UTPL

La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Funciones Exponenciales y Logarítmicas y su Didáctica

Guía didáctica

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Departamento de Ciencias de la Educación

Sistemas de Conocimiento de Funciones Exponenciales y Logarítmicas y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	*PAO Nivel*
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)*	III

Autor:

Guerrero Chirinos Reinaldo Antonio

EDUC_2143

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento de Funciones Exponenciales y Logarítmicas y su Didáctica

Guía didáctica

Guerrero Chirinos Reinaldo Antonio

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-763-8

27 de marzo, 2023

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física, basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.

Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad, y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado con relación a las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.

Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza- aprendizaje y de evaluación que integren la práctica de investigación, acción hacia producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

Un escaso modelado, con funciones en general y exponenciales en particular, no facilita la solución de los problemas del entorno natural y social, ocasionando un conocimiento teórico apartado de la realidad del estudiante.

El limitado uso de herramientas tecnológicas no permite practicar la matemática experimentalmente a través de herramientas gratuitas al alcance de todos, lo cual dificulta el logro de aprendizajes significativos.

A través del análisis y aplicación de la modelización con las funciones exponenciales se aborda el objeto de estudio y naturaleza de la matemática, lo cual constituye un aporte en primer lugar a mejorar la comprensión de las funciones exponencial y logarítmica en estudiantes del tercer ciclo de la carrera de Pedagogía de la matemática y física de la Universidad Técnica particular de Loja, mediante el uso de un entorno virtual de aprendizaje.

El incorporar un enfoque de metodologías didácticas en el aprendizaje de las matemáticas como un modelo de enseñanza brindará herramientas de educación y concepción a aquellos estudiantes que tengan conocimientos bajos en la comprensión del comportamiento de las funciones exponencial y logarítmica.

Como lo refiere Rivera (2009), en sus investigaciones. “Indica tres dificultades que tienen los estudiantes para construir la noción de esta función: dificultades para elevar números a distintas potencias e interpretar el significado de esas operaciones, dificultades para interpretar la naturaleza y estructura de la función exponencial y dificultades para relacionarla con la función logarítmica”. Lo que se pretende con esta asignatura es mejorar por medio de métodos lógicos matemáticos la aplicación a la vida cotidiana de la función exponencial y logarítmica.

La didáctica aplicada en la enseñanza de los conocimientos de matemática se enfoca al desarrollo de conceptos de manera teórica y textual, sin considerar que el aprendizaje deber ser experimental, partiendo de la manipulación de un material concreto, explorando detalles conceptuales que permiten plantear inquietudes, comunicando los aportes a otros estudiantes y docente, y verbalizando sus conclusiones matemáticas.

Sistemas de conocimiento de las funciones exponenciales y logarítmicas y su didáctica es una asignatura que contribuye al perfil profesional del estudiante por cuanto:

1. Identifica los principales sistemas de conocimientos pedagógicos y didácticos para el desarrollo del pensamiento crítico, creativo y experiencial pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y el contexto.

2. Domina y desarrolla sistemas de conocimientos en matemática, especialmente números y funciones, apoyado en la investigación y reflexión crítica sobre las experiencias en el aula, administrando procesos de aprendizaje, fomentando cambios y provocando innovaciones para el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y creativo de los educandos.

3. Diseña e implementa procesos de mediación pedagógica, graduando las destrezas, conocimientos y habilidades de acuerdo con capacidades diversas, la interculturalidad, mediante el desarrollo de adaptaciones curriculares, enseñanza personalizada, atendiendo a las necesidades específicas de los estudiantes.

4. Utiliza herramientas tecnológicas educativas para la interacción y la construcción del conocimiento como docente en pedagogía de las matemáticas y la física.

La secuencia didáctica es de vital importancia a la evaluación formativa, la cual no gira en torno a un resultado final, sino más bien a un proceso de aprendizaje que pretende vincular habilidades y estrategias para lograr una meta. Permite determinar los conocimientos y habilidades necesarias para ejecutar una actividad. La importancia de las estrategias didácticas es que convierten al estudiante en un ente activo en su proceso de formación, por este motivo, de su aplicación se obtienen grandes resultados en cualquier contexto educativo y orientaciones básicas.

Las secuencias didácticas permiten abordar temas de diferentes áreas en una sola clase, ya que permite transversalizar algunos temas, es decir, tratar conceptos generales de matemáticas u otras asignaturas como lenguaje, ciencias naturales, artística, inglés, entre otras, con diferentes niveles de dificultad.

Las destrezas con criterios de desempeño en el área de matemática y física constituyen el referente principal para que los docentes elaboren la planificación microcurricular de sus clases y las tareas de aprendizaje. Para evaluar el desarrollo integral deben considerarse aspectos como: las prácticas cotidianas de los estudiantes, que permiten valorar el desarrollo de las destrezas con criterios de desempeño tanto al principio como durante y al final del proceso, a través de la realización de las tareas curriculares del aprendizaje.

2. Metodología de aprendizaje

Esta propuesta metodológica propone una serie de estrategias didácticas basadas en paradigmas constructivistas la cual permite que el estudiante aplique ejercicios (problemas) a la vida real enfocados en situaciones de toma de decisiones en la carrera profesional, estas actividades son realizadas con métodos en los cuales el estudiante se siente en un lugar agradable de aprendizaje más no en un lugar de estrés, permite que con el manejo de herramientas tecnológicas el alumno sienta que puede enfrentarse a la vida cotidiana manejando un mundo de aprendizaje virtual.

Tales estrategias didácticas se desarrollan en dos momentos, una en el aula y otra en un entorno virtual, pero siempre con el objetivo que el estudiante desarrolle sus conocimientos en forma grupal, acerca de la comprensión de las funciones exponencial y logarítmica, permitiendo que exista un intercambio de saberes tanto del estudiante como del profesor.

Con la finalidad de hacer que el estudio de la asignatura Sistemas de conocimiento de funciones exponenciales y logarítmicas y su didáctica, se convierta en una experiencia de aprendizaje permanente, se diseñan actividades y estrategias fundamentadas en metodologías activas, donde se acceda a los puntos de conceptualización teórica a través de micro videos que tienen un tiempo de duración de 5 a 10 minutos, y los cuales están colocados en el EVA.

El aprendizaje en contacto con el docente es el conjunto de actividades individuales o grupales desarrolladas con intervención y supervisión directa del docente (de forma presencial o virtual, sincrónica o asincrónica) que comprende las clases, conferencias, seminarios, talleres, proyectos en aula, etc., y además donde se consolidan los aprendizajes de forma experimental, sustentado en videoconferencias semanales que serán grabadas para aquellos estudiantes que no puedan participar en línea.

Como no existe un procedimiento único, lo principal para la comprensión de este curso es la utilización del **texto básico** y micro videos, apoyados de otros recursos como los cuestionarios interactivos que se encuentran en las plataformas Khan Academy o GeoGebra e infografías; anticipando el análisis de los aspectos teóricos.

En el componente práctico-experimental se podrán desarrollar actividades colaborativas, como por ejemplo talleres y con la atención síncrona del profesor en algunos casos y casi siempre a través de videoconferencias, fomentando el trabajo entre pares de estudiantes en función de los distintos estilos de aprendizaje y enfocados a lograr resultados de aprendizaje que orientan el desarrollo de las competencias.

Para abordar los conceptos, se tomará en cuenta el **texto básico** y complementario que son recomendados en la bibliografía a utilizar, para luego llegar a la debida exploración y conclusión de los temas relacionados con funciones exponenciales y logarítmicas aplicados al quehacer cotidiano de la sociedad.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Utiliza los principios de las funciones exponenciales, la función exponencial natural, funciones logarítmicas y las leyes de los logaritmos para modelar problemas del entorno natural y social.

La asignatura de Funciones Exponenciales y Logarítmicas se enfoca en su aprendizaje y didáctica. Las funciones son fundamentales en muchas áreas de la matemática y otras disciplinas científicas. Las funciones exponencia les tienen una variable base elevada a una potencia, mientras que las funciones logarítmicas son las inversas de las funciones exponenciales. Esta asignatura proporciona una base sólida para futuros estudios en áreas como las funciones trigonométricas y su conocimiento es fundamental en el desarrollo de otras áreas de la matemática y ciencias.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estimado estudiante, bienvenido a la asignatura de: Sistemas de conocimiento de f unciones exponenciales y logarítmicas y su didáctica.

Antes de iniciar nuestro estudio es conveniente señalar que, en el ciclo anterior, iniciamos con el aprendizaje de las funciones, uno de los conceptos más importantes en la matemática, donde se analizaron los tipos de funciones polinomiales y racionales. En la presente asignatura, se sigue con casi el mismo estilo de aprendizaje e investigación permanente, esto con la intención de que se complementan a los temas anteriores y sirvan de base para el estudio de la siguiente asignatura, donde se analizará las funciones trigonométricas.

Semana 1

Unidad 1. Funciones Exponenciales

Apreciado estudiante, cuando nos sumergimos en el increíble mundo del análisis matemático, y sus aplicaciones, la didáctica recomienda que inicialmente se interioricen los conceptos matemáticos. En nuestro caso, para llegar a esto, es primordial conocer primero, el significado de las funciones exponenciales, así como también su nomenclatura y simbología básica.

Principio didáctico: para analizar, modelar y resolver problemas en el área de matemáticas, es conveniente revisar en la parte inicial los conceptos básicos relacionados, partiendo del estudio de las definiciones y las leyes o propiedades que se manejan a nivel mundial.

1.1. ¿Cómo se define una función exponencial?

Al referirnos a un tema nuevo, surgen interrogantes como: ¿qué es?, ¿qué significa?, ¿cómo se estudia?, ¿existen reglas?, ¿cuáles son los principales tipos?, ¿existen modelos a seguir?, ¿cuáles son sus creadores? En el caso de las funciones exponenciales no sería la excepción, por esta razón, para iniciar su estudio, le invito a revisar el siguiente video donde se explican las Funciones Exponenciales.

Con la observación del video, seguro que algunas inquietudes se aclararon, espero esto sirva de motivación para iniciar el curso, sabiendo de antemano a qué se refiere, cómo se estudian, para qué sirven y cuál es su principal creador en la historia de la matemática.

Para definir la función exponencial conviene recordar el significado de potencia con exponente variable, es decir aquella que toma la forma en donde la base a es mayor que cero y el exponente x puede tomar cualquier valor.

Aquí vale preguntar: ¿la potencia podrá ser cero o tomar valores negativos?

Si el exponente x toma valores positivos, el valor de la potencia es positivo; si x toma valores negativos, el valor de la potencia es muy pequeño, sigue siendo positivo, cercano a cero en algunos casos, pero nunca negativo.

Por ejemplo, el valor de 2^4 es 16, el valor de 2^3 es 8, el valor de 2^2 es 4, lo cual se observa con más claridad en la siguiente tabla:

Tabla 1.

Potencias de base 2

x	2^x
4	$2^4=16$
3	$2^3=8$
2	$2^2=4$
1	$2^1=4$
0	$2^0=1$
-1	$2^{-1}=0.5$
-2	$2^{-2}=0.25$
-3	$2^{-3}=0.125$
-4	$2^{-4}=0.0625$
-5	$2^{-5}=0.03125$

Nota. Guerrero, R., 2023.

Como a > 0, conforme se observa en la tabla y en otros casos similares, el valor de la potencia, a^x aunque se acerque a cero, nunca será cero, y tampoco tendrá valores menores a cero o negativos.

Con estos antecedentes, si se relaciona el valor que toma x y el valor de la potencia , aparece el concepto de función exponencial.

En este concepto se consideran dos variables, la independiente x que es un exponente de la potencia y la variable dependiente f(x). Con esta caracterización aparece la definición de función exponencial:

La función exponencial es aquella que tiene la forma $f(x) = a^x$, en donde a es un número real positivo y $a \neq 1$.

Estudiemos algunos **ejemplos** ilustrativos con la finalidad de interiorizar la definición de función exponencial, sin olvidar que *a > 0 y a ≠ 1.*

1. ¿Por qué ***a*** debe ser diferente de **1**?

Correcto, debe ser diferente de la unidad, porque toda potencia de base 1 siempre será 1, lo que origina una simple función constante $f(x) = 1$.

2. **Ejemplo ilustrativo 1.** Evaluemos la función $f(x) = 2^x$

Para evaluar la función, basta reemplazar el valor de la variable independiente **x**, calculando el valor de la variable dependiente ***f(x)***, representada muchas veces, simplemente por **y**.

Si $f(x) = 2^x$ entonces:

$f(3) = 2^3 = 8$
$f(5) = 2^5 = 32$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

En los dos primeros casos se observa que la variable dependiente f(x) toma valores bastante altos y en el tercer caso, cuando el exponente es negativo, el valor de f(x) es muy pequeño. De este análisis se desprenden dos aspectos importantes: el valor de la variable independiente ***x*** puede ser negativo, cero o positivo, mientras que la variable dependiente ***f(x)*** toma valores únicamente positivos, esta característica de la función exponencial se observa con claridad cuando se construyen las gráficas.

1.2. ¿Cómo se construyen las gráficas de funciones exponenciales?

Cuando se estudian las funciones exponenciales, resulta muy práctico analizar sus características partiendo de sus gráficas.

En los primeros años de escolaridad es conveniente que, los niños construyan gráficas de funciones obteniendo algunos puntos a través de la construcción de una tabla de valores. Al inicio de un curso de bachillerato también es necesario que, los estudiantes practiquen la obtención de los puntos, dando valores a **x** y obteniendo los respectivos valores **f (x) o y**. En esta asignatura, luego de haber adquirido práctica en el proceso de graficar funciones, simplemente se utilizarán calculadoras con pantalla gráfica, páginas de *Internet*, *software* y otros que facilitan estos procesos.

En nuestro caso, la elaboración de la gráfica de una función exponencial puede simplificarse también gracias a la utilización de distintos softwares de uso libre, caso GeoGebra, Desmos, entre otros.

- **Ejemplo ilustrativo 1.** Grafiquemos las funciones: $f(x) = 2^x$ y $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Las dos funciones serán representadas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares.

Figura 1.

Gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Nota. Guerrero, R., 2023.

Si observamos las gráficas de las dos funciones, podemos identificar algunas características:

1. El valor que toma la variable independiente x, puede ser positivo o negativo.

2. Los valores correspondientes a la variable dependiente **f(x)** siempre son positivos.

3. En cualquiera de los casos, cuando la abscisa es x = 0, la ordenada, variable dependiente o simplemente función **f(x)** es 1.

4. Las dos curvas pasan y se interceptan en el punto de coordenadas (0, 1).

5. El eje horizontal X resulta una asíntota para las dos gráficas.

6. El dominio de las dos funciones es el conjunto de los números reales, x puede tomar cualquier valor y las gráficas se extienden indefinidamente a la izquierda o a la derecha.

7. El rango, contra dominio o imagen es el conjunto de los números reales positivos, f(x) solo toma valores mayores que cero.

8. Si la base es $0 < a < 1$, entonces la gráfica es decreciente en todo su dominio.

9. Si la base es $a > 1$, entonces la gráfica es creciente en todo su dominio.

Para comprender de mejor manera estos temas introductorios a las funciones exponenciales le invito a que lea el **texto básico páginas 329 a 331.**

Al iniciar el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas, los autores (Stewart, et al, 2017), proponen razones valederas para el modelaje de problemas relacionados con el entorno natural y social utilizando estos conceptos, lo cual, servirá de motivación e ilustración para interiorizar la definición del primer concepto: función exponencial.

1.3. Gráficas de funciones exponenciales

Para graficar las funciones exponenciales, similar a lo estudiado en bachillerato y en la asignatura anterior con las funciones polinomiales y racionales, se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares o plano cartesiano. Entonces, iniciemos el estudio de las gráficas, a partir de una tabla de valores; luego, se utilizará algún graficador como el GeoGebra clásico en línea. Ejemplo ilustrativo 1. Grafiquemos la función exponencial $f(x) = 2^x$. Para este proceso es conveniente asignar a la variable independiente x algunos valores positivos y otros negativos. Si $f(x) = 2^x$.

Entonces:

Tabla 2.

Tabla de valores función $f(x) = 2^x$

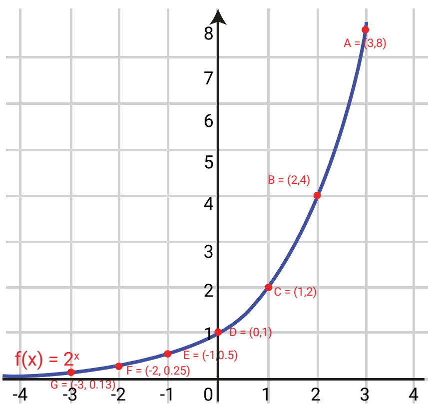
Puntos	x	2^x	Punto
A	3	2^3	(3;8)
B	2	2^2	(2;4)
C	1	2^1	(1;2)
D	0	2^0	(0;1)
E	$\frac{1}{2}$	$2^{-\frac{1}{2}}$	$(-\frac{1}{2};0,42)$
F	-1	2^{-1}	(-1;0,5)
G	-2	2^{-2}	(-2;0,25)
H	-3	2^{-3}	(-3;0,13)

Nota. Guerrero, R., 2023.

Con la tabla de valores, representamos los puntos encontrados en un sistema de coordenadas y construimos la gráfica respectiva:

Figura 2.

Función $f(x) = 2^x$ *y sus características*



f (x) = 2^x

- Base **a** es mayor que 1 (a = 2)
- Pasa por el punto (0,1)
- Es continua y creciente
- En el eje **X** se extiende al infinito por los dos sentidos
- Dominio es el conjunto **R**
- En el eje y toma únicamente valores positivos
- Rango, contradominio o imagen es el conjunto R+

Nota. Guerrero, R., 2023.

En este ejemplo ilustrativo observamos que, en la gráfica, al igual que en todas las funciones exponenciales, el eje de las X se constituye en una asíntota de la función, por consiguiente, la función no toma cero ni valores negativos en el eje de las X.

En este curso, luego de haber adquirido práctica en el proceso de graficar funciones exponenciales, simplemente se utilizarán calculadoras con pantalla gráfica, páginas de *Internet*, programas informáticos y otros que facilitan estos procesos. En este caso utilizamos GeoGebra.

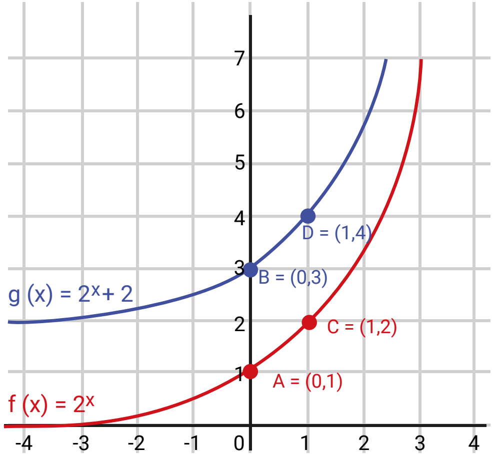
> Para ampliar los procesos de graficar las funciones exponenciales, invito a ilustrarse con el caso de la función $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x + 1$, observando el siguiente video sobre Funciones exponenciales.

Con la observación del video, seguro que algunas inquietudes se aclararon; en este caso vale puntualizar que cuando en la función se adiciona o resta algún valor, como el caso de $f(x) = 3^x + 1$, donde se suma a la función o variable dependiente f(x) una unidad, el gráfico sufre el cambio respectivo, en este caso, los valores de f(x) son aumentados en una unidad de tal manera que, el rango son los valores comprendidos en (1, ∞).

- **Ejemplo ilustrativo 2.** Grafiquemos la función $f(x) = 2^x + 2$, a partir de la gráfica de la función $f(x) = 2^x$. Para la gráfica de esta función, partimos de la función $f(x) = 2^x$graficada anteriormente y pintada de rojo en la siguiente ilustración, en donde se suman dos unidades a cada ordenada para obtener la gráfica de $f(x) = 2^x + 2$. Por ejemplo, en la función $f(x) = 2^x$ cuando la abscisa es x = 1, la ordenada es f(x) = 2, mientras que en la función $f(x) = 2^x + 2$, cuando la abscisa es x = 1, la ordenada es f(x)= 4.

Figura 3.

Función $f(x) = 2^x + 2$ *a partir de la gráfica de* $f(x) = 2^x$



Nota. Guerrero, R., 2023.

- **Ejemplo ilustrativo 3.** En una pequeña isla fueron introducidos 400 ratones. Sabiendo que la población de ratones se duplica cada año.

Halle una función N que modele el número de ratones después de t años. b. Calcule la población de ratones después de 8 años.

Análisis y datos:

- La población inicial de ratones es 400.
- La población se duplica cada año, es decir la potencia es de base 2.
- La función tiene la forma $f(x) = 400.2^t$

Solución:

a. La función N que modela el número de ratones después de t años es: N(t) = 400.2^t

b. La población de ratones después de 8 años es: N(8) = 400.2^8= 102400 ratones.

Para comprender de mejor manera estos temas de las funciones exponenciales, sugiero:

- Observar y analizar el video sobre: Crecimiento exponencial de bacterias.
- De igual manera, le invito a que lea el **texto básico páginas 331 a 334.**

En este video se expone la forma cómo se puede aplicar la modelación de funciones exponenciales y su aplicación para la resolución de problemas de crecimiento de bacterias. Así mismo, en el **texto básico** usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Estimado/a estudiante, para profundizar los conocimientos introductorios a las funciones exponenciales, se sugiere realizar las siguientes actividades de aprendizaje:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Desarrolle el ejercicio 9 de la **página 336 del texto básico,** en donde se propone evaluar la función con algunos valores indicados, redondeando los resultados con tres decimales.

2. Desarrolle el ejercicio 10 del **texto básico pág. 336**, en donde se propone evaluar la función con algunos valores indicados, redondeando los resultados a tres decimales.

3. Resuelva el ejercicio 41 del **texto básico pág. 337**, en donde se pide contrastar las gráficas de dos funciones exponenciales, describiendo las características en un solo sistema de coordenadas.

Nota. Resuelva los ejercicios en un cuaderno de apuntes o utilice alguna herramienta digital.

4. Adicionalmente, practique con la siguiente gamificación para que aprenda más de las funciones exponenciales.

> **Recuerde que** a través del *chat* de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

5. Finalmente, para evaluar los aprendizajes adquiridos sobre esta temática, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación:

Autoevaluación 1

A continuación se presenta una serie de preguntas para que usted seleccione solo una opción como respuesta correcta.

1. El dominio de la función exponencial $f(x) = 2^x$, es el conjunto de los números.

   a. Reales.
   b. Reales positivos.
   c. Reales negativos.

2. El rango de la función exponencial $(x) = 2^x$, es el conjunto de los números.

   a. Reales positivos.
   b. Reales positivos y el cero.
   c. No tiene.

3. Si en la función exponencial el valor de la base "a" fuese 1, se observa que:

   a. No es una función.
   b. Es una función constante.
   c. Es una función cuadrática.

4. Cuando en la función dada, la base "a" es 0 < a < 1, la función es $f(x) = a^x$.

   a. Creciente.
   b. Decreciente.
   c. Constante.

5. El rango de la función $f(x) = 2^x$, es el conjunto de los números.

   a. Reales positivos.
   b. Reales negativos.
   c. Reales.

6. Para obtener la gráfica de $f(x) = 2^x$+1, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$, y la desplazamos.

a. Una unidad hacia arriba.
b. Una unidad hacia abajo.
c. Una unidad a la derecha.

7. Cierta raza de ratones fue introducida en una pequeña isla con una población inicial de 500 ratones. Los científicos estiman que la población de ratones se duplica cada año. La población de ratones después de 4 años es.

a. 1000 ratones.
b. 4000 ratones.
c. 8000 ratones.

8. Se invierten 1000 dólares a una tasa de interés de 12 % al año. Encuentre la cantidad que se obtiene después de 3 años si el interés se capitaliza anualmente.

a. 1404,93 dólares.
b. 1418,52 dólares.
c. 1425,76 dólares.

9. Si se invierten 500 dólares a una tasa de interés de 8 % anual, capitalizado trimestralmente, el valor que se obtiene después de 2 años es.

a. 585,83 dólares.
b. 490,85 dólares.
c. 556,25 dólares.

10. Se invierte cierta cantidad de dinero a una tasa de interés de 6 % anual, capitalizados cada cuatro meses, obteniendo luego de 3 años 717,06 dólares. El capital inicial es.

a. 800 dólares.
b. 600 dólares.
c. 580 dólares.

Ir al solucionario

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

1 Bimestre

Semana 2

1.4. Función exponencial natural. El número *e*

Estimado estudiante, en la semana anterior se estudió la definición de la función exponencial y además se hicieron representaciones gráficas; ahora, en la segunda semana, estudiaremos la función exponencial natural, cuya aplicación principal se observa con el interés capitalizado continuamente. Antes de llegar a este tema, debemos estudiar uno de los números más importantes, la constante "e".

- **El número e**

Recordemos que las constantes-números más importantes en matemáticas, básicamente son tres: i que es $\sqrt{-1}$; π que aproximadamente es 3,14 y resulta de dividir la longitud de cualquier circunferencia para su radio; pero ¿qué significa la constante e?, ¿para qué se utiliza este número?, ¿en dónde se utiliza con mayor frecuencia? Para entender sobre la importancia de su estudio y dar respuesta a estas interrogantes, le invito a observar el siguiente video y descubra ¿Qué es el número e?.

Retroalimentación: seguramente que ahora conocemos más sobre este fabuloso número, sobre el valor del número e, de dónde se obtiene su valor, cuál es su fórmula para calcular y en dónde se lo aplica con mayor frecuencia.

Para ampliar y fundamentar la definición del número e, el cual es un número irracional, porque no se lo puede expresar como un cociente entre dos números enteros y que, tiene mucha utilidad cuando se estudia cálculo, es conveniente que lea y estudie su definición y la forma de calcularlo en la pág. 338 del **texto básico.**

- **La función exponencial natural**

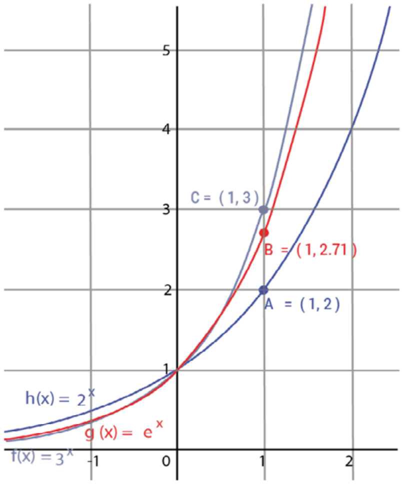
En la semana anterior se estudió la función exponencial, cuyo número base puede ser cualquier número positivo. Si ahora, a esa base le colocamos la constante e, estamos frente a la función exponencial natural.

La función exponencial natural es aquella que tiene la forma $f(x) = e^x$, donde la base es el número e = 2,71828...

Debido a que el número e aproximadamente es 2,71828, la gráfica de la función exponencial natural $f(x) = e^x$ estará comprendida entre las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$. Comprobemos esta particularidad en la siguiente figura.

Figura 4.

Comparación de la Función Exponencial



La gráfica de la función exponencial f(x) 3^x es de color verde y en ella tenemos el punto B (1,3).

La gráfica de la función exponencial natural f (x) = e^x está pintada de azul, contiene el punto A (1, 2.71).

La gráfica de la función exponencial f (x) = 2^x es de color rojo y en ella tenemos el punto C (1,2).

Se observa que, efectivamente, la gráfica de la función natural f (x) = e^x se encuentra comprendida entre las otras dos gráficas.

Nota. Guerrero, R., 2023.

Algunas transformaciones interesantes se realizan con este tipo de funciones, por ejemplo, cuando se compara la función exponencial natural $f(x) = e^x$ con la función $f(x) = e^{-x}$. Las dos son simétricas respecto al eje Y. Para profundizar y ampliar su estudio, recomiendo que revise las páginas 339 y 340 del **texto básico.**

1.5. Interés Compuesto

El interés que se acumula en una inversión aumenta conforme se incrementa el número de periodos de capitalización, por ejemplo, se paga más interés en una capitalización trimestral n = 4 que en una anual n = 1. La fórmula empleada en este caso es:

$$A(t) = P(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

Además, considerando que el número e se obtiene a través de $(1+\frac{1}{n})^n$ y su valor se aproxima a su máximo valor cuando n aumenta continuamente, se deduce que:

> El interés capitalizado continuamente se calcula mediante la fórmula $A(t)=P^{e^{rt}}$ siendo P el capital inicial, r la tasa de interés por año y t el número de años.

- **Ejemplo ilustrativo.** Se invierten 2000 dólares a una tasa de interés de 4 % anual, capitalizado continuamente, calculemos el valor logrado luego de dos años.

  Análisis y datos:

  - La incógnita es el valor que se obtiene luego de dos años, es decir A(2).
  - El capital invertido inicialmente es P = 2000 dólares.
  - La tasa de interés es 4 % anual, es decir r = 0,04.
  - El tiempo que transcurre es dos años t = 2.
  - La fórmula es: $A(t)=P^{e^{rt}}$

  Solución: cuando la capitalización es continua, utilizamos la fórmula en donde la base de la función exponencial es el número e, entonces:

  $A(t)=Pe^{rt}$
  $A(2)=2000e^{0.04(2)}$
  $A(2)=2000e^{0.08}$
  A (2) = 2166,57 dólares.

> Para comprender de mejor manera estos temas introductorios a las funciones exponenciales naturales, sugiero:
>
> - Observe y analice el siguiente video sobre la: función exponencial natural.
> - De igual manera, lea el **texto básico páginas 338, 339 y 340.**

En el video se explica cómo se aplica la fórmula del interés continuo, cuando se invierte cierta cantidad a una tasa de interés capitalizado continuamente. Puntualizando que, aunque el interés fuese capitalizado diariamente, nunca llegaría a ser igual a la magnitud de lo que se logra con una capitalización continua. Adicionalmente, en el texto básico, se proponen algunos ejemplos desarrollados y muy válidos para ilustrar la forma cómo se calcula el interés capitalizado continuamente.

Estimado/a estudiante, para profundizar y consolidar sus conocimientos acerca de la función exponencial natural, le invito a realizar las siguientes actividades de aprendizaje:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Desarrolle el problema 34 del **texto básico pág. 343**, en donde se propone calcular el valor de la inversión después de cierto tiempo y con una capitalización continua.

   Nota. Resuelva el ejercicio en un cuaderno de apuntes o utilice alguna herramienta digital.

2. Antes de iniciar con la autoevaluación 2 le sugiero que practique con la siguiente gamificación sobre la función exponencial.

> **Recuerde que** a través del *chat* de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

3. Finalmente, realice la autoevaluación 2 para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 2

A continuación, se presenta una serie de preguntas para que usted seleccione solo una opción como respuesta correcta.

1. En una función exponencial natural, la base es el número.

   a. $\sqrt{-1}$
   b. π.
   c. e.

2. El número e se define como el valor al que $(1+\frac{1}{n})^n$ se aproxima cuando n.

   a. Se hace pequeño.
   b. Se hace grande.
   c. Toma el valor cero.

3. Sobre la naturaleza del número e, este:

   a. Se puede representar como el cociente de dos números enteros.
   b. Se puede escribir como el cociente entre dos números irracionales.
   c. No se puede representar como el cociente de dos números enteros.

4. La función $f(x) = e^x$ se llama función exponencial natural y el número e es.

   a. Un número racional.
   b. Un número irracional.
   c. Una constante entera.

5. En la fórmula A(t)=Pe^{rt} para interés capitalizado continuamente, la letra P representa el capital invertido, t es el número de años y r es la.

   a. Tasa de interés por año.
   b. Cantidad lograda por los intereses.
   c. Razón entre el tiempo y los intereses.

6. En la función $f(x)=2+e^{x}$ el rango es el conjunto.

   a. Reales positivos.
   b. $(2, \infty)$.
   c. Reales.

7. En la función $h(x)= e^{x-2}$ el rango es el conjunto de los números.

   a. Reales negativos.
   b. $(-\infty, 2)$.
   c. Reales positivos.

8. Si se invierten 2000 dólares a una tasa de interés de 4 % al año, capitalizado continuamente, el valor de la inversión después de 3 años es:

   a. 2255 dólares.
   b. 2728dólares.
   c. 2240,9 dólares.

9. Si se invierten 2000 dólares a una tasa de interés de 4 % al año, capitalizado trimestralmente, el valor de la inversión después de 3 años es:

   a. 2253,65 dólares.
   b. 2260,75 dólares.
   c. 2240,9 dólares.

10. En condiciones similares, el interés capitalizado continuamente respecto de uno capitalizado diariamente, es:

    a. Superior.
    b. Inferior.
    c. Igual.

Ir al solucionario

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Unidad 2. Funciones logarítmicas

Estimado estudiante, la semana pasada se concluyó con el estudio de las funciones exponenciales y sus aplicaciones; ahora, estudiaremos la función inversa de la función exponencial, llamada función logarítmica, la cual nos permite modelar y resolver algunos problemas de la vida real, relacionados con el crecimiento de bacterias, decrecimiento poblacional, interés compuesto, desintegración de la radiación entre otras. Pero ¿el logaritmo es una nueva operación matemática?, ¿cómo se producen sus aplicaciones?

> ¿Quieres saberlo? Te invito a que salgas de tus dudas observando dando lectura al siguiente artículo que muestra algunos datos muy interesantes sobre las Aplicaciones de los logaritmos.

Seguramente ahora tiene más claro cómo surge la función logaritmo, si es una función inversa de alguna otra y principalmente, para qué se estudian los logaritmos y dónde pueden ser aplicados. ¡Fabuloso, verdad!

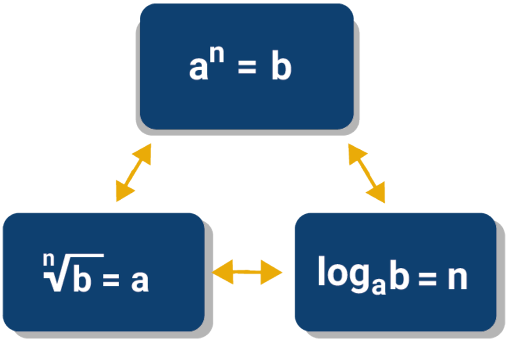
2.1. Definición y propiedades de las funciones logarítmicas

Partamos de la potenciación: $\mathbf{a^n = b}$

En la potenciación, se calcula la potencia (b) multiplicando la base (a) por sí mismo, las veces que indica el exponente (n); en la radicación, se calcula la raíz-base (a) partiendo del radicando-potencia (b) y el exponente-índice (n); y, en los logaritmos, se calcula el exponente (n) si se tiene una base (a) y considerando la potencia (b). Estas relaciones se pueden observar con claridad en la siguiente figura:

Figura 5.

Potenciación, radiación y logaritmación

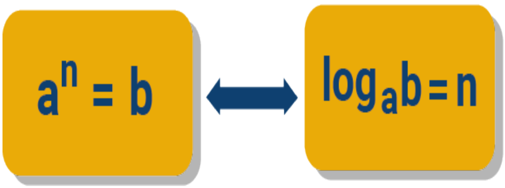


Nota. Guerrero, R., 2023.

A partir de esta relación se puede entender que una expresión exponencial puede convertirse en una expresión logarítmica y viceversa, lo cual se ilustra en la siguiente figura:

Figura 6.

Relación entre potenciación y logaritmación



Nota. Guerrero, R., 2023.

- **Ejemplos ilustrativos:**

  $3^4 = 81$ es equivalente a $\log_3 81 = 4$
  $4^3 = 64$ es equivalente a $\log_4 64 = 3$
  $2^5 = 32$ es equivalente a $\log_2 32 = 5$
  $10^2 = 100$ es equivalente a $\log_{10} 100 = 2$
  $\log_{10} 1000 = 3$ es equivalente a $10^3 = 1000$
  $\log_4 16 = 2$ es equivalente a $4^2 = 16$

La función exponencial es una función inyectiva o uno a uno, lo cual se comprueba cuando una recta horizontal corta en un solo punto a su gráfica, y, por tanto, tiene una función inversa; a esta función se la conoce con el nombre de función logarítmica.

La función logarítmica con base ***a*** diferente de 1 y denotada por **log**$_a$, se define como aquella que cumple la equivalencia: $log_a(x)=y$ si y solo si $a^y=x$.

Entonces, cuando se quiere hallar el **log**$_a$**x** se debe calcular el exponente **y** al cual se debe elevar la base **a** para obtener **x.**

- Ejemplos ilustrativos:

  El $\log_3 9 = 2$ porque $3^2 = 9$
  El $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$
  El $\log_3 234 = 5$ porque $3^5 = 243$
  El $\log_6 36 = 2$ porque $6^2 = 36$
  El $\log_{10} 0{,}01 = -2$ porque $10^{-2} = 0{,}01$
  El $\log_2 (0{,}125) = -3$ porque $2^{-3} = 0{,}125$

Las propiedades que se cumplen en los logaritmos son muy valiosas para la ejercitación y resolución de problemas, se recomienda tenerlas presente siempre que se utiliza el concepto de logaritmo.

Las más importantes son:

Propiedades

1. **$\log_a 1=0$** porque todo número elevado a cero es igual a uno.
2. **$\log_a a=1$** porque todo número elevado a la unidad es igual al mismo número.
3. **$\log_a a^x = x$** porque **a**, elevado a ***x***, es igual **a^x**
4. **$a^{\log_a x}$** $=x$ porque **a** ***$\log_a x$***, elevado a es igual a **x.**

- **Ejemplos ilustrativos:**

  El ***log***$_4$ **1= 0** porque **4^0 = 1**
  El ***log***$_5$ **5 = 1** porque **5^1 = 5**
  El ***log***$_3$ **3^5 = 5** porque **3^5 = 35**
  El ***log***$_2$$^{(8)}$ **= 3** porque **2^3 = 8**

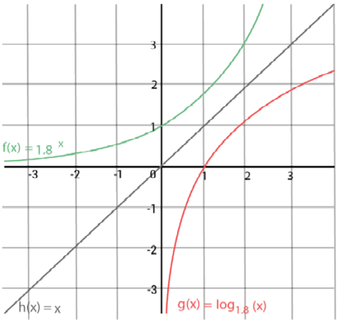
Para profundizar y acceder a otras ilustraciones sobre la definición y las propiedades de las funciones exponenciales, invito para que lea las páginas 344 y 345 del **texto básico.**

2.2. Gráficas de funciones logarítmicas

Puntualizando que, si la función exponencial ***f*** tiene por dominio el conjunto P y rango el conjunto Q, entonces la función inversa f^{-1}, es decir, la función logarítmica, tiene por dominio el conjunto Q y por rango el conjunto P. Esta relación entre las dos funciones inversas se puede apreciar en las siguientes gráficas.

Figura 7.

Función Exponencial y su Inversa



La gráfica de la función exponencial $f(x) = 1.8^x$ es la de color verde, su asíntota es el eje X, el dominio es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los números reales positivos.

La gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log_{1.8}(x)$ es de color rojo, su asintota es el eje Y, el dominio es el conjunto de los números reales positivos y el rango es el conjunto de los números reales. Está definida únicamente para valores x>0.

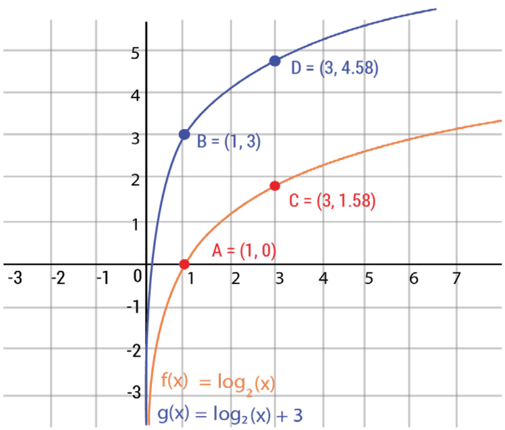
Nota. Guerrero, R., 2023.

Estimado estudiante, sugiero que para todos los ejercicios y problemas en donde se debe trazar la gráfica de la función exponencial, se maneje el software de uso libre GeoGebra, el cual puede utilizarse en línea o puede descargarse gratuitamente.

- **Ejemplo ilustrativo.** Tracemos en un mismo sistema cartesiano las gráficas de la función $\mathbf{f(x)= \log_2 (x)}$ y de la función $\mathbf{g(x) = \log_2 (x) +3}$, analizando el respectivo desplazamiento.

Figura 8.

Desplazamiento de gráficas logarítmicas



En este ejercicio se comprueba que las funciones logarítmicas tienen por asíntota un eje vertical, en este caso al eje de las Y. Las dos están definidas para x > 0.

La gráfica de la función $f(x) = \log_2(x)$ pasa por el punto (1, 0) y sus ordenadas son tres unidad menos (-3) respecto a las ordenadas de la otra función.

La gráfica de la función $g(x) = \log_2(x) + 3$ pasa por el punto (1, 3) y sus ordenadas son tres unidades más (+3) respecto a las ordenadas de la otra gráfica.

Nota. Guerrero, R., 2023.

2.3. Logaritmos comunes

Estimado estudiante, los logaritmos más conocidos son los de base 10 o logaritmos decimales, a los cuales se los conoce simplemente como logaritmos comunes. Para su escritura, se puede omitir escribir la base 10.

> Se denomina logaritmo común a todo logaritmo de base 10, el cual se denota escribiendo simplemente: **log x**. Entonces $\mathbf{log_{10}(x) = log\ x}$.

- **Ejemplos ilustrativos.** Observemos algunos ejemplos de logaritmos comunes, en donde la base es 10.

  log 10 = 1, porque la base 10 elevado a 1 es igual a 10
  log 100 = 2, porque $10^2 = 100$
  log 1000 = 3, porque $10^3 = 1000$
  log 10000 = 4, porque $10^4 = 10000$
  log 0,01 = -2, porque $10^{-2} = 1/100 = 0{,}01$

Para comprender mejor los temas de las funciones logarítmicas, especialmente para identificar las propiedades de los logaritmos naturales, sugiero realizar la lectura de las **páginas desde la 344 hasta la 351** del **texto básico**.

Una vez, realizada la lectura, seguramente usted ha logrado analizar la relación entre la función exponencial y la función logarítmica, explicando sus coincidencias y diferencias; luego se explica cómo se calculan los logaritmos comunes o decimales, los mismos que tiene base ***10***, mientras que los logaritmos naturales o neperianos se caracterizan por tener de base el número **e**.

Estimado/a estudiante, para profundizar y consolidar sus conocimientos acerca de la función exponencial natural, sugiero que realice las siguientes actividades de aprendizaje:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Trace en un mismo sistema de coordenadas cartesianas las gráficas de las funciones logaritmo común y logaritmo natural.

   Nota. Complete la actividad en un cuaderno de apuntes o en un documento word.

2. Le invito a que salga de sus dudas analizando el siguiente artículo: Aplicaciones de los logaritmos, el cual presenta algunos datos muy interesantes.

Seguramente ahora tiene más claro cómo surge la función logaritmo, si es una función inversa de alguna otra y principalmente, para qué se estudian los logaritmos y dónde pueden ser aplicados. ¡Espectacular, verdad!

Recuerde que a través del *chat* de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Semana 4

Estimado estudiante, la semana pasada se inició con el estudio de las funciones logarítmicas; ahora, reforzaremos su estudio ampliando la ejercitación y sistematizando los conceptos fundamentales para la modelización y posterior resolución de problemas.

Primero, recordemos la definición de función logarítmica en donde la única condición es que la base $a \neq 1$. Aquí, cabe puntualizar que, la función logarítmica es la inversa de la función exponencial.

2.4. Logaritmos naturales

Otro tipo de logaritmos muy utilizados por su gran aplicación en la modelización de problemas del entorno son los logaritmos naturales, los cuales se caracterizan porque su base es el número e.

> Se denomina logaritmo natural a todo logaritmo de base ***e***, el cual se denota escribiendo simplemente: **ln x** . Entonces: $\log_e(x) = \ln x$.

Es importante considerar que, la función logaritmo natural **f(x)=ln x** que se puede escribir simplemente como **y= ln x**, es la inversa de la función exponencial $y=e^x$. Las propiedades de los logaritmos naturales son casos particulares de las propiedades de los logaritmos en general.

Definición: la función logarítmica con base a diferente de 1 y denotada por loga, se define como aquella que cumple la equivalencia: $\log_a x = y$ **si y solo si** $a^y = x$.

En la práctica, cuando se quiere hallar el $\log_a x$ se debe calcular el exponente y al cual se debe elevar la base a para obtener ***x***.

- **Ejemplos ilustrativos:**

  El $\boldsymbol{log_2}$ **16 = 4**, porque **2^4 = 16**
  El $\boldsymbol{log_5}$ **625 = 4**, porque **5^4 = 625**
  El $\boldsymbol{log_3}$ **729 = 6**, porque **3^6 = 729**
  El $\boldsymbol{log_4}$ **256 = 4**, porque **4^4 = 256**
  El $\boldsymbol{log_7}$ **7 = 1**, porque **7^1 = 7**
  El $\boldsymbol{log^8}$ **64 = 2**, porque **8^2 = 64**
  El $\boldsymbol{log_9}$ **729 = 3**, porque **9^3 = 729**
  El $\boldsymbol{log_{10}}$ **10000 = 4**, porque **10^4 = 10000**
  El $\boldsymbol{log_2}$ **0,125 = -3**, porque **2^{-3} = 0,125**
  El $\boldsymbol{log_3}$ **0,111 = -2**, porque **3^{-2} = 0,111…**
  El $\boldsymbol{log_4}$ **0,0624 = -2**, porque **4^{-2} = 0,0625**
  El $\boldsymbol{log_5}$ **0,04 = -2**, porque **5^{-2} = 0,04**

2.5. Gráficas de los logaritmos naturales

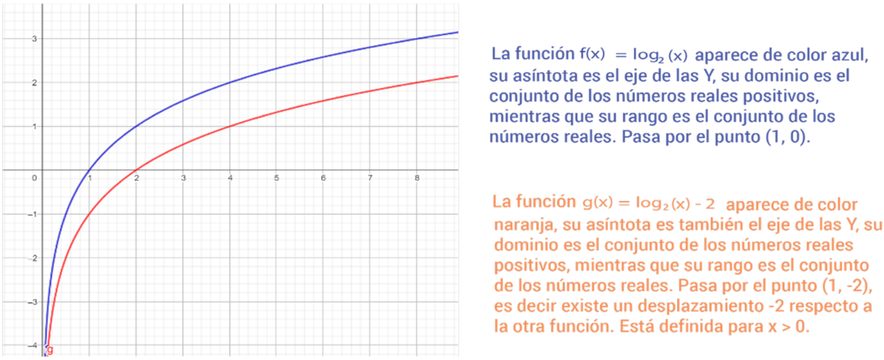
Para trazar la gráfica de una función logarítmica nos apoyamos en GeoGebra o en otro *software* libre puntualizando que, la función logarítmica y la función exponencial son funciones inversas.

Además, es importante que usted se ejercite lo suficiente sobre el desplazamiento gráfico de las funciones logarítmicas.

- **Ejemplo ilustrativo.** Grafiquemos en el mismo sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas las funciones: **$f(x)=\log_2(x)$ y $g(x) = \log_2(x)$** - 2 para realizar un análisis sobre el desplazamiento vertical.

Figura 9.

Desplazamiento de la función a $\mathbf{f(x)=\log_2(x)}$ **a** $\mathbf{g(x) = \log_2(x) - 2}$



Nota. Guerrero, R., 2023.

Los logaritmos comunes son logaritmos de base 10, pero se escriben omitiendo la base. Mientras que los logaritmos naturales son logaritmos que tiene de base el número e.

Logaritmo común: $\boldsymbol{\log} \mathbf{x} = \mathbf{\log_{10} x}$

Logaritmo natural: $\boldsymbol{\ln x} = \mathbf{\log_e x}$

- **Ejemplos ilustrativos**

  $\log 100 = 2$
  $\log 10 = 1$
  $\ln e = 1$
  $\ln e^2 = 2$

Las propiedades de los logaritmos naturales son casos específicos respecto de las propiedades de los logaritmos, las mismas fueron estudiadas en la semana anterior. Algunas funciones logarítmicas son desplazadas en el eje X, por lo tanto, conviene analizar su dominio.

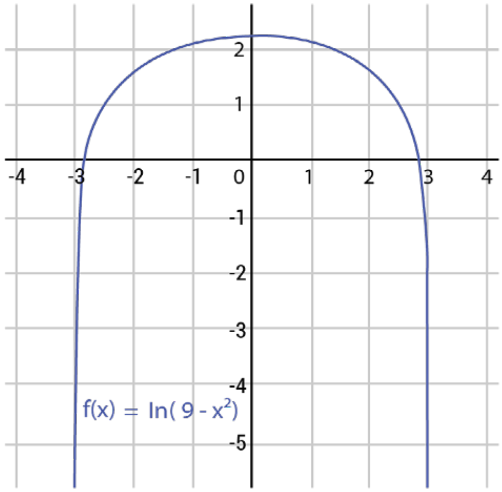
- **Ejemplo ilustrativo.** Encontremos el dominio de la función $\mathbf{f(x) = \ln(9-x^2)}$ comprobando con su respectiva gráfica.

Figura 10.
Gráfica de la función f(x) =ln(9-x²)

Primero, recordemos que toda función logarítmica está definida para $x > 0$; entonces, el dominio de la función f, será el conjunto de números reales que cumpla:

- $9 - x2 > 0$, factorizamos
- $(3 - x)(3 + x) > 0$, de donde
- $3 - x > 0 \wedge 3 + x > 0$, es decir
- $x - 3 < 0 \wedge x > -3$
- $x < 3 \wedge x > -3$.

Los valores de x que cumplen con las dos desigualdades es $-3 < x < 3$, por lo que el dominio está dado por: (-3, 3). Lo cual se verifica al analizar la gráfica de la derecha.



Nota. Guerrero, R., 2023.

2.6. Propiedades de los logaritmos naturales

Las propiedades que se cumplen en los logaritmos son muy valiosas para la ejercitación y resolución de problemas, porque a través de ellas se puede determinar directamente el resultado. Las cuatro más importantes son:

Propiedades

$\mathbf{log}_a 1=0$ porque todo número elevado a cero es igual a uno.

$\mathbf{log}_a a=1$ porque todo número elevado a la unidad es igual al mismo número.

$\mathbf{log}_a\ a^x=x$ porque **a**, elevado a **x**, es igual a^x

- **Propiedad del logaritmo de 1: $\mathbf{log}_a 1=0$** Esta propiedad indica que, cualquiera sea la base, el logaritmo de 1 siempre es cero.

  El $\mathbf{log}_4 1= 0$, porque $\mathbf{4^0 = 1}$
  El $\mathbf{log}_{20} 1= 0$, porque $\mathbf{20^0 = 1}$

- **Propiedad de la coincidencia: $\log_a a=1$** Esta propiedad manifiesta que, si la base coincide con el número, el resultado siempre es uno.

  El $\boldsymbol{\log_5} 5 = 1$, porque $\mathbf{5^1 = 5}$
  El $\boldsymbol{\log_3} 3= 1$, porque $\mathbf{3^1 = 3}$

- **Propiedad de la potencia: $\log_a a^x=x$** Esta propiedad señala que, si el número es una potencia con la misma base, el resultado siempre es el exponente.

  El $\boldsymbol{\log_4} \mathbf{4^2} = 2$, porque $\mathbf{4^2 = 4^2}$
  El $\boldsymbol{\log_{10}} \mathbf{10^3} = 3$, porque $10^3 = 10^3$

- **Propiedad de la base:** $a^{\log_a(x)} = x$ Esta propiedad manifiesta que, si la base se eleva a un exponente logarítmico con la misma base, el resultado es **x**.

  El $2^{\log_2(8)} = 8$, porque $\mathbf{2^3} = 8$

  El $3^{\log_3(9)} = 9$, porque $\mathbf{3^2}= 9$

  El $10^{\log_{10}(0.01)} = 0.01$, porque $\mathbf{10^{-2} = 0,01}$

Es muy importante considerar que toda función logarítmica está definida para valores de $x > 0$ y, por consiguiente, la función logaritmo natural también está definida para $x > 0$.

Para comprender de mejor manera los temas de las funciones logarítmicas, identificando las propiedades de los logaritmos, incluyendo las funciones naturales, se sugiere realizar lo siguiente:

1. Revise el siguiente enlace donde encontrará información sobre la: Definición de logaritmo.
2. De igual manera, lea el **texto básico las páginas desde 344 hasta la 351.**

En el video se hace una síntesis de los contenidos estudiados en la unidad de las funciones logarítmicas, considerando las definiciones y propiedades más importantes. Además, en el texto básico, usted puede estudiar aquellos aspectos que considere de mayor trascendencia como son los desplazamientos de las gráficas de las funciones logarítmicas, de esta manera usted estará preparado para desarrollar el cuestionario previsto en esta semana.

Para profundizar y consolidar sus conocimientos acerca de la función exponencial natural, sugiero las siguientes actividades de aprendizaje:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Resuelva los ejercicios que a su criterio le parezcan interesantes y suficientes para lograr experticia, los cuales aparecen propuestos en el **texto básico, desde la pág. 351 hasta la pág. 354**.

   Nota. Resuelva los ejercicios en un cuaderno de apuntes o utilice alguna herramienta digital.

> **Recuerde que** a través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las **funciones logarítmicas** y sus aplicaciones, es recomendable que usted realice la siguiente autoevaluación de lo aprendido en esta unidad, para luego retroalimentar, con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes.

Autoevaluación 3

Instrucción: seleccione la alternativa correcta, en caso de que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

1. La función logarítmica es una función inversa de.

   a. La potenciación.
   b. La función exponencial.
   c. Los números reales.

2. La función logarítmica con base a, denotada por loga está definida por:

   a. $\mathbf{log}_b x = y \leftrightarrow a^y = x$.
   b. $\mathbf{log}_x a = y \leftrightarrow a^y = x$.
   c. $\mathbf{log}_a x = y \leftrightarrow a^y = x$.

3. El $\mathbf{log}_3 243 = 5$, porque:

   a. $5^3 = 243$.
   b. $3^5 = 243$.
   c. $3^4 = 81$.

4. El logaritmo con base 4 de 256: $\log_4 256$, es:

   a. 16.
   b. 4.
   c. 8.

5. El dominio de la función $f(x) = \log_4 x$ es el conjunto de los números:

   a. Irracionales positivos.
   b. Reales positivos.
   c. Reales.

6. La gráfica de la función f(x)= log4x +4 se ha desplazado cuatro unidades con respecto de la función:

   a. $f(x)= \log_4 x$.
   b. $f(x) = \log_1 x$.
   c. $f(x) = \log_3 x$.

7. El dominio de la función $f(x)= \log_{10}(x-4)$ es el conjunto.

   a. $\{x / x \in R\}$.
   b. $\{x / x > 4\}$.
   c. $(-\infty, 4)$.

8. Si 26 = 64, entonces.

   a. $\log_2 64=6$.
   b. $\log_4 64=3$.
   c. $\log_3 64=6$.

9. El dominio de la función $f(x)= \ln(4-x^2)$ es.

   a. $(-2, 2)$.
   b. $(2, +\infty)$.
   c. $(2, -2)$.

10. El dominio de la función $f(x)= \ln (16-x^2)$ es.

   a. $(-\infty, 4)$.
   b. $(-2, 2)$.
   c. $(-4, 4)$.

Ir al solucionario

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

1 Bimestre

2.7. Leyes de los logaritmos

Estimado estudiante, la semana pasada se concluyó con el estudio de las funciones logarítmicas; ahora, estudiaremos las propiedades de los logaritmos, que brindan la posibilidad de estudiar muchas aplicaciones, posteriormente en el segundo bimestre. Pero ¿de dónde se obtienen las propiedades de los logaritmos?, ¿tiene relación con otras propiedades?, ¿quiénes fueron sus inventores?, ¿para qué se deben estudiar las leyes de los logaritmos? Le invito a que salga de sus inquietudes con el estudio responsable de los siguientes temas.

Considerando que los logaritmos manejan conceptos de potenciación y, por consiguiente, son exponentes que elevado a un número base nos da otro número propuesto, las leyes de la potenciación o de los exponentes dan lugar a las leyes de los logaritmos.

Leyes de los logaritmos

Ley 1. Logaritmo del producto: $\log_a(A.B) = \log_a A + \log_a B$.

El logaritmo del producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de dichos factores.

Ley 2. Logaritmo del cociente: $\log_a(A/B) = \log_a A - \log_a B$.

El logaritmo del cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

Ley 3. Logaritmo de una potencia: $\log(A^C) = C.\log_a A$.

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

La demostración de estas leyes, se fundamentan en las leyes de la potenciación y aparecen explicadas en la página 355 del **texto básico.**

Con la aplicación de estas leyes muchos procedimientos pueden ser simplificados o desarrolladas de acuerdo a nuestra conveniencia.

- **Ejemplos ilustrativos.** Evaluemos las siguientes expresiones, aplicando las leyes de los logaritmos y sin usar calculadora.

1. $\boldsymbol{\log_2 8 + \log_2 4 = \log 2\ (8.4)}$ Ley 1. Aplicando logaritmo de un producto

   $= \boldsymbol{\log_2 (32)}$ multiplicando 8 por **4**
   $= 5$, porque $\boldsymbol{5^2 = 32}$

2. $\boldsymbol{\log_3 108 - \log_3 4 = \log_3 (108/4)}$ Ley 2. Aplicando logaritmo de un cociente
   $= \boldsymbol{\log_3 27}$ dividiendo 108 para 4
   $= \mathbf{3}$, porque $\mathbf{3}^3 = \mathbf{27}$

3. $\boldsymbol{3 \log_8 4 = \log_8 43}$ Ley 3. Aplicando logaritmo de una potencia
   $= \boldsymbol{\log_8 64}$ elevando 4 a la tercera potencia
   $= \mathbf{2}$**,** porque $8^2 = 64$

Para comprender de mejor manera los temas de las funciones logarítmicas, especialmente para identificar las propiedades de los logaritmos naturales, sugiero realizar lo siguiente:

- Observe y analice el siguiente video sobre la: Definición y Propiedades de logaritmos naturales.
- De igual manera, lea el **texto básico las páginas desde la 354 hasta 358.**

En el **texto básico**, luego de proponer las leyes de los logaritmos, se desarrollan ejercicios de aplicación de los mismos. Ofreciendo una suficiente variedad de ejercicios de aplicación; también se ofrecen aquellos casos en donde se aprovechan las leyes para desarrollar y combinar expresiones logarítmicas, y, finalmente, se explica el cambio de base de los logaritmos, lo que permite encontrar su valor a través de las calculadoras.

Estimado/a estudiante, para profundizar y consolidar sus conocimientos acerca de la función exponencial natural, sugiero las siguientes actividades de aprendizaje:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de las leyes de los logaritmos, los cuales los encuentra propuestos en el **texto básico.**

   Nota. Resuelva los ejercicios en un cuaderno de apuntes o utilice alguna herramienta digital.

> **Recuerde que:** A través del *chat* de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las **leyes de logaritmos**, es recomendable que usted realice la siguiente autoevaluación de lo aprendido en la unidad, para luego retroalimentar, con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes que le causaron dificultad.

Autoevaluación 4

1. El logaritmo de un producto de factores es igual a la.

   a. División de cada uno de los logaritmos parciales.
   b. Suma de los logaritmos de cada factor.
   c. Multiplicación de los dos logaritmos parciales.

2. El logaritmo del cociente es igual a la.

   a. Suma entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.
   b. Al producto del logaritmo de la base por el logaritmo del exponente.
   c. Diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

3. La expresión $\log_3 (8) + \log_3 (x^2)$aplicando la ley del producto, es equivalente a.

   a. $2 + x^{2/3.}$
   b. $\log_3(8.x^2)$.
   c. $8x^2$.

4. El logaritmo $\log_2 10$ aplicando la ley del producto, es.

   a. $1+ \log_2(8)$.
   b. $1+ \log_2(5)$.
   c. Log (20).

5. El desarrollo de $\log(x^3y^2)$ es.

   a. 2log x + 3 log y.
   b. $x^3+ y^2$.
   c. 3log x + 2 log y.

6. El desarrollo de $log_2(\frac{ab^5}{\sqrt[3]{2c}})$ es.

a. $\log_2 ab^5 - log_3\sqrt[3]{2c}$

b. $5\log_2 ab - 1/3\log_2 2 + 1/3\log_2 c$

c. $\log_2 a + 5\log_2 b + 1/3\log_2 c$

7. $\log x^2 + \log y^2$.

a. $\log (x^2 + y^2)$.

b. $\log (xy)^2$

c. $\log (2x + 2y)$.

8. $log\ (10^4)$ es.

a. 4.
b. $4/ \log_2 10$.
c. $1/ \log_4 10$.

9. El valor del $\log_5 16$ transformando a logaritmos de base 10, con 5 decimales, es.

a. 1,72270.
b. 0,69897.
c. 0,00005.

10. El desarrollo de la expresión log $\left(\sqrt{x^2 + 3y^2}\right)$, es:

a. $\frac{3}{4}\log x^2y^2$.
b. $\log 1/4x^2 + \log 3/4y$.
c. $\frac{1}{2}\log (x^2 + 3y^2)$.

Ir al solucionario

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

1 Bimestre

2.8. Desarrollo y combinación de expresiones logarítmicas

También podemos desarrollar ejercicios combinando las expresiones logarítmicas, para esto se aplican las leyes de los logaritmos y otras propiedades de las distintas operaciones matemáticas.

- **Ejemplos ilustrativos.** Usemos las leyes para desarrollar las expresiones.

1. $\log_3 (8x^2) = \log_3 8 + \log_3 x^2$ aplicando Ley 1
   $= \log_3 8 + 2\log_3 x$ aplicando Ley 3

2. $\log_2(3x^4\, y^{2/3}) = \log_2 3 + \log_2 x^4 + \log_2 y^{2/3}$ aplicando Ley 1
   $= \log_2{}^3 + 4\log_2 x + 2/3\log_2 y$ aplicando Ley 3

3. $\log_3 ((ab)^5 / \sqrt[3]{2c} = \log_3 (ab)5 - \log_3 \sqrt[3]{2c}$ aplicando Ley 1

   $= 5 \log_3 ab - \log_3 (2c)^{1/3}$ aplicando Ley 2
   $= 5(\log_3 ab) - 1/3\log_3(2c)$ aplicando Ley 3
   $= 5(\log_3 a + \log_3 b) - 1/3(\log_3 2 + \log_3 c)$ aplicando Ley 1
   $= 5 \log_3 ab + 5 \log_3 b - 1/3\log_3 2 - 1/3\log_3 c$ Ley distributiva

Algunas veces es necesario escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo.

- **Ejemplos ilustrativos.** Usemos las leyes de los logaritmos para combinar cada expresión y reducir a un logaritmo lo más simplificado posible.

1. $6\log_2 x + \log_2 x^3 = (3.2) \log_2 x + \log_2 x^3$ Factorizando el 6
   $= 2 \log_2 x^3 + \log_2 x^3$ Ley 3, permite obtener términos semejantes
   $= 3 \log_2 x3$ Reducimos los dos términos semejantes a uno solo

2. $\log(4+x) + \log(4+x)^3 - \log(4+x)^2 =$
   $= \log(4+x) + 3 \log(4+x) - 2 \log(4+x)$ Ley 3, para obtener términos semejantes
   $= 2 \log(4+x)$ Reducimos los tres términos semejantes

3. **2 log x + 4 log(x-1) = logx^2 + log$(x-1)^4$** Ley 3
= **log (x^2. $(x-1)^4$)** Ley 1

4. **3 log x + log(y-1) - 2/3log z =**
= **logx^3 + log(y-1) - log $z^{2/3}$** Ley 3
= **log (x^3. (y-1)) - log $z^{2/3}$** Ley 1
= **log (x^3. (y-1)) / $z^{2/3}$)** Ley 2
= **log (x^3. (y-1))** / $\sqrt[3]{z^2}$) Exponentes y radicales

- La suma de logaritmos se puede escribir como el logaritmo de un producto según Ley 1, pero el logaritmo de una suma no es igual a la suma de logaritmos, por ejemplo:

  log (a.b) = log a + log b, pero **log(a + b) ≠ log a + log b.**

- Similar, la diferencia de logaritmos se puede escribir como el logaritmo de un cociente Ley 3, pero el logaritmo de una diferencia no es igual al cociente de logaritmos, por ejemplo:

  log (a/b) = log a - log b, pero log(a - b) ≠ loga - log b

2.9. Fórmula de cambio de base

Para pasar de un logaritmo en una base a un logaritmo en otra base, se utiliza una fórmula muy sencilla:

Fórmula de cambio de base: ***$\log_b x = \log_a x / \log_a b$***

- **Ejemplos ilustrativos:** apliquemos la fórmula del cambio de base.

1. Pasemos el logaritmo **$\log_5 16$** al logaritmo en una base binaria (2).

La fórmula del cambio de base es: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

$$\log_5 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 5} = \frac{4}{\log_2 5}$$

2. Expresemos el logaritmo

3. $log_{10}(4)$es un logaritmo en una base binaria (2).

$$\text{La fórmula del cambio de base es: } \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_{10} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 10} = \frac{2}{\log_2 10}$$

4. Transformemos el logaritmo ***log***$_8$ al logaritmo en una base binaria (2).

$$\text{La fórmula del cambio de base es: } \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 10} = \frac{\log_2 8}{\log_2 (2.5)} = \frac{3}{\log_2 2 + \log_2 5} = \frac{3}{1 + \log_2 5}$$

5. Pasemos el logaritmo ***ln 64*** al logaritmo en una base binaria (2).

$$\text{La fórmula del cambio de base es: } \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\ln 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 10} = \frac{6}{\log_2 (2.5)} = \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 5} = \frac{6}{1 + \log_2 5}$$

6. Usemos la fórmula del cambio de base con **a = 10 y b = 5**, para hallar con cuatro decimales el valor correspondiente al ***log***$_5$**15.**

$$\text{La fórmula del cambio de base es: } \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_5 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 5} = \frac{1{,}1761}{0{,}6990} = 1,6825$$

Semana 7

Unidad 3. Secuencia didáctica en matemática

A continuación, se teoriza, caracteriza y se describe sobre la estructura de una secuencia didáctica de forma general y luego se ejemplifica en el área de matemática. Pero vale preguntarnos qué significa una secuencia didáctica.

3.1. ¿Qué es una secuencia didáctica?

Los maestros a diario, sin importar su especialidad, aplicamos secuencias didácticas de manera consciente o inconsciente. Cuando iniciamos una clase o tutoría, luego de presentarnos, explicamos el objetivo de la clase, motivamos, revisamos los prerrequisitos, planteamos un problema a resolver o una pregunta problematizadora; luego reflexionamos sobre el nuevo tema a estudiar, orientamos el aprendizaje de nuevos conceptos y conocimientos, y finalmente, orientamos el desarrollo de ejercicios y problemas de aplicación. Todo este conjunto de actividades que se realiza para favorecer los aprendizajes está relacionado directamente con la definición de una secuencia didáctica.

Para Moreira (2012), una secuencia didáctica se define como secuencias de enseñanza potencialmente facilitadoras de aprendizaje significativo, de temas específicos de conocimiento conceptual o procedimental, que pueden estimular la investigación aplicada en la enseñanza diaria de las clases. Según el autor, solo se puede hablar de enseñanza cuando hay aprendizaje, y para que el aprendizaje pueda ser considerado como tal, debe ser significativo.

Por esta razón decimos que, una secuencia didáctica es la parte central de un plan de clase, es una verdadera microplanificación, donde se conjugan de manera coherente todas actividades de aprendizaje con sus respectivos recursos para que el dicente logre aprendizajes duraderos y significativos.

3.2. Características de una secuencia didáctica

Como ocurre con las narraciones, las secuencias didácticas presentan una estructura básica que se parecen a la de una clase tradicional o clásica: introducción, desarrollo y cierre o recapitulación.

De tal manera que si se quiere organizar una secuencia didáctica, es necesario pensar en la selección y secuencia de los contenidos, los objetivos de aprendizaje, las tareas y actividades con sus tiempos, y las formas de evaluar.

En consecuencia, las secuencias de clase establecen no solo un orden en los contenidos y tiempos de trabajo, sino también un orden lógico para estudiantes y docentes.

A continuación, se presenta una serie de características propias (figura 11) para pensar las distintas fases o momentos de una secuencia didáctica (y, en consecuencia, el orden de las actividades que se deben realizar durante el proceso de enseñanza-aprendizaje).

Figura 11.
Características de una secuencia didáctica

Nota. Adaptado de *¿Qué son las secuencias didácticas?* [Ilustración], por Otras voces en educación, 2017, otrasvoceseneduacion.org. CC BY 2.0

3.3. La estructura de una secuencia didáctica

La estructura de la secuencia se integra con dos elementos que se realizan de manera paralela: la secuencia de las actividades para el aprendizaje y la evaluación para el aprendizaje inscrita en esas mismas actividades. Para elaborar una secuencia didáctica existen algunas metodologías que orientan su construcción, en este curso analizaremos dos de las más utilizadas en nuestra realidad: metodología ERCA y metodología del Pensamiento crítico.

3.3.1. Metodología ERCA

Según lo que propone David Kolb, el ciclo de aprendizaje es una técnica de interaprendizaje perteneciente a las teorías cognoscitivas, que parte de una experiencia concreta y luego de algunas etapas generan nuevas experiencias concretas, favoreciendo los procesos reflexivos, conceptuales y procedimentales en el estudiante. Es importante adaptar este modelo del ciclo de aprendizaje, incorporando a la etapa de lo concreto algunas actividades o situaciones problemáticas.

Distinguidos estudiantes, considerando los aportes del estadounidense David Kolb podemos explicar las fases del ciclo de aprendizaje en matemática denominado ERCA, puntualizando que ciertos aspectos han sido adaptados de: Disminución de Riesgo de Fracaso Escolar en el Bachillerato Técnico del Ecuador, (2009) de acuerdo a la experiencia en docencia matemática del autor.

Estimado estudiante le invito a revisar la siguiente infografía donde se detallan características de las cuatro fases de metodología ERCA.

Fases de aplicación de la metodología ERCA.

¿Qué le pareció la temática abordada?, interesante verdad, ahora, le invito a revisar el siguiente ejemplo donde se aplica la metodología mencionada.

Ejemplo ilustrativo 1: construcción del conocimiento mediante ciclo de aprendizaje.

3.4. Metodología del pensamiento crítico adoptada por el ministerio de educación del Ecuador

Una meta central de la educación actual en Ecuador es formar personas preparadas para enfrentar críticamente situaciones e ideas, esto supone favorecer en cada momento de la experiencia educativa, y en todas las asignaturas, a estrategias de revisión de las ideas que presentan los textos, evaluar constantemente las ideas de los compañeros, las propias y las de los docentes, a la luz de evidencias y teorías que establecen coherencia, sostenibilidad y fuerza de las ideas que circulan en el salón de clases. El reto de los docentes hoy es saber aprovechar los diversos momentos de trabajo educativo (lecturas, discusiones, elaboración de escritos, etc.) para introducir estrategias variadas que lleven a esa vigilancia crítica de las ideas en los estudiantes.

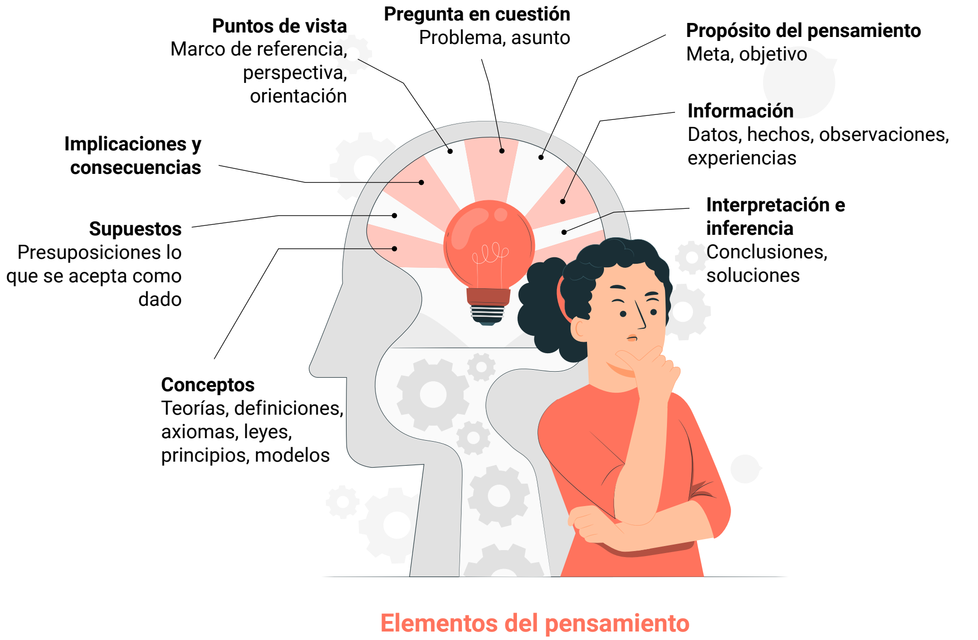
En esta parte trataremos la didáctica del pensamiento crítico e iniciaremos con su definición e importancia para la formación integral del estudiante; y luego, se considera la metodología y estrategias didácticas para desarrollar el pensamiento crítico de los estudiantes utilizando el tema de la aplicación de las funciones logarítmicas a la vida real.

Según Scriven y Paul (2001), el pensamiento crítico es el proceso intelectual y disciplinado de conceptualizar, aplicar, analizar, sintetizar y/o evaluar, activa y hábilmente, información obtenida o generada a través de la observación, la experiencia, la reflexión, el razonamiento o la comunicación como una guía para actuar y creer. Cuando pensamos de manera crítica, de acuerdo con Paul (1987), generamos y moldeamos las ideas y las experiencias, de manera que puedan ser usadas para estructurar y resolver problemas, fundamentar decisiones y para comunicárselas a los demás. El pensamiento crítico es un procedimiento para dar validez racional a las creencias y sentido a las emociones.

Para Crawford et al. (2005), Implementar estrategias para fomentar el pensamiento crítico en el aula en las diferentes áreas implica que el estudiante no solo aprenda a leer y escribir, sino que adquiera el hábito de estar informado a través de la lectura para definir formas de pensar y expresarlas a través de la escritura.

Figura 12.

Los elementos del pensamiento Crítico



Nota. Adaptado de *Curso de didáctica del pensamiento crítico* (p. 31), por Ministerio de Educación del Ecuador, 2009, Bicentenario.

Características del estudiante con pensamiento crítico

- Plantea preguntas, cuestionamientos y problemas formulándolos con claridad y precisión.
- Identifica y evalúa información relevante.
- Interpreta ideas abstractas.
- Ofrece definiciones, soluciones y conclusiones bien fundamentadas y sustentadas.
- Está abierto a analizar desde varias perspectivas.
- Evalúa las causas de los hechos y sus consecuencias.
- Se comunica de manera efectiva para resolver problemas complejos.

Estimado/a estudiante, para analizar estas temáticas le invito a revisar el siguiente ejemplo.

Ejemplo ilustrativo 2: construcción del conocimiento mediante ciclo de aprendizaje.

Una vez revisados los contenidos de esta semana, continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Resuelva los ejercicios propuestos a continuación, en donde aplicamos las fases de aprendizaje de David Kolb.

   Complete el siguiente organizador gráfico, anotando las fases del ciclo de aprendizaje.

Figura 13.
Ciclo del aprendizaje

Experiencia concreta

El ciclo de aprendizaje

Nota. Adapatado de *Círculo del aprendizaje a través de la experiencia o ciclo de aprendizaje de Kolb* [Ilustración], por Orientación Andujar, 2018, Orientación Andujar. CC BY 2.0

- Diseña un ejemplo de experiencia concreta, reflexiva gráfica, conceptual simbólica y aplicación consolidada para un tema de funciones exponenciales y un tema de funciones logarítmicas.

- Explique en un ejemplo la diferencia entre una clase trabajada con el ciclo de aprendizaje de David Kolb y otra sin el mismo.

  Nota. Conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o en un documento word.

2. Para reforzar sus conocimientos, complete el siguiente mapa conceptual acerca de la función exponencial y logarítmicas.

Función Exponencial y Logarítmicas.

3. Para reforzar su conocimiento le invito a revisar la siguiente autoevaluación.

Autoevaluación 5

Instrucción: marque la alternativa correcta, en caso de que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

1. ¿Qué es una secuencia didáctica en matemáticas?

    a. Una serie de actividades matemáticas sin conexión entre sí.
    b. Una planificación ordenada y estructurada de actividades y contenidos matemáticos.
    c. Un conjunto de ejercicios matemáticos que se dan de manera aislada.

2. ¿Cuál es el propósito de una secuencia didáctica en matemáticas?

    a. Mejorar la capacidad de memorización de los estudiantes.
    b. Fomentar el aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos.
    c. Ayudar a los estudiantes a aprobar un examen.

3. ¿Cuáles son los elementos que conforman una secuencia didáctica en matemáticas?

    a. Contenidos, actividades, estrategias y recursos.
    b. Objetivos, contenidos, actividades y evaluación.
    c. Contenidos, recursos, tecnología y juegos.

4. ¿Qué estrategias o metodologías se pueden utilizar en una secuencia didáctica en matemáticas?

    a. La enseñanza frontal y tradicional.
    b. El aprendizaje cooperativo y el aprendizaje basado en proyectos.
    c. El aprendizaje individual y el uso exclusivo de tecnología.

5. ¿Cómo se puede evaluar el aprendizaje en una secuencia didáctica en matemáticas?

   a. Solo se puede evaluar con exámenes escritos.
   b. A través de la observación, la participación y la reflexión.
   c. Solo se puede evaluar si los estudiantes obtienen las respuestas correctas.

6. ¿Cómo se debe seleccionar y organizar los contenidos en una secuencia didáctica en matemáticas?

   a. Se deben seleccionar los contenidos en función de la dificultad y organizarlos de manera cronológica.
   b. Se deben seleccionar los contenidos en función de su relevancia y organizarlos de manera lógica.
   c. Se deben seleccionar los contenidos al azar y organizarlos según su complejidad.

7. ¿Cómo se puede adaptar una secuencia didáctica en matemáticas para atender las necesidades de los estudiantes?

   a. No es necesario adaptar una secuencia didáctica, ya que sirve para todos los estudiantes.
   b. A través de la diferenciación pedagógica, la adaptación de los contenidos y el uso de materiales adicionales.
   c. Atendiendo solo a las necesidades de los estudiantes más avanzados.

8. ¿Cuál es el papel del docente en una secuencia didáctica en matemáticas?

   a. Ser el único responsable del aprendizaje de los estudiantes.
   b. Guiar y acompañar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje.
   c. Limitarse a impartir la lección y no intervenir más.

9. ¿Qué recursos se pueden utilizar en una secuencia didáctica en matemáticas?

   a. Solo pizarras y libros de texto.
   b. Cualquier recurso que ayude a los estudiantes a aprender, como la tecnología o los juegos.
   c. Solo ejercicios y problemas matemáticos.

10. ¿Cómo se puede garantizar la continuidad y coherencia en una secuencia didáctica en matemáticas?

    a. Asegurándose de que los objetivos de aprendizaje estén claramente definidos y se relacionen entre sí, de manera que se construya un conocimiento sólido y progresivo.

    b. Realizando evaluaciones escritas y orales en cada sesión para asegurarse de que los estudiantes hayan comprendido correctamente los conceptos previos antes de avanzar a temas más complejos.

Ir al solucionario

Recuerde que las fases del ciclo de aprendizaje de David Kolb son cuatro: experiencia concreta, reflexiva gráfica, conceptual simbólica y aplicación consolidada.

¡Felicitaciones! Ha realizado un trabajo exitoso

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Actividad 1. Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el primer bimestre y que no fueron entregadas.

Actividad 2. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 3. Suba el archivo del documento al EVA caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.

Actividad 4. Revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello, considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y.
- Evaluaciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del primer bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero:

1. Revise cada uno de los conceptos estudiados en las tres unidades planificadas y desarrolladas en este primer bimestre.

2. Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.

3. Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

Nota. Conteste las actividades en un cuaderno de apuntes o documento word.

¡Lo estás haciendo muy bien!

¡Sigue adelante!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

- Emplea los principios y algoritmos de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, y las escalas logarítmicas para el modelado y resolución de problemas del entorno natural y social.

Las ecuaciones exponenciales y logarítmicas son esenciales en ciencias e ingeniería para modelar procesos y fenómenos, y las escalas logarítmicas son útiles en geología, astronomía y medicina. Comprender estos conceptos ayuda a resolver problemas en áreas como la población, enfermedades y medio ambiente, y permite hacer predicciones y tomar decisiones informadas.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

¡Estimados estudiantes!

Semana 9

Bienvenidos al segundo bimestre del curso de **Sistemas de conocimiento de funciones exponenciales y logarítmicas y su didáctica**, en esta segunda parte del periodo académico ordinario, profundizaremos los conocimientos sobre ecuaciones exponenciales y ecuaciones logarítmicas.

Con estos conocimientos, se facilitará la comprensión de la pedagogía y aplicación de la didáctica y estaremos en condiciones de generar aprendizajes significativos en nuestros estudiantes, cuando en el futuro actúen como docentes, de manera que puedan resolver situaciones de la vida real aplicando la modelización.

Estimados estudiantes, iniciaremos definiendo lo que significa una ecuación exponencial, para esto vale recordar que se denomina ecuación a toda igualdad en donde existe una variable desconocida, la cual generalmente se la conoce como incógnita.

4.1. ¿A qué llamamos ecuación exponencial?

Una ecuación exponencial es aquella en la cual, la variable aparece en el exponente. Algunas ecuaciones exponenciales se pueden resolver usando el hecho de que las funciones exponenciales son uno a uno, esto significa que:

$$a^x = a^y$$

$$\Rightarrow x = y$$

(Stewart et al. 2017, p. 360).

Para resolver una ecuación exponencial debemos tener en cuenta las propiedades de las potencias:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
4. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
5. $a^m . a^n = a^{m+n}$
6. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
7. $(a^m)^n = a^{m.n}$
8. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Para comprender de mejor manera estudiemos el siguiente ejemplo, en el cual se analiza la igualdad de dos potencias y aprovechando que las funciones exponenciales son uno a uno, se igualan los exponentes.

Ejemplo ilustrativo 1. Resolvamos la ecuación **2^x =16.**

$$2^x = 16 \text{ Ecuación dada}$$
$$2^x = 2^4 \text{ Sabemos que } 16 = 24$$
$$x = 4 \text{ Propiedad uno a uno}$$

La ecuación por la que empezamos es un ejemplo básico de una igualdad entre una expresión exponencial y un número entero que puede escribirse como una potencia con la misma base que la exponencial. Teniendo en cuenta que, dos potencias con la misma base son iguales, si y solamente si, sus exponentes son iguales.

4.2. ¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial?

Para resolver una ecuación exponencial básica, igualamos las dos potencias con la misma base, concluyendo que los exponentes de potencias con bases iguales serán iguales, en donde la incógnita será uno de los exponentes.

Pero, si el número entero que forma parte de un miembro de dicha igualdad, no se puede expresar como una potencia con la misma base, aplicamos logaritmos a los dos lados de la ecuación y la respectiva propiedad que permitirá despejar la variable del exponente.

Este proceso se explica en el siguiente tema.

4.3. ¿Cuál es la guía para resolver ecuaciones exponenciales?

1. Despeje la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y después use las leyes de logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable (Stewart, et al, 2017, p. 361).

   Resolvamos los siguientes ejemplos aplicando la guía propuesta en el **texto básico.**

- **Ejemplo ilustrativo 2**. Resolvamos la ecuación exponencial.

$$10^{2x-3} = \frac{1}{10}$$

$10^{2x-3} = \frac{1}{10}$ Ecuación dada
$10^{2x-2} = 10^{-1}$ Escribimos en forma exponencial
$2x - 2 = -1$ En potencias iguales, los exponentes son iguales

$2x - 2 + 2 = -1 + 2$ Sumamos 2 a cada lado
$\frac{2x}{1} = \frac{1}{2}$ Dividimos para 2
$x = \frac{1}{2}$ **Solución**

- **Ejemplo ilustrativo 3.** Otro caso en donde el exponente es una expresión algebraica: $2^{2x-1} = 4$

$2^{2x-1} = 4$ Ecuación dada
$2^{2x-1} = 2^2$ Escribimos en forma exponencial
$2x - 1 = 2$ Igualamos los exponentes
$2x - 1 + 1 = 2 + 1$ Sumamos 1 a cada lado
$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$ Dividimos para 2
$x = \frac{3}{2}$ **Solución**

Para comprender de mejor manera las ecuaciones exponenciales le invito a que:

- Lea el **texto básico páginas 360-363.**
- Mire atentamente el video sobre la resolución de ecuaciones exponenciales.

En este video encontramos la definición de ecuación exponencial, se explica la solución de ecuaciones básicas y cuadráticas, aplicando las propiedades de las potencias, y también utiliza el cambio de variable; los ejercicios son variados y suficientes para su ilustración. Mientras que, en el **texto básico** usted encontrará la fundamentación teórica básica para su aprendizaje y comprensión de conceptos sobre la resolución de las ecuaciones exponenciales.

Actividad de aprendizaje recomendada

Una vez revisados los contenidos de esta semana y para profundizar sus conocimientos, le invito a realizar la siguiente actividad recomendada:

Nota. Resuelva los ejercicios en un cuaderno de apuntes o utilice alguna herramienta digital.

- Encuentre la solución de las ecuaciones exponenciales del 3 al 10, **página 368 del texto básico.**

Recuerde que a través del *chat* de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Semana 10

4.4. ¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial de manera algebraica?

Para comprender con mayor claridad la resolución de ecuaciones exponenciales aplicando el método algebraico, resolvamos los siguientes ejercicios:

- **Ejemplo ilustrativo 4.** Resolvamos la ecuación en donde se logra una igualdad de potencias de la misma base: $\mathbf{2^{x+2} = 16}$.

$2^{x+2} = 16$ Ecuación dada

$2^{x+2} = 2^4$ Escribimos en forma exponencial

$x + 2 = 4$ Simplificamos las bases iguales

$x + 2 - 2 = 4 - 2$ Restamos 2 a cada lado

$x = 2$ **Solución**

- **Ejemplo ilustrativo 5.** En esta ecuación hacemos un reemplazamiento.

Hacemos el cambio de variable

$t_1 = 3^x$
$9 = 3^x$

$3^2 = 3^x$ Escribimos en forma exponencial
$x = 2$ **Solución**
$t_2 = 3^x$
$-12 = 3^x$ No es solución porque es negativa y la potencia de 3 es positiva
$3^{2x-2} + 3^{x-1} = 12$ Ecuación dada
$\frac{(3^x)^2}{3^2} + \frac{3^x}{3} = 12$ Se pasa a forma exponencial aplicando propiedades
$t = 3^x$ Aplicamos el cambio de variable
$t^2 = (3^x)^2$
$\frac{t^2}{3^2} + \frac{t}{3} = 12$
$t^2 + 3t - 108 = 0$ Resolvemos aplicando la fórmula general
$a = 1$
$b = 3$
$c = -108$
$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-108)}}{2(1)}$
$t = \frac{-3 \pm 21}{2}$
$t_1 = \frac{-3+21}{2}$
$t_1 = 9$
$t_2 = \frac{-3-21}{2}$
$t_2 = -12$

- **Ejemplo ilustrativo 6.** En esta ecuación también se ilustra el reemplazo de variables.

$2^{2x} + 4^{x-1} + 44 = 2^{2x+2}$ Ecuación dada
$2^{2x} + 4^{x}\left(4^{-1}\right) + 44 = 2^{2x}\left(2^{2}\right)$ Escribimos en forma exponencial
$2^{2x} + \frac{2^{2x}}{4} + 44 = 2^{2x}(4)$
$t = 2^{x}$ Aplicamos el cambio de variable
$t^2 = 2^{2x}$
$t^2 + \frac{t^2}{4} + 44 = 4t^2$
$t^2 + \frac{t^2}{4} - 4t^2 = -44$ Factor común
$t^2\left(1 + \frac{1}{4} - 4\right) = -44$ Sumamos
$t^2\left(-\frac{11}{4}\right) = -44$
$t^2 = 16$
$t_1 = 4$
$t_2 = -4$
$t = 2^{x}$ Aplicamos el cambio de variable
$2^2 = 2^x$
$x = 2$ Solución

$t_2 = -4$ No es solución por ser negativa
Verificamos si la solución satisface la ecuación
$2^{2x} + 4^{x-1} + 44 = 2^{2x+2}$
$2^{2(2)} + 4^{2-1} + 44 = 2^{2(2)+2}$
$64 = 64$

- **Ejemplo ilustrativo 7.**

Ejemplo ilustrativo 7. Resolvamos la ecuación $4e^{x} - \frac{5}{e^{x}} + e^{x} = 0$.

$4e^{x} - \frac{5}{e^{x}} + e^{x} = 0$ Ecuación dada
$4e^{x}\left(e^{x}\right) - \frac{5}{e^{x}}\left(e^{x}\right) + e^{x}\left(e^{x}\right) = 0\left(e^{x}\right)$ Multiplicamos por e^{x}
$4e^{2}x - 5 + e^{2x} = 0$ Sumamos términos semejantes
$5e^{2x} - 5 = 0$
$5e^{2x} - 5 + 5 = 0 + 5$ Sumamos 5 en ambos lados
$5e^{2x} = 5$
$\frac{5e^{2x}}{5} = \frac{5}{5}$ Dividimos para 5 en ambos lados
$e^{2x} = 1$
$e^{2x} = e^{0}$ Sustituimos $e^{0} = 1$
$2x = 0$ Despejamos x
$x = 0$ Solución

4.5. ¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial gráficamente?

Para resolver ecuaciones exponenciales de manera gráfica, primero se representa gráficamente la ecuación, se identifica la intersección de la gráfica con el eje x, siendo estos puntos las soluciones, resolvamos los siguientes ejercicios:

- **Ejemplo ilustrativo 8.** Resolvamos gráficamente la ecuación: $3^x = 27$

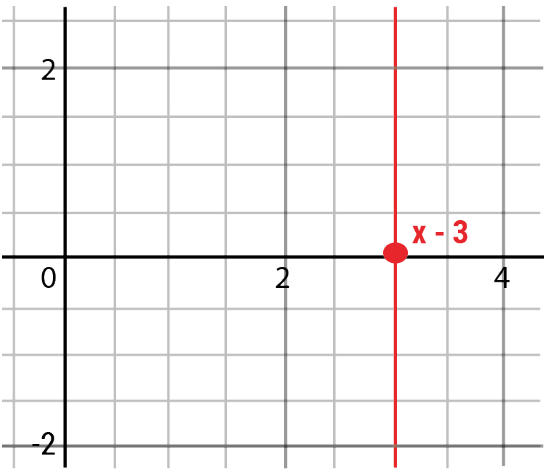
  Verificamos si la solución satisface la ecuación

$$
\begin{aligned}
&4e^x - \frac{5}{e^x} + e^x = 0\\
&4e^0 - \frac{5}{e^0} + e^0 = 0\\
&4(1) - \frac{5}{1} + 1 = 0\\
&4 - 5 + 1 = 0\\
&0 = 0
\end{aligned}
$$

Primero, graficamos la ecuación.

Figura 14.

Gráfica de la ecuación $3^x = 27$



Nota. Guerrero, R., 2023.

La gráfica de la ecuación es una recta que corta al eje X en (3, 0)

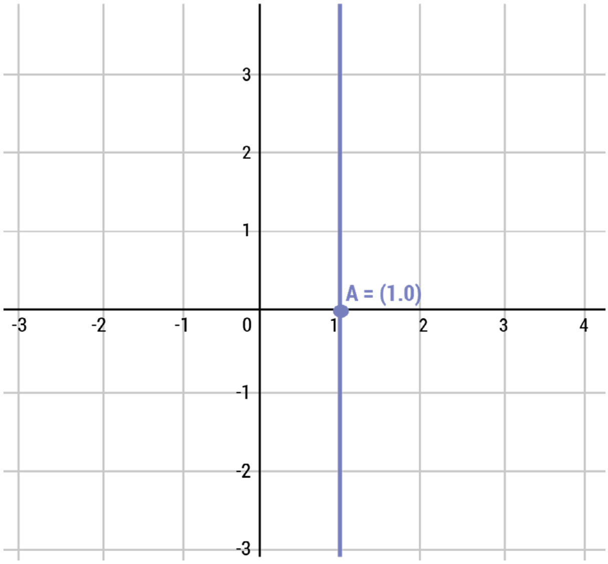
La solución de la ecuación es *x=3*

- **Ejemplo ilustrativo 9.**

Resolvamos gráficamente la ecuación: $7^{x-1} = 49^{x-1}$

Primero graficamos la ecuación dada:

Figura 15.
Gráfica de la ecuación $7^{x-1} = 49^{x-1}$



Nota. Guerrero, R., 2023.

La gráfica es una recta que corta al eje X en el punto (1,0)

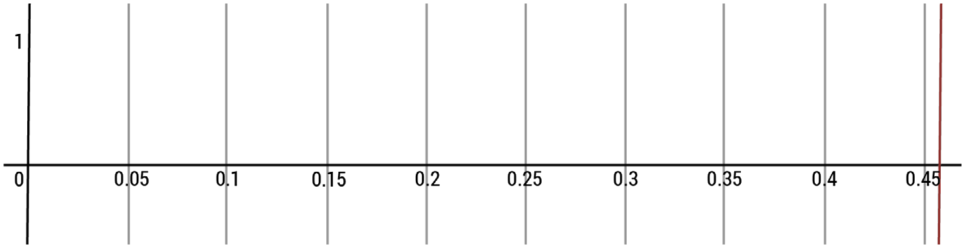
La solución de la ecuación es x = 1.

- **Ejemplo ilustrativo 10.** Grafiquemos la ecuación $8e^{2x} = 28$ y determinemos la solución.

Primero graficamos la ecuación:

Figura 16.

Gráfica de la ecuación $8e^{2x} = 28$



Nota. Guerrero, R., 2023.

La gráfica es una recta que corta al eje X aproximadamente en el punto (0,458; 0).

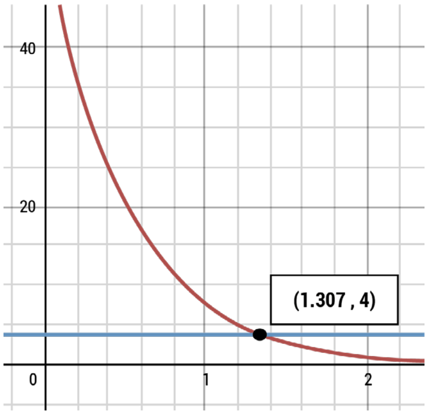
La solución de la ecuación es aproximadamente x =0,458

- **Ejemplo ilustrativo 11.** Resolvamos el sistema de ecuaciones Graficamos las dos ecuaciones en un mismo sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} y = e^{4-2x} \\ y = 4 \end{cases}$$

Figura 17.

Gráfica de la ecuación y = e^{4-2x} y $Y = 4$



Nota. Guerrero, R., 2023.

La solución del sistema de ecuaciones es el punto (1,307; 4)

Los procesos desarrollados en esta guía o en el **texto básico** no son para memorizar, son otra manera de resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, usted tiene la libertad de desarrollar el método que sea más eficaz, con esto espero que desarrollen la capacidad de razonar y encontrar con autonomía el método más eficiente. En la actualidad, contamos con calculadoras con pantalla gráfica, páginas de *Internet* como *Symbolab* y programas informáticos como Excel, entre otros, que nos facilitan la solución de ecuaciones.

Para comprender de mejor manera cómo resolver ecuaciones con logaritmos, le invito a que:

- Lea el **texto básico páginas 363-367.**
- Mire atentamente el video del profesor Miguel sobre ecuaciones con logaritmos.

Las ecuaciones exponenciales son aquellas cuya incógnita se encuentra en el exponente de una o varias potencias. Para resolverlas tenemos que intentar igualar dos potencias que tengan la misma base. Si conseguimos la misma base, hallar el valor de la incógnita es tan sencillo como igualar los exponentes para hallar su valor.

Si no conseguimos la misma base, realizaremos un cambio de variable que nos ayudará a simplificar nuestra ecuación para poder resolverla de una manera más sencilla. En este vídeo aprenderás el proceso para realizar las Ecuaciones Exponenciales con varios ejemplos de diferente dificultad cada uno. Para realizar estas ecuaciones es necesario emplear muy bien las propiedades de las potencias.

Estimado/a estudiante, para profundizar sus conocimientos, le recomiendo realizar la siguiente actividad:

Actividad de aprendizaje recomendada

- Encuentre la solución de las ecuaciones exponenciales del 11 al 76 los impares, de la pág. 368 del texto básico.

  Nota. Resuelva los ejercicios en un cuaderno de apuntes o utilice alguna herramienta digital.

Recuerde que a través del *chat* de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Semana 11

Ecuaciones logarítmicas

4.6. ¿A qué llamamos ecuación logarítmica?

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en las que la incógnita o variable aparece afectada por un logaritmo.

$$\log_a x = \log_a y \;\Rightarrow\; x = y$$

Al momento de resolver este tipo de ecuaciones, conviene tener presente la definición de logaritmo: $x = \log_a b \;\Rightarrow a^x = b$,, con lo cual se puede expresar como una igualdad de potencias.

Además, para resolver ecuaciones logarítmicas, es conveniente tener en cuenta las propiedades de los logaritmos:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^n = n\ \log_a a$
4. $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a (x^n) = n\ \log_a x$
7. $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$

Con la finalidad de interiorizar y lograr experticia en la aplicación de las propiedades de logaritmos, es conveniente desarrollar algunos ejercicios.

- **Ejemplo ilustrativo 12.** Determinemos la solución de la ecuación $2^{2x-2} = 20$

$2^{2x-2} = 20$ Ecuación dada
$\log 2^{2x-2} = \log 20$ Aplicamos logaritmos
$(2x-2)\log 2 = \log 20$ Propiedad 3 de logaritmos
$(2x-2) = \frac{\log 20}{\log 2}$ Despejamos x
$x = \frac{4{,}32+2}{2}$
$x = 3,16$ **Solución**

Utilizando la calculadora encontramos la aproximación decimal de la ecuación **x = 3,16**

- **Ejemplo ilustrativo 13.** Encontremos la solución de la ecuación. **300(1,025)^{12t} =1000**

$300(1,025)^{12t} = 1000$ Ecuación dada
$\frac{300(1{,}025)^{12t}}{300} = \frac{1000}{300}$ Dividimos para 300 en ambos lados
$(1,025)^{12t} = \frac{10}{3}$
$\log(1,025)^{12t} = \log\frac{10}{3}$ Aplicamos logaritmos
$12t.\log 1,025 = \log\frac{10}{3}$ Aplicamos la propiedad 3 de logaritmos
$12t = \frac{\log\frac{10}{3}}{\log 1{,}025}$
$t = \frac{\frac{\log\frac{10}{3}}{\log 1{,}025}}{12}$
$t = 4,06$ **Solución**

Utilizando la calculadora encontramos la aproximación decimal de la ecuación **x = 4,06**

4.7. Cómo se resuelve una ecuación logarítmica algebraicamente?

Para comprender este proceso resolvamos el siguiente ejercicio:

- **Ejemplo ilustrativo 14.** Encontremos la solución de la ecuación.

  $\log x + \log(x-1) = \log(4x)$

  $\log x + \log(x-1) = \log(4x)$ Ecuación dada
  $x(x-1) = 4x$ Aplicamos la propiedad 4 de logaritmos
  $x^2 - x - 4x = 4x - 4x$ Restamos $4x$ a los dos lados
  $x^2 - 5x = 0$
  $x(x-5) = 0$ Extraemos el factor común
  $x = 0$ Solución 1
  $x - 5 = 0$
  $x - 5 + 5 = 0 + 5$
  $x = 5$ Solución 2

Las posibles soluciones de la ecuación son **x = 0 y x = 5**

Verificamos las soluciones en la ecuación original. 0 no es solución de la ecuación porque log (0) no está definido, debido a que x necesariamente tiene que ser mayor que 0, por cuanto, no hay logaritmo de 0 sea cualquiera que sea su base.

$$\log x + \log(x-1) = \log(4x)$$
$$\log 5 + \log(5-1) = \log(4)(5)$$
$$\log 5 + \log 4 = \log 20$$
$$\log 20 = \log 20$$
$$20 = 20$$

La solución de la ecuación es **x = 5**

¿Cómo se resuelve una ecuación logarítmica gráficamente?

Para comprender este proceso resolvamos los siguientes ejercicios:

- **Ejemplo ilustrativo 15.** Determinar la solución de la ecuación.

  log (x+6) - log (2x - 1) = 0

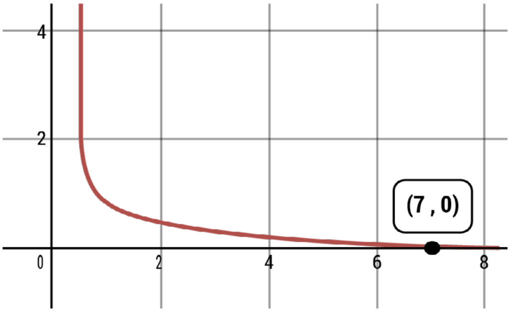
$\log(x+6) - \log(2x-1) = 0$ Ecuación dada

$y = \log(x+6) - \log(2x-1)$ Expresamos en la forma

$y = mx + c$

Figura 18.

Gráfica de la ecuación log(x+6)-log (2x-1) =0



Nota. Guerrero, R., 2023.

La gráfica de la ecuación corta al eje X en el punto (7, 0), por lo tanto, la solución de la ecuación es **x=7.**

- Ejemplo ilustrativo 16. Resolvamos gráficamente la ecuación **2 log x - log 4x = -2**

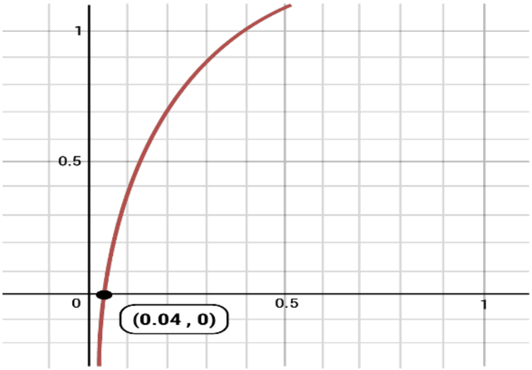
$2\log x - \log 4x = -2$ Ecuación dada

$y = 2\log x - \log 4x + 2$ Expresamos en la forma

$y = mx + c$

Graficamos la ecuación:

Figura 19.
Gráfica de la ecuación ***2 log x - log 4x = -2***



Nota. Guerrero, R., 2023.

La gráfica de la ecuación corta al eje X en el punto (0,04; 0), por lo tanto, la solución de la ecuación es **x= 0,04.**

Al resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, usted tiene la libertad de desarrollar el método que sea más eficaz, y se espera que luego desarrollen en sus alumnos la capacidad de razonar y encontrar el método más eficiente. En la actualidad, contamos con calculadoras con pantalla gráfica, páginas de *Internet* como *Symbolab* y programas informáticos como Excel, entre otros, que nos facilitan la solución de ecuaciones.

Para comprender de mejor manera como resolver ecuaciones con logaritmos le invito a que:

- Lea el **texto básico páginas 365-367.**
- Mire atentamente el video sobre la aplicación de las ecuaciones logarítmicas.

En el video anterior se define la función logarítmica y explica con claridad los procesos de resolución de ecuaciones logarítmicas. Además, en el texto básico, disponemos de la teoría suficiente y necesaria para fundamentar el proceso de resolución de ejercicios y se cuenta con suficientes ejercicios ilustrados a partir de una gráfica, culminando con algunas aplicaciones muy importantes.

Actividad de aprendizaje recomendada

Estimado/a estudiante, para profundizar sus conocimientos le invito a que realice la siguiente actividad de aprendizaje:

- Encuentre la solución de las ecuaciones exponenciales del 11 al 76 los impares. **Pág. 368 del texto básico.**

> **Recuerde que** a través del *chat* de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Semana 12

4.8. Aplicación de las ecuaciones logarítmicas al interés compuesto

Aplicación de ecuaciones logarítmicas

La utilidad de aplicar ecuaciones logarítmicas, principalmente cuando sirven de apoyo en la resolución de las ecuaciones exponenciales, así como también cuando se requiere modelar algunas relaciones entre la intensidad luminosa y la transparencia de los cuerpos.

- **Ejemplo ilustrativo 17.** Encontremos la intensidad de la luz a una profundidad de 6 metros en un lago cuya intensidad luminosa fuera del mismo es $\mathbf{I}_0$= 15 Lumens (lm) y una constante k = 0.03

Aplicamos la Ley de Beer-Lambert

$$x = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$-kx = \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx}$$
$$I = I_0 \,.\, e^{-kx}$$
$$I = 15\ lm.\, e^{(-0.03)(6m)}$$
$$I = 12,53\ lm$$

La intensidad de la luz a una profundidad de 6 metros en dicho lago es de aproximadamente 12,53 lm.

- **Ejemplo ilustrativo18.** Un lago se contaminó con dicloro difenil tricloroetano DDT. La acción natural de las bacterias hace que el nivel de DDT disminuya en un 10 % en 7 años. No es posible volver a tener peces en el lago hasta que el nivel de DDT sea menor que un 50 % del nivel actual. ¿Cuándo volverá el lago a ser habitable? Asumamos un comportamiento exponencial de la concentración de DDT.

Datos

t= 7 años
k=?

La constante de velocidad de descomposición a partir de los datos:

$$Q\,(t) = Q_0 e^{-kt}$$
$$Q(7) = 0.9Q_0$$
$$0.9Q_0 = Q_0 e^{-7k}$$
$$0.9 = e^{-7k}$$
$$\ln 0.9 = -7k$$
$$-0.1054 = -7k$$
$$k = 0.01505$$

Ahora calculamos para cuando la concentración de DDT sea un 50 % de la actual:

$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$
$Q(50) = 0.5Q_0$
$0.5Q_0 = Q_0 e^{-0.01505t}$
$0.5 = e^{-0.01505t}$
$\ln 0.5 = -0.01505t$
$-0.693 = -0.01505t$
$k = 46$

El lago volverá a ser habitable cuando pasen aproximadamente 46 años.

Aplicación de ecuaciones logarítmicas en el cálculo del interés compuesto

Recordemos las ecuaciones exponenciales para calcular el interés compuesto:

$A = P(1 + r)$ Interés simple para un año
$A_{(t)} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ Interés capitalizado n veces por año
$A_{(t)} = Pe^{rt}$ Interés capitalizado continuamente

Donde

A = Capital final.
P = Capital inicial r = Tasa de interés.
n = Periodo de ahorro.
(Stewart, et al. 2017, p. 366).

- **Ejemplo ilustrativo 19**. ¿Cuánto dinero tendré en 6 meses si deposito en una entidad financiera la cantidad de $ 100 000 a un 7 % efectivo anual?

$A_{(t)} = \$\ 100\,000$
$P = ?$
$r = 7\,\%$
$n = 1$
$t = 6 \text{ meses} = \frac{6}{12} = 0,5 \text{ años}$
$A_{(t)} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}$
$A_{(t)} = 100000\left(1 + \frac{0.07}{1}\right)^{\frac{6}{12}}$
$A_{(t)} = 103440,8$

El capital final que obtendré es $ 103, 440,8

- **Ejemplo ilustrativo 20.** ¿Cuánto dinero debe depositarse en el banco si se desea acumular un monto de en un plazo de 3 años; la tasa de interés es de 8 % convertible mensualmente?

$$A_{(t)} = \$\ 500\,000$$
$$P = ?$$
$$r = 8\ \%\ \text{mensual}$$
$$n = 1$$
$$t = 3\ \text{años} = 36\ \text{meses}$$
$$A_{(t)} = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$500000 = P\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{36}$$
$$P = \frac{500000}{1{,}2702}$$
$$P = 393638.8$$

El capital inicial que debe depositar en el banco es $ 393, 638,8

- **Ejemplo ilustrativo 21.** ¿En qué tiempo un capital de $ 200 000 a una tasa del 2 % trimestral ascenderá a $ 500000?

$$A_{(t)} = \$\ 500\,000$$
$$P = \$\ 200\,000$$
$$r = 2\ \%\ \text{trimestral}$$
$$n = 1$$
$$t = ?$$

$$A_{(t)} = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$\frac{A}{P} = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$\log\left(\frac{A}{P}\right) = nt\ \log\left(1+\frac{r}{n}\right)$$
$$t = \frac{\log\left(\frac{A}{P}\right)}{n\ \log\left(1+\frac{r}{n}\right)}$$
$$t = \frac{\log\left(\frac{500000}{200000}\right)}{(1)\log\left(1+\frac{0.02}{1}\right)}$$
$$t = 46,27$$

El tiempo que se demora en obtener $ 500,000 es de 46,27 trimestres; aproximadamente 12 años.

- **Ejemplo ilustrativo 22.** ¿A qué tasa de interés un capital quintuplica su valor en 10 años?

$$A_{(t)} = 5x$$
$$P = x$$
$$r = ?$$
$$n = 1$$
$$t = 10 \text{ años}$$

$$5x = x\left(1 + \frac{r}{1}\right)^{10(1)}$$
$$5 = (1 + r)^{10}$$
$$\sqrt[10]{5} = \sqrt[10]{(1 + r)^{10}}$$
$$\sqrt[10]{5} = 1 + r$$
$$r = \sqrt[10]{5} - 1$$
$$r = 0.17$$
$$r = 17\,\%$$

El interés es del 17%

El interés es del 17 %

Para comprender de mejor manera la aplicación de ecuaciones logarítmicas en el cálculo del interés compuesto le invito a que:

- Lea el **texto básico páginas 363 a 366.**
- Mire atentamente el video del Profe Alex sobre el cálculo del interés compuesto.

En este video se aprecia de manera didáctica el proceso de resolución de problemas de interés compuesto aplicando las propiedades de los logaritmos. En el texto básico se encuentran algunos ejemplos ilustrados de la aplicación de los logaritmos en operaciones de interés compuesto. Así mismo, se proponen una variedad de problemas para que usted se prepare para las evaluaciones.

Ahora, para profundizar sus conocimientos y prepararse adecuadamente para la evaluación parcial, le sugiero que realice las siguientes actividades de aprendizaje:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Encuentre la solución de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas de las páginas 368 y 369, los números impares, del 11 al 87.

2. Resuelva los problemas de aplicación de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, los números impares del 89 al 105 que se proponen en las **páginas 369 y 370 del texto básico.**

   Nota. Resuelva los ejercicios en un cuaderno de apuntes o utilice alguna herramienta digital.

> **Recuerde que** a través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

3. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las **ecuaciones exponenciales y logarítmicas**, es recomendable que usted realice la siguiente autoevaluación de lo aprendido en la unidad, para retroalimentar con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes que le causaron dificultad.

Autoevaluación 6

Instrucción: seleccione la alternativa correcta, en caso de que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

1. La solución de la ecuación $5^{x-1} = 125$, es:

   a. x= 2.
   b. x= 3.
   c. x= 4.

2. La solución de la ecuación $10^{2x^2-3} = 10^{9-x^2}$ es:

   a. $x_1=-2$ y $x_2=2$.
   b. $x_1=-3$ y $x_2=3$.
   c. $x_1=-4$ y $x_2=4$.

3. La solución de la ecuación 10 $(1{,}375)^{10t} = 0$ es:

   a. x = 0,7.
   b. x = 0,6.
   c. x = $-\infty$.

4. La solución de la ecuación 1- $e^{4x+1} = 0$ es:

   a. x=0,286110.
   b. x = 0,386110.
   c. x = $-\frac{1}{4}$.

5. La solución de la ecuación $e^{2x} - e^{x-6} = 0$ es:

   a. x = 1,099.
   b. x = 2, 099.
   c. x = 3,099.

6. La solución de la ecuación log_5(x)+$log_5(x+1)$=$log_5(20)$

   a. 4.
   b. 3.
   c. 2.

7. La solución de la ecuación log3 (2-x) = 3 es:

   a. -15.
   b. -25.
   c. 35.

8. La solución de la ecuación $log\, log\ (10)\ = x^2 - 2$ es.

   a. 1,805.
   b. 2,209.
   c. $\sqrt{3}$.

9. La solución de la desigualdad 3≤ log2x ≤ 4es:

   a. 8≤ x ≤16.
   b. -8≤ x ≤16.
   c. 8≤ x ≤-16.

10. La solución de la ecuación log(x^3) = 10, es:

   a. x = 2254.43.
   b. x = 2154.43.
   c. x = 2354.43.

Ir al solucionario

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Semana 13

Unidad 5. Modelado con funciones exponenciales

Para iniciar esta unidad vamos a desarrollar un proyecto sencillo de crecimiento exponencial.

Materiales

- 250 gramos de harina de trigo.
- 25 gramos de levadura.
- 3 cucharaditas de sal.
- 2 cucharaditas de azúcar 50 ml de aceite.
- 1 taza de agua.

Figura 20.
Cómo crece una población de levaduras

Nota. Tomado de *¿Cómo crece una población de levaduras?* [Fotografía], por Didactalia, 2012, didactalia.net. CC BY 2.0

Procedimiento

1. En un recipiente mezcle los ingredientes y bata hasta obtener una masa homogénea, anote la hora y la primera medición de la altura de la masa, luego registre las mediciones de la altura cada 5 minutos durante una hora.

2. Con estos datos elabore la gráfica y determine la función exponencial.

3. Comparta los resultados con sus compañeros y docente.

5.1. Crecimiento exponencial y el tiempo de duplicación

Crecimiento poblacional

Si el tamaño inicial de una población es n_0 y el tiempo de duplicación es, entonces el tamaño de la población en el tiempo t es.

$$n(t) = n_0 t^{\frac{t}{a}}$$

Donde y se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etc.).

Para comprender este proceso resolvamos los siguientes ejercicios:

- **Ejemplo ilustrativo 23.** La población de un virus se multiplica por 10 cada hora, partiendo de 5 individuos. ¿En cuánto tiempo se alcanzarán los 100 000 individuos?

  $n(t) = n_0 t^{\frac{t}{a}}$
  $100000 = 5(10)^t$
  $20000 = 10^t$
  $\log 20000 = t \ \log 10$
  $t = \frac{\log 20000}{\log 10}$
  $t = 4,3$ horas

  El tiempo que se demorará en alcanzar 100 000 individuos es de 4 horas y 18 minutos.

- **Ejemplo ilustrativo 24.** Cada hora se elimina un 30 % de la cantidad de alcohol en la sangre. Partiendo de 2g/L. ¿Cuánto tardará en descender la cantidad de alcohol de 0,2 g/L?

Cantidad eliminada 1 hora = Cantidad inicial x (30/100) Cantidad tras 1 hora = Cantidad inicial x (70/100).

$$r = \frac{70}{100}$$
$$r = 0.7$$

$$n(t) = n_0 t^{\frac{t}{a}}$$
$$0,3 = 2(0.7)^t$$
$$0.15 = (0.7)^t$$
$$\log 0.15 = t \ \log 0.7$$
$$t = \frac{\log 0.15}{\log 0.7}$$
$$t = 5,32 \text{ horas}$$

El tiempo que se demorará en eliminarse el alcohol es de 5 horas y 19 minutos.

5.2. Crecimiento exponencial y tasa de crecimiento relativa

- **Ejemplo ilustrativo 25.** Un pueblo tiene 1000 habitantes y su población crece anualmente un 5 % ¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 10 años?

$$P(t) = P_0(1+i)^{\frac{t}{a}}$$
$$P(t) = 1000(1+0.05)^{10}$$
$$P(t) = 1628,89 \text{ habitantes}$$

La población en 10 años será aproximadamente de 1629 habitantes.

5.3. Desintegración radioactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación espontáneamente. La rapidez de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Esto es similar al crecimiento poblacional excepto que la masa decrece. Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de vida media (Stewart et al. 2017, p. 375).

- **Ejemplo ilustrativo 26.** Se tiene una muestra inicial de $\mathbf{2{,}0x10}^{15}$ núcleos de polonio-210 o radio F con un período de semidesintegración de 138, días.

  a. ¿Cuánto vale la constante radiactiva del polonio?
  b. ¿Cuál será su actividad inicial?
  c. ¿Cuál será su actividad al cabo de 1000 días?

$N_0 = 2\,x\,10^{15}$ núcleos

$T_{\frac{1}{2}} = 138$ días

a.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{138}$$
$$\lambda = 5\,x\,10^{-3} \text{ días}^{-1}$$

b.

$$T_{\frac{1}{2}} = 138\,dias\,\frac{24\,horas}{1\,dia}\cdot\frac{3600\,seg}{1\,hora}$$
$$T_{\frac{1}{2}} = 11923{,}200\,seg$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{11923{,}200\,seg}$$
$$\lambda = 5{,}81\,x\,10^{-8}\,s^{-1}$$

$$A_0 = \lambda\,N_0$$
$$A_0 = 5{,}81\,x\,10^{-8}\,s^{-1}\,(2\,x\,10^{15}\text{ r}$$
$$A_0 = 1{,}16\,x\,10^{8}\text{ núcleos/seg}$$

c.

$$A = A_0 e^{\lambda T}$$
$$A = 1{,}16\,x\,10^{8}\,\frac{nucleos}{seg}\,e^{(5\,x\,10^{-8})}\,dias^{-1}\,(1000\,dia$$
$$A = 7{,}81\,x\,10^{5}\text{ núcleos/seg}$$
$$A = 7{,}81\,x\,10^{5}\,Bq$$

5.4. Ley de Newton enfriamiento

La ley de Newton de enfriamiento asegura que, la rapidez a la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno, siempre que la diferencia de temperatura no sea demasiado grande. Mediante cálculo el siguiente modelo puede ser deducido a partir de esta ley.

Si D_0 es la diferencia inicial de temperatura entre un cuerpo y su entorno tiene temperatura, T_1 entonces la temperatura del cuerpo en el tiempo está modelada por la función.

$$T(t) = T_1 + D_0 e^{-kt}$$

Donde k es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo.

5.5. Sistematización del crecimiento exponencial y el tiempo de duplicación

Con la finalidad de prepararnos para la evaluación parcial de esta semana, se recomienda sistematizar lo estudiado en la unidad de Modelado con funciones.

Primero, recordando que: Si el tamaño inicial de una población es n_0 y el tiempo de duplicación es, $\frac{t}{a}$, entonces el tamaño de la población en el tiempo ***t* es**.

$$n(t) = n_0 t^{\frac{t}{a}}$$

Donde **a y t** se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etc.).

Para comprender este proceso resolvamos los ejercicios suficientes para aclarar y alcanzar experticia en la interpretación del modelado.

5.6. Sistematización del crecimiento exponencial y tasa de crecimiento relativa

En cuanto al crecimiento exponencial y la tasa de crecimiento relativa, se recomienda que usted considere que una población que experimenta un crecimiento exponencial aumenta de acuerdo con el modelo:

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

Al respecto, se debe considerar que la fórmula para el crecimiento poblacional es la misma que para el interés capitalizado continuamente. Sobre este concepto, se recomienda desarrollar suficientes ejercicios para su estudio.

5.7. Sistematización de la desintegración radioactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación espontáneamente. La rapidez de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Esto es similar al crecimiento poblacional excepto que la masa decrece. Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de vida media (Stewart et al. 2017, p. 375). En general, para una sustancia radioactiva con masa m_0 y vida media h, la cantidad restante en el tiempo t está modelado por:

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{h}}.$$

Sobre estos conceptos conviene puntualizar que, para expresar este modelo en la forma **m (t) = m0e**^{rt}, necesitamos encontrar la tasa relativa de desintegración **r**.

5.8. Sistematización de ley de Newton de enfriamiento

La ley de Newton de enfriamiento dice que la rapidez a la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno, siempre que la diferencia de temperatura no sea demasiado grande. Mediante cálculo el siguiente modelo puede ser deducido a partir de esta ley.

Si $\mathbf{D_0}$ es la diferencia inicial de temperatura entre un cuerpo y su entorno tiene temperatura $\mathbf{T_1}$, entonces la temperatura **T** del cuerpo en el tiempo **t** está modelada por la función:

$$T(t) = T_1 + D_0 e^{-kt}$$

Donde **k** es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo.

Para comprender de mejor manera la modelación con ecuaciones exponenciales le invito a que:

- Lea el **texto básico** y realice una síntesis de las páginas 370-374.
- Mire atentamente el video sobre el modelado aplicando funciones exponenciales y logarítmicas:

En el video podemos observar cómo se resuelven problemas aplicando funciones exponenciales y logarítmicas, ilustraciones válidas para su aprendizaje, mientras que, en el texto básico, se proponen suficientes problemas desarrollados y otros planteados para su estudio.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar sus conocimientos:

1. Resuelva y explique los problemas pares del 1 al 28, **página 379-381 del texto básico.**

   Nota. Resuelva los ejercicios en un cuaderno de apuntes o utilice alguna herramienta digital.

Recuerde que a través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de el Modelado **con funciones exponenciales**, es recomendable que usted realice la siguiente autoevaluación de lo aprendido en la unidad, para luego retroalimentar con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes que le causaron dificultad.

Autoevaluación 7

Instrucción: seleccione la alternativa correcta, en caso de que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

1. Cierto cultivo de bacterias Streptococcus A inicialmente tiene 10 bacterias y se observa que se duplica cada 1.5 horas. Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 . 2^{\frac{t}{a}}$ para el número de bacterias en el cultivo después de t horas; Estime el número de bacterias después de 35 horas; ¿d espués de cuantas horas llegará a 10 000 el número de bacterias?

   a. El modelo es $n(t) = 10.2^{\frac{t}{1.5}}$ el número de bacterias después de 35 horas es $1{,}056x10^8$ *y el tiempo es de 16 horas*
   b. El modelo es n(t) = 10 [2(1/2h)], el número de bacterias después de 35 horas es 10.56x107*y el tiempo es de 14 horas*
   c. El modelo es n(t) = 2 [10(1/1.5h)], el número de bacterias después de 35 horas es 10.56x106 *y el tiempo es de 16 horas*

2. Población de aves. Cierta especie de aves fue introducida en un condado hace 25 años. Los biólogos observan que la población se duplica cada 10 años, y ahora la población es de 13000. ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de aves?; e stime la población de aves dentro de 5 años después del día de hoy.

   a. El tamaño inicial de la población de aves es 3 298, dentro de 5 años después del día de hoy es 17 384 aves.
   b. El tamaño inicial de la población de aves es 2 297, dentro de 5 años después del día de hoy es 18 376 aves.
   c. El tamaño inicial de la población de aves es 4 298, dentro de 5 años después del día de hoy es de 19 384 aves.

3. Una población de ardillas grises fue introducida en cierto condado de la Gran Bretaña hace 30 años. Los biólogos observaron que la población se duplica cada 6 años y ahora la población es de, 100000. ¿Cuál es el tamaño inicial de la población de ardillas? Estime la población de ardillas a 10 años a partir de ahora.

   a. La población inicial es de 3025 ardillas y la población luego de 10 años a partir de ahora es de 317280.
   b. La población inicial es de 3225 ardillas y la población luego de 10 años a partir de ahora es de 317380.
   c. La población inicial es de 3125 ardillas y la población luego de 10 años a partir de ahora es de 317480.

4. La población mundial era de 7.1 miles de millones en 2013, y la tada de crecimiento observada relativa era de 1.1 % al año. ¿En qué año se habrá duplicado la población?; ¿e n qué año se habrá triplicado la población?

   a. Se habrá duplicado la población en el año 2056 y se habrá triplicado la población en el 2111.
   b. Se habrá duplicado la población en el año 2066 y se habrá triplicado la población en el 2112.
   c. Se habrá duplicado la población en el año 2076 y se habrá triplicado la población en el 2113.

5. La población de cierta ciudad era de, 112000 personas en 2014; el tiempo de duplicación observado para la población es de 18 años.

Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{\frac{t}{a}}$ para la población, t años. Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 e^{rt}$ para la población, t años después de 2014. Estime cuándo llegará la población a 500000.

a. La población para t=18 años es de 224000, la tasa de crecimiento relativa es de 0.0385 y la población alcanza 500000 personas cuando transcurre un tiempo de 38.85 años.

b. La población para t=18 años es de 225000, la tasa de crecimiento relativa es de 0.0385 y la población alcanza 500000 personas cuando transcurre un tiempo de 37.85 años.

c. La población para t=18 años es de, 226000, la tasa de crecimiento relativa es de 0.0385 y la población alcanza, 500000 personas cuando transcurre un tiempo de 39.85 años.

6. Se estima que la tela para el entierro de una momia egipcia contiene 59 % del carbono 14 que contenía originalmente. ¿Cuánto tiempo hace que la momia fue enterrada? (La vida media del carbono 14 es de 5 730 años).

a. La momia fue enterrada hace, 3361,75 años.
b. La momia fue enterrada hace, 4361,75 años.
c. La momia fue enterrada hace, 5361,75 años.

7. Enfriamiento de un motor supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día invernal (208F al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 2208F). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura T del motor t minutos después de estacionarlo satisface la ecuación. Encontrar la temperatura del motor después de 20 minutos.

a. La temperatura después de otros 20 minutos es 20F.
b. La temperatura después de otros 20 minutos es 22F.
c. La temperatura después de otros 20 minutos es 21F.

8. La población de zorros en cierta región tiene una razón de crecimiento relativa de 8 % por año. Se estima que la población en 2013 era de 18000. Encuentre una función $n(t) = n_0 e^{rt}$ que modele la población en t años. Determine la población de zorros en el año 2021. ¿Después de cuantos años la población de zorros será de 25000?

   a. $n(t) = 18000 \cdot e^{0,07t}$ y Para el 2021 habría una población de, 34036 zorros.
   b. $n(t) = 18000 \cdot e^{0,08t}$ y Para el 2021 habría una población de, 34136 zorros.
   c. $n(t) = 18000 \cdot e^{0,09t}$ y Para el 2021 habría una población de, 34236 zorros.

9. Una sustancia radiactiva se desintegra en forma tal que la cantidad de masa restante después de t días está dada por la función $m(t) = 13e^{-0.015t}$ donde m(t) se mide en kilogramos. a) Encuentre la masa en el tiempo t =0. b) ¿Cuánto de la masa queda después de 45 días?

   a. La masa en el tiempo t=0 es de 11 kg y después de 45 días queda 6.63 kg.
   b. La masa en el tiempo t=0 es de 12 kg y después de 45 días queda 6.63 kg.
   c. La masa en el tiempo t=0 es de 13 kg y después de 45 días queda 6.63 kg.

10. La población de cierta especie de aves está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el siguiente modelo logístico de crecimiento:

$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5e^{-0.044t}}$$

Donde t se mide en años. Encuentre la población inicial de aves. ¿A qué tamaño se aproxima la población a medida que transcurre el tiempo?

a. Inicialmente, hay 200 aves y a medida que el tiempo transcurre la población se aproxima a 11200 aves.
b. Inicialmente, hay 300 aves y a medida que el tiempo transcurre la población se aproxima a 11100 aves.
c. Inicialmente, hay 100 aves y a medida que el tiempo transcurre la población se aproxima a 11300 aves.

Ir al solucionario

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

2 Bimestre

Semana 14

Unidad 6. Escalas logarítmicas

Cuando una cantidad física varía con un margen muy grande, a veces es conveniente tomar su logaritmo para tener un conjunto de números más manejable. Lo esencial es considerar que, en una escala logarítmica, los números se representan con sus logaritmos.

- **Ejemplo ilustrativo 27.** Supongamos que en un eje queremos representar los caudales de varios cauces y disponemos de los datos que aparecen a continuación, ya ordenados de menor a mayor, desde un arroyo con 16 litros/s hasta un gran río con 154 m² /s.

Tabla 3.

Caudales de varios cauces

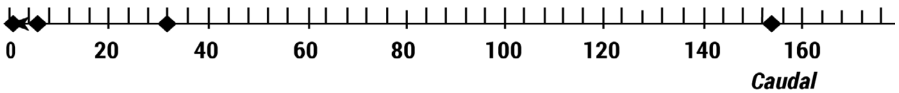
Caudal (m^3/s)
0.016
0.07
0.28
1.25
6.1
32
154

Nota. Guerrero, R., 2023.

Si representamos estos datos en una escala aritmética (un papel cuadriculado normal) quedará algo tan poco expresivo como esto:

Figura 21.

Datos de los caudales



Nota. Guerrero, R., 2023.

Los cuatro primeros están amontonados encima del 0, de modo que no sería válido si queremos que aparezcan todos los valores.

Probamos otra estrategia: calculamos los logaritmos de los caudales, y los representamos de nuevo en un papel milimetrado corriente.

El resultado será el siguiente:

Tabla 4.

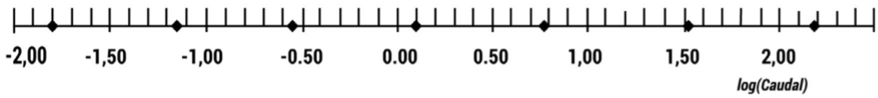
Logarítmos de los caudales

Caudal (m^3/s)	Log Caudal (m^3/s)
0.016	-1,8
0.07	-1,15
0.28	-0,55
1.25	0,10
6.1	0,79
32	1,51
154	2,19

Nota. Guerrero, R., 2023.

Figura 22.

Representación resultados



Nota. Guerrero, R., 2023.

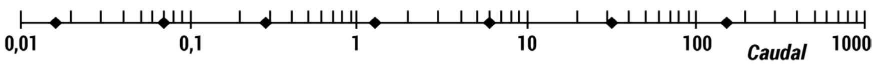
Ahora los puntos aparecen bien diferenciados, pero, además de la molestia de tener que calcular los logaritmos, el observador no capta los valores:

¿Cómo podemos adivinar que el punto situado en 1,50 en realidad se refiere a un caudal de 32 m^3/s?

La solución es representar los puntos en una escala logarítmica: no es preciso calcular nada, nosotros situamos en la escala los valores de los caudales, pero lo que determina su posición son los logaritmos de los caudales:

Figura 23.

Escalas logaritmicas de los caudales



Nota. Guerrero, R., 2023.

Observamos que, efectivamente, la situación relativa de los puntos en las dos últimas escalas que hemos dibujado es idéntica.

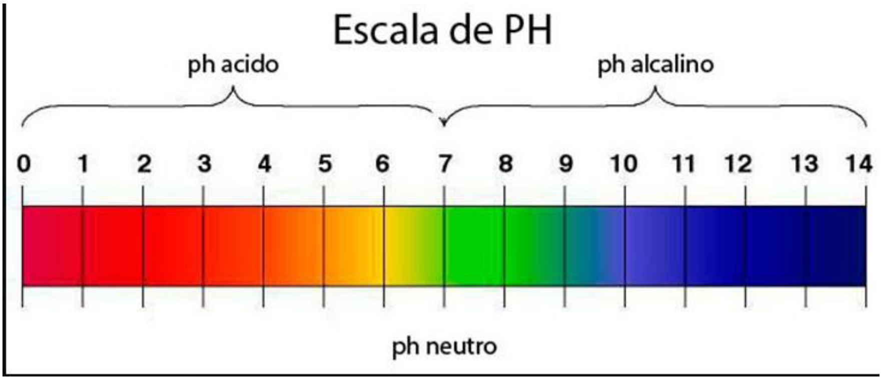
Por tanto, representar puntos en una escala logarítmica es equivalente a representar los logaritmos de esos valores en una escala milimetrada normal (Sánchez F. s.f. pág.1).

6.1. La escala pH

La escala de pH mide el grado de acidez de un objeto. Los objetos que no son muy ácidos se llaman básicos.

La escala tiene valores que van del cero (el valor más ácido) al 14 (el más básico). Tal como se puede observar en la escala de pH, el agua pura tiene un valor de pH igual a 7.

Figura 24.
Escala ph



Nota. Tomado de *pH - Qué es, cómo medirlo* [Ilustración], por Experimentos científicos, 2018, experimentoscientificos.es. CC BY 2.0

$$Ph = -\log [H^+]$$

Donde **[H⁺]** es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M)

Con el pH, podemos manejar grandes cifras, de manera sencilla.

- **Ejemplo ilustrativo 28.** Se da la concentración de un ion de hidrógeno de una muestra de cada sustancia. Calcule el pH de la sustancia.

a) Jugo de limón: $[H^+] = 5.0\,x\,10^{-3} M$

$Ph = -\log[H^+]$

$Ph = -\log[5.0\,x\,10^{-3} M]$

$Ph = 2,3$

Dado que es menor a 7 el jugo de limón es ácido.

b) Jugo de tomate: $[H^+] = 2.2\,x\,10^{-4} M$

$Ph = -\log[H^+]$

$Ph = -\log[3.2\,x\,10^{-4} M]$

$Ph = 3,49$

Dado que es menor a 7 el jugo de tomate es ácido.

6.2. La escala de Richter

En 1935 el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1985), definió la magnitud de un terremoto como

$$M = \log \frac{I}{S}$$

Donde I es la intensidad del terremoto, medido por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del mismo y S es la intensidad de terremoto estándar (cuya amplitud es 1 micrón = 10^{-4}cm).

- **Ejemplo ilustrativo 29.** El terremoto de Japón de 2011 tuvo una magnitud de 9.1 en la escala de Richter ¿Cuántas veces más intenso fue este terremoto que el terremoto de San Francisco en 1906?

$M = \log \frac{I}{S} = 9.1$

$9.1 = \log x + \log 8.3$

$\log x = 9.1 - \log 8.3$

$\log x = 8,18$

$\log x = 8,18$

$x = 0,9$ veces más intenso

6.3. La escala de decibeles

Según Steward et al. (2017), nuestro oído es sensible a una gama extremadamente grande de intensidades de sonido. Tomamos como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ (watts por metro cuadrado) a una frecuencia de 1000 *hertz*, que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de escucha). La sensación psicológica de intensidad varía con el logaritmo de la intensidad (ley de Weber-Fechner), de modo que el nivel de intensidad B, medido en decibeles, está definido como:

$$B = 10log(\frac{I}{I_0})$$

- **Ejemplo ilustrativo 30.** Intensidad de sonido del despegue de un jet.
  a. Encuentre el nivel de intensidad en decibeles de un motor de jet durante el despegue, si la intensidad se mide en 100 W/m^2.
  b. Encuentre el nivel de intensidad de un motor de motocicleta a toda velocidad si se midió el nivel de decibeles en 90 dB.

Solución:

a. De la definición de nivel de intensidad vemos que:

$$B = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right) = B = 10log\left(\frac{10^2}{10^{-12}}\right) = B = 10log(10^{14}) = 140\ dB$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad es de 140 dB.

b. Para encontrar la intensidad, tenemos que despejar I de la ecuación logarítmica.

$B = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ (Definición de nivel de decibeles)

$\frac{B}{10} = log\ log\ (I)\ - log(10^{-12})$ (Divida por 10 y se sustituye $I_0\ por\ 10^{-12}$)

$\frac{B}{10} = log\ log\ (I)\ + 12$ (Definición de logaritmos)

$\frac{B}{10} - 12 = log\ log\ (I)$ (Restando 12 en los 2 miembros de la igualdad)

$\frac{90}{10} - 12 = log\, log\, (I)$ (Sustituyendo B por 90)

$log(I) = -3$ (Sumando fracciones)

$I = 10^{-3}$ (Forma exponencial)

Por lo tanto, la intensidad es: $10^{-3} W/m^2$

Para comprender de mejor manera las escalas logarítmicas le invito a que:

- Lea el **texto básico páginas 381-387.**
- Habilite los hipervínculos y m Mire atentamente el video de la plataforma Khan Academy sobre la diferencia entre escala lineal y escala logarítmica.

Este video nos facilita la compresión de lo que significa una escala logarítmica, mientras que en el texto básico aparecen muchos ejercicios resueltos para facilitar la comprensión de los conceptos y se proponen algunos problemas para que usted puede ejercitarse en la resolución, previo a las evaluaciones parciales y el fin del periodo académico ordinario.

Una vez revisados los contenidos de esta semana y para profundizar sus conocimientos, le animo a que realice las siguientes actividades de aprendizaje:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Resuelva y explique los problemas del 89 al 108, página 390 del texto básico.

   Nota. Resuelva los ejercicios en un cuaderno de apuntes o utilice alguna herramienta digital.

Recuerde que: A través del *chat* de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las **escalas logarítmicas**, es recomendable que usted realice la siguiente autoevaluación de lo aprendido en la unidad, para luego retroalimentar con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes que le causaron dificultad.

2 Bimestre

Autoevaluación 8

Instrucción: seleccione la alternativa correcta, en caso de que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

1. (   ) En una escala logarítmica, los números, se representan con sus logaritmos.
2. (   ) La escala pH mide la acidez de una solución.
3. (   ) La escala de Richter mide la intensidad de la luz.
4. (   ) La escala de decibeles mide la intensidad del sonido.
5. (   ) La sensibilidad que presenta el oído humano a las variaciones de intensidad sonora sigue una escala aproximadamente logarítmica, no lineal.
6. (   ) El modelo de la escala pH es pH = -log [H+].
7. (   ) El modelo de la escala Richter es M = log 1/s.
8. (   ) El modelo de la escala de decibeles es B = 10.log 1/ I0.
9. (   ) Una escala logarítmica arbitraria que asigna un número para cuantificar la energía liberada en un terremoto, denominada así en honor del sismólogo estadounidense Charles Richter.
10. (   ) La sensación sonora en decibelios correspondiente a una onda de intensidad 10^{-10} W×m^{-2} (Intensidad umbral 10^{-12} W×m^{-2}) es 20 db.

Ir al solucionario

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Unidad 7. Evaluación de los aprendizajes

En esta última unidad de la asignatura Sistema de Conocimientos de Funciones Exponenciales y Logarítmicas y su Didáctica, estudiaremos la evaluación de los aprendizajes, siendo muy pragmáticos en el tratamiento de estos temas, los cuales son de vital importancia para su futuro trabajo docente.

Es generalizado el criterio sobre la gran importancia que reviste la evaluación dentro de toda actividad humana, más cuando se tratan de procesos educativos, en donde se prioriza la formación integral de los estudiantes. En la actualidad, la evaluación se ha constituido en el elemento determinante y prioritario que sirve para orientar el rumbo de la práctica académica.

Nuestro estudio estará centrado principalmente en el análisis de los aspectos más importantes de la evaluación educativa, como son la fundamentación y los tipos de evaluación, las técnicas y los instrumentos de evaluación.

7.1. Fundamentos y tipos de evaluación

Estimados estudiantes, en la parte inicial de la unidad se estudian algunos conceptos básicos, definiciones, principios, funciones, características, tipos de evaluación y otros aspectos importantes que han sido considerados de las memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación (2014), realizado en Buenos Aires.

Definición de evaluación

1. Evaluación. La evaluación educativa, según Daniel Stuffebeam, "es el proceso de delinear, obtener y proveer información para juzgar alternativas de decisión".

2. Según Pedro Lafourcade "es una etapa del proceso educativo donde se ponderan los resultados previstos en los objetivos, habiéndolos especificado con antelación".

3. En iguales parámetros cabe situar la definición de De Ketele, para quien "evaluar significa examinar el grado de adecuación entre un conjunto de informaciones y un conjunto de criterios adecuados al objetivo fijado, con el fin de tomar una decisión" .

4. La Unesco (2005), define la evaluación como "el proceso de recogida y tratamiento de informaciones pertinentes, válidas y fiables para permitir, a los actores interesados, tomar las decisiones que se impongan para mejorar las acciones y los resultados De modo que, ambos aspectos, el de" juicio" y el de "toma de decisiones" intervienen en la evaluación educativa, aunque adquieren mayor o menor preponderancia según los casos.

   Por lo tanto, se considera a la evaluación como una actividad mediante la cual, en función de determinados criterios, se obtienen informaciones pertinentes acerca de un fenómeno, situación, objeto o persona, se emite un juicio sobre el objeto de que se trate y se adoptan una serie de decisiones referentes al mismo. De tal manera que, en este contexto, la evaluación educativa, si se dirige al sistema en su conjunto, o a algunos de sus componentes, responde siempre a una finalidad, que la mayoría de las veces, significa tomar una serie de decisiones respecto del objeto evaluado.

5. Finalmente, el Ministerio de Educación, en el instructivo de aplicación de la evaluación (2016), dice que la evaluación estudiantil "es un proceso continuo de observación, valoración y registro de información que evidencia el logro de objetivos de aprendizaje de los estudiantes y que incluye sistemas de retroalimentación, dirigidos a mejorar la metodología de enseñanza y los resultados de aprendizaje" (p 5).

7.2. Características de la evaluación

Considerando aportes del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación (2014), en Buenos Aires y otros distintos autores, se puede afirmar que la evaluación tiene algunas características. Entre las más importantes, se pueden citar las siguientes:

- **Sistemática:** porque se establece un conjunto ordenado de normas, acciones y procedimientos que persiguen lograr una evaluación eficaz. Por esta razón, la evaluación se basa en objetivos predeterminados que guiarán procesos que determinarán mejores resultados.
- **Integral:** porque al ser una etapa del proceso educativo nos proporciona información de los diferentes ámbitos del sistema educativo, como son: planificación curricular, entorno natural y social, métodos y técnicas didácticas, materiales empleados; y, principalmente, del accionar docente y dicente dentro y fuera del aula.
- **Formativa:** porque persigue mejorar y lograr perfeccionamiento en el proceso de enseñanza aprendizaje, tanto así que se constituye en una herramienta crucial para el desarrollo del proceso didáctico, brindando información permanente y continua, a todos los usuarios del sistema.
- **Continua:** la evaluación se presenta en todos los momentos del proceso, desde que este inicia para pasar luego a los de retroalimentación permanente y llegar a los de culminación de los procesos, inclusive cuando el individuo se encuentra en otro nivel de estudios.
- **Flexible:** los procedimientos, instrumentos y criterios de evaluación varían de acuerdo a las diferencias que se encuentran en el grupo, se adaptan a las diferencias individuales de los estudiantes y se emplean según los momentos en los que se realiza la aplicación.
- **Decisoria:** porque los datos y la información debidamente sistematizada e integrada al proceso, facilita la emisión correcta de juicios de valor que fundamentarán la toma de decisiones para enriquecer el proceso y llegar a los mejores resultados.

7.3. Tipos de evaluación

La evaluación educativa se puede clasificar según algunos criterios, en este texto guía únicamente se contemplan tres aspectos considerados los más importantes: finalidad y función, agente evaluador y el momento en el cual se realiza la evaluación.

- **Según la finalidad y función**

  De acuerdo a la finalidad y función que desempeña la evaluación educativa, esta puede ser diagnóstica, formativa y sumativa. Es diagnóstica cuando permite conocer el estado en el cual se encuentra el grupo de estudiantes al momento de empezar algún proceso de aprendizaje. Es formativa cuando permite reajustar y retroalimentar continuamente dentro del proceso o al final. Es sumativa porque es aplicada para la toma de decisiones al finalizar el curso, para lo cual se considera la sumatoria de todas las evaluaciones parciales.

- **Según el momento que se realiza**

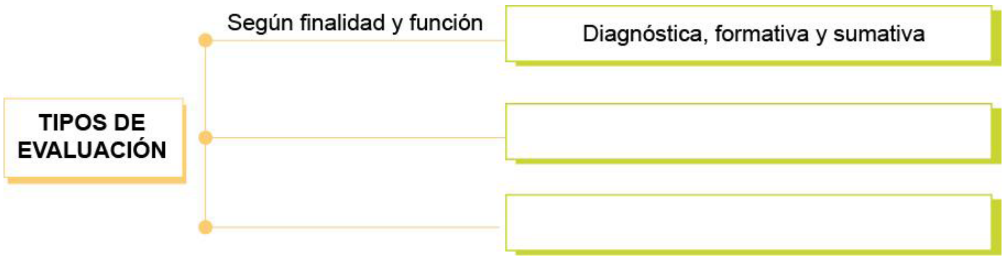
  De acuerdo al momento en el cual se realiza la acción evaluativa, esta puede ser inicial, procesual o parcial y final. Será inicial cuando se ejerza al inicio de un programa o proceso educativo. Mientras que se denomina procesual o parcial cuando se realiza durante el desarrollo del proceso académico, por ejemplo, las evaluaciones que se hacen al final de los parciales, pueden ser confundidas con la evaluación formativa, pero son diferentes. Mientras que la evaluación final se realiza cuando el proceso termina.

  Antes de analizar el próximo contenido, les invito a resolver algunos ejercicios propuestos, consultando el texto cuando el caso lo amerite. Considere que, la realización de estas actividades recomendadas le permitirá desarrollar sus capacidades intelectuales e interiorizar los conocimientos tratados.

Actividad de aprendizaje recomendada

1. Complete el siguiente organizador gráfico con lo más importante de los tipos de evaluación.

Figura 25.
Tipos de evaluación



Nota. Guerrero, R., 2023.

- ¿A qué se refiere la evaluación sumativa? Explica con un ejemplo de tu etapa estudiantil en la asignatura de Matemática.
- Escribe cuatro características de la evaluación, anotando un ejemplo para cada una de ellas.
- ¿Cuál es la diferencia entre la evaluación formativa y evaluación continua? Explica con un ejemplo en la asignatura de Física.
- ¿A qué se refiere el carácter sumativo de la evaluación? Detalla un ejemplo para matemática de bachillerato.
- Escribe un pequeño ensayo sobre el significado del término evaluación, no mayor de 100 palabras.

  Nota. Complete las actividades en un cuaderno de apuntes o documento word.

La evaluación formativa está relacionada con aquellos procesos de recoger información de manera permanente y durante todo el proceso, con la finalidad de retroalimentar y ajustar las actividades que permitan conseguir aprendizajes más duraderos y significativos. Mientras que el carácter sumativo de la evaluación aparece porque esta es utilizada para la toma de decisiones al finalizar el curso, para lo cual se considera la sumatoria de todas las evaluaciones parciales.

¡Felicitaciones! Excelente trabajo

7.4. Técnicas e instrumentos de evaluación

En esta parte aplicaremos la teoría y los ejemplos del excelente trabajo realizado por Rodríguez (2010), en la obra Técnicas e instrumentos para facilitar la evaluación del aprendizaje, proponiendo algunos casos que pueden ser ilustrativos al momento de poner en práctica las distintas técnicas de evaluación.

- **Definiciones básicas**

  Es importante conocer algunos conceptos básicos de evaluación, pese a que ya se estudiaron algunos de ellos en ciclos anteriores conviene puntualizarlos ahora. Para ello, consideremos lo que manifiesta la mexicana Delgado (2010), quien puntualiza que la evaluación juega un papel fundamental en los procesos de enseñanza aprendizaje, por esta razón es necesario que el docente sostenga un conocimiento suficiente de los métodos, técnicas e instrumentos de evaluación.

  a. **Prueba:** conocido también como examen, es el instrumento de medición más utilizado en el mundo y nos permite acceder a estimaciones bastante realistas del rendimiento escolar.

  b. **Reactivo:** es el planteamiento de un problema a resolver, una situación que requiere una solución, el cual suscita reacciones que se plasman en respuestas a través de las cuales se puede hacer el diagnóstico de una realidad de los aprendizajes.

  c. **Técnica:** es el procedimiento planificado por el docente y mediante el cual se llevará a cabo la recolección de información o evaluación de un aprendizaje.

  d. **Instrumento:** son los documentos o medios a través de los cuales el docente podrá registrar y obtener la información necesaria sobre los aprendizajes estudiantiles respecto de cierto tema.

- **Diferencia entre técnica e instrumento**

  La técnica es el procedimiento planificado para recabar información o evaluar un aprendizaje, mientras que instrumento es el documento o medio que nos sirve para tomar la evidencia del aprendizaje logrado.

- **Evaluación objetiva o tradicional del aprendizaje**

  En los últimos treinta años, la evaluación en nuestro país ha tenido algunos cambios, lo más importante ha sido su utilización para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje y aunque la influencia de la evaluación objetiva es evidente, no se puede desconocer otros referentes para la evaluación.

- **Enfoque de la evaluación objetiva o tradicional**

  Desde un enfoque tradicionalista, el alumno recibe de forma pasiva la información dada por el maestro, ese conocimiento debe aprender de memoria y no puede ser cuestionado ni criticado por los estudiantes.

- **Técnicas de interrogatorio**

  En esta técnica se agrupan todos los procedimientos a través de los cuales se solicita información al estudiante y puede ser oral o escrita, aquí se evalúa básicamente el área cognoscitiva.

  Para aplicar esta técnica podemos utilizar los siguientes instrumentos de evaluación: el cuestionario, la entrevista, la autoevaluación y el examen oral. Ahora, le invito a revisar las siguientes tablas donde encontrará más información sobre este tema:

1. El cuestionario

Elementos	Conceptos
Características	1. *Se integran con preguntas previamente estructuradas sobre un tema.* 2. *Se puede aplicar de forma oral o escrita.* 3. *Se puede utilizar cuestionarios de preguntas abiertas y cerradas.* 4. *La combinación de preguntas abiertas y cerradas proporciona información cualitativa y cuantitativa.*
Ventajas	1. *Se puede aplicar de manera simultánea a más de una persona (grupo).* 2. *Puede estructurarse de manera que sea contestado mediante claves.* 3. *Puede estructurarse de forma que permita conocer la opinión de los alumnos sobre un tema.*
Desventajas	1. *Si el grupo es muy grande, se requiere de mucho tiempo para su procesamiento.*

Elementos	Conceptos
Recomendaciones para su uso	1. *Seleccionar el tipo de cuestionario a utilizar (de preguntas abiertas, cerradas o combinado) de acuerdo a los fines y utilidad que se pretenda dar a los resultados.* 2. *Definir el número de preguntas de acuerdo a la extensión de los contenidos del programa de estudio.*

En la tabla se muestra los elementos de un cuestionario.
Nota. Andrade, A., 2010.

2. La entrevista

Elementos	Concepto
Característica	1. *Se lleva a cabo mediante un dialogo entre el maestro y el alumno durante un tiempo determinado.* 2. *Otra posibilidad es el interrogatorio, el docente pregunta sobre algún tema.*
Ventajas	1. *Permite al estudiante expresar sus respuestas.* 2. *Permite una comunicación personal.* 3. *Brinda la oportunidad del estudiante de seleccionar, ordenar, analizar y sintetizar la información.*
Desventajas	1. *Requiere mucho tiempo para llevarse a cabo.* 2. *No es factible para grupos numerosos.* 3. *Un alumno introvertido tiene desventaja.*
Recomendaciones para su uso	1. *Claridad y precisión de las preguntas.* 2. *Ordenación de las preguntas mas sencillas a las más difíciles.* 3. *El profesor debe dejar un tiempo prudente para su respuesta.*

En la tabla se muestra los elementos de una entrevista.
Nota. Andrade, A., 2010.

3. La Autoevaluación

Elementos	Concepto
Característica	1. *Es una evaluación que el alumno hace de su propio aprendizaje.* 2. *Provee una evidencia muy valiosa para el alumno.* 3. *Es el coronamiento de un aprendizaje significativo.*
Ventajas	1. *Permite la metacognición, honestidad y responsabilidad.* 2. *Permite evaluar habilidades y productos del pensamiento.* 3. *Evaluar las competencias.*
Desventajas	1. *Se puede dar el caso que de alumnos demasiado críticos para juzgarse, así como demasiados pasivos.* 2. *Tiende a la subjetividad.*

Elementos	Concepto
Recomendaciones para su uso	1. *Comunicar los objetivos a los estudiantes.* 2. *Que los alumnos se vayan apropiando de los instrumentos de los maestros.*

En la tabla se muestra los elementos de la Autoevaluación.
Nota. Andrade, A., 2010.

4. El examen oral

Elementos	Concepto
Característica	1. *Es un diálogo entre el docente y el alumno para obtener datos informativos.* 2. *Se utiliza para medir aspectos pedagógicos.* 3. *Serecomienda la entrevista formal.*
Ventajas	4. *Diagnostica las dificulta-des de aprendizaje.* 5. *Se profundiza en las respuestas obtenidas.* 6. *Ayuda al alumno a preparar un proyecto personal.*
Desventajas	7. *Se requiere tiempo para su ejecución. * Influye la visión perso-* 8. *Desventajas nal del problema. * Por el afán de ser bien valorado, el alumno* 9. *pue-de llevarlo*
Recomendaciones para su uso	10. *Definir claramente el objetivo. • No forzar a que el alumno respara* 11. *su uso panda. * Debe de existir un ambiente que facilite el dialogo.*

En la tabla se muestra los elementos de un examen oral.
Nota. Andrade, A., 2010.

¿Qué le pareció la temática abordada?, interesante verdad, a continuación, le invito a revisar a profundidad la última técnica de evaluación que revisaremos, que es la de solución de problemas.

- **Técnica de solución de problemas**

Con esta técnica se pueden evaluar la resolución de problemas, considerando cuestiones de orden conceptual o sobre la aplicación de posibles algoritmos o reconocimiento de alguna secuencia.

Entre los instrumentos utilizados para aplicar esta técnica tenemos los siguientes: pruebas objetivas, pruebas de ensayos, simuladores escritos, pruebas estandarizadas y finalmente las pruebas de opción múltiple.

Por otra parte, ya mencionados los instrumentos, le invito a revisar con mucha atención el siguiente módulo didáctico donde encontrará información más amplia y aplicaciones ilustrativas de cada uno de estos instrumentos, continuemos:

Instrumentos para la solución de problemas.

Una vez revisados los contenidos de esta semana y con el fin de profundizar su aprendizaje, le invito a realizar las siguientes actividades de aprendizaje.

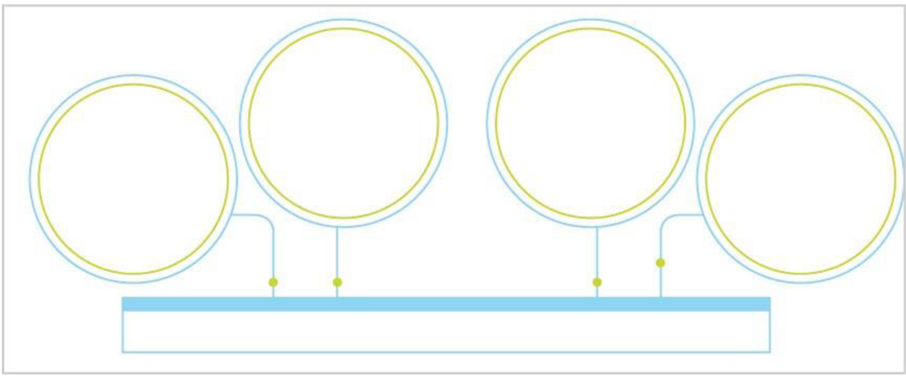
Actividades de aprendizaje recomendadas

Primero aclaremos la diferencia entre técnica e instrumento de evaluación: técnica se refiere al procedimiento planificado por el docente y mediante el cual se llevará a cabo la recolección de información o evaluación de un aprendizaje; mientras que instrumento es el documento o medio a través del cual el docente podrá registrar y obtener la información necesaria sobre los aprendizajes estudiantiles respecto de cierto tema.

1. Una vez entendido esta diferencia, le invito a resolver los ejercicios propuestos, consultando el texto guía cuando el caso lo amerite y usted crea conveniente hacerlo.

    - Complete el siguiente organizador gráfico sobre los instrumentos de evaluación para la técnica de interrogatorio.

Figura 26.
Instrumentos de evaluación técnica interrogatorio



Nota. Guerrero, R., 2023.

    - ¿Cuál es la gran diferencia entre técnicas de evaluación y los instrumentos de evaluación? Explique con un ejemplo de matemáticas de octavo año de básica al evaluar el tema de adición de números racionales.

- ¿Cuáles son las ventajas y la gran desventaja al utilizar un cuestionario como instrumento de la técnica de interrogatorio?
- ¿En qué caso debemos aplicar una entrevista a los estudiantes como parte de la técnica de interrogatorio?
- Escribe los cinco instrumentos recomendados para aplicar la técnica de solución de problemas.
- Escribe las ventajas y desventajas de las pruebas de ensayo.
- Escribe un ejemplo de un ítem de una prueba de opción múltiple para noveno año de básica.
- Explica sobre las ventajas de utilizar el instrumento de evaluación llamado rúbrica.

  Nota. Complete las actividades en un cuaderno de apuntes o documento word.

2. Para profundizar sus conocimientos, complete el siguiente mapa conceptual acerca de la evaluación de los aprendizajes:

   Evaluación de los Aprendizajes.

   ¡Felicitaciones! Su trabajo es inmejorable, es digno de felicitación y plausible para una imitación, ahora debemos demostrar que nuestro trabajo ha rendido los frutos necesarios.

3. Continúe ahora desarrollando la siguiente autoevaluación propuesta, la misma que marca el camino para futuras evaluaciones presenciales.

Autoevaluación 9

Instrucción: una vez que han concluido el estudio de la unidad, les invito a resolver el siguiente cuestionario. Elija la opción correcta.

1. La evaluación formativa hace referencia a que:

    a. Es continua y sirve para la retroalimentación.
    b. Permanece en todo el proceso para calificar siempre.
    c. Continuamente se toman pruebas para examinar.
    d. Se aplica al inicio, en el proceso y al final.

2. Cuando hablamos de metaevaluación nos referimos a:

    a. La planificación de la evaluación por mayor.
    b. La planificación de una gran evaluación.
    c. Procesos de evaluación de la evaluación.
    d. Evaluación que toma en cuenta al ser humano.

3. Según el agente evaluador, la evaluación puede ser:

    a. Autoevaluación, coevaluación o heteroevaluación.
    b. Formativa y sumativa.
    c. Parcial o final.
    d. Diagnóstica, formativa o sumativa.

2 Bimestre

4. La Evaluación es formativa porque:

   a. Se presenta en todos los momentos del proceso.

   b. Al ser una etapa del proceso educativo nos proporciona información de los diferentes ámbitos del sistema educativo, como son: planificación curricular, entorno natural y social, métodos y técnicas didácticas, materiales empleados; y, principalmente, del accionar docente y dicente dentro y fuera del aula.

   c. Persigue mejorar y lograr perfeccionamiento en el proceso de enseñanza aprendizaje, tanto así que se constituye en una herramienta crucial para el desarrollo del proceso didáctico.

   d. Los procedimientos, instrumentos y criterios de evaluación varían de acuerdo a las diferencias que se encuentran en el grupo, se adaptan a las diferencias individuales de los estudiantes y se emplean según los momentos en los que se realiza la aplicación.

5. La Evaluación es integral porque:

   a. Se presenta en todos los momentos del proceso.

   b. Al ser una etapa del proceso educativo nos proporciona información de los diferentes ámbitos del sistema educativo, como son: planificación curricular, entorno natural y social, métodos y técnicas didácticas, materiales empleados; y, principalmente, del accionar docente y dicente dentro y fuera del aula.

   c. Persigue mejorar y lograr perfeccionamiento en el proceso de enseñanza aprendizaje, tanto así que se constituye en una herramienta crucial para el desarrollo del proceso didáctico.

   d. Los procedimientos, instrumentos y criterios de evaluación varían de acuerdo a las diferencias que se encuentran en el grupo, se adaptan a las diferencias individuales de los estudiantes y se emplean según los momentos en los que se realiza la aplicación.

6. La técnica de observación permite evaluar aspectos como el:

   a. Examen de diagnóstico y final.
   b. Calificaciones formativas y sumativas.
   c. Los procesos de aprendizaje en el momento que se producen.
   d. Afectivo y psicomotor.

7. La diferencia entre técnica e instrumento de evaluación radica en que la:

   a. Primera es un documento utilizado para obtener y medir los alcances de los objetivos que los alumnos alcanzarán en la segunda.

   b. Primera es un procedimiento mediante el cual se llevará a cabo la evaluación y la segunda es un documento de aplicación.

   c. Inicial es el procedimiento mediante el cual se lleva a cabo la evaluación y la segunda es el planteamiento de una situación.

   d. Primera es el procedimiento que solo los directivos utilizan para evaluar, mientras que el instrumento es un simple reactivo.

8. Una ventaja del cuestionario es:

   a. Que se puede aplicar cuando el grupo es muy grande.
   b. Diagnostica las dificultades de aprendizaje.
   c. Se puede aplicar de manera simultánea a más de una persona.
   d. Se profundiza en las respuestas obtenidas.

9. En la solución de problemas, las pruebas objetivas tienen la ventaja de que:

   a. Corrección exacta, rápida y objetiva. Mismo criterio para todos los alumnos. Corrección sin esfuerzo.
   b. Son difíciles de calificar.
   c. No se pueden aplicar a muchos alumnos.
   d. Su preparación y el diseño son barato.

10. En la técnica de la solución de problemas, las pruebas de opción múltiple tienen la desventaja de que:

   a. Son aprovechables para la exploración de aprendizajes muy variados.
   b. Estas preguntas permiten evaluar gran cantidad de contenido.
   c. Son objetivas y difíciles de elaborar.
   d. Capacidad limitada para medir dimensiones cognitivas de alto nivel y complejas, como la creatividad y la habilidad para resolver problemas.

Ir al solucionario

Para verificar las respuestas de las preguntas planteadas en la autoevaluación, les invito a ir al final del texto guía, donde encontrarás el solucionario con su retroalimentación.

Semana 16

Actividades finales del bimestre

Actividad 1. Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el segundo bimestre y que no fueron entregadas.

Actividad 2. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 3. Suba el archivo del documento al EVA caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.

Actividad 4. Revise los contenidos del segundo bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello, considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y.
- Evaluaciones parciales.

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	Por definición de función exponencial su dominio es el conjunto de los números reales
2	a	Por definición de función exponencial su rango es el conjunto de los números reales positivos
3	b	Sería una función constante, porque f*(x) =1*ˣ *=1 para toddo número real* y gráficamente es una función constante que pasa por 1 y es paralela al eje x.
4	b	Es decreciente en todo su dominio que es el conjunto de los números reales.
5	a	Es el conjunto de los reales positivos por definición de función exponencial
6	a	Se desplaza una unidad hacia arriba, por definición de desplazamiento vertical de una función
7	c	$P = P_0 . a^t$ $P = 500.2^t$, porque se duplica cada año y para luego de 4 años, entonces $P = 500.2^4$ $P = 500.(32)$ $P = 8000$
8	a	$A(t) = P.(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ $A(t) = 1000.(1 + \frac{0.12}{1})^3$ $A(t) = 1000.(1.12)^3$ $A(t) = 1000(1.404928)$ $A(t) = 1404.928$ $A(t) \approx 1404.93$

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
9	a	$A(t) = P.(1+\frac{r}{n})^{nt}$ $A(t) = 500.(1+\frac{0.08}{4})^{(4)2}$ $A(t) = 500.(1+0.02)^{8}$ $A(t) = 500.(1.02)^{8}$ $A(t) = 500.(1.171659)$ $A(t) = 585{,}8295$ $A(t) \approx 585{,}83$
10	b	$A(t) = P.(1+\frac{r}{n})^{nt}$ $717.06 = P.(1+\frac{0.06}{3})^{3(3)}$ $717.06 = P.(1.02)^{9}$ $717.06 = P(1.195092)$ $P = \frac{717.06}{1.195092}$ $P = 600$

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	c	La base de la función exponencial natural es el numero e= 2.7182818284590452…
2	b	Cuando n tiende al más infinito entonces $(1+\frac{1}{n})^n$ *tiende al numero e* . Se puede observar cuando se le dan valores muy grandes a la variable n
3	c	El número e no se puede escribir como un cociente de dos números debido a que es un numero irracional
4	b	El número e no se puede escribir como un cociente de dos números, debido a que es un numero irracional con números decimales ilimitados que tienden al infinito.
5	a	La tasa de interés por cada año que se tenga el préstamo.
6	b	El rango es el intervalo (2, ∞)., debido a que la función original f(x)= e^x a sufrido un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia arriba
7	c	Es el conjunto de los números reales positivos, debido a que la función original f(x)= e^x no sufre desplazamiento vertical, solo sufre desplazamiento horizontal y eso no hace que se altere el rango de la función original
8	a	$N(t) = N_0.(e)^{nt}$ $N(t) = 2000.(e)^{0.04(3)}$ $N(t) = 2000.(e)^{0.12}$ $N(t) = 2000(1.127496)$ $N(t) = 2255$
9	a	$A(t) = P.(1+\frac{r}{n})^{nt}$ $A(t) = 2000.\left(1+\frac{0.04}{4}\right)^{0.04(3)}$ $A(t) = 2000.(1.01)^{0.12}$ $A(t) = 2253.65$
10	a	El interés capitalizado continuamente respecto de uno capitalizado diariamente es superior, debido a en el cálculo del interés continuo se utiliza una fórmula que crece más rápido.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b	Por definición la función logarítmica es la función inversa de la función exponencial.
2	c	Por la definición de la función logarítmica
3	b	**log**$_3$243 = 5 si y solo si 3^5=243 por la definición de la función logarítmica.
4	b	log$_4$ 256=x si y solo si $4^x = 256$ *si y solo si* $4^x = 4^4$ *si y solo si* $x = 4$
5	b	El dominio de toda función logarítmica es el conjunto de los reales positivos por ser la función inversa de la función exponencial.
6	a	la función f(x)= log$_4$x +4 se ha desplazado verticalmente hacia arriba con respecto a la gráfica de la función f(x)= log$_4$x
7	b	Si f(x)= log$_{10}$(x-4) entonces x-4>0, entonces x>4
8	a	Si 2^6 = 64, entonces log$_2$64=6 por la definición de función logarítmica
9	a	Si f(x)= ln(4-x^2), entonces $4 - x^2 > 0, entonces$ $(2 - x)(2 + x) > 0$, entonces por el método de resolución de inecuaciones $x \in (-2; 2)$
10	c	**Si** f(x)= ln (16-x^2), entonces $16 - x^2 > 0, entonces$ $(4 - x)(4 + x) > 0$, entonces por el método de resolución de inecuaciones $x \in (-4; 4)$

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b	Por propiedad de los logaritmos
2	c	Por propiedad de los logaritmos
3	b	$\log_3 8 + \log_3 x^{2} = \log_3(8.x^2)$. Por propiedad de los logaritmos
4	b	$\log_2(10)=\log_2(5.2)=\log_2(5)+\log_2=\log_2(5)+1$
5	c	$\log(x^3y^2) = \log(x^3)+\log(y^2)= 3 \log x + 2 \log y$
6	c	$\log_2(ab^5/\ {}^{3}\sqrt{2c}) = \log_2 a + 5\log_2 b - 1/3 \log_2 2 - 1/3\log_2 c =$
7	b	$log(x^2)+log(y^2)=log(x^2y^2)=log(xy)^2$
8	a	$l\ (10^4)\ = x\ si\ y\ solo\ si\ 10^x = 10^4 si\ y\ solo\ si\ x = 4$
9	a	$log_5(16) = x\ si\ y\ solo\ si$ $5^x\ = 16\ \ si\ y\ solo\ si\ ln(5^x)$ $= ln(16)\ \ si\ y\ solo\ si\ x.ln(5)$ $= ln(16)\ \ si\ y\ solo\ si\ x$ $= \dfrac{ln(16)}{ln(5)}\ \ si\ y\ solo\ si\ x = 1.72270$
10	c	$log(\sqrt{x^2+3y^2})$ =log $(x^2+3y^2)^{\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{2}log(x^2+3y^2)$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 5		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b	Una secuencia didáctica en matemáticas es una planificación ordenada y estructurada de actividades y contenidos matemáticos que se organizan en un orden lógico y progresivo para lograr el aprendizaje significativo de los estudiantes. La secuencia didáctica debe estar diseñada de manera coherente y enfocada en alcanzar objetivos específicos de aprendizaje para lograr una comprensión profunda y duradera de los conceptos matemáticos
2	b	El propósito principal de una secuencia didáctica en matemáticas es precisamente fomentar el aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos. Al planificar una secuencia didáctica, se busca crear un ambiente educativo ordenado y estructurado, en el que los estudiantes tengan la oportunidad de construir un conocimiento sólido y progresivo a través de una serie de actividades y contenidos relacionados. Además, se busca que los estudiantes puedan aplicar lo que han aprendido a situaciones cotidianas y resolver problemas matemáticos de manera efectiva. En resumen, el propósito de una secuencia didáctica es promover un aprendizaje profundo y duradero de las matemáticas, lo cual puede ser alcanzado a través de la planificación cuidadosa y la implementación adecuada de una serie de actividades y contenidos relacionados.
3	b	Los cuatro elementos que mencionas (objetivos, contenidos, actividades y evaluación) son fundamentales para la construcción de una secuencia didáctica en matemáticas efectiva. A través de los objetivos, se establecen las metas de aprendizaje que se esperan alcanzar al final de la secuencia; los contenidos se refieren a los conceptos y habilidades que se abordarán; las actividades son las estrategias y recursos que se utilizarán para que los estudiantes puedan comprender y aplicar los conceptos matemáticos; y la evaluación permite medir el progreso y logro de los objetivos de aprendizaje. En resumen, estos elementos trabajan en conjunto para asegurar que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo y duradero en matemáticas.

Autoevaluación 5		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
4	b	El aprendizaje cooperativo promueve la colaboración entre los estudiantes y les permite trabajar juntos en la resolución de problemas matemáticos, lo que puede ayudar a mejorar su comprensión de los conceptos y a desarrollar habilidades sociales. El aprendizaje basado en proyectos, por otro lado, implica que los estudiantes trabajen en proyectos prácticos que les permitan aplicar los conceptos matemáticos a situaciones reales, lo que les ayuda a entender la relevancia de los contenidos y a desarrollar habilidades de investigación y resolución de problemas. Es importante destacar que existen otras estrategias y metodologías que también pueden ser efectivas, como el uso de tecnología, la diferenciación pedagógica y la resolución de problemas
5	b	Para la evaluación formativa durante la secuencia se pueden utilizar actividades de autoevaluación, coevaluación o evaluación entre iguales, rúbricas, listas de cotejo, diarios de aprendizaje, entre otros recursos. Para la evaluación sumativa al final de la secuencia, se pueden aplicar exámenes escritos, proyectos, presentaciones orales, portafolios, entre otros. Además, es importante tener en cuenta que la evaluación debe estar alineada con los objetivos de aprendizaje y criterios de evaluación previamente establecidos.
6	b	Es importante elegir los contenidos más relevantes y significativos para los estudiantes, y organizarlos de manera lógica y coherente, de modo que se construya un conocimiento sólido y progresivo. La selección y organización adecuada de los contenidos también puede ayudar a garantizar que se logren los objetivos de aprendizaje de la secuencia didáctica.
7	b	La diferenciación pedagógica es una estrategia clave para adaptar una secuencia didáctica en matemáticas a las necesidades de los estudiantes, ya que implica ajustar la metodología, los recursos y los objetivos de aprendizaje para satisfacer las necesidades individuales de los estudiantes. La adaptación de los contenidos es otro aspecto importante para atender a las necesidades individuales de los estudiantes, ya que se pueden ajustar los niveles de dificultad y profundidad de los temas a tratar. Por último, el uso de materiales adicionales, como recursos digitales o manipulativos, puede ayudar a los estudiantes a entender conceptos complejos y a reforzar el aprendizaje. En resumen, la adaptación de una secuencia didáctica en matemáticas es crucial para lograr un aprendizaje significativo y efectivo para todos los estudiantes.

Autoevaluación 5		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
8	b	El papel del docente en una secuencia didáctica en matemáticas es fundamental, ya que es quien guía y acompaña a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. El docente debe estar presente en cada etapa de la secuencia, desde la planificación hasta la evaluación, y debe ser capaz de adaptar la enseñanza a las necesidades de los estudiantes. Además, debe fomentar la participación activa de los estudiantes, promoviendo su reflexión, su análisis crítico y su creatividad. En resumen, el docente debe ser un facilitador del aprendizaje y un guía para que los estudiantes puedan alcanzar los objetivos propuestos en la secuencia didáctica en matemáticas.
9	b	Una amplia variedad de recursos puede ser utilizados en una secuencia didáctica de matemáticas para enriquecer la enseñanza y el aprendizaje. Además de la tecnología y los juegos, también se pueden emplear materiales didácticos como manipulables, vídeos educativos, ejercicios interactivos, entre otros. Es importante que los recursos elegidos estén adecuados a los objetivos y contenidos de la secuencia didáctica y sean relevantes y atractivos para los estudiantes, de modo que les resulten motivadores para su aprendizaje.
10	a	Si los objetivos están bien definidos y organizados de manera lógica, el docente puede diseñar actividades y contenidos que se ajusten a esos objetivos, lo que permitirá que los estudiantes construyan un conocimiento sólido y progresivo. Además, esto facilitará la evaluación del aprendizaje de los estudiantes y ayudará al docente a realizar ajustes necesarios en la secuencia didáctica para garantizar la continuidad y coherencia del proceso de aprendizaje.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 6		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	c	$5^{x-1} = 125$ si y solo si $5^{x-1} = 5^3$ si y solo si x-1=3 si y solo si x=4
2	a	Si $10^{2x^2-3} = 10^{9-x^2}$, entonces $2x^2 - 3 = 9 - x^2$, entonces $3x^2 - 12 = 0, entonces\ 3(x^2 - 4) = 0, entonces\ x^2 - 4 = 0, entonces\ x = \mp 2$
3	c	Si 10 $(1.375)^{10t} = 0, entonces\ 10t\ln(1.375) = ln\ ln\ (0)\ , entonces$ $10t\ln(1.375) = -\infty, entonces\ \ t = -\infty$
4	c	Si $1-e^{4x+1}=0$, entonces $e^{4x+1}=1$,entonces ln ln (e^{4x+1})=ln ln (1), entonces 4x+1=0,entonces $x=-\frac{1}{4}$
5	a	Si $e^{2x} - e^x - 6 = 0$, entonces realizando un cambio de variable de $e^x=t$,entonces $t^2-t-6=0$,entonces (t-3)(t+2)=0,entonces t=3 y t=-2,Devolviendo el cambio de variable $e^x=3$ y $e^x= - 2$, de donde solo $e^x=3$ tiene solución real, esto es aplicando logaritmo natural en los 2 miembros y despejando x se tiene que x= $\frac{ln\ (3)}{1}$ = 1.09861
6	a	Si $\log_5(x)+\log_5(x+1)=\log_5(20)$ $\log_5(x(x+1)) = \log_5(20)$ $x^2+x-20=0$ (x+5) (x-4) =0 X=-5 y x=4, de donde solo x=4 es solución de la ecuación, debido a que x= -5 no pertenece al dominio de la función logarítmica.
7	b	**Si** $\log_3(2-x) = 3$, entonces $3^3 = 2 - x, entonces$ $27 = 2 - x, entonces$ $x = 2 - 27, entonces$ $x = -25$
8	c	$log\ log\ (10) = x^2 - 2$ si y solo si 10^{x^2-2}=10, si y solo si $x^2 - 2 = 1, si\ y\ solo\ si\ x^2 = 3\ si\ y\ solo\ si\ X = \mp\sqrt{3}$, de donde solo x=$\sqrt{3} es\ solución, porque\ X = -\sqrt{3}$ no pertenece al dominio de la función logarítmica
9	a	$3 \leq log_2(x) \leq 4 si\ y\ solo\ si$ $2^3 \leq x\ \ y\ \ 2^4 \leq x\ \ si\ y\ solo\ si$ $8 \leq x \leq 16$
10	b	Si $\log(x^3) = 10$, entonces $10^{10} = x^3$, entonces $x = \sqrt[3]{10^{10}}, entonces\ X = 2154.43$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 7		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	Si $n(t) = n_0 . 2^{\frac{t}{a}}$ Entonces $n(t) = 10.2^{\frac{t}{1.5}}$ y si t=35 horas entonces es $n(t) = 10.2^{\frac{35}{1.5}}$ es $n(t) = 10.2^{23.333333}$ es $n(t) = 105689813.57$ es $n(t) = 1.056x10^8$ Para saber qué tiempo pasa para que haya 10000 bacterias, entonces $n(t) = n_0 . 2^{\frac{t}{a}}$ $10000 = 10.2^{\frac{t}{a}}$ $1000 = 2^{\frac{t}{1.5}}$ $ln(1000) = ln(2) . \frac{t}{1.5}$ $t = 1.5 . \frac{ln(1000)}{ln(2)}$ $t = 15\ horas$
2	b	Si $n(t) = n_0 . 2^{\frac{t}{a}}$ $n_0 = \frac{n(t)}{2^{\frac{t}{a}}}$ Entonces $n_0 = \frac{13000}{2^{\frac{25}{10}}}$ $n_0 = \frac{13000}{2^{2.5}}$ $n_0 = \frac{13000}{5.66}$ $n_0 = 2297$ y si t=25+5=30 horas entonces es es $n(t) = 2297.2^{\frac{30}{10}}$ $n(t) = 2297.2^3$ $n(t) = 18376$

Autoevaluación 7		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
3	c	Si $n(t) = n_0 . 2^{\frac{t}{a}}$

a. De acuerdo con los datos, basta despejar n_0 para un tiempo t = 30:

$$n_0 = \frac{n(t)}{2^{\frac{t}{a}}}$$

Entonces

$$n_0 =$$

100000/32

$$n_0 = \frac{13000}{2^{2.5}}$$

$n_0 = 3125$ Ardillas

Respuesta: Inicialmente se tuvo una población de 3125 ardillas

b. Tomando en cuenta los datos y la población inicial en el modelo, para t = 40:

$$n(40) = 3125.2^{\frac{40}{6}} = 317480{,}2104$$

Respuesta: La población de ardillas luego de 10 años a partir de ahora es de aproximadamente 317480 (parte entera)

Solucionario

Autoevaluación 7		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
4	c	*Como* $rt = \ln A$ *si y solo si* $$t = \frac{\ln A}{r}$$ Basta reemplazar por 2 o 3 el valor de *A* para duplicar o triplicar la población inicial respectivamente. a. Para *A* = 2 : = 63,0134 **Respuesta:** La población se habrá duplicado en 63.01 años b. Para *A* = 3: $t = \frac{100 \ln 2}{1.1}$ = 99,8738 **Respuesta:** La población se habrá triplicado en 99.87 años

Autoevaluación 7		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
5	a	**Solución:** Consideramos el año 2014 como el inicio del análisis temporal, es decir, será equivalente hablar de ese año cuando t = 0. Modelo de crecimiento poblacional en duplicación. $$n(t) = n_0.2^{\frac{t}{a}}$$ $$n(t) = 112000.2^{\frac{t}{18}}$$ Por la definición de la función, sabemos que para un tiempo t = 18 años, la población habrá duplicado por primera vez su valor n_0: $$n(18) = 112000.2^1$$ $$n(18) = 224000$$ Con los mismos datos y la definición encontramos la tasa de crecimiento relativa: $$n(t) = n_0.e^{rt}$$ $$n(18) = 2n_0. = n_0 e^{18r}$$ $$n(t) = n_0.e^{rt}$$ $$ln2 = lne^{18t}$$ $$r = \frac{ln2}{18} \approx 0.0385$$ Respuesta: $$n(t) = 112000.e^{0.0385t}$$ Para una población de $n(t)$ = 500000 , usamos el literal a) $$n(t) = 112000.2^{\frac{t}{18}}$$ $$500000 = 112000.2^{\frac{t}{18}}$$ $$log_2 \frac{125}{28} = log_2 2^{\frac{t}{18}}$$ $$de\ donde\ t\ es\ igual\ a:$$ t=38.85 **Respuesta:** La población alcanza las 500000 personas cuando transcurre aproximadamente 38.85 años

Autoevaluación 7		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
6	b	Consideramos la masa actual como el 59 % de la masa inicial de la tela. Podemos usar el modelo de Desintegración Radiactiva en cualquiera de sus formas, ya sea de forma *Relativa* o *Media*. En nuestro caso escogemos la forma media del modelo. $m(t) = m_0.2^{-\frac{t}{a}}$ Así, encontramos el tiempo transcurrido en que la masa actual llega a ser el 59 % de la masa inicial. $m(t) = m_0.2^{-\frac{t}{a}}$ $0.59m_0 = m_0.2^{-\frac{t}{5730}}$ $0.59 = 2^{-\frac{t}{5730}}$ **Respuesta:** Ha transcurrido 4361.75 años desde que sucedió el entierro de la momia egipcia aproximadamente.
7	b	Como $ln\left(\frac{T-20}{200}\right) = -0.11$ $\frac{T-20}{200} = e^{-0.11t}$ $T - 20 = 200e^{-0.11t}$ $T = 200e^{-0.11t} + 20$ Luego $T(20) = 200e^{-0.11(20)} + 20$ $T(20) = 22°F$
8	b	*El modelo es:* $n(t) = n_0 \cdot e^{rt} = 18000 \cdot e^{0,08t}$ Para el año 2021 habrá pasado un valor de $t = 8$ desde el 2013. Entonces: $n(8) = 18000 \cdot e^{0,08 \cdot 8} \approx 34136,6558$ **Respuesta:** Para el 2021 habría una población de 34136 zorros.

Solucionario

Autoevaluación 7		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
9	c	**Como** $m(t) = 13e^{-0.015t}$ $m(0) = 13e^{-0.015(0)}$ $m(0) = 13$ $m(45) = 13e^{-0.015(45)}$ $m(45) = 13e^{-0.675}$ $m(45) = 13(0.51)$ $m(45) = 6.63$
10	a	a. $n(t) = \frac{5600}{0.5+27.5e^{-0.044t}}$ $n(0) = \frac{5600}{0.5+27.5e^{-0.044(0)}}$ $n(0) = \frac{5600}{28}$ $n(0) = 200$ b. Cuando t tiende a más infinito, entonces $n(t) = \frac{5600}{0.5} = 11200$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 8		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	representar puntos en una escala logarítmica es equivalente a representar los logaritmos de esos valores en una escala milimétrica normal.
2	V	Los químicos medían la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno hasta que Søren Peter Lauritz Sørensen, en 1909, propuso una medida más cómoda. Él definió pH=-log (H^+)
3	F	La escala de Richter mide la intensidad de los terremotos
4	V	La sensación psicológica de intensidad varía con el logaritmo de la intensidad (ley de Weber-Fechner), de modo que el nivel de intensidad B, medido en decibeles, está definido como $$B = 10log(\frac{I}{I_0})$$
5	V	La sensibilidad que presenta el oído humano a las variaciones de intensidad sonora sigue una escala aproximadamente logarítmica, no lineal. Las ondas sonoras son no lineales, esto es todo sonido se transmite en forma de onda
6	V	Søren Peter Lauritz Sørensen, en 1909, propuso una medida más cómoda para medir la acidez Él definió pH=-log (H^+)
7	V	En 1935 el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) defi nió la magnitud M de un terremoto como M = log 1/s donde I es la intensidad del terremoto, medida por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del sismo; y S es la intensidad de un terremoto "estándar" (cuya amplitud es 1 micrón)
8	V	La sensación psicológica de intensidad varía con el logaritmo de la intensidad (ley de Weber-Fechner), de modo que el nivel de intensidad B, medido en decibeles, está definido como $$B = 10log(\frac{I}{I_0})$$
9	V	Una **escala** logarítmica que asigna un número para cuantificar la energía liberada en un terremoto se debe gracias a Charles **Richter.**

Solucionario

Autoevaluación 8		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
10	V	Nuestro oído es sensible a una gama extremadamente grande de intensidades de sonido. Tomamos como referencia la intensidad 10^{-10} W×m^{-2} (Intensidad umbral 10^{-12} W×m^{-2}) es 20 db. a una frecuencia de 1 000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 9		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	Es formativa cuando permite reajustar y retroalimentar continuamente dentro del proceso o al final
2	c	La meta-evaluación remite a la **evaluación** aplicada a una **evaluación** realizada sobre un objeto, ente o sobre alguna actividad humana.
3	a	Según cual sea su agente, se distinguen los siguientes tipos de evaluación: Autoevaluación: el sujeto evaluado se convierte en agente que evalúa. Este tipo de evaluación permite convertir el proceso evaluador en un acto de responsabilidad de la persona sobre el propio proceso de aprendizaje y, en consecuencia, propicia una mayor autonomía en el aprendizaje. Coevaluación: la evaluación se lleva a cabo entre iguales, esto es, entre aprendientes que se evalúan recíprocamente. Heteroevaluación: el sujeto evaluador y el evaluado pertenecen a jerarquías distintas, como pueden ser el profesor y el estudiante.
4	c	La Evaluación es formativa porque persigue mejorar y lograr perfeccionamiento en el proceso de enseñanza aprendizaje, tanto así que se constituye en una herramienta crucial para el desarrollo del proceso didáctico.
5	b	La Evaluación es integral porque al ser una etapa del proceso educativo nos proporciona información de los diferentes ámbitos del sistema educativo, como son: planificación curricular, entorno natural y social, métodos y técnicas didácticas, materiales empleados; y, principalmente del accionar docente y dicente dentro y fuera del aula.
6	c	Las técnicas de observación permiten evaluar los procesos de aprendizaje en el momento que se producen; con estas técnicas los docentes pueden advertir los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores que poseen los alumnos y cómo los utilizan en una situación determinada.
7	b	La diferencia entre técnica e instrumento de evaluación radica en que la primera es un procedimiento mediante el cual se llevará a cabo la evaluación y la segunda es un documento de aplicación.
8	c	Una ventaja del cuestionario es se puede aplicar de manera simultánea a más de una persona.
9	a	Corrección exacta, rápida y **objetiva**. Mismo criterio para todos los alumnos. corrección sin esfuerzo. Conceptos a evaluar idénticos para todos los alumnos. Contestan únicamente a lo preguntado, sin salirse del tema. Permite al profesor corregir o reorientar la enseñanza según los resultados obtenidos.

Autoevaluación 9		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
10	d	**Desventajas**: -Capacidad limitada para medir dimensiones cognitivas de alto nivel y complejas, como la creatividad y la habilidad para resolver problemas. - Dificultad en la elaboración y redacción de **reactivos** - Dificultad en la elaboración de distractores adecuados.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

5. Referencias bibliográficas

Actualidad en psicología. (2016). La teoría de los estilos de aprendizaje de Kolb. Recuperado de https://www.actualidadenpsicologia.com/la-teoria-de-los-estilos-de-aprendizaje-de-kolb/

Andújar. (2012). Estilos de aprendizaje de David Kolb. Andújar-España. Recuperado de https://www.orientacionandujar.es/wp-content/uploads/2014/05/ESTILOS-DE-APRENDIZAJE_EL-MODELO-DE-KOLB.pdf

Andrade, A., Juárez, M., García, F., Padilla, L. y Vargas, L. (2010). Técnicas e instrumentos para facilitar la evaluación de aprendizaje. Recuperado de http://moodle2.unid.edu.mx/dts_cursos_mdl/lic/ED/AV/AM/11/Manual.pdf

Crawford A, Makinster J, Mathews S, Saul W, Temple Ch. Aprendizaje Activo. Pensamiento Crítico. Open Society Institute. N.Y. Budapest. 2004. Manual presentado en el Taller de Aprendizaje Activo y Pensamiento Crítico organizado en Quito por Open Society WRCT y CEPP. 2005.

Díaz, A. (2013) Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. México, IISUE-UNAM-Bonilla.

Didactalia. (2012). ¿Cómo crece una población de levaduras? https://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/como-crece-una-poblacion-de-levaduras/29e57d41-7113-4e92-bbb2-80394e864e68

Grisales, A. (2019). Estadística descriptiva y probabilidad con aplicaciones en Excel y SPSS. Bogota: Ecoe Ediciones

IESCampus. (13 de mayo de 2013). Ecuaciones exponenciales. https://www.youtube.com/watch?v=oYrMgN4Of3M

KhanAcademicEspañol. (s. f). Escala logarítmica. https://www. youtube.com/watch?v=DBz5dsoZmw

Ministerio de Educación. (2016). Instructivo para la aplicación de la evaluación estudiantil. Recuperado de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/07/Instructivo-para-la-aplicacion-de-la-evaluacion-estudiantil.pdf

Ministerio de Educación. (2016). Currículo Matemática. Recuperado de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/03/MATE_COMPLETO.pdf

Ministerio de Educación. (2016). Matemática. Guía para implementar el Currículo. Recuperado de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2017/02/Guia-de-implementacion-del-Curriculo-de-Matematica.pdf

Ministerio de Educación - Subsecretaría de Fundamentos educativos. (2016). Instructivo: Planificaciones curriculares para el sistema nacional de educación. Recuperado de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/03/planificaciones-curriculares.pdf

Moreira, Marco Antonio (2000). Aprendizaje significativo: teoría y práctica. Ed. Visor. Madrid. España.

Lafourcade, P. " Evaluación de los aprendizajes" . Editorial Kapelusz. Bs .1992

Lind, D., Marchal, W. y Wathen, S. (2015). Estadística aplicada a los negocios y la Economía. México: McGraw-Hill

Luque, F. (s.f.). Experimentos científicos. https://www.experimentoscientificos.es/ph/escala-del-ph/

Orientación Andújar. (2012). Estilos de aprendizaje de David Kolb. Andújar-España. Recuperado de https://www.orientacionandujar.es/wp-content/uploads/2014/05/ESTILOS-DE-APRENDIZAJE_EL-MODELO-DE-KOLB.pdf

Profe en c@sa. (s. f.). Resolución de problemas con funciones exponenciales. https://www.youtube.com/watch?v=dJf5Gw6M59g&t=10s

Profesor10demates. (28 de octubre de 2018). Ecuaciones logarítmicas TRUCOS ejercicios resueltos de exámenes. https:// www.youtube.com/watch?v=bFh1YU_GfiQ

ProfeWilmer. (10 de octubre de 2017). ProfeWilmer. Interés compuesto | calcular el tiempo de una inversión usando logaritmos. https://www.youtube.com/watch?v=deBwNE8ilEA

Salazar, C. y Del Castillo, S. (2018). Fundamentos básicos de estadística. Recuperado de http://librodigital.sangregorio.edu.ec/librosusgp/B0009.pdf

Sánchez, F. (s. f.). ¿Qué es una escala logarítmica? http://hidrologia. usal.es/Complementos/papeles_log/fundamento_log.pdf

SCRIVEN, M. y PAUL, R. (1992). Defining critical thinking. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/652/65201013.pdf. Consulta: febrero 2023.

Stewart, J., Redlin L. y Watson, S. (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Séptima edición. Cengage Learning. México. D.F.

Stuffebeam, D.; Shinkfield, A." Evaluación Sistemática (guía teórica y práctica) Temas de educación. Editorial Paidós. Barcelona 1993.

Profe Miguel (s. f.). Ecuaciones Exponenciales utilizando Cambio de Variable. https://www.youtube.com/watch?v=JhENx5M2Cq4

Universitat de Valencia- Proyecto CEACES (s.f.) Números índices.

Recuperado de https://www.uv.es/ceaces/numindices/ clasifica.htm

UPM (2008). Aprendizaje basado en problemas. Recuperado de https://innovacioneducativa.upm.es/guias/Aprendizaje_ basado_en_problemas.pdf

Webster, A. (2000). Estadística aplicada a los negocios y la economía. México: McGraw-Hill

Referencias

6. Anexos

Anexo 1. Ejemplo ilustrativo 1

Construcción del conocimiento mediante ciclo de aprendizaje

Unidad: Funciones Exponenciales y Logarítmicas
Asignatura: Sistema de funciones exponenciales y logarítmicas y su didáctica.
Tema: Aplicaciones de las funciones exponenciales.
Objetivo: Aplicar las funciones exponenciales a situaciones de la vida real.

Tema: Resolución de Ecuaciones exponenciales.
Objetivo: Resolución de Ecuaciones exponenciales utilizando la definición y propiedades de las funciones exponenciales y utilizando la aplicación GeoGebra.

Fase	Contenido/actividad	Recursos	Tiempo
Experiencia Concreta	Problema: se invierte una suma de 1 000 dólares a una tasa de interés de 4 % al año. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad crezca a 4000 dólares si el interés se capitaliza continuamente. Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con P = \$1 000, A(t) = \$4 000 y r = 0.04 y de la ecuación exponencial resultante se despeja t. $A(t) = Pe^{rt}$ $4 = 1000e^{0.04t}$ $ln\, ln\,(4) = 0.04t$ $t = \frac{ln\,(4)}{0.04}$ $t \approx 34.66\ años$ La cantidad será 4 000 dólares en 34 años y 8 meses Se muestra la gráfica de $A(t) = 1000e^{0.04t}$ utilizando GeoGebra.	Texto básico, plataformas: GeoGebra y Khan Academy, *Zoom*, videos, películas, gráficos.	15 min.

Fase	Contenido/actividad	Recursos	Tiempo
Reflexiva Gráfica	Preguntas generadoras: ¿Cuál es el capital inicial? ¿La tasa de interés en anualizada o mensual? ¿Qué tipo de función se utiliza? ¿La función crece o decrece?	Gráficos, Plataformas: GeoGebra, Khan Academy, Zoom, material escrito, texto básico, guía didáctica.	15 min.
Conceptual Simbólica	Se entregan documentos que contienen definiciones, gráficos y propiedades de una función exponencial.	Material escrito, texto básico, guía didáctica, algoritmos, mapas conceptuales.	20 min.
Aplicación consolidada	Los estudiantes en grupo o individualmente realizarán un análisis de las diferentes aplicaciones de las funciones exponenciales a la vida real.	Plataformas: GeoGebra, Khan Academy, Zoom, texto básico, guía de ejercicios.	40 min.

Anexos

Anexo 2. Ejemplo ilustrativo 2

Construcción del conocimiento mediante ciclo de aprendizaje

Unidad: Funciones Exponenciales y Logarítmicas **Asignatura:** Sistema de Conocimientos de Funciones Exponenciales y Logarítmicas y su Didáctica
Tema: Funciones Logarítmicas
Objetivo: Representar gráficamente las funciones logarítmicas utilizando GeoGebra.

Construcción del conocimiento mediante ciclo de aprendizaje

Unidad: Números enteros **Asignatura:** Matemáticas
Tema: Adición de enteros
Objetivo: Sumar números enteros aplicando el conocimiento en la resolución de problemas sencillos.

Fase	Contenidos / estrategias	Recursos	Tiempo
Anticipación	▪ Lectura en voz alta de la definición, propiedades operatorias, gráficos y leyes de la función logarítmica. ▪ Lluvia de ideas en parejas sobre palabras claves. ▪ En esta secuencia se abordarán los siguientes temas: análisis de la gráfica de la función logarítmica en la variación de la base como parámetro; análisis de los cambios en la gráfica a partir de la suma de una constante en el argumento del logaritmo e incorporación de herramientas para el estudio de la variación de parámetros, como método de análisis de las funciones a estudiar. ▪ En esta secuencia se trabajará con el programa GeoGebra.	Texto base, Plataformas: GeoGebra y Zoom, videos, gráficos.	30 min.

Fase	Contenidos / estrategias	Recursos	Tiempo
Construcción del Conocimiento	▪ Mapa semántico. ▪ Círculo de lectura y roles asignados. ▪ Utilizando el programa GeoGebra, grafiquen la función definida por **f (x) = $\log_2$(x)**, y analicen el rango de variación del dominio de la función. Coloreen la gráfica de esta función, porque la tomaremos como referencia para la comparación. ▪ Para calcular el cero de la función, utilizaremos la herramienta Intersección de dos objetos, en el menú de opciones de punto. Lo determinaremos haciendo *clic* sobre la gráfica de la función y luego sobre el eje **x**. A medida que movamos el parámetro **c**, el punto generado como cero de la función también se irá moviendo. Junto con el docente, debatan las siguientes cuestiones: c. ¿Qué tipo de desplazamiento generan los cambios en el parámetro c? d. ¿Qué relación tiene con la asíntota vertical de la gráfica? e. ¿Qué relación tiene la variación del parámetro con el dominio de la función? f. ¿De qué manera varía el cero de la función conforme hacemos variar el parámetro?	GeoGebra. Material escrito, texto básico, guía didáctica, a lgoritmos, mapas conceptuales.	30 min.
Consolidación	▪ Construcción de g ráficas de funciones logarítmicas utilizando GeoGebra. ▪ Dialogar en grupo, argumentar y sustentar lo estudiado.	Gráficos, Plataformas: GeoGebra, Zoom, Material escrito, texto básico, guía didáctica.	20 min.

Anexos