figura 23.
Movimiento de un péndulo



Nota. Riofrío, G., 2023.

Figura 24.
Aplicación de las funciones trigonométricas



Nota. Riofrío, G., 2023.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. **Lectura:**

    - En la guía didáctica, realice una lectura compresiva de los temas de funciones exponenciales y logarítmicas, mismos que corresponden a la semana 3.

- Revise el recurso educativo: "Khan Academy", en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

- Establezca las diferencias entre las funciones logarítmicas y exponenciales, analice su comportamiento con diferentes parámetros

- Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.

- Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

3. **Autoevaluación**

- Estimados estudiantes, para evaluar los aprendizajes adquiridos sobre esta temática, le invito a desarrollar el cuestionario que a continuación se presenta.

Autoevaluación 1

1. **¿Qué es el dominio de la función $f(x) = 1/(x - 2)$?**

    a. Todos los números reales.
    b. Todos los números enteros.
    c. Todos los números excepto el número 2.
    d. Todos los números positivos.

2. **¿Cuál es la definición de una función creciente?**

    a. Una función cuyo dominio está compuesto por todos los números reales.
    b. Una función cuyo rango está compuesto por todos los números reales.
    c. Una función cuya pendiente es positiva en todo su dominio.
    d. Una función cuya pendiente es negativa en todo su dominio.

3. **¿Cuál es la simetría de una función par?**

    a. La simetría respecto al eje X.
    b. La simetría respecto al eje Y.
    c. La simetría respecto al origen.
    d. No tiene simetría.

4. **¿Cuál es la definición de una asíntota horizontal?**

    a. Una línea que la función se acerca a medida que la variable independiente se acerca a un número particular.
    b. Una línea que la función se acerca a medida que la variable independiente se acerca al infinito o menos infinito.
    c. Una línea vertical en la que la función no está definida.
    d. Una línea vertical en la que la función tiende a infinito o menos infinito.

5. **¿Qué son los puntos de inflexión de una función?**

   a. Puntos en los que la función no está definida.
   b. Puntos en los que la función tiene una asíntota vertical.
   c. Puntos en los que la función cambia de concavidad.
   d. Puntos en los que la función es continua.

6. **¿En qué área del conocimiento se utiliza la pendiente para analizar la eficiencia de un proceso productivo?**

   a. Ingeniería.
   b. Medicina.
   c. Derecho.
   d. Filosofía.

7. **¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a $y = 2x + 3$ que pasa por el punto (1,4)?**

   a. $y = 2x + 1$
   b. $y = 2x + 4$
   c. $y = 3x + 1$
   d. $y = 3x + 4$

8. **¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1,3) y (4,6)?**

   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4

9. **¿Cuál es la ecuación general de la recta en dos dimensiones?**

   a. $y = mx + b$
   b. $x = my + b$
   c. $y = mx^2 + b$
   d. $x = my^2 + b$

10. ¿Cuál es la asíntota vertical de la función racional $f(x) = (x-1)/(x^2 - x - 6)$?

a. $x = -2$
b. $x = -1$
c. $x = 1$
d. $x = 3$

Ir al solucionario

1 Bimestre

Semana 4

Saludos a todos, nos encontramos en la cuarta semana de este curso, al inicio del mismo hicimos un repaso de los temas fundamentales relacionados con funciones, estamos avanzando hacia el estudio de los contenidos propios de esta asignatura.

¡Comencemos!

Unidad 2. Límites

Estamos iniciando la unidad 2, y el tema de estudio son los Límites, este concepto es la base fundamental del cálculo diferencial. A medida que avanzamos en este tema, aprenderemos cómo las funciones cambian en diferentes puntos de su dominio y cómo utilizar estos cambios para entender y predecir el comportamiento de los sistemas en el mundo real. Estoy seguro de que con su dedicación podremos dominar este tema y continuar con nuestra formación en la presente asignatura.

2.1. Motivación y fundamentos de límites

Los límites son un concepto importante en el cálculo y en las ciencias en general, ya que nos permiten entender cómo cambian las funciones a medida que la variable independiente se acerca a un cierto punto.

En el cálculo, los límites son esenciales para la definición de conceptos fundamentales como las derivadas y las integrales. La derivada de una función en un punto específico se define como el límite del cociente entre el cambio en la función y el cambio en la variable independiente, mientras que la integral se define como el límite de la suma de los productos de la función y el cambio en la variable independiente.

Además, los límites también son cruciales en la teoría de la optimización, ya que nos permiten encontrar los puntos donde una función alcanza su mínimo o máximo.

En las ciencias en general, los límites son esenciales para entender cómo cambian las variables relacionadas entre sí en diferentes puntos y para hacer predicciones precisas sobre el comportamiento de los sistemas en el futuro. Por ejemplo, en física, los límites son utilizados para entender cómo cambian las velocidades de los objetos en movimiento y para hacer predicciones precisas sobre su comportamiento. En economía, los límites son usados para entender cómo cambian los precios de los bienes y servicios en diferentes puntos del tiempo y para hacer predicciones precisas sobre el comportamiento del mercado en el futuro.

2.2. Interpretación del límite

Antes de realizar una explicación del tema de límites es necesario entender su nomenclatura:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

La cual nos indica que: e**l límite de la función "f(x)" cuando x tiende a "a" es *L***.

Los límites en cálculo diferencial se pueden entender mejor con una explicación gráfica. La idea es que el límite (L) de una función f(x) es el valor al que se acerca la función a medida que "x" se acerca (tiende) a un valor específico, pero no necesariamente igual a ese valor.

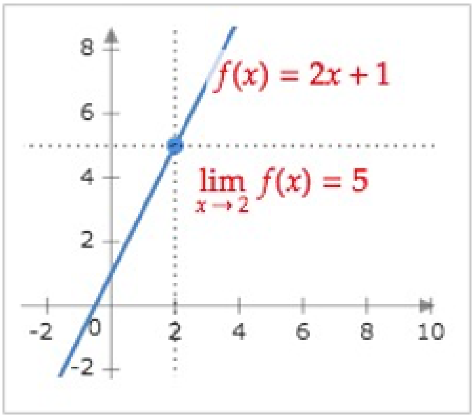
Para entender esto gráficamente, podemos imaginar una función f(x) dibujada en un plano cartesiano con el eje "x" horizontal y el eje "y" vertical. Si queremos encontrar el límite de f(x) cuando "x" se acerca a "a", podemos trazar una línea vertical desde el punto x = a en el eje "x" y ver a qué valor se acerca la función a medida que nos acercamos a esa línea vertical.

Si el límite existe, la función se acerca a un valor específico a medida que "x" se acerca a "a". Si la función se acerca a diferentes valores desde la izquierda y desde la derecha de "a", entonces el límite no existe.

Por ejemplo, en la siguiente gráfica, la función f(x) se acerca al valor 5 tanto desde la izquierda como desde la derecha de a=2, por lo que el límite existe:

Figura 25.

Límite de una función

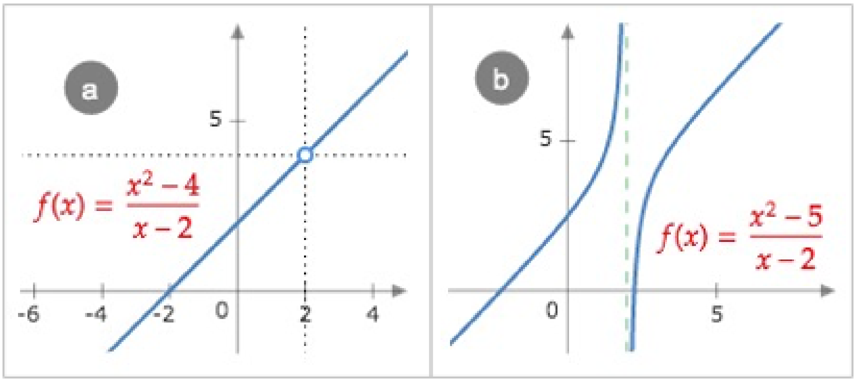


Nota. Riofrío, G., 2023.

Revisemos a continuación el comportamiento de las 2 gráficas de la figura 26. En el primer caso (a) se ve que el valor de la función se acerca a 4 cuando "x" tiende a 2, pero la función nunca será igual a 4 (la función no está definida en 4), puesto que en ese punto existe una indeterminación (división por cero). Por otra parte, vemos que en la gráfica (b) el valor del límite es diferente si la variable "x" tiende a 2, por izquierda y por derecha, los valores de la función toman valores diferentes a +∞ y -∞ respectivamente.

Figura 26.

Límite de una función

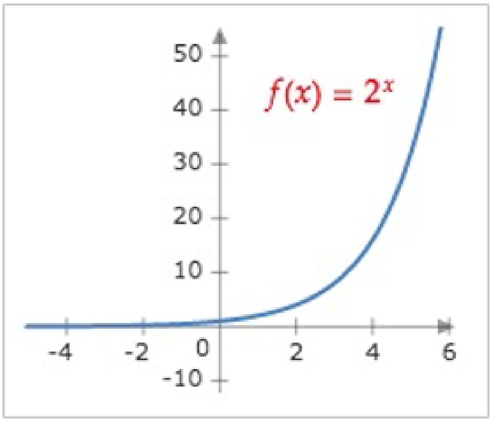


Nota. Riofrío, G., 2023.

En el ejemplo de la figura 27, podemos ver otro comportamiento de los límites, en este caso cuando “x” tiende a +infinito el valor del límite también tiende a +infinito, y forma contraria cuando “x” tiende a —infinito el valor de la función tiende a 0, este ejemplo involucra una función exponencial: $f(x) = 2^x$.

Figura 27.

Límites en función exponencial

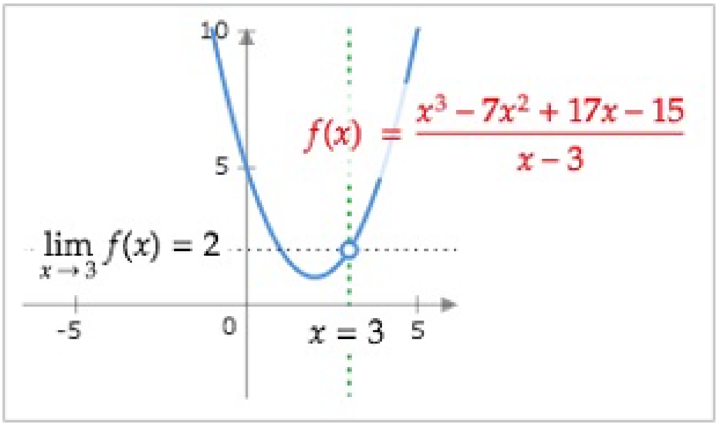


Nota. Riofrío, G., 2023.

Finalmente, revisemos la tabla 3, correspondiente a la figura 28, los valores de f(x) cada vez se acercan más al valor y=2 cuando “x” tiende a 3, pero al evaluar f(3) vemos que existe una indeterminación (división por cero), es decir no está definido este valor, por lo tanto, el límite (L) de la función f(x) es igual a 2 cuando “x” tiende a 3.

Figura 28.

Límite de una función



Nota. Riofrío, G., 2023.

Tabla 3.

Evaluación del límite en un punto

	x	*f(x)*
Izquierda	2.700	1.490
	2.800	1.640
	2.900	1.810
	2.990	1.980
	2.999	1.998
Lim	**3.000**	**∞**
Derecha	3.001	2.002
	3.010	2.020
	3.100	2.210
	3.200	2.400
	3.300	2.690

Nota. Riofrío, G., 2023.

En resumen, una explicación gráfica del tema de límites en cálculo diferencial nos permite visualizar cómo una función se comporta a medida que “x” se acerca a un valor específico, lo que nos ayuda a entender mejor los conceptos teóricos y las técnicas para resolver límites.

2.3. Función definida por partes

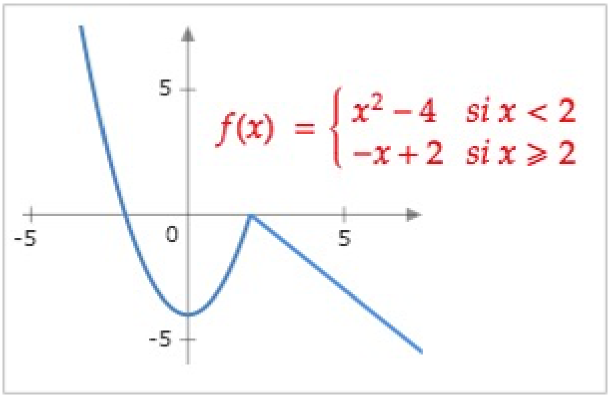
Para finalizar esta semana trabajaremos en el siguiente tema **"Función definida por partes"**, si bien es cierto este tipo de función matemática no pertenece propiamente al tema de límites, pero he decidido tratarlo en esta parte del curso, puesto que nos ayudará a comprender los temas que vienen a continuación como los límites laterales.

Una función definida por partes es una función que se puede dividir en varias funciones distintas, cada una con un dominio diferente. Cada una de estas funciones se conoce como una "parte" de la función. El conjunto de todas las partes de una función definida por partes es el dominio completo de la función.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^2 - 4\ si\ x < 2$ y $f(x) = -x + 2\ si\ x \geq 2$. Esta función está definida por dos partes: la primera es $f(x) = x^2 - 4\ si\ x < 2$ y la segunda es $f(x) = -x + 2\ si\ x \geq 2$. El dominio de la primera parte es x < 2 y el dominio de la segunda parte es x >= 2.

Figura 29.

Función definida por partes



Nota. Riofrío, G., 2023.

Otro ejemplo de funciones definidas por partes son las funciones polinómicas, cada uno de sus términos son diferentes funciones, con diferentes dominios, pero juntas forman una sola función.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. **Lectura:**

- En la guía didáctica, haga una lectura compresiva de los temas límites mismos que corresponden a la semana 4.
- Revise el recurso educativo: "Khan Academy" en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

- Revise las explicaciones correspondientes a límites para entender su naturaleza y comportamiento.
- Verifique los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.
- Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

Semana 5

Estamos cerca de finalizar este primer bimestre, los animo a avanzar con el desarrollo de las actividades planificadas. En la presente semana continuamos estudiando los límites.

El estudio de los límites laterales es importante en el cálculo diferencial debido a que nos permite entender el comportamiento de una función en los puntos extremos de su dominio y en los puntos en los que la función puede no estar definida. Esto es crucial para la solución de muchos problemas en cálculo y en la aplicación de las funciones matemáticas a la vida real.

2.4. Límites laterales

Tal como se ha dicho anteriormente el estudio de los límites constituye la base fundamental en cálculo, veamos ahora una explicación relacionada con límites laterales, este tema ya lo vimos de forma breve en la semana anterior, pero ahora profundizaremos en su estudio.

Los límites laterales son una extensión del concepto de límites en el cálculo diferencial e integral. Un límite lateral es un límite que se calcula cuando la variable independiente se acerca a un punto desde un lado específico, en lugar de simplemente acercándose a un punto.

Existen dos tipos de límites laterales: el límite lateral derecho y el límite lateral izquierdo. El límite lateral derecho se calcula cuando la variable independiente se acerca al punto desde valores mayores que el punto en cuestión, mientras que el límite lateral izquierdo se calcula cuando la variable independiente se acerca al punto desde valores menores que el punto en cuestión.

Por ejemplo, si queremos calcular el límite lateral derecho e izquierdo de f(x) en x = a, utilizaríamos la notación:

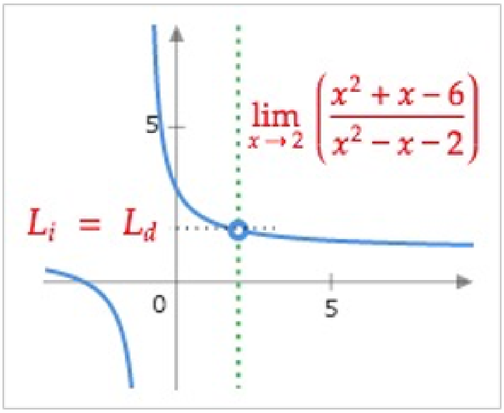
$\lim_{x \to a^+} f(x)$: Para el límite lateral derecho.

$\lim_{x \to a^-} f(x)$: Para el límite lateral izquierdo.

En general, si los límites laterales derecho e izquierdo de una función en un punto específico son iguales, decimos que el límite de la función en ese punto **existe** y es igual a ese valor. Si los límites laterales derecho e izquierdo son diferentes, decimos que el límite de la función en ese punto **no existe**. Sin embargo, hay excepciones a esta regla en caso de ciertas funciones discontinuas.

Los límites laterales son una extensión del concepto de límites y se utilizan para calcular el comportamiento de una función en un punto específico cuando la variable independiente se acerca a ese punto desde un lado específico, estos son el límite lateral derecho y el límite lateral izquierdo.

Figura 30.
Límites laterales



Nota. Riofrío, G., 2023.

El límite de una función igual a L si y solo si sus límites laterales existen y estos son iguales ($L_i = L_d$), en la figura 30, podemos ver que el límite de la función es igual tanto por izquierda o por derecha cuando "x" tiende a 2.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

2.5. Límites que no existen

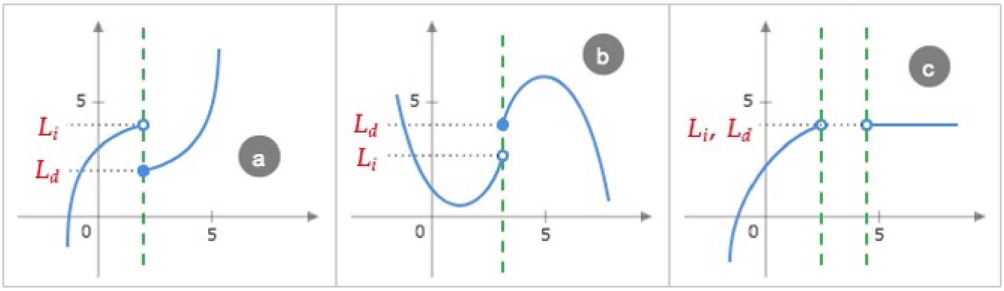
En cálculo diferencial, se dice que no existe un límite en un punto específico si los límites laterales derecho e izquierdo son diferentes en ese punto. Esto se debe a que, si los límites laterales derecho e izquierdo son diferentes, significa que la función no tiene un comportamiento predecible o consistente en ese punto, ya que su valor cambia dependiendo de por dónde se acerque a ese punto.

Sin embargo, hay algunas excepciones a esta regla, como en el caso de funciones discontinuas. Una función discontinua en un punto específico es aquella cuyo valor cambia bruscamente en ese punto, pero aun así puede tener un límite existente en ese punto.

También hay algunos casos en los que un límite puede no existir temporalmente, pero si existe en un punto específico, como en el caso de funciones cuyo límite es una función parábola o una función exponencial.

Figura 31.

Limites que no existen



Nota. Riofrío, G., 2023.

En la figura 31, se puede ver algunos comportamientos relacionados con límites, en las gráficas (a) y (b), claramente no existe límite puesto que los valores de los límites por izquierda y derecha son diferentes, en la gráfica (c) igualmente no existe límite, si bien es cierto el valor del límite es igual por izquierda y derecha, pero "x" tiende a valores diferentes.

2.6. Límites Infinitos

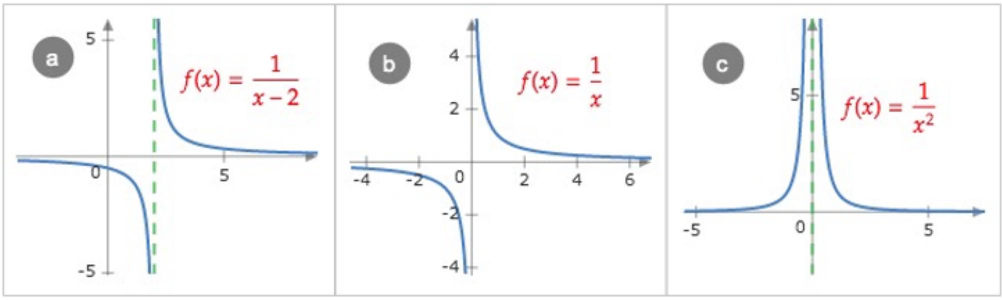
En cálculo diferencial, un límite infinito es un límite en el que el valor de la función se acerca a infinito o menos infinito. Por ejemplo, si una función f(x) tiene un límite infinito en x = a, significa que a medida que "x" se acerca a "a", el valor de la función se acerca a infinito o menos infinito. El concepto de límites infinitos es importante en el estudio de funciones que tienen comportamiento asintótico.

Un ejemplo de una función con un límite infinito en x = 2 es la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$. A medida que "x" se acerca a 2 desde cualquier lado, el valor de $\frac{1}{x-2}$ se acerca a infinito.

Otro ejemplo es la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando "x" tiende a cero, la función se acerca a -infinito y +infinito, por izquierda y derecha respectivamente.

En ambos casos, el límite en x = 2 para la primera función y x = 0 para la segunda, no existe debido a que la función tiende al infinito.

Figura 32.
Límites infinitos



Nota. Riofrío, G., 2023.

La diferencia entre límites laterales y límites infinitos en cálculo diferencial es la forma en que se acerca el valor de la función a un punto dado.

Un límite lateral se refiere a la forma en que el valor de la función se acerca a un punto “x” desde ambos lados de la curva. Por ejemplo, si se desea calcular el límite lateral de una función f(x) en x=a, se debe calcular tanto el límite cuando “x” se acerca a “a” por la izquierda y también el límite cuando “x” se acerca a “a” por la derecha. Si ambos límites son iguales, se puede decir que el límite lateral existe en ese punto.

Por otro lado, un límite infinito se refiere a la forma en que el valor de la función se acerca a infinito o menos infinito a medida que “x” se acerca a un punto dado. Por ejemplo, si una función f(x) tiene un límite infinito en x = a, significa que a medida que “x” se acerca a “a”, el valor de la función se acerca a +infinito o -infinito.

Los límites laterales se refieren a cómo una función se comporta al acercarse a un punto desde ambos lados de la curva, mientras que los límites infinitos se refieren a cómo una función se comporta al acercarse a un punto desde un lado de la curva y tiende al infinito o menos infinito.

2.7. Reglas básicas para el cálculo de límites

Existen varias reglas básicas que se utilizan en el cálculo de límites. A continuación, se presentan algunas de las más importantes:

Tabla 4.

Reglas básicas para el cálculo de límites

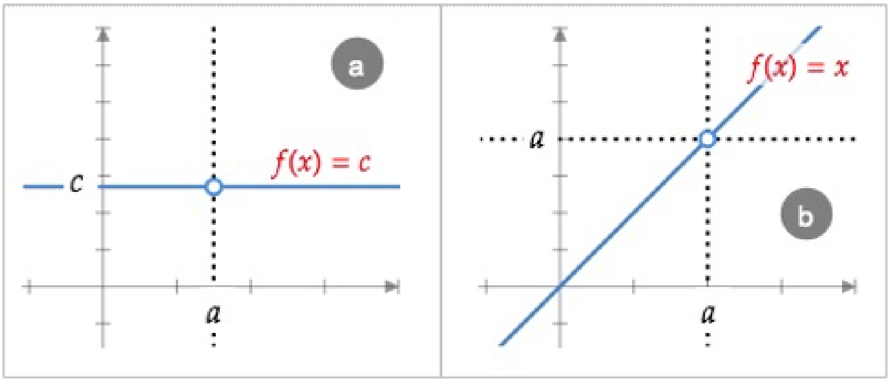
Regla	Descripción	Fórmula
Función constante	El límite de la función constante es la misma constante.	$\lim_{x \to a} c = c$
Función identidad	El límite de la función identidad cuando x tiende a "a" es "a".	$\lim_{x \to a} x = a$
Constante por una función	El límite de una constante "c" por una función es igual dicha constante por el límite de la función	$\lim_{x \to a} [c * f(x)] = c * \lim_{x \to a} f(x)$
Suma y diferencia	El límite de la suma/diferencia de dos funciones es igual a la suma/diferencia de los límites de las funciones individuales.	$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
Producto	El límite del producto de dos funciones es igual al producto de los límites de las funciones individuales	$\lim_{x \to a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x)$
Cociente	El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de las funciones individuales, siempre y cuando el límite del denominador sea diferente de cero.	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$
Exponente	El límite de una función elevada a una potencia es igual a la función elevada a esa potencia y con el límite aplicado.	$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n$

Nota. Riofrío, G., 2023.

En la figura 32, se muestra gráficamente el límite de las funciones para los casos 1 y 2 de la tabla 4.

Figura 33.

Determinación del límite en funciones básicas



Nota. Riofrío, G., 2023.

Estas reglas básicas pueden ser utilizadas en diferentes combinaciones para resolver límites más complicados. Es importante tener en cuenta que estas reglas solo se aplican a funciones que sean continuas en el punto donde se está evaluando el límite.

Ejemplos:

Veamos a continuación algunos ejemplos de cálculo de límites mediante las reglas básicas:

1. $\lim_{x \to 2} 3 = 3$
2. $\lim_{x \to 2} x = 2$
3. $\lim_{x \to 2} x^4 = \left(\lim_{x \to 2} x\right)^4 = 2^2 = 16$
4. $\lim_{t \to 4}(t \cdot (t-4)) = \left(\lim_{t \to 4} t\right) \cdot \left(\lim_{t \to 4} t - \lim_{t \to 4} 4\right) = 4 \cdot (4-4) = 0$
5. $\lim_{x \to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{x-4}\right) = \frac{\lim_{x \to 2}\sqrt{x+2}}{\lim_{x \to 2}(x-4)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \to 2}(x+2)}}{\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 4} = \dots$

$$\dots = \frac{\sqrt{\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 2}}{2-4} = \frac{\sqrt{2+2}}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. **Lectura:**

    - En la guía didáctica realice una lectura compresiva de los temas de límites laterales y reglas básicas de cálculo de límites mismos que corresponden a la semana 5.

    - Revise el recurso educativo: "Khan Academy", en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

    - Repase de forma crítica el comportamiento de los límites en diferentes contextos.

    - Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.

    - Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word

Semana 6

Estimados participantes, si bien es cierto hemos visto el cálculo de límites de forma gráfica, ahora es necesario estudiarlos desde el punto de vista analítico y algebraico.

El cálculo analítico de límites es una herramienta muy importante en la matemática, ya que permite obtener soluciones precisas y confiables de los límites de funciones complejas y continuas. A diferencia del método gráfico, que consiste en dibujar la gráfica de la función y aproximar el valor del límite visualmente, el cálculo analítico utiliza teoremas y fórmulas matemáticas para obtener un resultado exacto.

Además, el cálculo analítico de límites es esencial para entender y resolver muchos problemas en áreas como la física, la ingeniería y las ciencias naturales. Por ejemplo, en la física se utiliza para analizar la velocidad y la aceleración de objetos en movimiento.

Una vez que hemos estudiado los límites y su comportamiento, es necesario repasar los métodos existen para calcular dicho valor de forma analítica, si bien es cierto y como nos hemos dado cuenta, de forma gráfica se puede obtener el valor (aproximado), pero es necesario respaldar los valores obtenidos con procesos analíticos y algebraicos.

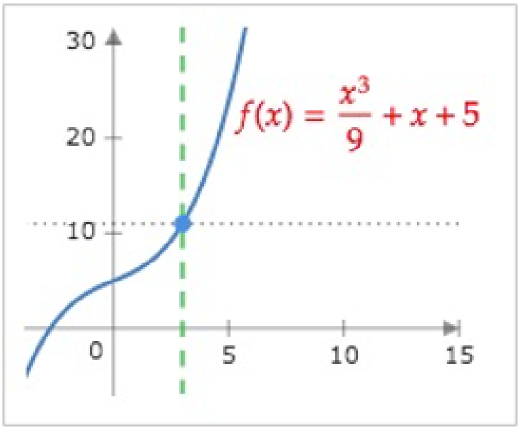
2.8. Cálculo de límites por sustitución directa.

La técnica de sustitución directa es una técnica comúnmente utilizada para resolver límites **cuando la función está definida para el valor del límite**, es decir, cuando la variable del límite se acerca a un valor fijo, como x->a. En esta técnica, simplemente se sustituye el valor límite directamente en la función y se evalúa el resultado, esta técnica es muy útil para resolver límites simples y rápidos.

Veamos el siguiente ejemplo en el cual sí está definida la función para el valor de x = 3, por lo tanto, se puede aplicar esta primera estrategia de sustitución directa.

Se solicita calcular el límite de la función $f(x) = \frac{x^3}{9} + x + 5$ cuando "x" tiende a 3.

Figura 34.
Función matemática



Nota. Riofrío, G., 2023.

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + x + 5$$
$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{3^3}{9} + 3 + 5 = \frac{27}{9} + 3 + 5 = 11$$

Se recomienda usar esta técnica en primera instancia, si la misma no funciona, es decir si no está definida en el punto del límite, entonces es necesario aplicar otras técnicas para calcular valor del límite.

2.9. Cálculo de límites mediante cancelación por factorización

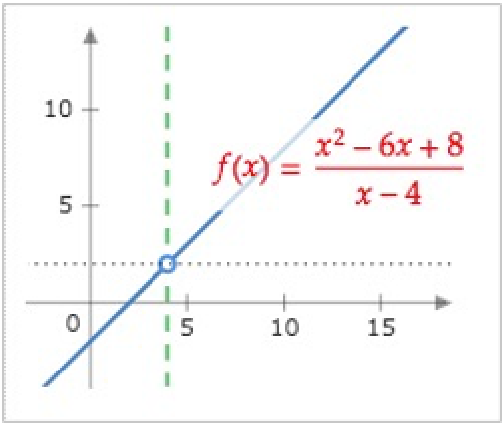
Existen límites que al ser manipulados mediante sustitución directa resultan en indeterminaciones matemáticas $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \sqrt{-\#}, \ log\ (\# \leq 0)\right)$. En esta sección se verá diferentes técnicas para eliminar, si es posible, tales indeterminaciones.

Una técnica para eliminar la indeterminación 0/0 es la técnica de cancelación por factorización. Esta técnica es importante cuando tanto en el numerador como el denominador existe un factor que se cancela, eliminando la indeterminación en la expresión.

Revisemos en el siguiente ejemplo la técnica de cancelación por factorización, se solicita obtener el límite de la función $f(x) = \frac{x^2-6x+8}{x-4}$ cuando "x" tiende a 4.

Figura 35.

Función matemática



Nota. Riofrío, G., 2023.

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)} \quad \text{(factorizamos el polinomio.)}$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)} = x - 2$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = x - 2$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 2$$

Observe que la técnica de sustitución directa falla debido a que el límite del denominador de la fracción es cero (4 - 4 = 0). Sin embargo, dado que el límite del numerador (mediante sustitución directa) es también cero, se puede inferir que existe un factor común entre el numerador y el denominado, que permitirá eliminar tal indeterminación.

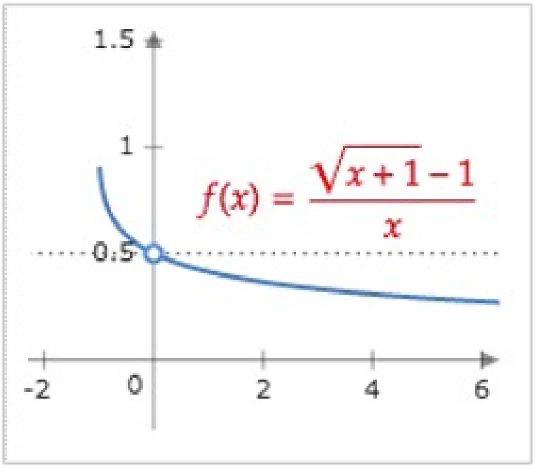
2.10. Cálculo de límites mediante racionalización

Para operar los límites mediante la técnica de racionalización se debe escribir el conjugado del término que tenga la raíz y se multiplica el numerador del denominador por el conjugado. Se realizan las operaciones de multiplicación, para finalmente eliminar el término que se vuelve cero en el denominador; en caso de ser necesario se factoriza.

En el siguiente ejemplo la sustitución directa conlleva a la forma indeterminada 0/0. Sin embargo, para eliminar tal indeterminación es necesario multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por su conjugada. Preste atención a los siguientes procedimientos matemáticos y note como se elimina la indeterminación.

Figura 36.

Función matemática



Nota. Riofrío, G., 2023.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \quad \text{(aplicamos la tecica de racionalización.)}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.5$$

1 Bimestre

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. **Lectura:**

    - En la guía didáctica realice una lectura compresiva de los temas de cálculo de límites en sus diferentes escenarios, recuerde que el cálculo de límites es la base para el cálculo diferencial.

    - Revise el recurso educativo: "Khan Academy" en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

    - Establezca las diferencias entre las diferentes formas de calcular los límites, es importante que entienda que estrategia de cálculo es importante para cada escenario que se presente.

    - Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.

    - Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

3. **Autoevaluación**

    - Estimados estudiantes, para evaluar los aprendizajes adquiridos sobre esta temática, le invito a desarrollar el cuestionario que a continuación se presenta.

Autoevaluación 2

1. **¿Cuál es el límite de la función $f(x) = (x^2 + 3x + 1) / (x - 2)$ cuando x se acerca a 2?**

   a. 3
   b. 4
   c. 5
   d. No existe.

2. **¿Cuál es el límite de la función $f(x) = (2x^2 - 4) / (x - 1)$ cuando x se acerca a 1?**

   a. -2
   b. 0
   c. 2
   d. No existe.

3. **¿Cuál es el límite de la función $f(x) = \sin(x) / x$ cuando x se acerca a 0?**

   a. 0
   b. 1
   c. -1
   d. No existe.

4. **¿Qué es un límite en cálculo diferencial?**

   a. El valor al que se acerca una función cuando la variable independiente se acerca a un cierto valor.
   b. El valor máximo o mínimo de una función.
   c. La tasa de cambio instantánea de una función.
   d. La integral definida de una función en un intervalo.

5. **¿Cómo se representa el límite de una función f(x) cuando x se acerca a un valor a?**

   a. lim f(x) = a
   b. lim f(x) -> a
   c. lim x -> a f(x)
   d. Todas las anteriores.

6. **¿Qué sucede si el límite lateral derecho y el límite lateral izquierdo de una función en un punto x=a son iguales?**

   a. La función no tiene límite en el punto a.
   b. La función tiene límite finito en el punto a.
   c. La función tiene límite infinito en el punto a.
   d. No se puede determinar el límite de la función en el punto a.

7. **¿Qué sucede si el límite lateral derecho y el límite lateral izquierdo de una función en un punto x=a son diferentes?**

   a. La función no tiene límite en el punto a.
   b. La función tiene límite finito en el punto a.
   c. La función tiene límite infinito en el punto a.
   d. No se puede determinar el límite de la función en el punto a.

8. **¿Cuál es el resultado de la siguiente operación matemática? lim x->3 $(x^2 - 9) / (x - 3)$**

   a. 6
   b. 9
   c. 3
   d. No existe.

9. **¿Qué significa que el límite de una función en un punto no existe?**

   a. La función no está definida en ese punto.
   b. La función tiene una asíntota vertical en ese punto.
   c. La función tiene un hueco en ese punto.
   d. La función no se acerca a un valor específico al acercarse al punto.

10. ¿Cuál es el límite de la función $g(x) = (x - 1) / (x^2 - 1)$ cuando x se aproxima a 1?

a. 1/2
b. 1
c. 2
d. El límite no existe.

Ir al solucionario

1 Bimestre

Semana 7

Una vez concluida la revisión de los contenidos del primer bimestre, es momento que se centre sus esfuerzos en terminar las actividades de aprendizaje evaluadas e inicie el repaso de los contenidos estudiados en las 2 primeras unidades.

Aproveche las actividades evaluadas y no evaluadas que ha desarrollado durante el bimestre para con base en ello, repasar los conceptos estudiados.

También evalue cada uno de los resultados de aprendizaje esperados, y pregúntese en qué medida los ha conseguido. Es otra manera de detectar temas a los que usted debe dar prioridad en su repaso.

A continuación, las actividades de aprendizaje a las que le recomendamos dedicar tiempo y esfuerzo en esta penúltima semana del primer bimestre.

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Revise y repase todos los contenidos estudiados durante el primer bimestre.
2. Elabore mapas mentales y esquemas resumen que le permitan prepararse para examen presencial.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Estimado/a estudiante.

Llegamos al final de primer bimestre, esperamos que su experiencia de aprendizaje haya sido muy positiva y gratificante.

Durante esta semana su atención se debe centrar en prepararse para el examen presencial del primer bimestre. Continúe con el repaso de los contenidos que inició en la semana 7, priorizando aquellos en los que usted vea que no ha podido alcanzar los resultados esperados.

Además, durante esta semana ya tendrá acceso a la solución de todos cuestionarios en línea calificados que también le recomendamos revisar para identificar puntos prioritarios en su repaso.

A continuación, las actividades que le recomendamos para esta última semana. ¡Mucho ánimo y éxitos en su evaluación bimestral!

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Revise y repase todos los contenidos estudiados durante el primer bimestre.
2. Elabore mapas mentales y esquemas resumen que le permitan prepararse para examen presencial.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o en un documento Word.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 3

- Calcula las derivadas e integrales y explora sus aplicaciones.

Estimados estudiantes, aprender a calcular derivadas y explorar sus aplicaciones es una de las habilidades más valiosas que adquirirán en el curso de cálculo diferencial. Los animo a poner su enfoque y dedicación para entender y dominar este tema, ya que les permitirá desarrollar un pensamiento crítico y analítico, y aplicarlo en diferentes áreas de las matemáticas y la ciencia. Recuerden que el esfuerzo y la práctica son clave para alcanzar cualquier objetivo. ¡Confíen en sus habilidades y siempre mantengan una actitud positiva! “

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 9

Estimados estudiantes, estamos iniciando el segundo bimestre de nuestro curso, y el tema de estudio es **“La derivada”**, los invito a mantener el buen ánimo y la proactividad en esta parte final del curso.

¡¡ Empecemos!!

Unidad 3. La derivada

La derivada es un concepto fundamental en cálculo y es aplicable en muchos aspectos de la tecnología, desde la optimización de algoritmos hasta la predicción de tendencias en grandes conjuntos de datos. Al comprender y aplicar la derivada, están fortaleciendo su capacidad para resolver problemas y tomar decisiones informadas en su carrera. Mantengan su entusiasmo y dedicación.

3.1. Velocidad promedio y velocidad instantánea

Antes de iniciar el estudio de la derivada en el presente capítulo es necesario revisar los conceptos relacionados con la velocidad, el estudio de estos temas nos dará una visión clara de las derivadas. A continuación, veremos que es la "velocidad promedio" y la "velocidad instantánea".

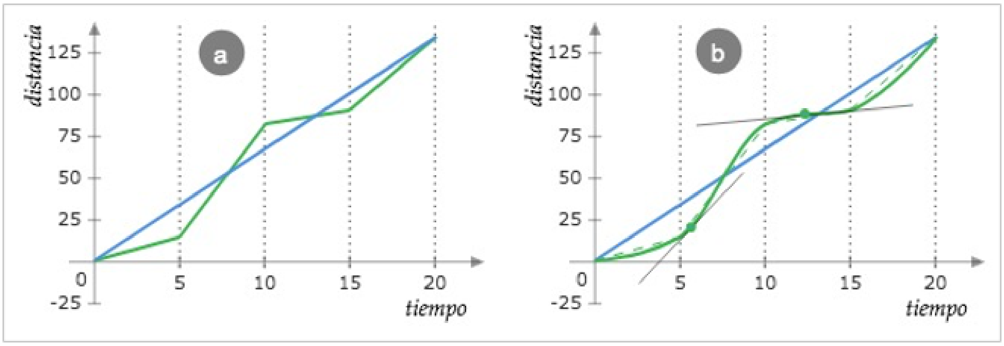
La velocidad promedio se puede entender como una medición de la cantidad de desplazamiento en un determinado período de tiempo. Por ejemplo, si un objeto viaja a lo largo de una distancia de 100 metros en 10 segundos, su velocidad promedio sería de 100/10 = 10 metros por segundo. La velocidad promedio es útil para describir el movimiento general de un objeto a lo largo de un período de tiempo determinado.

Sin embargo, la velocidad promedio no proporciona información sobre la velocidad exacta en un momento dado. La velocidad instantánea, por otro lado, proporciona una medición de la tasa de cambio del desplazamiento en un momento específico. Por ejemplo, si un objeto se mueve a una velocidad de 10 metros por segundo durante los primeros 5 segundos, y a una velocidad de 20 metros por segundo durante los últimos 5 segundos, su velocidad promedio sería de 15 metros por segundo, pero su velocidad instantánea variaría a lo largo del tiempo.

En resumen, la velocidad promedio es una medición útil para describir el movimiento general de un objeto, mientras que la velocidad instantánea proporciona información sobre la velocidad exacta en un momento dado.

En la figura 37, podemos ver en color azul la pendiente que representa la relación distancia/tiempo (velocidad) en todo el recorrido, mientras que la línea verde representa las variaciones de velocidad existentes, por lo tanto, la velocidad instantánea viene a ser la pendiente de la recta tangente en cada punto específico.

Figura 37.
Velocidad promedio e instantánea



Nota. Riofrío, G., 2023.

El estudio de la velocidad promedio y velocidad instantánea nos servirá de base para entender la importancia de calcular la pendiente de una curva en un punto específico de la misma, es decir la velocidad instantánea.

3.2. El problema de la recta tangente

En las primeras semanas del presente curso ya repasamos los conceptos relacionados con la tangente de una recta, en esta unidad estudiaremos dicho concepto, pero desde un enfoque de límites, es decir minimizando la distancia entre los puntos extremos de la recta.

La tangente en un punto de una función puede calcularse utilizando límites. El cálculo de la tangente en un punto dado de una función f(x) se realiza de la siguiente manera:

1. Se elige un punto específico en la función, por ejemplo, x = a.
2. Se elige un intervalo pequeño, Δx, alrededor del punto x = a.
3. Se calcula la inclinación de la recta que pasa por los puntos $P\left(a, f\left(a\right)\right)$ y $P\left(a+\Delta x, f\left(a+\Delta x\right)\right)$. La inclinación se puede calcular utilizando la fórmula:

$$m = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

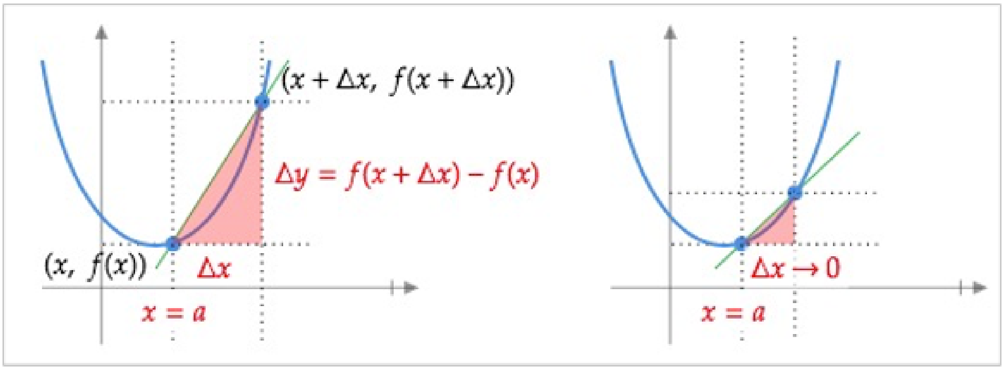
4. Se aproxima la inclinación de la recta tangente en x = “a” a medida que Δx se acerca a 0. Esto se realiza calculando el límite:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$$

5. La inclinación de la recta tangente en x=a es igual a la derivada de la función en x=a.

Figura 38.

Cálculo de la pendiente de una recta



Nota. Riofrío, G., 2023.

De acuerdo con la figura 38, podemos definir como se calcula la pendiente de la recta secante con base en los puntos identificados en la gráfica:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Finalmente, nos podemos dar cuenta que la recta secante se convierte en tangente conforme Δx tiende a cero, por lo tanto, la pendiente de dicha recta tangente se puede definir de la siguiente manera aplicando los conceptos de límite ya estudiados.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Para facilitar los ejemplos posteriores reemplazaremos el valor de Δx (Delta x) por una nueva variable "h".

3.3. Definición de derivada

En las primeras clases de esta unidad estudiamos el cálculo de la tangente de una función en un punto dado mediante límites, una vez repasado y entendido dicho tema ya podemos definir lo que es la derivada, puesto que dicho concepto es simplemente la generalización del cálculo de la pendiente indicado anteriormente.

La derivada es un concepto matemático que mide la tasa de cambio de una función en un punto determinado. Es una herramienta valiosa para entender cómo cambian las funciones y para resolver problemas en múltiples áreas, incluyendo física, economía, ingeniería, biología, etc.

La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ se puede interpretar como el límite del cambio en la función $f(x)$ dividido por el cambio en "x", a medida que "x" se acerca a "a". Es decir, la derivada describe la inclinación de la recta tangente a la curva de la función en ese punto. La derivada puede ser un número constante o una función en sí misma, y se puede calcular utilizando diferentes métodos, como la definición de límites, la regla de la cadena o la notación de diferencial.

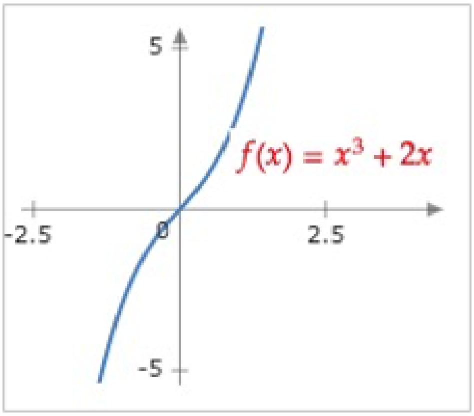
3.4. Cálculo de la derivada mediante límites

En secciones anteriores revisamos que el cálculo de la derivada es en esencia la aplicación de límites, a continuación, veremos algunos ejemplos del cálculo de la derivada mediante la fórmula general de límites.

Ejemplos:

1. Calcular la derivada de $f(x) = x^3 + 2x$, utilizando la fórmula de límites.

Figura 39.
Cálculo de la derivada



Nota. Riofrío, G., 2023.

$$f(x) = x^3 + 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Para facilitar los cálculos reemplazaremos Δx por h

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$f(x + h) = (x + h)^3 + 2(x + h)$ se reemplaza x *por* $(x + h)$

$f(x) = x^3 + 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\left((x + h)^3 + 2(x + h)\right) - \left(x^3 + 2x\right)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{h\left(3x^2 + 3xh + h^2 + 2\right)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2 + 2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3x(0) + 0^2 + 2)$$

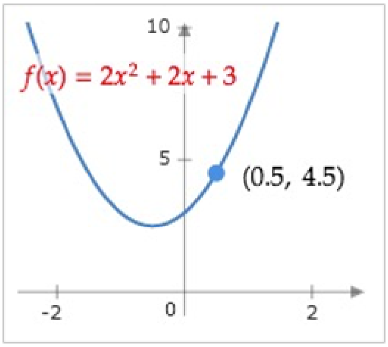
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$$

2. Si $f(x) = 2x^2 + 2x + 2$, encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto (0.5, 4.5).

Para resolver este ejercicio primero obtenemos el valor de la pendiente (m) en el punto (0.5, 4.5).

Figura 40.

Cálculo de la derivada



Nota. Riofrío, G., 2023.

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+h) = 2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3$$

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3\right) - \left(2x^2 + 2x + 3\right)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h + 2)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} (4x + 2h + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 2(0) + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4(0.5) + 2 = 4$$

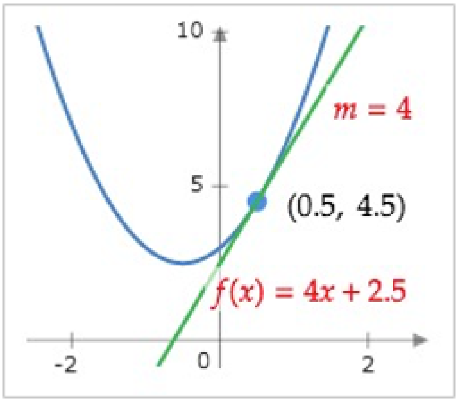
Así, la recta tangente a la gráfica en (0.5, 4.5) tiene pendiente 4. Con eesta información lo más conveniente es utilizar la fórmula punto - pendiente de esta tangente.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4.5 = 4(x - 0.5)$$

$$y = 4x + 2.5$$

Figura 41.
Cálculo de la derivada



Nota. Riofrío, G., 2023.

Notaciones de la derivada.

Las notaciones de la derivada son símbolos matemáticos utilizados para representar la derivada de una función en un punto específico. Algunas de las notaciones más comunes son:

1. **Notación de diferencial:** se utiliza la letra "d" con una variable para representar la derivada. Por ejemplo, $\frac{dy}{dx}$ representa la derivada de la función f(x) con respecto a "x".

2. **Notación de Leibniz:** se utiliza la letra "d" con una variable y una fracción para representar la derivada. Por ejemplo, $\frac{d}{dx}(f(x))$ representa la derivada de la función f(x) con respecto a "x".

3. **Notación de Newton:** se utiliza una línea horizontal para representar la derivada. Por ejemplo, f'(x) representa la derivada de la función f(x) con respecto a "x".

Estas notaciones son equivalentes y se utilizan en diferentes contextos y aplicaciones. La elección de una notación u otra depende del autor y del contexto matemático específico.

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación.

1. **Lectura:**

   - En la guía didáctica, realice una lectura compresiva de los temas de "Problema de la recta tangente" mismos que corresponden a la semana 9.
   - Revise el recurso educativo: "Khan Academy" donde encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

   - Repase de forma crítica el proceso de cálculo de la recta tangente mediante límites, el mismo es clave en su aprendizaje.
   - Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.
   - Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

Semana 10

Buenos días, estimados estudiantes de cálculo diferencial, ¡Sean bienvenidos a una nueva semana del presente curso!, exploraremos la importancia de las reglas de derivación. Estas reglas son herramientas poderosas que nos permiten calcular la derivada de una función de manera eficiente y resolver problemas matemáticos. Aprender a aplicar las reglas de derivación es esencial para el éxito en esta asignatura y en los problemas relacionados con la misma, así que estén listos para poner en práctica sus habilidades matemáticas y aprender algo nuevo.

¡Comencemos!

Como se pudieron dar cuenta de forma general, se calcula la derivada en un punto de una función mediante límites, este proceso puede resultar tedioso si la función es grande y si existen demasiados términos en la función.

Para el cálculo de la derivada existen ciertas reglas que hacen que este proceso sea realmente sencillo.

3.5. Reglas básicas de derivación

Las reglas básicas de derivación son fórmulas matemáticas que permiten calcular la derivada de algunas funciones elementales con facilidad. Algunas de las reglas más comunes incluyen:

Tabla 5.

Reglas de derivación

Descripción	Función	Derivada
Función constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Función identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Constante por x	$f(x) = a \cdot x$	$f'(x) = a$
Regla de la potencia	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$
Suma o diferencia de funciones	$f(x) = u \pm v$	$f'(x) = u' \pm v'$
Constante por función	$f(x) = k \cdot u$	$f'(x) = k \cdot u'$

Nota. Riofrío, G., 2023.

Estas son algunas de las reglas básicas de derivación. Hay otras reglas y fórmulas que se utilizan para calcular la derivada de funciones más complejas. Es importante tener una comprensión sólida de estas reglas básicas antes de avanzar a conceptos más avanzados en el tema de derivación.

Ejemplos:

1. $f(x) = -2$ $\qquad f'(x) = 0$
2. $f(x) = -5x$ $\qquad f'(x) = -5$
3. $f(x) = x^{-4}$ $\qquad f'(x) = -4x^{-5}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = (x)^{(1/2)} \qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^{(-1/2)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$f(x) = x^{(-1/2)} \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}x^{(-3/2)}$$

6. $f(x) = -2x^2$ $\qquad f'(x) = -4x$
7. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ $\qquad f'(x) = 9x^2 - 4x - 5$

3.6. Regla del producto y cociente

En algunos textos las reglas del producto y cociente forman parte de las reglas básicas de derivación, en esta guía las estudiaremos por separado.

Las reglas del producto y del cociente son herramientas útiles para calcular la derivada de funciones compuestas.

- **Regla del producto:** la regla del producto establece que la derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda función más el producto de la primera función por la derivada de la segunda función.

- **Regla del cociente:** la regla del cociente establece que la derivada de un cociente de dos funciones es igual al cociente de la diferencia entre el producto de la derivada de la primera función por la segunda función y el producto de la primera función por la derivada de la segunda función, sobre el cuadrado de la segunda función.

$$\textit{Regla del producto:} \quad f(x) = u \cdot v \quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\textit{Regla del cociente.} \quad f(x) = \frac{u}{v} \quad f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Estas dos reglas son muy útiles para calcular la derivada de funciones compuestas y para solucionar problemas más complejos en cálculo diferencial.

Ejemplos:

1. $f(x) = x^2 \cdot (4x+1)$ $\quad$ $f'(x) = 2x \cdot (4x+1) + x^2 \cdot 4$

   $f'(x) = 12x^2 + 2x$

2. $f(x) = x^3 \cdot cos(x)$ $\quad$ $f'(x) = 3x^2 \cdot cos(x) + x^3 \cdot (-sen(x))$

   $f'(x) = 3x^2 cos(x) - x^3 sen(x)$

3. $f(x) = \dfrac{4x-2}{x^2+1}$ $\quad$ $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)\cdot(4) - (4x-2)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}$

   $f'(x) = \dfrac{-4x^2+4x+4}{(x^2+1)^2}$

4. $f(x) = \dfrac{6x^3}{\ln(x)}$ $\quad$ $f'(x) = \dfrac{\ln(x) \cdot 18x^2 - 6x^3 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$

   $f'(x) = \dfrac{18x^2 \ln(x) - 6x^2}{(\ln(x))^2}$

3.7. Regla de la cadena

La regla de la cadena es una técnica de derivación que se utiliza para derivar funciones compuestas. Si tenemos una función compuesta de la forma f(u(x)), donde u(x) es una función que depende de “x”, la regla de la cadena nos permite derivar f(u(x)) en términos de u(x) y su derivada u’(x). La regla de la cadena se expresa matemáticamente como:

$$\textit{Regla de la cadena}: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$f'(u(x)) = f'(u) \cdot u'(x)$$

Es decir, la derivada de f(u(x)) es igual a la derivada de f evaluada en u(x) multiplicada por la derivada de u(x) con respecto a “x”.

Para aplicar la regla de la cadena, se sigue los siguientes pasos:

1. Se identifica la función compuesta f(u(x)) y se escribe en términos de la función exterior f y la función interior u(x).
2. Se encuentra la derivada de la función interior u(x) con respecto a “x”.
3. Se encuentra la derivada de la función exterior f evaluada en la función interior u(x), es decir, f’(u(x)).
4. Se multiplica f’(u(x)) por u’(x) para obtener la derivada de la función compuesta f(u(x)).

Por ejemplo, si tenemos la función compuesta f(u)=sen(u) y u(x)=2x+1, podemos aplicar la regla de la cadena de la siguiente manera:

1. $f(u(x)) = \sin(u(x)) = \sin(2x+1)$
2. $u'(x) = 2$
3. $f'(u) = \cos(u)$
4. *Entonces,* $(f(u(x)))' = \cos(u(x)) * u'(x) = \cos(2x+1) * 2$

Así, la derivada de la función compuesta es igual a .

Ejemplo:

Derivar la siguiente función: $f(x) = (3x^2 - 4)^4$

$$f(x) = \left(3x^2 - 4\right)^4$$

$$f(u) = u^4 \qquad f'(u) = 4u^3$$

$$u(x) = 3x^2 - 4 \qquad u'(x) = 6x$$

$$f'(u(x)) = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$f'(u(x)) = 4u^3 \cdot 6x$$

$$f'(u(x)) = 4\left(3x^2 - 4\right)^3 \cdot 6x$$

$$f'(x) = 24x\left(3x^2 - 4\right)^3$$

Para finalizar esta semana vamos a resolver el ejercicio que lo trabajamos en la primera semana de este segundo bimestre, en cual, aplicamos la fórmula general de límites para el cálculo de la derivada, en esta ocasión aplicaremos la regla de derivación.

1. Calcular la derivada de $f(x) = x^3 + 2x$.

Para derivar este polinomio aplicaremos la regla de la suma/diferencia y la regla de la potencia.

$$f(x) = x^3 + 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

2. Si $f(x) = 2x^2 + 2x + 2$, encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto (0.5, 4.5).

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) = 4x + 2$$

$$f'(0.5) = 4(0.5) + 2$$

$$f'(0.5) = 4$$

$$m = 4$$

Hemos encontrado la pendiente de la recta tangente en el punto (0.5, 4.5). Encontremos ahora la ecuación de la recta que pasa por el punto indicado, para ello utilizaremos la ecuación de la forma punto pendiente.

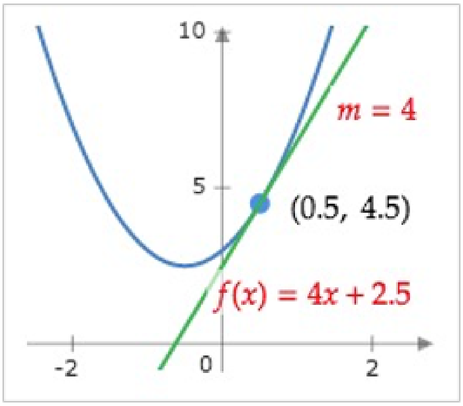
$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4.5 = 4(x - 0.5)$

$y = 4x + 2.5$

Figura 42.

Cálculo de la pendiente



Nota. Riofrío, G., 2023.

Como se pudieron dar cuenta, al aplicar estas reglas el proceso de encontrar la derivada es realmente fácil.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. **Lectura:**

    - En la guía didáctica, realice una lectura compresiva de los temas de reglas de cálculo de la derivada mismos que corresponden a la semana 10 del curso.

    - Revise el recurso educativo: "Khan Academy" en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

- Realice ejercicios aplicando las diferentes reglas de derivación, si es necesario puede utilizar cualquier herramienta informática para validar los resultados.
- Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.
- Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

Semana 11

Estimados estudiantes, estamos iniciando la semana 11, esta semana al igual que todas es muy importante, puesto que daremos continuidad al estudio de las reglas de derivación.

Vamos a adentrarnos en el mundo de las reglas de derivación de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Estos tipos de funciones juegan un papel fundamental en muchas áreas de la ciencia y la tecnología, y aprender a derivarlas es un paso crucial en nuestro camino para comprender mejor el comportamiento de estas funciones en el espacio. Estén preparados para aplicar sus conocimientos previos de cálculo, y para adquirir nuevos conceptos y habilidades. ¡Esta es una oportunidad emocionante para ampliar sus horizontes matemáticos y mejorar su comprensión de las funciones!

¡Comencemos!

3.8. Derivación de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son ampliamente utilizadas en una gran variedad de aplicaciones y campos, y la derivación de estas funciones juega un papel importante en muchos de ellos. Algunas de las áreas en las que se pueden aplicar las derivadas de funciones trigonométricas incluyen:

1. **Física:** las funciones trigonométricas son muy útiles en la descripción de fenómenos físicos como las ondas y la vibración. La derivada de estas funciones puede utilizarse para calcular la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento.

2. **Matemáticas:** la derivación de funciones trigonométricas es un aspecto importante de la teoría matemática y la investigación en cálculo.

3. **Ingeniería**: las funciones trigonométricas se utilizan en una gran variedad de campos de la ingeniería, incluyendo la electrónica, la mecánica y la aeroespacial. La derivación de estas funciones se utiliza para resolver problemas relacionados con el diseño y la optimización.

4. **Ciencias:** la derivación de funciones trigonométricas es esencial en la investigación en ciencias como la biología, la química y la astronomía, para describir y analizar fenómenos complejos.

Al igual que con las reglas básicas de derivación existen fórmulas para derivar las diferentes funciones trigonométricas, en la tabla 6, se presentan dichas reglas.

Tabla 6.

Derivadas de funciones trigonométricas

Descripción	Función	Derivada
Función Seno	$f(x) = sin(u)$	$f'(x) = cos(u) \cdot u'$
Función Coseno	$f(x) = cos(u)$	$f'(x) = sin(u) \cdot u'$
Función Tangente	$f(x) = tan(u)$	$f'(x) = sec^2(u) \cdot u'$
Función Cotangente	$f(x) = cot(u)$	$f'(x) = -csc^2(u) \cdot u'$
Función Secante	$f(x) = sec(u)$	$f'(x) = sec(u) \cdot tan(u) \cdot u'$
Función Cosecante	$f(x) = csc(u)$	$f'(x) = -csc(u) \cdot cot(u) \cdot u'$

Nota. Riofrío, G., 2023.

Veamos algunos ejemplos de funciones en los cuales se aplican tanto las reglas básicas como las reglas para derivar funciones trigonométricas.

1. $f(x) = sen^3\,(3x)$ $\quad$ $f'(x) = 9 \cdot sen^2(3x) \cdot cos(3x)$

2. $f(x) = cos(7-2x)$ $\quad$ $f'(x) = 2 \cdot sen(7-2x)$

3. $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x^2}$ $\quad$ $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot cos(x) - 2x \cdot sen(x)}{x^4}$

4. $f(x) = tan\left(\sqrt{x}\right)$

$$f(x) = tan\left(x^{1/2}\right) \qquad f'(x) = sec^2\left(x^{1/2}\right) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f'(x) = sec^2\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5. $f(x) = tan\left(x^2 + 3x - 2\right)$ $\quad$ $f'(x) = sec^2\left(x^2 + 3x - 2\right) \cdot (2x+3)$

3.9. Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones exponenciales y logarítmicas son ampliamente utilizadas en una gran variedad de aplicaciones y campos, y la derivación de estas funciones juega un papel importante en muchos de ellos. Algunas de las áreas en las que se pueden aplicar las derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas incluyen:

1. **Matemáticas:** la derivación de funciones exponenciales y logarítmicas es un aspecto importante de la teoría matemática y la investigación en cálculo.

2. **Economía:** las funciones exponenciales y logarítmicas son muy útiles en la modelación de fenómenos económicos, como la inflación, la tasa de interés y el crecimiento económico. La derivación de estas funciones se utiliza para entender cómo se relacionan estos fenómenos con el tiempo.

3. **Biología:** las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan en la investigación biológica para describir y analizar fenómenos como la tasa de crecimiento de poblaciones, la propagación de enfermedades y la dinámica de sistemas biológicos.

4. **Ciencias de la computación:** las funciones exponenciales y logarítmicas son muy útiles en la ciencia de la computación, especialmente en la criptografía, para codificar y descifrar información confidencial.

5. **Física:** las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan en la física para describir fenómenos como la radiación electromagnética y la distribución de energía en sistemas térmicos.

Derivadas de funciones exponenciales.

$$f(x) = e^u \qquad f'(x) = e^u \cdot u'$$
$$f(x) = a^u \qquad f'(x) = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

Derivadas de funciones logarítmicas.

$$f(x) = \ln u \qquad f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$$
$$f(x) = \log_a u \qquad f'(x) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$

Revisemos algunos ejemplos de este tipo de funciones.

1. $f(x) = \ln(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x)$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x} \cdot (8x^3 - 3x^2 + 6x)$
2. $f(x) = 2^{x^2-1}$ $\qquad f'(x) = 2^{x^2-1} \cdot \ln 2 \cdot 2x$

   $f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2-1} \cdot \ln 2$
3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

   $f(x) = e^{x^{-1}}$ $\qquad f'(x) = e^{x^{-1}} \cdot (-1)x^{-2}$

   $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

   $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. **Lectura:**

   - En la guía didáctica, realice una lectura compresiva de los temas de derivación de funciones trigonométricas y exponenciales que corresponden a la semana 11 del curso.

   - Revise el Recurso Educativo: "Khan Academy" en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

   - Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.

   - Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudaran a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

Semana 12

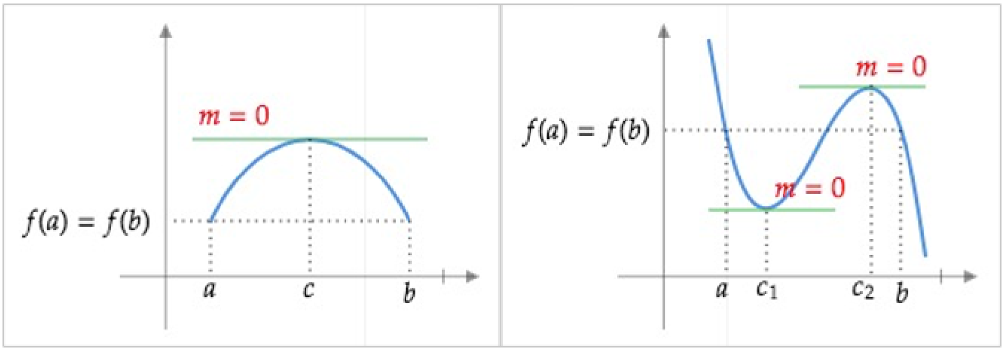
Estimados estudiantes del curso de cálculo, en la presente semana exploraremos dos teoremas clave en el mundo del cálculo: el Teorema del valor medio y el Teorema de Rolle. Estos teoremas son de gran importancia para comprender el comportamiento de las funciones en un intervalo determinado y para desarrollar habilidades para analizarlas. Estén preparados para aprender algo nuevo, para aplicar sus conocimientos previos y para desarrollar habilidades en el análisis de funciones. ¡Esta es una oportunidad para mejorar su comprensión de las funciones y para ampliar sus horizontes matemáticos¡

¡Bienvenidos!

3.10. Teorema de Rolle

El Teorema de Rolle, establece que si una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y diferenciable en un intervalo abierto (a,b) contenido en ese intervalo cerrado, entonces existe al menos un punto en el intervalo abierto donde la derivada de la función es igual a cero.

Figura 43.
Teorema de Rolle



Nota. Riofrío, G., 2023.

Teorema de Rolle: sea *f* una función que:

1. Es continua en el intervalo cerrado [a, b]
2. Es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , y
3. $f(a) = f(b)$

Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que:

$f'(x) = 0$

En términos más simples, esto significa que, si una función es continua en un intervalo cerrado, y toma el mismo valor en ambos extremos de ese intervalo, entonces debe haber al menos un punto en el intervalo donde su pendiente, o tasa de cambio, es cero.

El teorema de Rolle es importante porque establece una relación entre la existencia de raíces y la existencia de puntos críticos, que son puntos donde la derivada se anula. Esto es útil en la resolución de problemas en cálculo, tales como la optimización y la determinación de la concavidad de una función.

Una vez que hemos revisado los conceptos relacionados con el teorema de Rolle, vamos a resolver el siguiente ejercicio:

Sea $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en el intervalo cerrado [-1, 3]. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo abierto (-1, 3) tal que $f'(c) = 0$.

Para aplicar el teorema de Rolle, primero debemos verificar que se cumplan las condiciones del teorema. En este caso, f(x) es continua en el intervalo cerrado [-1, 3] y derivable en el intervalo abierto (-1, 3), ya que f(x) es un polinomio. Además, f(-1)=0 y f(3)=0, por lo que se cumple que f(-1) = f(3).

Entonces, podemos aplicar el teorema de Rolle, que establece que si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b] y derivable en el intervalo abierto (a, b), y f(a) = f(b), entonces existe al menos un punto "c" en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

En este caso, como se cumple que f(x) es continua y derivable en el intervalo [-1, 3] y f(-1) = f(3), podemos afirmar que existe al menos un punto c en el intervalo (-1, 3) tal que f'(c) = 0.

Para encontrar ese punto "c", podemos derivar la función f(x) y resolver la ecuación f'(x) = 0:

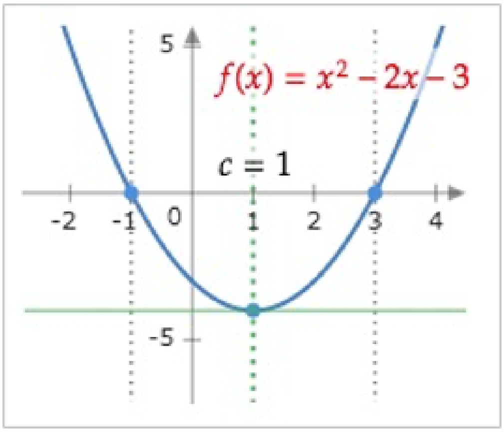
$f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = 2x - 2$

$0 = 2x - 2$

$x = 1$

Figura 44.
Ejemplo teorema de Rolle



Nota. Riofrío, G., 2023.

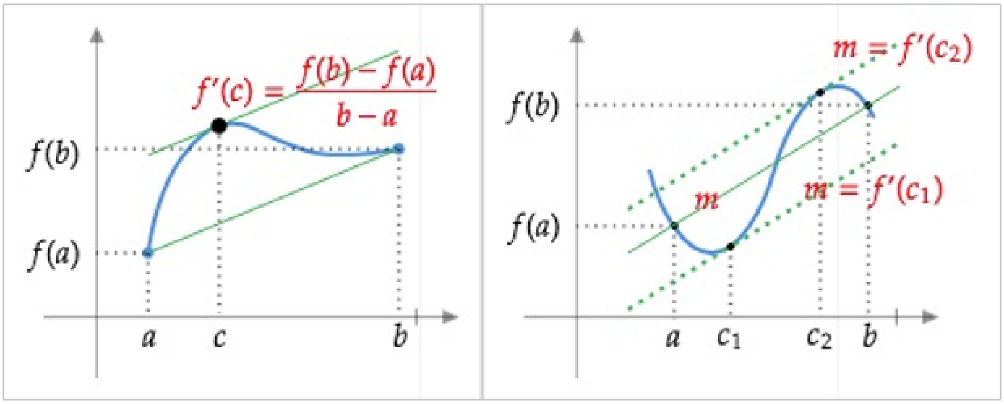
Entonces, podemos concluir que existe al menos un punto c en el intervalo (-1, 3) tal que f’(c) = 0, y en este caso, ese punto es c=1.

3.11. Teorema del valor medio

El Teorema del Valor Medio establece que si una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y diferenciable en un intervalo abierto (a, b) contenido en ese intervalo cerrado, entonces existe un punto “c” en el intervalo abierto (a, b) donde la función toma el valor medio entre los valores de la función en los extremos del intervalo cerrado.

Este teorema se puede aplicar para estimar el valor de una función en un punto en particular, basándose en los valores promedio de la función en un intervalo cercano a ese punto.

Figura 45.
Teorema de valor medio



Nota. Riofrío, G., 2023.

Teorema del "Valor medio": sea *f* una función continua en [a,b] y diferenciable en (a,b).

Entonces existe un punto "c" en (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es decir, la tasa de cambio promedio de la función f en el intervalo [a, b] es igual a la tasa de cambio de la función en el punto "c".

El teorema del valor medio es una herramienta útil para resolver problemas que involucran el cálculo de valores extremos, integración, optimización, entre otros.

Veamos ahora un ejemplo en el cual se aplica el teorema del valor medio.

Supongamos que tenemos la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en el intervalo [0, 4], es decir a=0, b=4.

Para aplicar el teorema del valor medio, primero encontramos la derivada de la función:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

$f'(x) = 2x - 6$

Para aplicar la fórmula del teorema del valor medio, primero, encontramos f(4) y f(0):

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) = 4^2 - 6(4) + 5 = -3$$

$$f(a) = 0^2 - 6(0) + 5 = 5$$

$$f'(c) = \frac{-3 - 5}{4 - 0} = -2$$

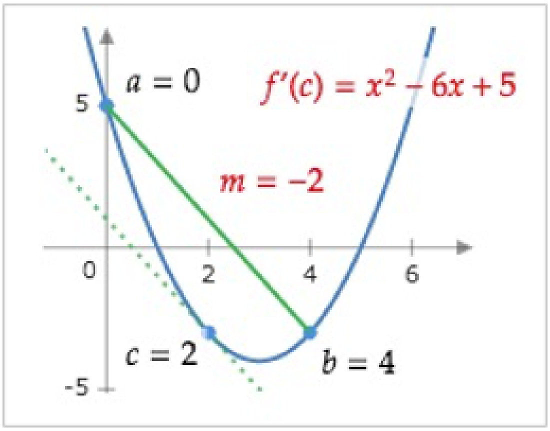
Ahora, necesitamos encontrar un valor c en el intervalo [0, 4] tal que $f'(c) = -2$, finalmente resolvemos para “c”:

f'(x) = 2x - 6

-2 = 2c - 6

c = 2

Figura 46.
Ejemplo teorema de valor medio



Nota. Riofrío, G., 2023.

Por lo tanto, según el teorema del valor medio, existe un valor c en el intervalo [0, 4] tal que *f'(c)* = -2. En este caso, hemos encontrado que c = 2.

Con base en los conceptos vistos anteriormente podemos decir que el teorema de Rolle se enfoca en la derivada de la función y el teorema del valor medio se enfoca en el valor de la función en un punto en particular.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. **Lectura:**

    - En la guía didáctica, realice una lectura compresiva de los teoremas relacionados con la derivada.

    - Revise el recurso educativo: “Khan Academy”, en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

    - Establezca las diferencias entre los teoremas estudiados esta semana.

    - Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.

    - Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word

Autoevaluación 3

1. **¿Cuál es la diferencia entre velocidad promedio y velocidad instantánea?**

    a. La velocidad promedio es la velocidad en un instante específico, mientras que la velocidad instantánea es la velocidad promedio en un intervalo de tiempo.

    b. La velocidad promedio es la velocidad media en un intervalo de tiempo, mientras que la velocidad instantánea es la velocidad en un instante específico.

    c. La velocidad promedio es la velocidad en la posición inicial, mientras que la velocidad instantánea es la velocidad en la posición final.

    d. La velocidad promedio es la velocidad media en un instante específico, mientras que la velocidad instantánea es la velocidad media en un intervalo de tiempo.

2. **¿Cómo se calcula la velocidad promedio de un objeto en movimiento?**

    a. Se divide la distancia recorrida entre el tiempo total.
    b. Se divide el tiempo total entre la distancia recorrida.
    c. Se multiplica la distancia recorrida por el tiempo total.
    d. Se resta la distancia final menos la distancia inicial.

3. **¿Cómo se calcula la velocidad instantánea de un objeto en movimiento?**

    a. Se divide la distancia recorrida entre el tiempo total.
    b. Se divide el tiempo total entre la distancia recorrida.
    c. Se calcula el límite de la velocidad promedio cuando el intervalo de tiempo se acerca a cero.
    d. Se resta la distancia final menos la distancia inicial.

4. **¿Qué representa la pendiente de la recta tangente a la curva de posición-tiempo en un punto?**

   a. La velocidad promedio en ese intervalo de tiempo.
   b. La velocidad instantánea en ese instante de tiempo.
   c. La aceleración en ese instante de tiempo.
   d. La posición inicial del objeto.

5. **¿Cuál es la fórmula para calcular la derivada de una función f(x) en un punto a mediante límites?**

   a. lim h->0 (f(a+h) - f(a)) / (a - h)
   b. lim h->0 (f(a+h) - f(a)) / h
   c. lim x->a (f(x+h) - f(x)) / (a - h)
   d. lim x->a (f(x+h) - f(x)) / h

6. **¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de una función?**

   a. El área bajo la curva de la función.
   b. La recta secante a la función en un punto.
   c. La recta tangente a la función en un punto.
   d. El punto de inflexión de la curva de la función.

7. **¿Cómo se llama a la regla que permite derivar una función compuesta?**

   a. Regla de la cadena.
   b. Regla del producto.
   c. Regla del cociente.
   d. Regla del límite.

8. **¿Cómo se llama al valor de la derivada de una función en un punto donde ésta no está definida?**

   a. Límite superior.
   b. Límite inferior.
   c. Derivada nula.
   d. Derivada no existe.

9. **Encuentra la derivada de $f(x) = (x^2 + 3x)(2x - 1)$**

a. $6x^3 + 3x^2 - x - 3$
b. $6x^2 + 5x - 3$
c. $4x^3 - x^2 - 3x$
d. $4x^3 + 5x^2 - x - 3$

10. **Encuentra la derivada de $f(x) = x^3 / (x - 1)$**

a. $x^3 / (x - 1)^2$
b. $x^2 / (x - 1)^2$
c. $3x^2 / (x - 1)$
d. $3x^2 / (x - 1)^2$

Ir al solucionario

Semana 13

Buenos días con todos, Hemos llegado a la última unidad del presente curso de cálculo en el cual estudiaremos la aplicación y uso del cálculo en otras ciencias (particularmente de la derivada), nos enfocaremos en los problemas de optimización.

Vamos a explorar un tema clave en el mundo del cálculo: los máximos y mínimos de una función. Este tema es fundamental para entender el comportamiento de las funciones y para resolver problemas en una amplia variedad de campos, desde la ingeniería hasta la economía. Aprenderemos cómo utilizar la derivada para encontrar los puntos donde una función alcanza su máximo y su mínimo, y cómo utilizar esta información para resolver problemas prácticos.

¡Empecemos!

Unidad 4. Aplicaciones de la derivada

Obtener la derivada de una función es lo más importante en el cálculo diferencial, en esta unidad veremos las aplicaciones de esta poderosa herramienta, como veremos en los siguientes párrafos la derivada se aplica en diferentes áreas y contextos reales.

4.1. Importancia del cálculo en las ciencias

Antes de iniciar el estudio de las aplicaciones de la derivada, me gustaría recordar la importancia del cálculo en las diferentes áreas de la ciencia.

El cálculo es una herramienta matemática fundamental que tiene aplicaciones en muchas áreas de la ciencia. Algunas de las áreas en las que el cálculo es esencial incluyen:

1. **Física:** en la física, el cálculo se utiliza para modelar y describir los fenómenos naturales, como el movimiento de los planetas, la propagación de las ondas, y la distribución de la energía.

2. **Ingeniería:** en la ingeniería, el cálculo se utiliza para diseñar y optimizar sistemas y procesos, desde puentes y edificios hasta procesos químicos y procesos de fabricación.

3. **Biología:** en la biología, el cálculo se utiliza para modelar y comprender los sistemas biológicos, desde la dinámica de las poblaciones hasta la transmisión de las enfermedades.

4. **Economía**: en la economía, el cálculo se utiliza para modelar y analizar los sistemas económicos, desde la demanda y la oferta hasta la maximización de la ganancia y la minimización de los costos.

5. **Matemáticas:** en las matemáticas, el cálculo es una de las ramas más importantes y tiene aplicaciones en muchas áreas, incluyendo la topología, la geometría y la teoría de números.

> En resumen, el cálculo es una herramienta matemática fundamental que tiene aplicaciones en muchas áreas de la ciencia, incluyendo la física, la ingeniería, la biología, la economía y las matemáticas. Su importancia radica en su capacidad para modelar y comprender los sistemas complejos, y para encontrar soluciones a problemas matemáticos complejos.

Como nos podemos dar cuenta, la aplicación de las técnicas matemáticas estudiadas en este curso son la base para el desarrollo de otras áreas de investigación, ya que permiten modelar y explicar el comportamiento de los diferentes fenómenos de estudio.

4.2. Problemas de optimización

Una vez que estamos conscientes del estudio del cálculo veamos cómo se puede aplicar la derivada en contextos reales.

Las aplicaciones de la derivada en matemáticas son amplias y variadas, algunas de las aplicaciones más importantes incluyen:

- **Análisis de maximización y minimización:** las derivadas se utilizan para encontrar los valores máximos y mínimos de una función.

- **Análisis de optimización:** las derivadas se utilizan en problemas de optimización para encontrar la solución óptima a un problema.
- **Cálculo de tasas de cambio:** las derivadas se utilizan para calcular la tasa de cambio de una función en un punto dado.
- **Cálculo de máximos y mínimos locales:** las derivadas se utilizan para determinar los máximos y mínimos locales de una función.
- **Modelado de fenómenos físicos y económicos**: las derivadas se utilizan en el modelado de fenómenos físicos y económicos para representar la relación entre dos variables.
- **Cálculo de límites:** las derivadas se utilizan para calcular los límites de una función en un punto dado.
- **Análisis de estabilidad:** las derivadas se utilizan en el análisis de estabilidad para determinar si un sistema es estable o inestable.

Estos son solo algunos ejemplos, pero hay muchas más aplicaciones de la derivada en matemáticas y en otras áreas como la física, la ingeniería y la economía.

De manera general estos son ejemplos de la aplicación de la derivada, pero la aplicación más importante está relacionada con los problemas de optimización, las derivadas se utilizan para encontrar los valores máximos y mínimos de una función, lo que es esencial en muchos problemas de optimización y toma de decisiones. Por ejemplo, en economía, las derivadas se utilizan para maximizar la ganancia o minimizar los costos en una situación dada.

La pregunta que siempre nos hacemos cuando estudiamos Matemáticas y particularmente cálculo es: *"¿Para qué nos sirve el estudio de estas técnicas?"*, en esta sección les presentaré una de las principales aplicaciones del uso de derivadas en contextos reales.

Las aplicaciones de cálculo implican la determinación de los valores máximos y mínimos, por ejemplo, quizá se busque maximizar una ganancia o minimizar un costo. La parte principal en determinar la cantidad que se debe maximizar o minimizar como función de alguna variable.

Se debe considerar algunas estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos.

1. Identificar todas las cantidades dadas y las que se van a determinar, entender el problema.
2. Representar el problema de forma gráfica, elaborar un dibujo
3. Escribir una ecuación primaria para la cantidad que se va a maximizar o minimizar, es decir la variable dependiente de dicha ecuación debe ser la variable que se desea optimizar (máximo o mínimo).
4. Reducir la ecuación primaria a una que tenga una sola variable independiente (Con base en las condiciones del problema, pueden existir ecuaciones secundarias, estas nos ayudarán a definir la ecuación primaria en función de una sola variable).
5. Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria, esto es determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
6. Determinar el máximo o mínimo deseado mediante las técnicas del cálculo (derivación).

Estimado/a estudiante, a continuación, encontrará un módulo didáctico donde se explica paso a paso la resolución de un ejemplo muy interesante, le animo a revisarlo.

Puerta de una catedral (Ejemplo)

¿Qué le pareció el ejemplo? Interesante verdad, ahora, reforcemos su aprendizaje realizando las actividades recomendadas que se describen a continuación:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. **Lectura:**
   - En la guía didáctica, realice una lectura compresiva de los temas de optimización, la comprensión de este tema es fundamental en el estudio del cálculo.

- Revise el recurso educativo: "Khan Academy", en el mismo encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

- Repase el proceso para resolver problemas de optimización, es importante determinar la función principal que se quiere maximizar o minimizar.
- Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.
- Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

Semana 14

Buenos días con todos, estamos llegando a las últimas semanas del curso. Vamos a explorar un tema avanzado en el mundo del cálculo (pero no es complejo): las derivadas de orden superior. Estas derivadas son una extensión de las derivadas básicas y tienen muchas aplicaciones en diversas áreas, como la física, la ingeniería y la economía. Con ellas, podemos analizar el comportamiento de las funciones con mucho mayor detalle y resolver problemas complejos que requieren un análisis más profundo.

¡Empecemos!

4.3. Derivadas de orden superior

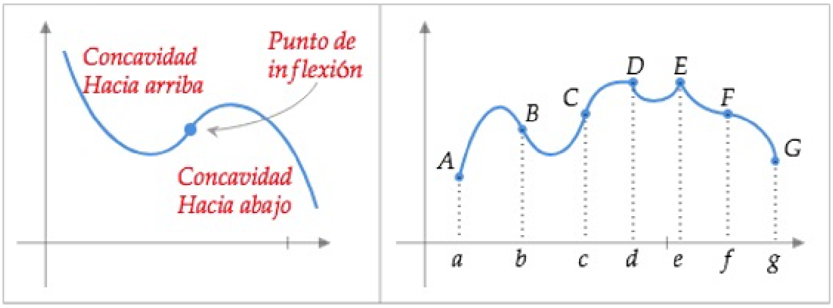
Estimados estudiantes, el tema que estudiaremos en la presente semana es simplemente la aplicación de los temas ya estudiados anteriormente, como sabemos al derivar una función, el resultado es otra función, este proceso ya lo hemos trabajado en semanas anteriores del presente curso. Las derivadas de orden superior son simplemente el resultado de aplicar el proceso de derivación a las nuevas funciones obtenidas, es así que podemos obtener la derivada de orden 1, la cual sería la primera derivada, la derivada de orden 2 corresponde a la segunda derivada y así sucesivamente, estas derivadas se denotan con la nomenclatura $f'(x)$ para la primera derivada, $f''(x)$, para la segunda derivada, y así sucesivamente, tal como dije al inicio en estas dos semanas trabajaremos en este tema.

4.4. Concavidad

La concavidad de una curva en cálculo diferencial se refiere a la forma en que la función se curva hacia arriba o hacia abajo en diferentes puntos. La concavidad puede ser "hacia arriba" o "convexa" (con una forma como una "U" invertida) o "hacia abajo" o "cóncava" (con una forma como una "n").

Figura 47.

Curvatura de una función



Nota. Riofrío, G., 2023.

La concavidad de una curva está relacionada con la segunda derivada de la función. En particular, si la segunda derivada de una función es positiva en un intervalo dado, entonces la función es cóncava en ese intervalo, lo que significa que la función se curva hacia arriba en ese intervalo. Si la segunda derivada es negativa en un intervalo dado, entonces la función es convexa en ese intervalo, lo que significa que la curva se curva hacia abajo en ese intervalo.

El cambio de concavidad de una curva puede ser utilizado para encontrar puntos de inflexión en la función, donde la concavidad cambia de convexa a cóncava o viceversa. Además, la concavidad de una curva es importante en el análisis de optimización de funciones, ya que una función cuyo gráfico es cóncavo hacia abajo puede tener un máximo, mientras que una función cuyo gráfico es cóncavo hacia arriba puede tener un mínimo.

Criterios para determinar la curvatura de una función.

Para determinar la concavidad de una curva en cálculo, se usan los siguientes criterios:

1. **Primera derivada:** se calcula la primera derivada de la función y se identifican los puntos críticos (donde la primera derivada es igual a cero o no existe). Estos puntos indican los máximos o mínimos locales de la función.

2. **Segunda derivada:** se calcula la segunda derivada de la función y se analizan los signos de la misma en los intervalos entre los puntos críticos. Si la segunda derivada es positiva en un intervalo, entonces la función es cóncava en ese intervalo. Si la segunda derivada es negativa en un intervalo, entonces la función es convexa en ese intervalo. Si la segunda derivada es igual a cero, se necesita analizar la tercera derivada.

3. **Tercera derivada:** si la segunda derivada es igual a cero en algún punto, entonces se necesita analizar la tercera derivada. Si la tercera derivada es positiva, entonces la función es cóncava en el punto de inflexión. Si la tercera derivada es negativa, entonces la función es convexa en el punto de inflexión.

En resumen, la concavidad de una curva se determina por el análisis de la segunda derivada y la presencia de puntos de inflexión se determina por el análisis de la tercera derivada. La información sobre la concavidad de una función es importante en muchos problemas de optimización y en el análisis de la curvatura de las superficies en geometría diferencial.

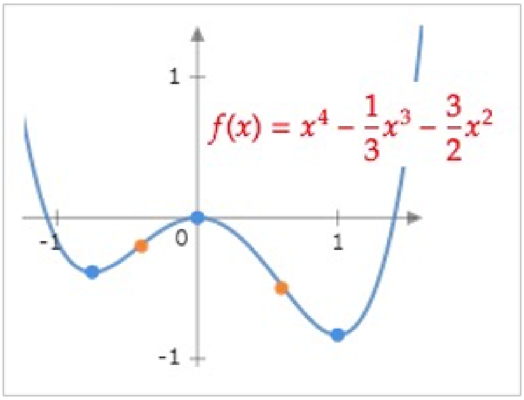
4.5. Puntos de inflexión

En cálculo diferencial, los puntos de inflexión son aquellos puntos en una curva en los cuales la concavidad cambia. En otras palabras, son aquellos puntos en los cuales la curva cambia de ser cóncava a ser convexa, o viceversa. En un punto de inflexión, la pendiente de la curva sigue siendo la misma, pero la curvatura cambia.

En términos matemáticos, un punto de inflexión de una curva se produce cuando la segunda derivada de la función cambia de signo en ese punto. Si la segunda derivada es positiva en un punto, entonces la curva es cóncava en ese punto. Si la segunda derivada es negativa en un punto, entonces la curva es convexa en ese punto. Si la segunda derivada es cero en un punto, entonces puede haber un punto de inflexión o no, dependiendo de la tercera derivada.

Los puntos de inflexión son importantes en muchas aplicaciones de la matemática, como en la geometría diferencial, la física, la estadística y la economía. En la física, por ejemplo, los puntos de inflexión son relevantes para el estudio del movimiento de objetos y la determinación de las condiciones críticas para el equilibrio de sistemas. En la estadística, los puntos de inflexión se usan en el análisis de series de tiempo para detectar cambios en las tendencias o patrones.

Figura 48.
Puntos de inflexión



Nota. Riofrío, G., 2023.

4.6. Polinomio y serie de Taylor

Un polinomio de Taylor es una aproximación polinómica de una función alrededor de un punto, que se obtiene truncando la serie de Taylor de la función a un número finito de términos. Es decir, un polinomio de Taylor es un caso particular de una serie de Taylor, que se limita a un número finito de términos y se escribe en forma polinómica.

Por otro lado, una serie de Taylor es una serie infinita que representa una función mediante una suma de infinitos términos. En la serie de Taylor, los términos incluyen potencias sucesivas de la variable (x - a) multiplicadas por los coeficientes que se derivan de las derivadas sucesivas de la función evaluadas en el punto a.

En resumen, la principal diferencia entre un polinomio de Taylor y una serie de Taylor, es que el primero es una aproximación polinómica finita de una función alrededor de un punto, mientras que el segundo es una representación infinita de la misma función en términos de una serie de potencias centradas en ese punto.

La serie de Taylor es una herramienta poderosa en el cálculo y la matemática aplicada, ya que permite la aproximación de funciones complejas y la solución de problemas matemáticos de manera eficiente.

Como se mencionó en un párrafo anterior la serie de Taylor se genera con base en las derivadas de una función. Para comprender de mejor manera este tema veamos un ejemplo práctico. Empecemos revisando las fórmulas utilizadas para generar los polinomios correspondientes.

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

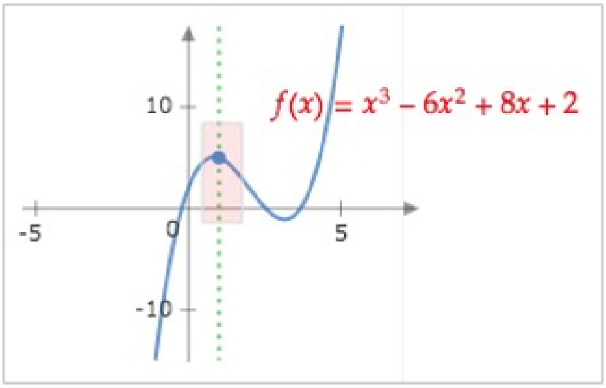
$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ejemplo:

El ejemplo lo realizaremos con base en la siguiente función.

Figura 49.

Ejemplo serie de Taylor

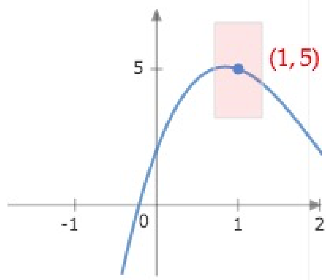


Nota. Riofrío, G., 2023.

Recordemos que la serie de Taylor se utiliza para crear una nueva función más simple en torno a un punto de interés, en este caso he definido este punto (a) con un valor de 1, en la figura 50, se muestra el intervalo que queremos representarlo mediante una función más simple.

Figura 50.

Ejemplo serie de Taylor. Derivadas



$$a = 1$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 2 \Rightarrow f(a) = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8 \Rightarrow f'(a) = -1$$

$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(a) = -6$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(a) = 6$$

Nota. Riofrío, G., 2023.

Como vimos en la fórmula antes indicada, la serie de Taylor se construye con base en sus derivadas, en la gráfica asociada al ejercicio hemos calculado las derivadas y sus correspondientes valores para el punto (1 , 5), mismos que serán reemplazados en la fórmula original, veamos el siguiente desarrollo.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

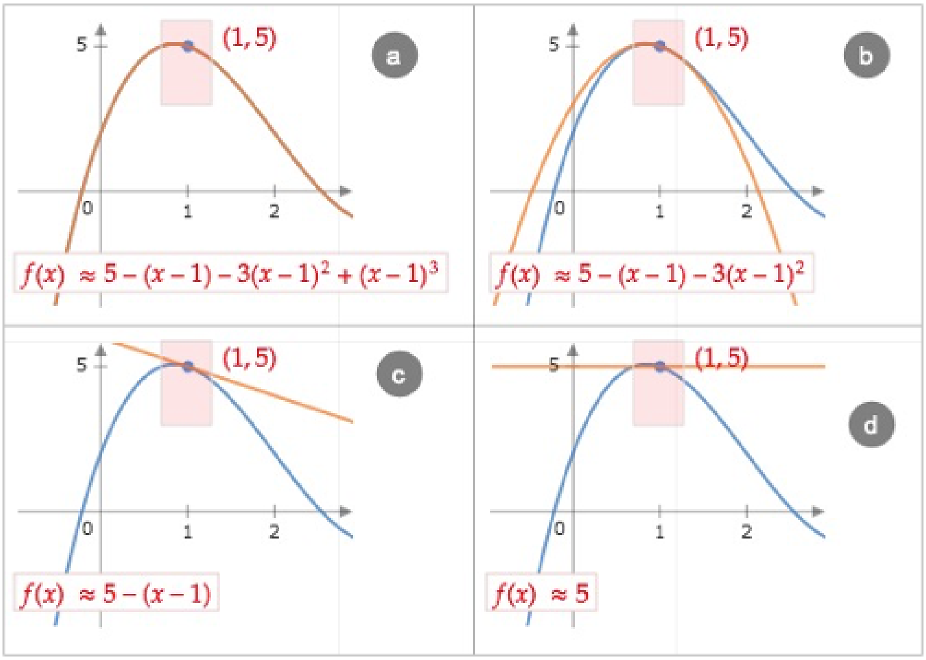
$$f(x) \approx 5 + \frac{-1}{1!}(x-1)^1 + \frac{-6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$$

$$f(x) \approx 5 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Hemos calculado la serie de Taylor con todos sus componentes (polinomios), es decir hasta la tercera derivada.

Figura 51.

Ejemplo serie de Taylor. Gráficas



Nota. Riofrío, G., 2023.

Como podemos ver en la figura 51, la serie de Taylor tenemos la posibilidad de seleccionar la cantidad de términos que queremos incluir en nuestra ecuación final, la selección de dichos polinomios dependerá de la aplicación que estemos modelando en otras palabras mayor o menor exactitud. Revisemos a continuación cada una de las opciones.

En el caso de la gráfica (a), esta representa la mayor exactitud de hecho se solapa completamente con la ecuación original, al resolver las operaciones algebraicas obtendremos dicha ecuación inicial:

$f(x) \approx 5 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$ ---› $x^3 - 6x^2 + 8x + 2$

En el caso de las gráficas (b) y (c) sus modelos son más simples, puesto que, utilizamos menos términos, consecuentemente se está perdiendo precisión.

$f(x) \approx 5 - (x-1) - 3(x-1)^2$ ---› $-3x^2 + 5x + 3$

$f(x) \approx 5 - (x-1)$ ---› $-x+6$

Finalmente, la opción (d) representa el modelo más simple, mismo que corresponde a una función constante.

$f(x) \approx 5$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en la actividad que se describe a continuación:

1. **Lectura:**

    - En la guía didáctica, realice una lectura compresiva de los temas de derivadas de orden superior mismos que corresponden a la semana 14.
    - Revise el recurso educativo: "Khan Academy" donde encontrará más información sobre los temas estudiados en esta semana.

2. **Actividades prácticas:**

    - Revise los ejemplos prácticos planteados en esta semana en la guía didáctica.
    - Desarrolle los ejercicios propuestos cada semana en el anuncio correspondiente, estos le ayudarán a complementar su aprendizaje.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento Word.

Autoevaluación 4

1. **¿Cuál es el criterio para determinar si un punto crítico es un máximo o un mínimo?**

    a. La segunda derivada debe ser cero.
    b. La primera derivada debe ser cero.
    c. La función debe tener un punto de inflexión.
    d. Ninguna de las anteriores.

2. **¿Qué es un punto de inflexión?**

    a. Un punto en el que la función cambia de concavidad.
    b. Un punto en el que la función tiene un valor máximo.
    c. Un punto en el que la función tiene un valor mínimo.
    d. Ninguna de las anteriores.

3. **¿Cuál es el paso inicial para encontrar los puntos críticos de una función?**

    a. Calcular la segunda derivada.
    b. Calcular la tercera derivada.
    c. Calcular la primera derivada.
    d. Ninguna de las anteriores.

4. **¿Qué significa que una función sea cóncava hacia arriba?**

    a. La segunda derivada es positiva.
    b. La segunda derivada es negativa.
    c. La primera derivada es positiva.
    d. La primera derivada es negativa.

5. **¿Cómo se llama el punto crítico en el que la primera derivada cambia de signo?**

    a. Máximo relativo.
    b. Mínimo relativo.
    c. Punto de inflexión.
    d. Ninguna de las anteriores.

6. **¿Qué es la optimización en cálculo?**

   a. Encontrar la máxima o mínima de una función.
   b. Encontrar la derivada de una función.
   c. Encontrar la integral de una función.
   d. Ninguna de las anteriores.

7. **¿Qué es la función objetivo en un problema de optimización?**

   a. La función que se desea maximizar o minimizar.
   b. La derivada de la función original.
   c. La integral de la función original.
   d. Ninguna de las anteriores.

8. **Encuentre los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ en el intervalo [0,3]:**

   a. Máximo local en $x = 1$, mínimo local en $x = 3$.
   b. Máximo local en $x = 2$, mínimo local en $x = 1$.
   c. Máximo local en $x = 0$, mínimo local en $x = 2$.
   d. No hay máximos ni mínimos locales en el intervalo.

9. **Encuentre el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x) = x^2 - 4x$ en el intervalo [-2,5]:**

   a. Máximo absoluto en $x = 1$, mínimo absoluto en $x = 4$.
   b. Máximo absoluto en $x = -2$, mínimo absoluto en $x = 5$.
   c. Máximo absoluto en $x = 2$, mínimo absoluto en $x = 4$.
   d. No hay máximos ni mínimos absolutos en el intervalo.

10. **Encuentre los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$:**

   a. (-1, -2) y (3, 18).
   b. (0, 0) y (4, 32).
   c. (1, 1) y (2, 4).
   d. (-2, 48) y (2, 0).

Ir al solucionario

2 Bimestre

Semana 15

Una vez finalizado el estudio de los contenidos programados para nuestra asignatura, durante esta semana usted debe concluir la realización y entrega de las actividades calificadas pendientes, e iniciar el repaso de los contenidos estudiados en la unidad 3, como preparación para el examen bimestral.

Al igual que en el primer bimestre es importante que revise las actividades evaluadas y no evaluadas que ha desarrollado, y que valide el cumplimiento de los resultados de aprendizaje. Y con base en ello, determine los temas o puntos a los que debe dar prioridad en su repaso.

Considere las actividades de aprendizaje que se recomiendan a continuación le permitirán enfocar mejor su esfuerzo en esta penúltima semana del ciclo académico.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Aprendizaje autónomo:

1. Revise y repase todos los contenidos estudiados durante el segundo bimestre.

2. Elabore mapas mentales y esquemas resumen que le permitan prepararse para examen presencial.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o en un documento Word.

Semana 16

Actividades finales del bimestre

Estimado/a estudiante.

Estamos finalizando el estudio de nuestra asignatura, confiamos en que esta experiencia de aprendizaje le haya motivado a interesarse aún más por el mundo de las matemáticas y particularmente del Cálculo Diferencial. Le animamos a continuar explorando este interesante campo de las tecnologías de la información.

Como corresponde, durante esta última semana su dedicación y esfuerzo debe abocarse a preparar el examen presencial del segundo bimestre. Continúe con el repaso de los contenidos que inició en la semana anterior, reforzando aquellos temas en los que usted vea que no ha logrado alcanzar los resultados esperados.

Igualmente, durante esta semana podrá consultar la solución de todos cuestionarios en línea calificados que también le recomendamos revisar para identificar puntos prioritarios en su repaso.

A continuación, las actividades que le recomendamos para la semana final.

¡Le deseamos el mejor de los éxitos!

Actividades de aprendizaje recomendadas

Aprendizaje autónomo:

1. Revise y repase todos los contenidos estudiados durante el segundo bimestre.

2. Elabore mapas mentales y esquemas resumen que le permitan prepararse para examen presencial.

Nota. conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o en un documento Word.

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	c	La única restricción es x=2, puesto que el denominador se hace 0.
2	c	La pendiente positiva indica que la curva es creciente.
3	b	Algebraicamente una función f es par si f(x) = f(-x).
4	b	Cuando x tiene a +infinito o –infinito, el valor de f se acerca a dicha asíntota horizontal.
5	c	Se invierte el sentido de la curva.
6	a	El crecimiento y decrecimiento se puede representar con líneas de pendiente.
7	b	Si es paralela entonces tiene la misma pendiente (2).
8	a	Los puntos forman una línea de 45 grados.
9	a	Recordemos que m es la pendiente de la recta.
10	a	Con x=-2 el denominador se hace 0.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	d	No existe porque la función toma valores de +infinito y -infinito.
2	d	El valor de la función se va a +infinito y -infinito.
3	b	Por izquierda y por derecha el limite es 1.
4	a	Por concepto esta es la respuesta.
5	c	Es la nomenclatura de límites.
6	b	Si los límites laterales son iguales, entonces el limite es dicho valor.
7	a	Si los límites laterales NO son iguales, entonces el limite no existe.
8	a	Al factorizar queda x+3, es decir 3+3.
9	d	No se acerca a un valor real.
10	a	La función si esta definida en 1, => 1/(x+1).

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b	La velocidad promedio se calcula para todo el tramo.
2	a	La velocidad promedio se calcula para todo el tramo.
3	c	Es la pendiente de la recta en ese punto específico.
4	b	Si hablamos de la pendiente en un punto nos referimos a la velocidad instantánea.
5	b	Es la formula general de límites.
6	c	Es la pendiente de una recta.
7	a	Para derivar este tipo de funciones solo existe la regla de la cadena.
8	d	Este escenario representa una indeterminación.
9	d	Podemos comprobar este resultado aplicando las reglas de las derivadas.
10	d	Podemos comprobar este resultado aplicando las reglas de las derivadas.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	b	Al ser máximo o mínimo la pendiente de la tangente es horizontal.
2	a	Esto se explica mediante la segunda derivada.
3	c	Se debe entender el problema y calcular la primera derivada.
4	a	Por definición es positiva.
5	c	Esto se explica mediante la segunda derivada.
6	a	Problemas de máximos y mínimos.
7	a	Es la función principal cuya variable dependiente se quiere optimizar.
8	b	Se debe analizar la función y su derivada en ese intervalo.
9	c	Se debe analizar la función y su derivada en ese intervalo.
10	c	Se debe obtener la segunda derivada.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

5. Referencias bibliográficas

R. Larson, B. Edwards, and A. E. G. Hernández, Cálculo, Tomo II, no. v. 1. CENGAGE Learning, 2014.

Galván, D., Cienfuegos, D., Romero, J., Fabela, M., Elizondo, I., Rodríguez, A., & Rincón, E. (2012). Cálculo diferencial. Cengage Learning Editores, SA De CV.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2015). Precalculus: Mathematics for calculus. Cengage Learning.