UTPL

La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Álgebra Lineal y su Didáctica

Guía didáctica

UTPL

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Departamento de Ciencias de la Educación

Sistemas de Conocimiento de Álgebra Lineal y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	*PAO Nivel*
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)*	VIII

Autora:

Parra Nora Esperanza

EDUC_4154

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento de Álgebra Lineal y su Didáctica
Guía didáctica
Parra Nora Esperanza

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-586-3

20 de septiembre, 2022

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Fomentar procesos comunicacionales, dialógicos en la gestión institucional y de vinculación con la comunidad orientados al desarrollo integral de la persona desde su trascendencia y el ejercicio de un liderazgo con principios de honestidad, responsabilidad, creatividad, trabajo en equipo y humildad intelectual.

- Desarrollar sistemas de conocimientos en matemática, especialmente números y funciones, álgebra y geometría, estadística, probabilidad, matemática discreta, geometría analítica y cálculo integral, apoyado en la investigación y reflexión crítica sobre las experiencias en el aula, administrando procesos de aprendizaje, fomentando cambios y provocando innovaciones para el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y creativo de los educandos.

- Utilizar herramientas tecnológicas educativas para la interacción y la construcción del conocimiento como docente en pedagogía de las matemáticas y la física.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

Se limita la importancia de involucrar el contexto para el análisis y aprendizaje del estudiante, en la aplicabilidad de la asignatura, en la resolución de problemas que demande la toma adecuada de decisiones. Es menester también mencionar el fomentar el análisis crítico, lógico, matemático para dar énfasis a la identidad de las personas que aprenden y sus interacciones con la familia y sociedad, que apoye a la consolide su proyecto de vida desde los principios de fraternidad, dignidad humana, libertad, que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuros en los contextos. Limitado dominio teórico, ausencia de un proceso didáctico que se aparte de la lógica de los contenidos y, el limitado conocimiento en temas de dominio disciplinar, así como las inadecuadas metodologías.

2. Metodología de aprendizaje

Para alcanzar los objetivos de aprendizaje con la presente guía es dar al estudiante las herramientas necesarias, fomentando durante el desarrollo de la asignatura el aprendizaje basado en problemas, logrando un aprendizaje significativo, enfocándolo a la investigación, cooperación, interacción, desarrollo de problemas, utilización de herramientas TIC y aprendizaje por pares, interdependencia positiva y responsabilidad individual con lo cual el estudiante active su aprendizaje y lo convierta en significativo.

Se empezará instaurando en el aprendizaje del estudiante problemas o planteamientos de casos, que se ha convertido en una de las metodologías activas más eficaces en el sistema educativo a nivel mundial, promoviendo en el estudiante el pensamiento crítico, razonamiento lógico - matemático, la dialéctica, trabajo colaborativo relacionando la teoría y la práctica a través del análisis de situaciones problemáticas de la vida real.

Con esta metodología se pretende, en el transcurso del semestre, que el estudiante construya el verdadero conocimiento a través de proyectos tangibles con que respondan a sus inquietudes y necesidades, estos han de planearse, diseñarse y ejecutarse con miras a que el estudiante incorpore a su sistema cognitivo, los contenidos y estándares de aprendizaje establecidos en la programación respectiva.

Será necesario incorporar como complemento a su estudio y revisión de los contenidos de esta asignatura las TIC para mejorar su comprensión, adquisición de destrezas y habilidades para que las puedan reproducir y reutilizar en la enseñanza de las siguientes generaciones con valor agregado.

Se hará indispensable la mediación para que se genere el aprendizaje significativo a través de la interacción del docente, estudiante y los contenidos, agentes indispensables en el proceso educativo.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Aplica conceptos de matrices y sistemas de ecuaciones lineales en la resolución de problemas relacionados con el entorno natural y social.

Como docentes en formación de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales -Pedagogía de las Matemáticas y la Física, el Álgebra Lineal, a través de la enseñanza de sistemas de ecuaciones, matrices, vectores, permitirá al estudiante trascender en la modelación y resolución de problemas de la vida real, en todas las aristas de las ciencias, como parte de la enseñanza de esta asignatura y en la toma de decisiones de los diversos escenarios en donde se involucre la matemática.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 1

La palabra álgebra proviene del término árabe *yabr* que significa "reducción" y aparece por primera vez en el tratado del matemático persa Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi titulado "Compendio de cálculo por el método de completado y balanceado" y dedicado especialmente a la solución de ecuaciones (Aranda, 2013, p.6).

¿Qué es el álgebra lineal?

En el enlace del libro Geogebra en el punto 1.2, trata la aplicación del álgebra lineal en algunas áreas de la ciencia, por ejemplo economía, redes de comunicación, este recurso es interactivo y se puede acceder a los temas de esta asignatura.

En el video Fundamentos del Álgebra Lineal se analiza la esencia del álgebra lineal y muestra los conceptos necesarios que debe comprender el estudiante y pueda aplicarlo en cualquier problemática para que pueda tomar las mejores decisiones.

En el video Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2x2 , encontrará la explicación de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales y de acuerdo con ellas se clasifica los sistemas en compatibles, Incompatibles e Inconsistentes, además de la explicación gráfica de la solución de cada tipo de sistema.

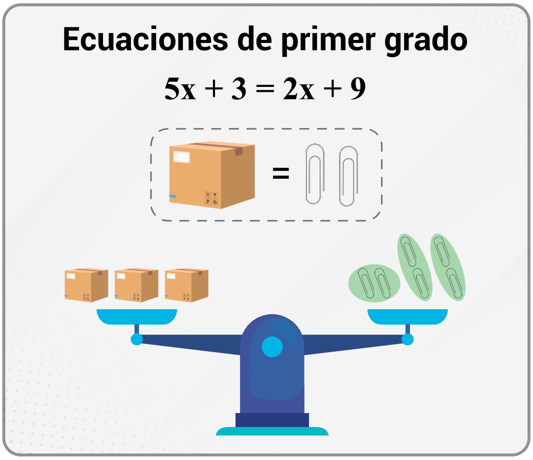
Unidad 1. Sistema de ecuaciones lineales

1.1. Ecuación lineal

Antes debemos tener presente el significado de ecuación, según Morales (2022), “la palabra ecuación viene de a Equus (igual, liso, uniforme) que es raíz también de palabras como igualdad, equitativo, equidad, etc.” (p.12).

Figura 1.

Representación de ecuaciones lineales



Nota. Adaptado de *Ecuaciones de primer grado* [Fotografia], por Ana blanco, s.f, Pinterest https://pin.it/3oxaVSS

Una igualdad matemática contiene incógnitas o variables, las cuales se simbolizan por letras del alfabeto x, y o z, etc. Las variables están sujetas a que su valor puede cambiar, a diferencia de otras, llamadas constantes cuyo valor no cambia. Si representamos el concepto de ecuación lineal a través de una balanza, donde las entradas son los productos que vamos a pesar y que deben igualar al peso de las medidas o pesas.

Una ecuación puede representar una afirmación falsa o verdadera, según las variables pueden adquirir uno o más valores que satisfagan a dicha ecuación.

Por ejemplo:

$1+3=4$	Es verdad.
$5=0$	Es falsa.
$x+3=0$	Es verdad, sólo si x toma el valor -3
$y=5$	Es verdad, sólo si y toma el valor 5
$y-y=0$	Es verdad para cualquier valor de y
$7x-7x+1=0$	Es falsa para cualquier valor de x
$2x-y=0$	Es verdad para un conjunto infinito de valores, siempre que el valor y sea el doble de x

El exponente de las variables que pertenecen a una ecuación lineal corresponde a la primera potencia. Se presenta los siguientes tipos de ecuaciones, Por ejemplo:

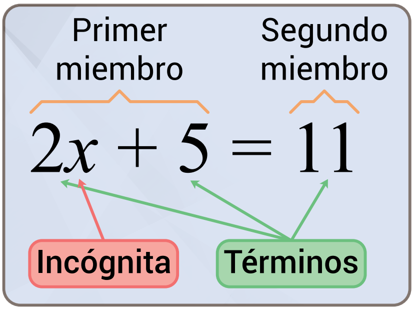
$x - 2y + 3z - 4 = 0$ es una ecuación lineal con tres incógnitas.

$x - 2y - 4 = 0$ es una ecuación lineal con dos incógnitas

$x - 4 = 0$ es ecuación lineal de una incógnita

Figura 2.

Partes de una ecuación lineal



Nota. Se explica las partes de una ecuación lineal. Elaboración propia

A cada uno de los sumandos de la ecuación se los llama términos. Cuando los términos tienen la misma parte literal se dice que son semejantes.

1.2. Sistemas lineales

Cuando varias ecuaciones comparten las mismas incógnitas y soluciones, decimos que forman un sistema de ecuaciones, si ninguna de las incógnitas tiene un exponente mayor que uno, se dice que las ecuaciones son lineales.

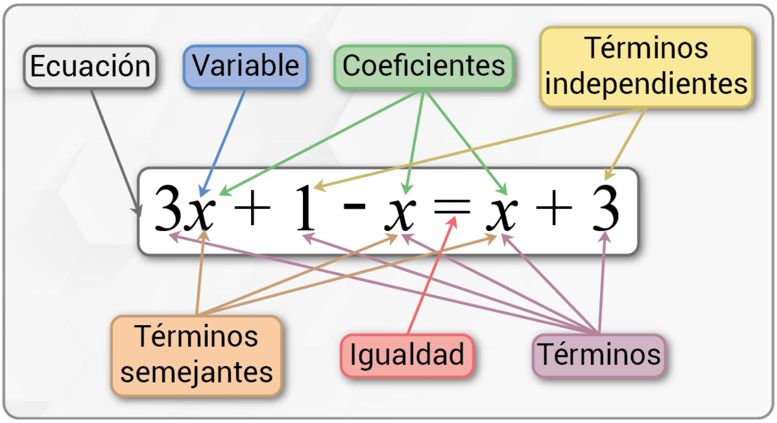
Un sistema de dos ecuaciones lineales con incógnitas **x** y **y**, también llamado ecuaciones simultáneas de dos por dos es de la forma:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

donde $\boldsymbol{a_{11}}$, $\boldsymbol{a_{12}}$, $\boldsymbol{a_{21}}$ *y* $\boldsymbol{a_{22}}$ son *coeficientes reales* y $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$**,** son *términos independientes*. En cada una de las ecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero.

En la imagen se muestra otros elementos que corresponden a una ecuación lineal:

Figura 3.
Elementos de una ecuación lineal



Nota. Se identifica los elementos de una ecuación lineal. Elaboración propia

1.3. Resolución de sistemas de ecuaciones

La **solución de un sistema de ecuaciones** es el conjunto de valores que las variables deben tomar para satisfacer simultáneamente todas las ecuaciones del sistema, estos valores pueden ser únicos, infinitos o no puede existir solución.

Existen algunos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales como el método de suma y resta, método de sustitución, método de igualación, y el método gráfico. Se explicará sin un orden específico.

Método de reducción, método de suma y resta o de eliminación

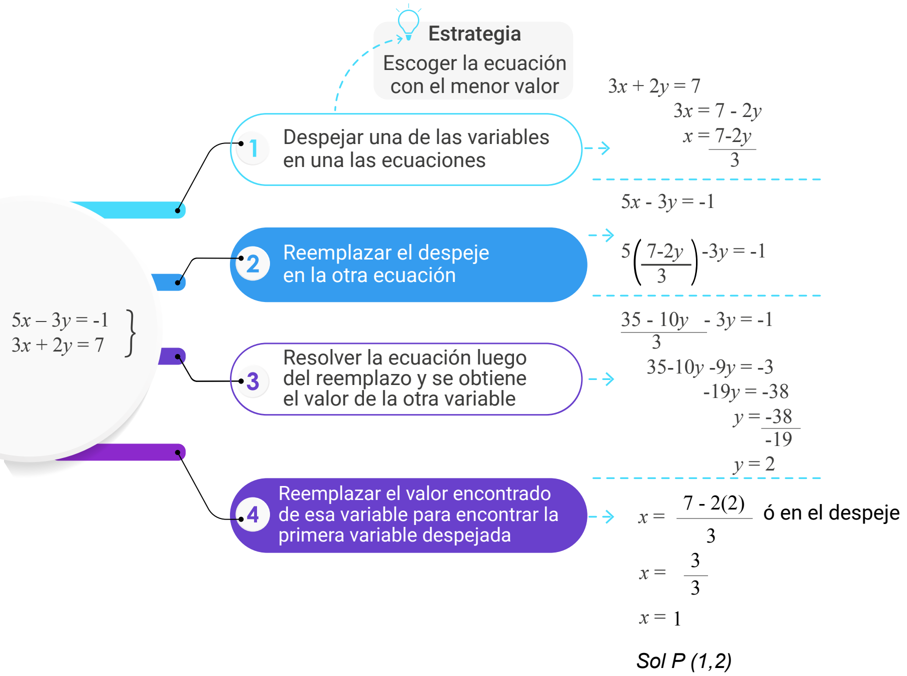
Estimado/a estudiante, le invito a profundizar sus conocimientos revisando el siguiente recurso.

Método de reducción, método de suma y resta o de eliminación

Método de sustitución

Figura 4.

Resolución de un sistema de ecuaciones por el método de sustitución



Nota. Se describe los pasos del método de sustitución en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Elaboración propia

Método de igualación

Ahora, continuemos con su aprendizaje de revisando el siguiente recurso acerca del método de igualación.

Método de igualación en sistemas de ecuaciones

Método gráfico

Para entender este método, se debe tener claro cómo es la ecuación de una recta. La ecuación de una recta en su forma explícita tiene esta forma.

$$y = mx + n$$

Este método es usado cuando nos dan soluciones aproximadas, y no es aconsejable cuando se tiene más de 2 incógnitas, sin embargo, es un método útil para anticipar la solución de un sistema y suele utilizarse como complemento de los demás métodos como menciona Morales (2022).

Por ejemplo, para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & Ec.1 \\ x - y = 2 & Ec.2 \end{cases}$$

Al graficar las funciones lineales procuramos encontrar dos puntos de dichas rectas, en donde estaríamos adoptando uno de los *postulados de Euclides,* donde se menciona que se puede trazar una recta conociendo dos puntos, por ejemplo, usando una tabla de valores dando valores a la variable independiente *x* y obtenemos el valor de *y* la variable dependiente como se muestra en la siguiente imagen:

Ec.1

x	y
0	$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{2}$	0

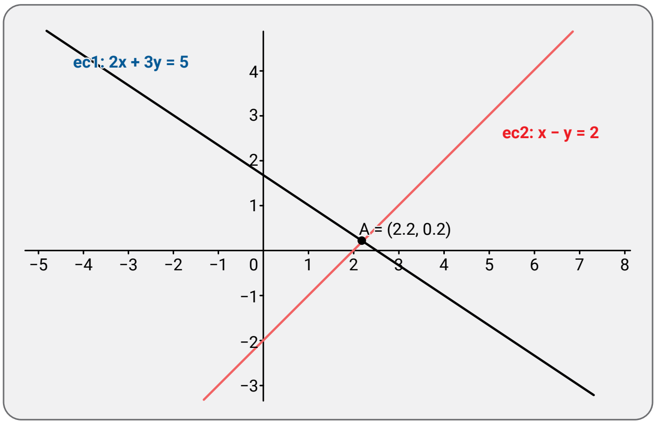
Ec.2

x	y
0	-2
2	0

Dichos valores de entrada y salida forman dos puntos de la primera y segunda ecuación, que serían $\left(0,\frac{5}{3}\right),\left(\frac{5}{2,0}\right),(0,-2)$ y $(2,0)$ respectivamente.

Figura 5.

Gráfica de la solución de un sistema compatible



Nota. Se muestra la gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones realizado en Geogebra. Elaboración propia.

El punto de intersección entre las dos rectas graficadas en la figura 5. Es la solución del sistema de ecuaciones planteado, es decir, se trata de un punto cuyas coordenadas corresponde a $P(x, y) = (2.2,0.2)$ siendo las coordenadas con valores aproximados.

A continuación, se presenta el caso de la resolución de sistemas de ecuaciones de tres ecuaciones y tres incógnitas.

Ejemplo:

En una fábrica de ropa se producen tres estilos de camisas que llamaremos 1, 2, 3. Cada prenda pasa por el proceso de cortado, planchado y empaquetado. Las camisas se elaboran por lote. Para producir un lote de camisas de **tipo I** se necesitan 30 min, para cortarlas, 40 min para coserlas y 50 min para plancharlas y empaquetarlas. Para el **tipo 2**, 50 min para cortar, 50 min para coser y para 50 min para planchar y empaquetar. Para el **tipo 3**, 65 min para cortar, 40 min para coser y 15 min para planchar y empaquetar ¿Cuántos lotes se pueden producir si se trabajan 8 horas en cortar, 8 horas en coser y 8 horas en planchar y empaquetar?

Solución:

Como estrategia de solución se utilizará una tabla de doble entrada para interpretar los datos del problema.

Tabla 1.

Tabla de doble entrada con los datos del problema

Tipo	Cortado	Cosido	Planchado y Empaquetado
I	30	40	50
II	50	50	50
III	65	40	15
	480	480	480

Nota. Interpretación de datos del ejercicio propuesto en una tabla. Elaboración propia.

El sistema de ecuaciones que se plantea es el siguiente:

$$30x + 50y + 65z = 480$$
$$40x + 50y + 40z = 480$$
$$50x + 50y + 15z = 480$$

Dividimos para 10 a todas las ecuaciones para simplificar los cálculos

$$\begin{aligned}3x + 5y + 6.5z &= 48\\ 4x + 5y + 4z &= 48\\ 5x + 5y + 1.5z &= 48\end{aligned}$$

Procedemos a resolver el sistema de ecuaciones por el método de reducción:

$$\begin{matrix}-4\\ 3\end{matrix}\begin{cases}3x + 5y + 6.5z = 48\\ 4x + 5y + 4z = 48\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}-12x - 20y - 26z = -192\\ \underline{12x + 15y + 12z = 144}\\ -5y - 14z = -48\ a)\end{array}$$

$$\begin{matrix}-5\\ 4\end{matrix}\begin{cases}4x + 5y + 4z = 48\\ 5x + 5y + 1.5z = 48\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}-20x - 25y - 20z = -240\\ \underline{20x + 20y + 6z = 192}\\ -5y - 14z = -48\ b)\end{array}$$

$$\begin{array}{r}-5y - 14z = -48\ a)\\ -(5y - 14z = -48)\ b)\\ 0 \quad = 0\end{array}$$

Por lo tanto, este sistema tiene soluciones infinitas.

Resolución por sustitución

Consiste en despejar una variable en una de las ecuaciones, como estrategia se sugiere que se despeje la variable más simple y se la reemplaza ese valor despejado en las otras ecuaciones, para deducir otro sistema de ecuaciones con una variable menos que el sistema inicial.

En el video Método de sustitución - sistema de ecuaciones lineales se evidencia la resolución de un sistema de 3X3 por el método de sustitución paso a paso, en que el estudiante debe poseer las destrezas de despeje de variables.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 & 1) \\ 3x - 5y - z = -10 & 2) \\ -x + 2y - 3z = -6 & 3) \end{cases}$$

Después de observar el video, revisar el recurso interactivo que muestra cómo resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales de tres variables y tres ecuaciones por el método de sustitución.

Método de sustitución, en sistemas de ecuaciones lineales de 3X3

Resolución por Igualación

Consiste en despejar una misma variable en las tres ecuaciones hasta encontrar otro sistema de ecuaciones con menos una variable, se vuelve a realizar la lógica de despeje hasta encontrar el valor de las variables.

En el video Método de Sustitución - Sistema de Ecuaciones Lineales puede ver cómo se resuelve un sistema 3X3 por el método de igualación paso a paso.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 \\ 3x - 5y - z = -10 \\ -x + 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

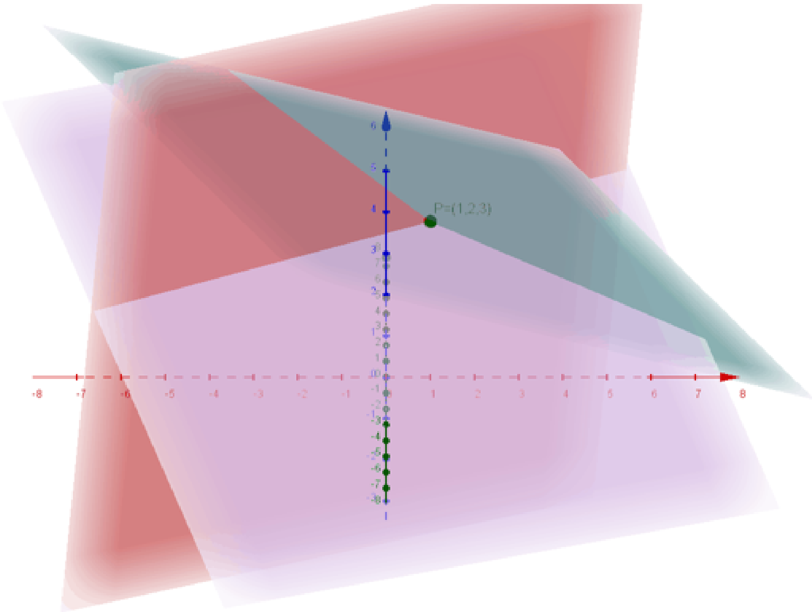
Método de igualación, en sistemas de ecuaciones lineales de 3X3

Este sistema es compatible dado que se ha determinado un punto de intersección de cada ecuación lineal del sistema, el cual es el punto $P\ (1{,}2{,}3)$, es decir, el sistema es de solución única.

Por cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales debemos encontrar la misma solución, con respecto al ejemplo tomado que se ha resuelto por el método de sustitución e igualación, se muestra su gráfica a modo de verificación que la intersección de los tres planos (ecuaciones con tres variables) se representan en el plano R^3, cuyo gráfico se muestra a continuación:

Figura 6.

Gráfica de la solución de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres variables



Nota. Representación de la solución de un sistema compatible determinado. Elaboración propia.

Se puede observar que los planos se intersecan en un punto común $P\ (1,2,3)$.

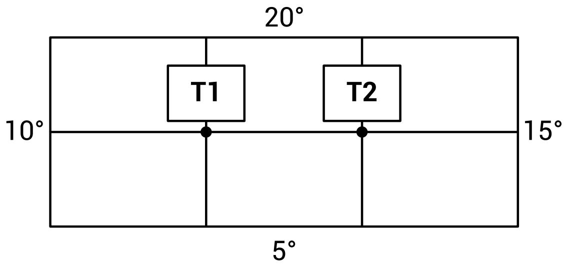
Aplicación de los sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1. Distribución de temperaturas en una placa

Consideramos una placa de metal donde aplican varias temperaturas, el objeto es encontrar la temperatura en un punto dado de la placa. Se supone que la distribución es uniforme, entonces la temperatura es el promedio. Suponga que la temperatura en un punto interior es el promedio de la temperatura de los cuatro puntos que lo rodean: arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda. ¿Se quiere estimar la temperatura del punto T1 y T2?

Figura 7.

Distribución de calor en una placa metálica



Nota. Adaptado del Problema de un Sistema de Ecuaciones, Distribución de Temperatura de una Placa. [Fotografia], por Manolomath, y esto es Matemática Bacana, 2011, Youtube (enlace web)

A través del planteamiento de un sistema de ecuaciones debe averiguar el valor de la temperatura en los puntos T1 y T2, no solamente se centra en el aprendizaje por repetición, sino la interpretación del lenguaje natural al matemático, es decir, la matemática se la emplea en la solución de problemas, se ha planteado este problema para que analice e integre la aplicabilidad de los sistemas de ecuaciones en la resolución de los problemas.

En el video Problema de un Sistema de Ecuaciones, Distribución de Temperatura de una Placa se evidencia como los sistemas de ecuaciones ayudan a resolver un problema de distribución de calor de una placa dentro del área de la termodinámica.

Para afianzar sus habilidades y destrezas en la aplicabilidad de sistemas de ecuaciones, pueden buscar en la red con las siguientes palabras clave: redes de tráfico, punto de equilibrio aplicando sistemas de ecuaciones.

Ahora, le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

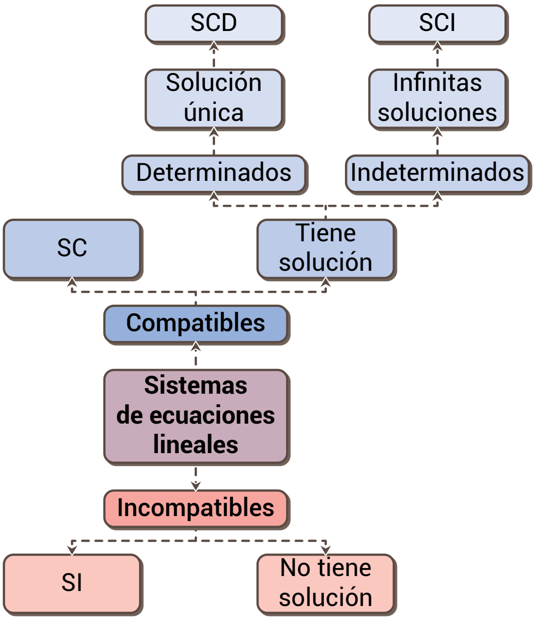
- Lectura comprensiva del texto básico **capítulo 1.1 y 1.2** y **complementario capítulo 2.0 - 2.2** y la guía, análisis e interpretación, conceptos y propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales.

- Para comprender mejor el tema de esta semana, utilizar un graficador dinámico como Geogebra.
- Practicar con los ejercicios resueltos del 1 al 15 en el texto básico del tema de sistemas de ecuaciones, pág. 7.

Semana 2

Figura 8.

Tipos de sistemas lineales de acuerdo con su solución



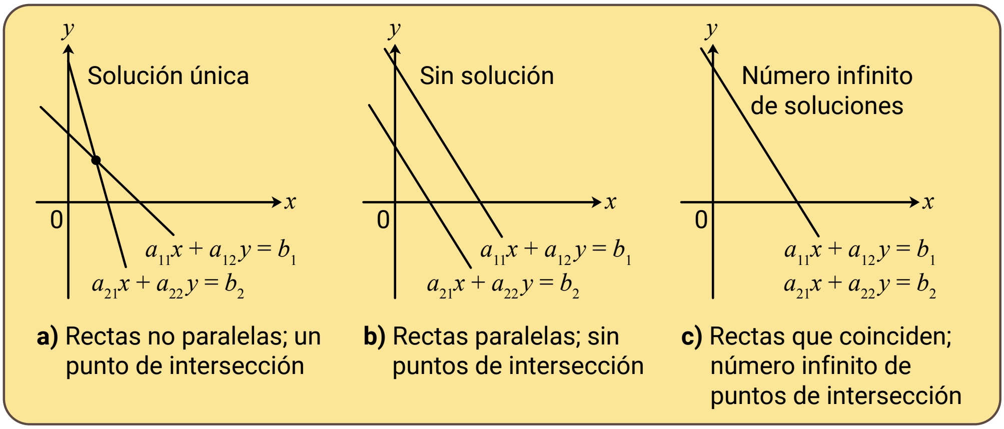
Nota. Se muestra un organigrama de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales. Elaboración propia.

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener solución única, infinitas soluciones o ninguna solución.

Si un sistema de dos ecuaciones linealmente independientes y dos incógnitas, el sistema tiene solución única. En la *figura 7.* Se muestra la representación gráfica de cada solución de un sistema de ecuaciones lineal, que sea por cualquier método que se resuelva, podemos obtener cualquiera de estas tres soluciones.

Figura 9.

Representación gráfica de soluciones de sistemas de ecuaciones



Nota. Adaptado de Tipos de soluciones de sistemas de ecuaciones (p. 3), por Grossman, S., Flores Godoy, J., & Vázquez Valencia, F., 2012, McGrawHill

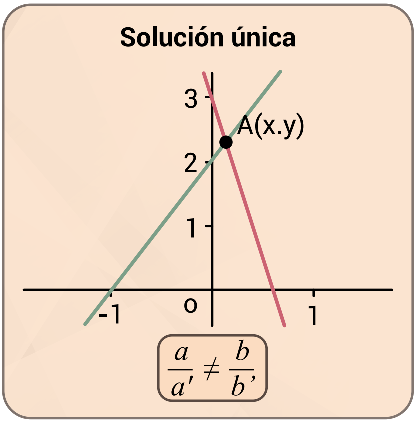
Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales de 2 incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

1.4. Sistema Compatible Determinado (SCD)

Figura 10.

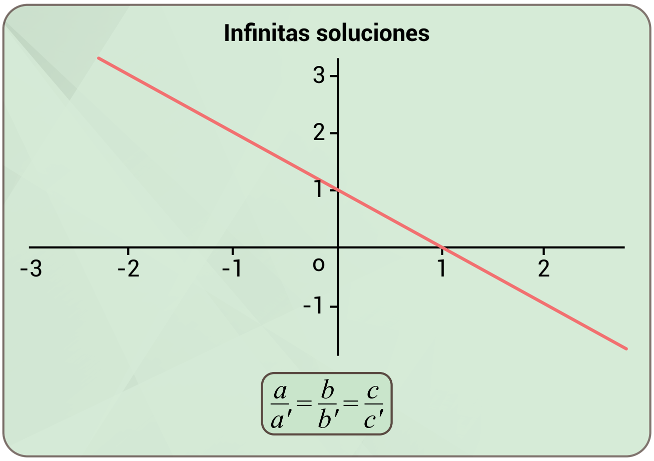
Rectas secantes



Nota. Interpretación gráfica de la solución única de un sistema de ecuaciones lineales. Elaboración propia.

1.5. Sistema Compatible Indeterminado (SCI)

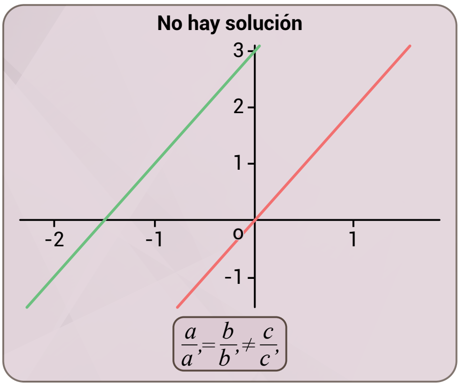
Figura 11.
Rectas coincidentes



Nota. Interpretación gráfica de la solución infinita de un sistema de ecuaciones lineales. Elaboración propia

1.6. Sistema Incompatible (SI)

Figura 12.
Rectas paralelas



Nota. Interpretación gráfica de la no existencia de un sistema de ecuaciones lineales. Elaboración propia

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva del **texto básico capítulo 1** y **complementario capítulo 2.0 - 2.2** y la guía, análisis e interpretación conceptos y propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales.

- Revisar ejercicios resueltos en el texto básico y la guía, practicar los ejercicios resueltos del 1 al 15 en el tema de sistemas de ecuaciones **pág. 7** y revisar los ejercicios propuestos del texto complementario **pág. 63**.

- Participar de las tutorías semanales, preguntar, opinar, sugerir, revisar videos y recursos propuestos en la guía.

El estudiante debe evaluar sus conocimientos para verificar si alcanzó el aprendizaje necesario en los temas de la solución de sistemas lineales, se propone la siguiente autoevaluación para que pueda cumplir con este reto de verificar sí su aprendizaje fue significativo. Tomado de Morales (2022)

Autoevaluación 1

1. De acuerdo con las siguientes expresiones, seleccione verdadero o falso.

a. (   ) Si tenemos las ecuaciones de dos rectas paralelas, ¿el tipo de sistema de ecuaciones que forman es incompatible?

b. (   ) Una ecuación de la forma y = ax que expresa la variable y en función de la variable x y la constante a, dicha ecuación puede ser denominada ecuación lineal.

c. (   ) Sean las rectas $y = 3x, y = 3x + 1$, ¿El tipo de sistema de ecuaciones es incompatible?.

d. (   ) En la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n$= b, los elementos $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ se denominan coeficientes.

e. (   ) Los sistemas lineales compatibles pueden no tener solución o pueden tener solución única.

2. En las siguientes expresiones, la que corresponde a una función lineal es:

$$a.\ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b$$

$$b.\, a_1X_1^2 + a_2X_2 + a_3X_3^3 = b$$

$$c.\, 3x^2 + 5y + z = b$$

3. **Relacione las alternativas que gráficamente pueden presentar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:**

Tipos de solución	Descripción gráfica
Solución única	las rectas no se intersecan, no existe punto común.
Sin solución	Las rectas no paralelas que se intersecan en un punto.
Infinitas soluciones	Las rectas coincidentes.

4. **Relacione lo que corresponda al tipo de sistema lineal respecto según su solución:**

Tipos de sistemas	Resolución
Consistente	El sistema no posee solución.
Inconsistente	El sistema tiene una solución o infinitas soluciones.
	El sistema siempre presenta infinitas soluciones.

5. **Indica cuál es la solución del sistema formado por el par de ecuaciones:**

$$2x + y = 1$$

$$5x - 2y = -2$$

a. $x = -1, y = 1$
b. $x = 0, y = 1$
c. $x = -1, y = -1$
d. $x = 1, y = 0$

Ejercicio de aplicación

6. **Resolver y determinar si los sistemas son consistentes o inconsistentes, indicar si el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.**

a. $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \\ 5x + 4y = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 9y = 10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \\ -x + 4y = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = -19 \\ 3x - 4y + z = -2 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es necesario autoevaluarse, ya que es la estrategia por excelencia para educar en la responsabilidad y para aprender a valorar, criticar y a reflexionar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje individual respecto al contenido de la primera semana.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios

- Utilizar los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, para resolver situaciones del entorno, aplicando el método de solución que considere más adecuado.
- Tener en cuenta que en la forma general de un sistema de ecuaciones en donde los $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$, son los coeficientes en las ecuaciones y los $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ son las variables, las cuales tomarán valores para cumplir la condición de igualdad.
- Poner especial cuidado en la representación del tipo solución de un sistema de ecuaciones para mejorar la conclusión y toma de decisiones en los problemas propuestos y de contexto.

- Revisar las estrategias de reconocimiento del tipo de sistema de ecuaciones que hemos conseguido de los ejercicios y problemas a lo largo del aprendizaje de la asignatura.
- Confirmar la solución de un sistema de ecuaciones lineales por medio del uso de un graficador dinámico como lo es GeoGebra.

Ir al solucionario

Ha llegado y ha cumplido el primer reto, desarrollar la autoevaluación 1. Esta será la primera actividad lograda ¡Felicitaciones!

Unidad 2. Matrices

Para la comprensión de las matrices se requiere conceptos base de sistemas lineales, su forma general y otros conceptos derivados de la aplicación de la recta, operaciones aritméticas, además se requiere que el estudiante pueda interpretar el lenguaje natural al matemático, además fomentar en él, el razonamiento matemático, la propositividad, la crítica constructiva, autonomía y responsabilidad para construir un verdadero aprendizaje significativo.

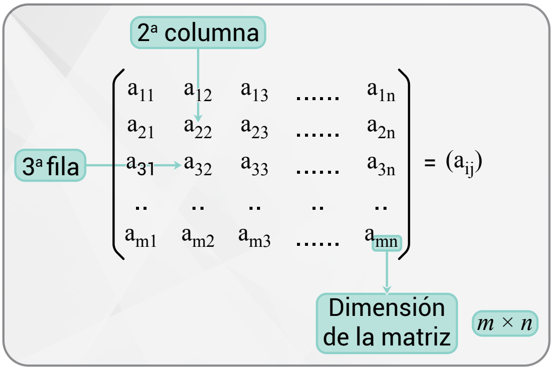
2.1. Conceptos básicos y definiciones

Se llama matriz a una disposición rectangular de números reales, los cuales se denominan elementos de la matriz. Cada elemento tiene dos subíndices, el primero indica la *fila* y el segundo la columna, por ejemplo, los coeficientes de las variables x_1, x_2, x_3 de un sistema se pueden escribir como los elementos de una matriz A, llamada matriz de coeficientes del sistema.

Podemos usar software para trabajar con matrices y dar solución por medio del método de Gauss - Jordán a través de Scilab podemos programar las reglas elementales para operar una matriz escalonada. En la figura 2 del anexo 1, se puede encontrar algunos comandos ejecutados para práctica con este software algunos cálculos con matrices y seguir investigándolo más ya posee algunas utilidades en el análisis de datos.

Figura 13.

Estructura general de una matriz



Nota. Definición algebraica de una matriz. Elaboración propia

En el siguiente ejemplo se evidencia la interpretación del lenguaje natural al matemático:

Juan, Ana y Elena han ido a una tienda y han comprado lo siguiente:

1. Juan compró dos bocadillos, un refresco y un pastel.
2. Ana se llevó un bocadillo, un refresco y un pastel.
3. Elena compró un bocadillo y un refresco.

Para lograr la comprensión en la interpretación de los datos del problema se ha utilizado una tabla de doble entrada.

Tabla 2.

Tabla de doble entrada

	Bocadillos	Refresco	Pastel
Juan	2	1	1
Ana	1	1	1
Elena	1	1	0

Nota. Tabla de datos del problema propuesto. Elaboración propia

$$\text{La matriz interpretada es: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente sistema de ecuaciones se encuentra en su forma matricial $Ax = b$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Se obtiene en la siguiente matriz los coeficientes numéricos que acompañan a cada variable quedando la siguiente matriz de coeficientes.

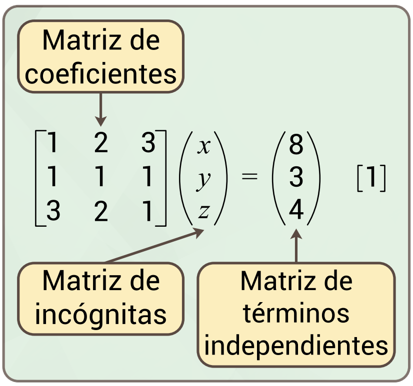
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De allí si queremos aumentar a esta *matriz de coeficientes* los *términos independientes* se tiene *la matriz aumentada* tal como ve a continuación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : 8 \\ 1 & 1 & 1 & : 3 \\ 3 & 2 & 1 & : 4 \end{bmatrix}$$

Figura 14.

Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales



Nota. Representación de la forma matricial de un sistema de ecuaciones. Elaboración propia.

A continuación, se establece las definiciones generales de la matriz de coeficientes, de incógnitas y de términos independientes.

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}$$

2.2. Operaciones básicas con matrices

Las operaciones básicas con matrices son suma, producto y producto de un número por una matriz, en los siguientes recursos se evidencia algunas actividades que apoyarán su aprendizaje.

> En el recurso álgebra de matrices se muestra algunas definiciones además de *suma y producto de matrices* y un apartado para que el estudiante pueda poner en práctica su conocimiento del tema, además de otro recurso *de* producto de matrices para que pueda practicar esta operación con una actividad en línea, además de otros conceptos relacionados con las operaciones con matrices.

Suma de matrices

La suma de dos matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ de la misma dimensión, es otra matriz S= (S_{ij}) de la misma dimensión que los sumandos y el resultado es **S = (a_{ij} + b_{ij})**. Es decir, para sumar dos matrices simplemente sumamos los números que se encuentran en la misma ubicación de las matrices que se están sumando.

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2x2} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Sin embargo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ no se pueden sumar.

Por tanto, para poder sumar dos matrices estas **deben tener la misma dimensión**.

La ***diferencia de matrices*** A y B se representa por A−B, y se define como la suma de A con la opuesta de B: $A - B = A + (-B)$

Producto de un número por una matriz

Para multiplicar **un número real por una matriz**, se multiplican cada uno de los elementos de la matriz por dicho número.

$$Si\ A = (a_{ij}), entonces\ kA = (ka_{ij})$$

Para multiplicar una matriz por un escalar (número) multiplicamos cada elemento de la matriz por el número.

Cuando multiplicamos una matriz por el escalar -1 obtenemos el negativo de la matriz. Si sumamos una matriz con su negativo obtenemos una matriz nula, formada exclusivamente por ceros.

Asimismo, $Dos\ matrices\ A = (a_{ij})\ y\ B = (b_{ij})\ son\ iguales\ si$

- Son del mismo tamaño y
- Los elementos correspondientes de la matriz son iguales.

El siguiente ejemplo es tomado de Morales (2022), acerca del tema de producto de una matriz por un escalar y otras operaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Determine a, b, c y d.

Si dos matrices son iguales, sus respectivos elementos son iguales, así que tendríamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} a+2b = 4 \\ 2a-b = -2 \\ 2c+d = 4 \\ c-2d = -3 \end{cases}$$

Note que las ecuaciones 1 y 2 tienen como incógnitas a y b; y las ecuaciones 3 y 4 tienen como incógnitas a c y d, por lo que podríamos descomponer el sistema de 4 ecuaciones en dos sistemas de dos ecuaciones.

El sistema de las dos ecuaciones iniciales sería:

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 2a - b = -2 \end{cases}$$

Para eliminar b multiplicamos la segunda ecuación por 2 y la sumamos a la primera

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 4a - 2b = -4 \end{cases}$$

Queda

$$5a = 0 \rightarrow a = 0$$

$$0 + 2b = 4 \rightarrow b = 2$$

Tomando las ecuaciones 3 y 4 tenemos

$$\begin{cases} 2c + d = 4 \\ c - 2d = -3 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2

$$\begin{cases} 4c + 2d = 8 \\ c - 2d = -3 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones queda

$$5c = 5 \rightarrow c = 1$$

$$4(1) + 2d = 8 \rightarrow 2d = 8 - 4 = 4 \rightarrow d = 2$$

Otro ejercicio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix} y\, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine

a. $A - 2B$

b. $2A - B + 2C$

Solución

a.

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -6 & 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -8 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 7 & -7 & -19 \end{bmatrix}$$

b.

$$2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{C} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

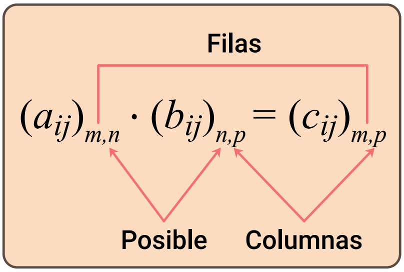
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ -4 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & -10 \end{bmatrix}$$

2.3. Producto punto y multiplicación de matrices

Dadas dos matrices A y B, *su producto es otra matriz P cuyos elementos se obtienen multiplicando las filas de A por las columnas de B* (por lo que deben coincidir estas). De manera más formal, los elementos de P son de la forma:

$$P_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj} con\, k = 1, \dots n$$

Es evidente que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B. Es más, si A tiene dimensión **m x n** y B dimensión **n x p**, la matriz P será de orden m x p.



Cada elemento de la nueva matriz se obtiene multiplicando los elementos de la fila por los elementos de la columna en la que se encuentra la matriz.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ No es posible multiplicar}$$

Cuando es posible la multiplicación de matrices se procede de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Ejemplo:

Sean $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y\, \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calcule

$$2A\text{-}BC$$

Resolución:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)(1)+(1)(0)+(4)(-1) & (-2)(2)+(1)(1)+(4)(0) & (-2)(-1)+(1)(-2)+(4)(3) \\ (3)(1)+(-1)(0)+(-2)(-1) & (3)(2)+(-1)(1)+(-2)(0) & (3)(-1)+(-1)(-2)+(-2)(3) \\ (1)(1)+(0)(0)+(0)(-1) & (1)(2)+(0)(1)+(0)(0) & (1)(-1)+(0)(-2)+(0)(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 12 \end{pmatrix} + (-) \begin{pmatrix} -6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que se logre una respuesta de este ejercicio es necesario verificar que las dos matrices resultantes sean de igual orden, pero al analizar no cumple esta condición necesaria para la suma de matrices, por tanto, no tiene solución final.

Otro ejemplo al combinar suma, resta y multiplicación de matrices:

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y\, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calcule

$$A(BC)$$

Resolución:

$$BC = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -7 & 29 \\ 15 & 12 & -27 \end{pmatrix}$$

Se puede efectuar la multiplicación de matrices por bloques, en el presente recurso se muestra paso a paso la resolución de multiplicación de matrices por bloques, revisar para complementar su aprendizaje de esta operación con matrices.

Aplicación de producto de matrices

Adaptado de (Kolman, 2013). (**Ecología)** El uso de pesticidas en la provincia de Loja es inevitable, en una siembra de maíz se usa cierta cantidad de pesticida. Luego, los animales herbívoros de la zona comen las plantas contaminadas y absorben los pesticidas. Para determinar la cantidad de pesticida absorbida por uno de esos animales, procedemos de la manera siguiente. Suponga que tenemos tres pesticidas y cuatro plantas. Sea aij la cantidad de pesticida i (en miligramos) absorbida por la planta j. Esta información puede representarse mediante la matriz.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Planta 1} & \text{Planta 2} & \text{Planta 3} & \text{Planta 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Pesticida 1} \\ \text{Pesticida 2} \\ \text{Pesticida 3} \end{array}$$

Imaginemos ahora, que se tiene tres animales herbívoros, y sea bij la cantidad de plantas del tipo i que uno de ellos, de tipo j, come mensualmente. La información puede representarse mediante la matriz.

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Herbívoro 1} & \text{Herbívoro 2} & \text{Herbívoro 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Planta 1} \\ \text{Planta 2} \\ \text{Planta 3} \\ \text{Planta 4} \end{array}$$

La entrada (i, j) de AB proporciona la cantidad de pesticida del tipo i que ha absorbido el animal j. En consecuencia, si i = 2 y j = 3, la entrada (2, 3) de AB es 3(8) + 2(15) + 2(10) + 5(20) = 174 mg de pesticida, 2 absorbidos por el herbívoro 3.

Ahora, le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis e interpretación de conceptos, definiciones, operaciones y propiedades de las matrices en el **capítulo 3 pág. 27 a 34** del texto básico y texto complementario, **capítulo 3 pág. 136-152**.
- Revisión de ejercicios resueltos y propuestos en el **capítulo 3 pág. 31** del texto básico y texto complementario, **capítulo 3 pág. 152-153.**
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Revisar el siguiente libro virtual apartado 2, 2.2 y 3 para afianzar los conocimientos adquiridos sobre el tema de operaciones de matrices: Libro interactivo Matrices, Determinantes y Sistemas de ecuaciones . *En este libro interactivo podrá revisar los temas abordados en esta unidad y además interactuar con él, muestra definiciones, reglas específicas para que el estudiante puede asimilar mejor al momento de aleatorizar ejercicios propuestos.*

Semana 4

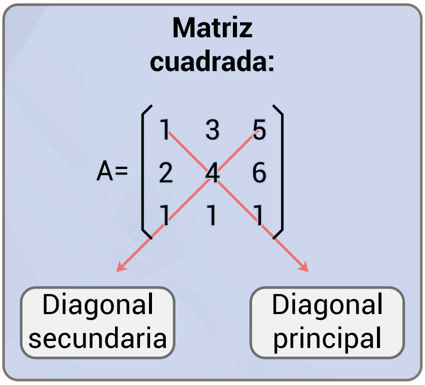
2.4. Propiedades de las operaciones con matrices

Cuando una matriz tiene igual número de filas y columnas se dice que es una matriz cuadrada.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ó} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \text{ sí } i = j$$

Figura 15.

Diagonales de una matriz cuadrada



Nota. Representación matemática de una matriz cuadrada. Elaboración propia.

Matriz nula: es una matriz en la que todos los elementos son nulos.

$$\mathbf{O} = \underset{3 \times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \mathbf{O} = \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Al multiplicar cualquier matriz por una matriz nula, el resultado es otra matriz nula.

Matriz diagonal: es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar: es una matriz diagonal donde todos los elementos de ella son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz unidad o identidad: es una matriz escalar, cuya diagonal principal es 1.y los demás elementos deben ser ceros.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos (siempre y cuando esto sea posible) cualquier matriz por la matriz identidad, el resultado es la matriz original. $A * I = A;\ I * B = B.$

Si en una matriz transformamos las filas en columnas y viceversa tenemos dos matrices que son transpuestas la una de la otra, en el apartado 4 del recurso matriz transpuesta puede verificar la definición de transpuesta de una matriz y sus propiedades para una mejor comprensión del tema.

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz transpuesta de la matriz A, denotada por AT, es la siguiente matriz:

$$A^{\top} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. Entonces la transpuesta de A, que se escribe $A^{\top}$, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A. De manera breve, se puede escribir $A^{\top} = (a_{ji})$. En otras palabras

$$\text{Sea } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^{\top} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Simplemente, se coloca el renglón i de A como la columna i de A^T y la columna j de A como el renglón j de A^T. Tomado de (Grossman & Flores, 2012).

Es decir, más simplificadamente la definición se resume en lo siguiente:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad B = [b]_{n\times m}$$

$$A^t = B$$

> En el siguiente recurso web de Geogebra, Matriz traspuesta o transpuesta, se puede evidenciar la definición y propiedades de la transpuesta de una matriz, además se puede navegar en otros enlaces a temas relacionados de la materia.

2.5. Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales por Gauss y Gauss- Jordán

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales lo trasformamos en una matriz aumentada, misma que está compuesta por los coeficientes que acompañan a las incógnitas, separadas por una línea entrecortada que separa la columna de términos independientes, para resolver este sistema de ecuaciones las operaciones elementales que se utilizan son:

- Multiplicar el renglón i por un número c diferente de cero $R_i \to cR_i$
- Sumar un múltiplo del renglón i al renglón j

$$R_j \to R_j + cR_i$$

- Permutar (intercambiar) los renglones i y j

$$R_i \rightleftarrows R_j$$

> Para comprender el empleo de la matriz aumentada, realice una práctica sobre este recurso interactivo Método Matriz Ampliada Sistema de 2 ecuaciones, que le permitirá definir la matriz aumentada a partir de un sistema de ecuaciones lineales para luego validar aprendizaje a través de una calificación.

La idea es ir transformando paulatinamente la parte izquierda de la matriz en una matriz escalonada por filas (método de Gauss) o en una matriz escalonada reducida por filas (método de Gauss-Jordán), para ello se debe cumplir los siguientes pasos:

1. Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.
2. El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.
3. Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en renglón de arriba.
4. Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama pivote para ese renglón. Tomado de (Grossman & Flores, 2012).

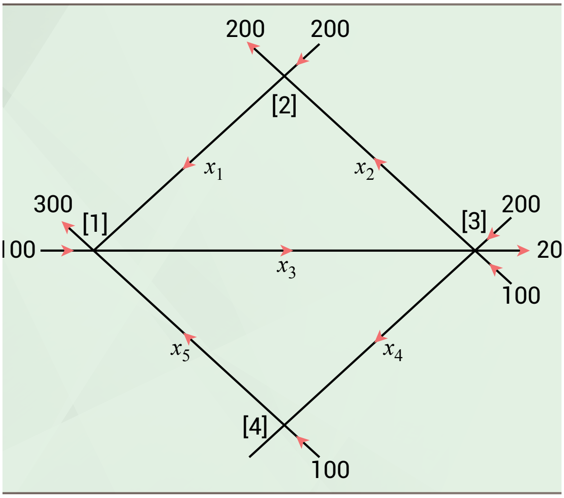
Podemos aplicar estas consideraciones en el planteamiento de un problema de *flujo de tráfico*, de allí que el estudiante podrá deducir el proceso de reducción de la matriz escalonada, y dar las conclusiones en función del resultado del sistema, a continuación, se considera el *problema* mencionado tomado de (Grossman & Flores, 2012, pp. 36).

Ejemplo programa de tráfico

Considere el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección k se denota por [k]. Las flechas a lo largo de las calles indican la dirección del flujo del tráfico. Sea x_i el número de vehículos/h que circulan por la calle i. *Suponiendo que el tráfico que entra a una intersección también sale*, establezca un sistema de ecuaciones que describa el diagrama de tráfico. Por ejemplo, la intersección [1], $x_1 + x_5 + 100 = x_3 + 300$, esto es, el tráfico que entra es igual al tráfico que sale, lo que da $x_1 - x_3 + x_5 = 200$.

Figura 16.

Representación del flujo de una red de tráfico



Nota. Adaptado de Flujo de tráfico (p. 36), por Grossman, S., Flores Godoy, J., & Vázquez Valencia, F., 2012, McGrawHill

Solución

Tomando la condición ideal del problema: que el flujo que entra es igual al que sale, se deduce el sistema de ecuaciones, que se lo formula por cada nodo o intersección de la gráfica.

[1]: $x_1 + 100 + x_5 = 300 + x_3$

[2]: $200 + x_2 = 200 + x_1$

[3]: $200 + 100 = 200 + x_2 + x_4$

[4]: $100 + x_4 = x_5$

Ordenamos y simplificamos

[1]: $x_1 - x_3 + x_5 = 200$

[2]: $x_1 = x_2$

[3]: $x_2 + x_4 = 100$

[4]: $x_4 = x_5 - 100$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_4 = 100 \\ x_4 - x_5 = -100 \end{cases}$$

Trabajamos con la matriz ampliada, donde no existe valor para alguna variable, se registra el valor de 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2 \to R2 - 1\,R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to (-1)R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3 \to R3 - 1\,R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \to R1 - 1\,R3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R1 \to R1 - 1\,R4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 200 - x_5 \\ x_2 &= 200 - x_5 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= -100 + x_5 \\ x_5 &= \text{ libre} \end{aligned}$$

Tenemos 1 variable libre (**x_5**) que puede tomar cualquier valor a lo largo de los números reales, por tal razón **x_5** puede renombrarse por t (**x_5**=t), que es un parámetro o número que puede tomar cualquier valor.

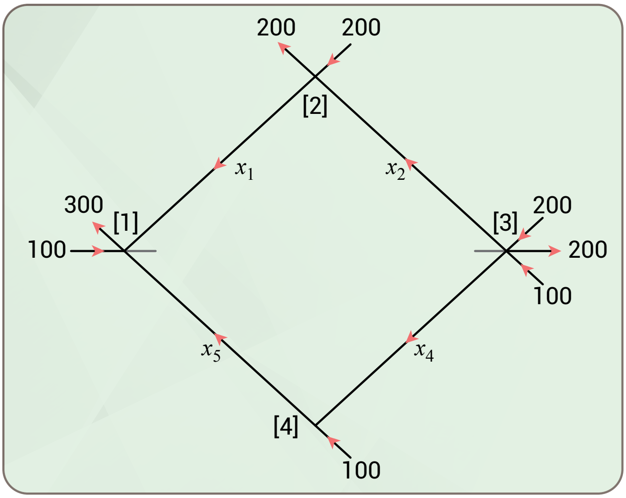
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 - t \\ 200 - t \\ 0 \\ -100 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como vector en un sistema de cinco dimensiones nos quedaría $(200 - t, 200 - t, 0, -100 + t, t)$

Conclusión

Se trata de un sistema compatible indeterminado de infinitas soluciones, de allí que al interpretar la solución del sistema deducido del flujo de tráfico se da para varias respuestas a las siguientes preguntas del problema:

¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4] ($x_5 = 0$) sin modificar los sentidos de tránsito? Si no se puede cerrar, ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que debe poder admitir esta calle (de [1] a [4])?



Nota. Interpretación gráfica del primer literal del ejercicio propuesto cuando X3 desaparece, es decir X3=0

La pregunta con respecto a este problema dice lo siguiente. Suponga que la calle de [1] a [3] necesita cerrarse, es decir x_3=0.

$$\begin{aligned} x_1 &= 200 - x_5 \\ x_2 &= 200 - x_5 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= -100 + x_5 \\ x_5 &= \text{libre} \end{aligned}$$

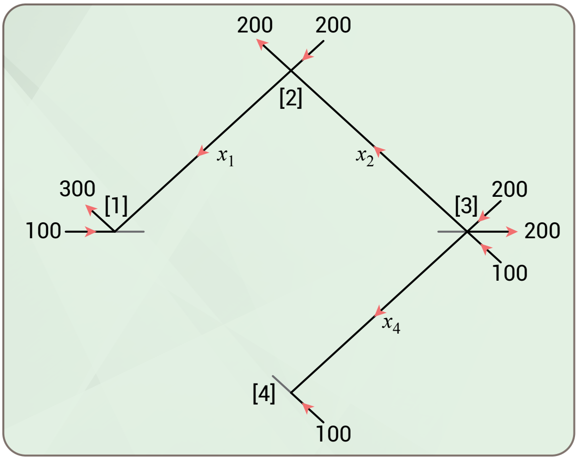
De manera matemática podemos verificar que cuando x_3=*0.* El sistema sigue siendo de infinitas soluciones y todas las demás trayectorias dependen de x_5, por lo tanto, x_1 y x_2 no debe ser mayor que 200 $(x_5 \leq 200)$

porque número de carros que pasan por x_1 y x_2 es negativo y si se trata de "contar" estamos usando los números naturales.

Para x_4: $x_5 \geq 100$, si ocurre lo contrario a esta desigualdad se contaría con cantidades negativas, lo cual no es posible.

Otra pregunta del problema menciona que ¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4] ($x_5 = 0$) sin modificar los sentidos de tránsito? Si no se puede cerrar, ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que debe poder admitir esta calle (de [1] a [4])?

Con respecto a esa pregunta tenemos que el conjunto solución con ($x_5 = 0$) nos da como resultado de un sistema compatible determinado de soluciones únicas.



$$
\begin{aligned}
x_1 &= 200\\
x_2 &= 200\\
x_3 &= 0\\
x_4 &= -100\\
x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

Es decir, por cada una de las x_i circula una cantidad determinada de vehículos, pero x_4 debe cambiar de sentido según el signo que resulto del desarrollo matemático.

Sistema homogéneo

Un sistema homogéneo tiene la forma en el que $b_1, b_2, b_3 \dots b_m$ de la forma matricial ($AX = b$) con b=0, si en un sistema cualquiera de las $b_1, b_2, b_3 \dots b_m$ son diferentes de cero, el sistema no se lo considera homogéneo.

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{gathered}$$

Para sistemas generales no homogéneos, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es siempre una solución (llamada **solución trivial** o **solución cero**), estos poseen dos posibilidades: la **solución trivial** es la única solución o existe un **número infinito de soluciones.** Las soluciones distintas a la solución cero se llaman soluciones **no triviales.** Un ejemplo de sistema homogéneo es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolución:

Trabajamos con la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R3 \to R3 - 3\,R1]{R2 \to R2 - 2\,R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R2 \to R2/-6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R3 \to R3 - 4\,R2]{R1 \to R1 - R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R3 \to R3/\frac{16}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R2 \to R2 + \frac{5}{6}R_3]{R1 \to R1 + \frac{1}{6}R3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Como se puede observar, el resultado del sistema planteado es una **solución trivial.**

A continuación, el recurso web ejercicio online permite que el estudiante pueda interactuar a través de la resolución de un sistema de ecuaciones de 3X3 y resolverlo por Gauss-Jordan.

2.6. Inversa de una matriz

En los números reales, al multiplicar un número real por su inverso multiplicativo se tiene como resultado la unidad, pero si hablamos de matrices específicamente las matrices cuadradas tenemos una operación parecida, ya que las matrices se encuentran estructuradas por números reales; pero es diferente a la unidad en las matrices se habla de una matriz identidad $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ siendo este el caso de una matriz de 2X2. Para entender esta definición se propone el siguiente ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ por definición AB=BA=I, donde I= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$, la matriz b se llama matriz inversa de A y se denota por A-1. Es decir, si B= A-1 entonces A A-1= A-1 A=I

Una matriz que no puede invertirse se denomina *matriz singular*, a aquella que si podemos hacerlo se la denomina *no singular*.

El siguiente video nos ayudará a comprender el proceso de cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss - Jordán paso a paso, que al final podemos identificar el tipo de sistema de ecuaciones lineales, tipo de solución y si toda matriz posee una matriz inversa.

Encontrar la inversa de una matriz cuadrada A por Gauss - Jordán

Paso 1. Se escribe la matriz aumentada (A|I).

Paso 2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A, a su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3. Se decide si A es invertible.

a. Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b. Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces **A no es invertible**. Por ejemplo, vamos a invertir la matriz.

Planteamos la matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Planteamos la matriz aumentada *(A| I)* → *(I | B) luego B=A*-1

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -12 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R2\to R2-3\,R1 \\ R3\to R3+2\,R1 \\ R4\to R4+R1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R2\to R2/-3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R1\to R1+3\,R2 \\ R3\to R3-4\,R2 \\ R4\to R4-3\,R2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 & -2 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3\to R3/-\frac{2}{3}} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & & 2 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 2/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & & 3 & -2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R1\to R1-2R3 \\ R2\to R2-\frac{2}{3}R3 \\ R4\to R4+R3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 3 & -2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R4\to R4/-\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 3 & -2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R1\to R1-R4 \\ R2\to R2-R4 \\ R3\to R3+\frac{3}{2}R4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa de la matriz A propuesta es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobación

Se realiza el producto de matrices apoyándonos en la definición

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Al realizar el producto de las dos matrices se tiene que:

$$I = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se concluye que efectivamente la matriz encontrada **es la matriz inversa**, dado que al multiplicarlas obtenemos como resultado **la matriz identidad,** además podemos notar que el producto de matrices bajo esta definición cumple con la **propiedad conmutativa**. Además, esta matriz si tuvo inversa, por tanto, sería una **matriz invertible o no singular.**

Ejemplos

Dadas las siguientes matrices, realice las operaciones indicadas: tomado de (Morales, 2020, p. 46-49)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule

$$A^tC1 - 2B$$

Resolución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^tC - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule

$$(AB - C_2)^{-1}$$

Resolución:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & ,0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB - C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3-2F2]{F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$(AB - C_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Dada la función f(x) y la matriz A, calcule en los siguientes ejercicios f(A) y A^2

Sea $f(x) = 3x^2 - 4x + 8$ y A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = 3A^2 - 4A + 8I = 3\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 13 & -5 \\ 5 & 20 & -16 \\ -13 & -11 & 20 \end{pmatrix}$$

A continuación, se presenta otro ejercicio que permite encontrar la inversa de una matriz por Gauss-Jordán

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1<\!\!-\!\!>F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3+3F1]{F2-5F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 23 & -19 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -13 & 16 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F2}{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{23} & \frac{1}{23} & \frac{5}{23} & 0 \\ 0 & -13 & 16 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3+13F2]{F1+4F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{16}{23} & \frac{4}{23} & -\frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{23} & \frac{1}{23} & \frac{5}{23} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{121}{23} & \frac{13}{23} & -\frac{4}{23} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{23F3}{121}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{16}{23} & \frac{4}{23} & -\frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{23} & \frac{1}{23} & \frac{5}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{121} & -\frac{4}{121} & \frac{23}{121} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F2+\frac{19F3}{23}]{F1-\frac{16F3}{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12/121 & -13/121 & -16/121 \\ 0 & 1 & 0 & 16/121 & 23/121 & 19/121 \\ 0 & 0 & 1 & 13/121 & -4/121 & 23/121 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 12/121 & -13/121 & -16/121 \\ 16/121 & 23/121 & 19/121 \\ 13/121 & -4/121 & 23/121 \end{pmatrix}$$

Sea $f(A) = -x^3 - x - 1$ y A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = -A^3 - A - I = -\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}$$

Calcule A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2+3F1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa posee algunas aplicaciones, por ejemplo, en el video Modelo de Insumo Producto Leontief se muestra el manejo de la demanda interna y externa de un país, es decir, para el cálculo de la cantidad de productos a exportar.

Además, la matriz inversa puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales, de acuerdo con las siguientes consideraciones.

Partimos de la forma matricial de un sistema lineal

$$Ax = b$$

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por A-1, porque el objetivo es despejar la matriz de variables.

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Teniendo como deducción que, para calcular los valores de la matriz de variables, es necesaria la matriz inversa.

$$Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$$

Por tanto, se puede mencionar que

Si A es invertible, el sistema $Ax = b$ tiene una solución única $x = A^{-1}b$. Lo que implica que el valor de las incógnitas lo obtenemos multiplicando la inversa de la **matriz de los coeficientes** por la **matriz de los términos independientes b**.

A continuación, planteamos el siguiente problema

En la ciudad de Loja desde el año 1997 se ejecuta el proceso de clasificación de basura, donde los ciudadanos deben sacar la basura de sus hogares de acuerdo con un calendario establecido desde la municipalidad, cada tipo de basura está asociado a un color de recipiente. Se propone los datos del año 2005 de proyección de los años subsiguientes. Si a cada año se le asigna 160 ton, que es la cantidad producida en la actualidad (2022), ¿cuánta cantidad de basura se obtendrá en cada sector? En la siguiente tabla se describe algunos datos por sectores y años.

Tabla 3.
Producción actual y proyectada de basura (Toneladas/día)

	Urbana	Rural	Mercados	En la actualidad
2010	101,37	7,26	20,81	160[1]
2011	104,41	7,30	21,44	160

[1] Obtenido de (Diario La Hora, 2022)

	Urbana	Rural	Mercados	En la actualidad
2012	107,54	7,34	22,08	160

Nota. Adaptado de Producción actual y proyectada de basura del Municipio de Loja, enlace web

$$\begin{cases} 101.37x + 7.26y + 20.81z = 160 \\ 104.41x + 7.30y + 21.44z = 160 \\ 107.54x + 7.34y + 22.08z = 160 \end{cases}$$

Cuya matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 101.37 & 7.26 & 20,81 \\ 104.41 & 7,30 & 21,44 \\ 107,54 & 7,34 & 22,08 \end{pmatrix}$$

Encontramos la matriz inversa por el método de Gauss - Jordán iniciando con el planteamiento de la matriz aumentada

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{381440}{15657} & \frac{-755540}{15657} & \frac{374140}{15657} \\ \frac{28480}{15657} & \frac{34220}{15657} & \frac{-60070}{15657} \\ \frac{-622420}{5219} & \frac{1222820}{5219} & \frac{-600520}{5219} \end{pmatrix}$$

Para encontrar la solución del sistema de ecuaciones con la inversa debemos recordar la siguiente definición

$$x = A^{-1}b$$

Como son tres variables x=sector urbano, y=sector rural y z=mercados entonces nuestra matriz columna de variables será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{381440}{15657} & \frac{-755540}{15657} & \frac{374140}{15657} \\ \frac{28480}{15657} & \frac{34220}{15657} & \frac{-60070}{15657} \\ \frac{-622420}{5219} & \frac{1222820}{5219} & \frac{-600520}{5219} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 160 \\ 160 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{6400}{15657} = 0.41$$

$$y = \frac{420800}{15657} = 26.88$$

$$z = \frac{-19200}{5219} = -3.68$$

Lo que significa que $x = 0.41, y = 26.88$ y $z = -3.68$, podemos concluir que al tener 160 ton de basura, *el sector urbano creció en 0.41*, el *sector rural un 26.88* y el sector de mercados una disminución de 3.68 ton, a eso podemos mencionar que el crecimiento de la ciudad es considerable, la matriz que posee inversa **tiene solución única** estamos refiriéndonos a un sistema compatible determinado. Es decir,

Comprobación

$$101.37x + 7.26y + 20.1z = 160$$
$$104.41x + 7.30y + 21.44z = 160$$
$$107.54x + 7.34y + 22.08z = 160$$
$$101.37(0.41) + 7.26(26.88) + 20,1(-3.68) = 160$$
$$104.41(0.41) + 7,30(26.88) + 21,44(-3.68) = 160$$
$$107,54(0.41) + 7,34(26.88) + 22,08(-3.68) = 160$$

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis e interpretación de conceptos, definiciones, operaciones y propiedades de las matrices en el **capítulo 3 sección 3.6 del texto básico, págs.38 a la 41** y en la sección 3.3 **págs. 163 a 178** del **texto complementario.**
- Revisión de ejercicios resueltos **pág. 41 a la 42** del **texto básico** y ejercicios 3.3 propuestos **págs. 178 - 180 del texto complementario**
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

A continuación, se propone la autoevaluación número 2 donde encontrará algunos ejercicios y actividades respecto al tema de matrices, operaciones con matrices e inversa por el método de Gauss y Gauss - Jordán; esto le permitirá afianzar sus conocimientos. Adicionalmente, usted encontrará al final el solucionario a las preguntas de la autoevaluación. Actividad tomada de Morales (2022)

Autoevaluación 2

1. De acuerdo con las siguientes expresiones, seleccione verdadero o falso.

a. ( ) Un sistema lineal es el conjunto de ecuaciones lineales.

b. ( ) Resolver un sistema lineal es determinar los valores de las variables que al sustituirlos satisfacen en todas las ecuaciones.

c. ( ) Todos los sistemas lineales son consistentes.

d. ( ) Un sistema lineal puede tener una única solución, infinitas soluciones o no tener solución.

e. ( ) La matriz de orden mxn es aquella formada por n filas.

f. ( ) Una matriz es igual a otra cuando sus elementos de la diagonal principal son iguales.

g. ( ) El resultado de multiplicar una matriz fila (1xm) por una matriz columna (mx1), resulta una matriz de orden mxm.

h. ( ) Según las propiedades de la multiplicación de matrices AB = BA

i. ( ) Una matriz B es matriz inversa de A, si AB = A.

j. ( ) La forma escalonada por renglón implica transformar a 1, el elemento pivote de cada fila.

k. ( ) Una operación elemental por renglón implica sumar una constante diferente de cero a cada elemento de un renglón.

l. ( ) El método Gauss-Jordan implica transformar una matriz a una forma escalonada reducida.

m. ( ) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, no está en la forma escalonada por renglón debido a que el primer elemento diferente de cero en el segundo renglón no es 1.

n. ( ) Dado que $A.A^{-1}=I$, siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz B= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ es la inversa de A.

o. ( ) Si el último renglón de una matriz tiene todos sus elementos nulos luego de su transformación, significa que es una matriz no singular.

p. ( ) Una matriz equivalente no necesita haberle realizado previamente una operación fundamental de renglón.

Ejercicios de aplicación

2. Por eliminación de variables, determine los valores de x, y, z.

a. $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+2y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=11 \\ 3x+6y-5z=16 \end{cases}$

3. Realice la multiplicación matricial AB, AC y BC, siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$,

B= $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y C= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. **Por el método de Gauss-Jordan, determine si es factible solucionar los siguientes sistemas lineales:**

a. $$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + 8y - 6z = 2 \\ 6x + 12y - 10z = 0 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} 3x + 6y - 6z = 9 \\ 2x - 5y + 4z = 6 \\ 5x + 28y - 26z = -8 \end{cases}$$

5. **Determine la inversa de la matriz si existe.**

a. B= $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

b. A= $\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

c. C= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es indispensable que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma cómo se resuelven paso a paso.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- Considerar, que ni la ley de la cancelación ni la propiedad conmutativa se aplican en la multiplicación de matrices, por lo que si AB=AC, no necesariamente B=C, asimismo, AxB generalmente no es igual a BxA, la ley conmutativa se cumplirá siempre que una de las dos matrices sea cuadrada.

- Si un producto AxB es la matriz cero, en general, no se puede inducir a la conclusión de que A=0 o B=0, es decir, no necesariamente una matriz debe ser nula para que el producto nos resulte una matriz nula.
- En las operaciones con matrices debe recordar la ley de los signos para su uso correcto en la solución de los problemas.

Ir al solucionario

Ha desarrollado su segunda autoevaluación, seguro que lo realizó con éxito, ¡Felicitaciones!, con la misma dedicación y entusiasmo lo invito a continuar con el resto de las unidades.

Unidad 3. Determinantes

Se inicia con el aprendizaje de estas estructuras matemáticas, las cuales son muy importantes en el ordenamiento de datos, es decir, el determinante es un número real que se calcula siempre sobre una matriz cuadrada, para el aprendizaje de este tema se hará el uso de su definición, propiedades, métodos de cálculo y su aplicación dentro del álgebra de matrices.

3.1. Definición y propiedades

Según Morales (2022): Los determinantes aparecieron antes que las matrices, modernamente se considera que el determinante es propio de una matriz cuadrada. El nombre de determinante aparece porque "determina" si un sistema de ecuaciones tiene o no solución única. (p.57).

> En la parte II del libro virtual Proyecto Descartes en la sección 1,2 y 3 encontrará el tema de determinantes 2x2, 3x3, propiedades, método de cálculo y lo más importante puede interactuar con el recurso al resolver ejercicios de determinantes en línea, en donde se puede observar atractivamente la lógica de cálculo del determinante.

El determinante nos apoya mucho en el estudio de las matrices, cuando su valor es igual a 0 $(det\ A = 0)$, podemos mencionar que el sistema de ecuaciones lineales no posee inversa y tampoco solución única, se trata de un sistema linealmente dependiente de soluciones infinitas, pero lo contrario es que el determinante es mayor que $(det\ A > 0)$ se trata de un sistema de ecuaciones de solución única e independiente. Al referirme a la linealidad Independiente o dependiente tiene que ver si las filas y columnas de una matriz tienen entre ellas alguna relación de proporcionalidad en el caso de la dependencia y lo contrario es ser independiente. Se representa un determinante por **det (A) y |A|.**

Cálculo de la determinante

Una de las aplicaciones del determinante es en el cálculo de áreas y volúmenes, para calcular el determinante lo hacemos por la Regla de Sarrus, por medio del siguiente video se muestra paso a paso el cálculo del determinante, destacando la operación entre diagonal principal y secundaria que debe ser intercalada por un signo negativo.

Debemos tomar en cuenta que al momento de realizar el producto de los elementos positivos debemos anteponer el signo negativo de los elementos que poseen el sentido negativo.

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

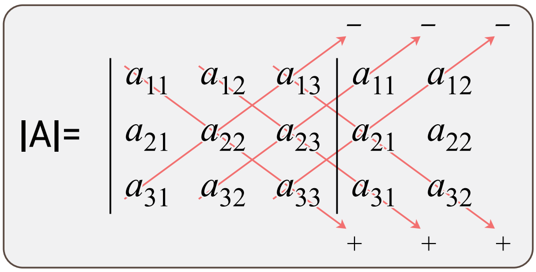
Signo negativo de la **regla de Sarrus**

$$= (a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3}) - (a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} + a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3} + a_{2,3} \cdot a_{3,2}\, a_{1,1})$$

Se escribe *A* y se le adjuntan sus primeras dos columnas o pueden ser las filas:

Figura 17.

Otra disposición de los elementos de Sarrus



Nota. Adaptado del concepto de determinantes (p. 177) de Grossman, S., Flores Godoy, J., & Vázquez Valencia, F., 2012, McGrawHill

A continuación, se calculan los seis productos, poniendo signo menos antes de los productos con flechas hacia arriba, y se suman todos, como se describe en la expresión antes mencionada de |A|.

Ejemplo:

Calcular el determinante por la regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Si seguimos la regla como se explica en la **figura 17**. Se tiene

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right.$$

$$|A| = (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2)$$
$$- [(-1)(2)(2) - (2)(3)(3) - (4)(4)(5)]$$
$$= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69$$

La **regla de Sarrus** no se utiliza para matrices de orden n>3, para ello se utiliza el método de menores y cofactores.

3.2. Método de menores y cofactores

Definición

Sea una matriz cuadrada. El menor del elemento a_{ij} se denota como M_{ij} y es el determinante de la matriz que queda después de eliminar el renglón i y la columna j de A.

El **menor** M_{ij} es: Sea A una matriz nxn y sea M_{ij} la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el **menor ij** de A

$$|M_{ij}|$$

Ejemplo:

Sea A= $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. Encuentre el M_{21}, M_{32}

$$M_{21}= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{32}= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

El **cofactor** de a_{ij} se denota por A_{ij} y está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Explicación:

$$A= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A|=\det A= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

esta regla se llama expansión por cofactores, podemos definir de manera general en matrices $n \times n$ el método de cofactores.

Si A es de 3×3, $|A| = a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$

Si A es de 4×4, $|A| = a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} - a_{14} A_{14}$

Si A es de $n \times n$, $|A| = a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} - \cdots + a_{1n} A_{1n}$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Se observa que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 \ si \ i+j \ es \ par \\ -1 \ si \ i+j \ es \ impar \end{cases}$$

Ejemplo:

Calcule el determinante por el método de cofactores

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0(-1) + 2(5) + 1(4) = 14$$

$$= 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0(-1) - 3(2) + 4(5) = 14$$

Podemos concluir que sea por fila o columna de la matriz por la regla de expansión de cofactores, obtenemos el mismo valor del determinante.

Con la finalidad de reforzar su aprendizaje, realice las siguientes actividades recomendadas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades de las determinantes en la **sección 3.7 del texto básico págs. 42 - 45** y del **texto complementario sección 4.2 págs. 263 - 280**.
- Revisión de **ejercicios resueltos** en la **sección 3.7 (ejercicios 1 a 6) del texto básico** y los **ejercicios propuestos de la sección 4.2 págs. 281-283 texto complementario.**
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

3.3. Propiedades de los determinantes

El determinante de una matriz triangular superior o inferior es igual producto de sus componentes en la diagonal principal.

Ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 56 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0)$$
$$= 56$$

1. El determinante del producto es el producto de sus determinantes AB= det A det B

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 17 & 17 & 20 \\ 24 & 24 & 29 \end{vmatrix} = [(6 \cdot 17 \cdot 29) + (-1 \cdot 17 \cdot 24) + (8 \cdot 20 \cdot 24)] - [(17 \cdot 24 \cdot -1) + (20 \cdot 24 \cdot 6) + (8 \cdot 17 \cdot 29)]$$
$$= 2958 - 408 + 3840 - (-408 + 2880 + 3944) = 6798 - 6824 = -26$$

Separadamente, cada determinante calculado por Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -2 \text{ y } |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

Se evidencia que al multiplicar lo resultante nos da como resultado -26.

2. El determinante de una matriz coincide con el determinante de su traspuesta det A^t=det A

$$\left.\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \\ |A^t| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \end{aligned}\right\} \rightarrow |A| = |A^t|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A^t| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

3. Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces |A|=0.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \overbrace{2\cdot0\cdot8}^{=0} + \overbrace{0\cdot6\cdot7}^{=0} + \overbrace{1\cdot0\cdot9}^{=0} - \overbrace{7\cdot0\cdot9}^{=0} - \overbrace{2\cdot0\cdot6}^{=0} - \overbrace{1\cdot0\cdot8}^{=0} = 0$$

4. Si el renglón i o la columna j de A se multiplica por un escalar k, entonces el det (A) se multiplica por k

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7k \\ 2 & 1 & 5k \\ -1 & 3 & 3k \end{vmatrix} = 9k + 42k - 5k - (-7k) - 45k - 6k = (9 + 42 - 5 + 7 - 45 - 6)k =$$
$$= (58 - 56)k = 2k$$

5. El intercambio de los renglones o columnas distintos de A, da como resultado el det (A) con signo contrario.

Vemos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 21 + 2 - 0 - 9 - 1 = 23 - 10 = 13$$

Intercambiamos las dos primeras filas

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 + 0 - 2 - 21 - 0 = 10 - 23 = -13$$

6. Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces el det A=0

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 63 - 7 - (-7) - 63 - 3 = 3 + 63 - 7 + 7 - 63 - 3 = 0$$

7. Si un renglón o columna de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces el det A=0

Ejemplo: $|A| = \begin{vmatrix} 30 & 50 & 65 \\ 40 & 50 & 40 \\ 50 & 50 & 15 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= [(30)(50)(15) + (50)(40)(50) + (65)(40)(50)] - [(50)(50)(65) + (40)(50)(15) + (30)(50)(40)] \\
&= (22500 + 100000 + 130000) - (162500 + 30000 + 60000) \\
&= 252500 - 252500 \\
&= 0
\end{aligned}$$

8. Si se suma un múltiplo escalar a un renglón (columna) de A, a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

Supongamos la siguiente regla $R_3 = k \cdot R_1 + m \cdot R_2$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka + md & kb + me & kc + mf \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ md & me & mf \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

9. Si en un determinante una (fila o columna) está descompuesto en sumas, podemos descomponer el determinante en suma de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a + b & c + d & e + f \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & c & e \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b & d & f \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10. Si a una fila le sumamos otra línea proporcional multiplicada por una constante, el determinante no varía.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 6 + 45 - 9 - (-5) - 42 = -7 + 6 + 45 - 9 + 5 - 42$$

$$= 56 - 58 = -2$$

Aplicamos la siguiente regla elemental $R \rightarrow R_3 + 3R_1$

$$\det|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 16 \end{vmatrix} = -16 + 60 + 0 - 0 - (-50) - 96$$

$$= -16 + 60 + 50 - 96 = 110 - 112 = -2$$

Por tanto, el determinante no ha variado.

11. El determinante de la matriz identidad $|I| = 1$

$$\det|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1)(1) = 1$$

12. El determinante de una matriz coincide con el determinante de su transpuesta $|A|=|A^t|$

Este contenido fue recopilado de algunos trabajos de (Determinantes, 2022), (Grossman, 2012).

3.4. Matriz adjunta e inversa

La **matriz adjunta** de una matriz cuadrada A se define como la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto. (Matriz de cofactores)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \text{Adj}(A) = B^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Calcule la matriz adjunta de A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Empezamos por calcular el determinante para corroborar que la matriz A es invertible o posee una matriz inversa siendo el valor del determinante diferente de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (8+6+0)-(0+4+16) = -6$$

$$= -6$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\4&2\end{vmatrix}=-2, A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=1, A_{13}=\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&0\\4&2\end{vmatrix}=-4, A_{22}=\begin{vmatrix}4&0\\3&2\end{vmatrix}=8, A_{23}=-\begin{vmatrix}4&2\\3&4\end{vmatrix}=-10$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=2, A_{32}=-\begin{vmatrix}4&0\\1&1\end{vmatrix}=-4, A_{33}=\begin{vmatrix}4&2\\1&1\end{vmatrix}=2$$

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-4&8&-10\\2&-4&2\end{pmatrix} \quad B^t=Adj\,A=\begin{bmatrix}-2&-4&2\\1&8&-4\\1&-10&2\end{bmatrix}$$

A través de esta definición podemos calcular **la inversa** de la matriz A de acuerdo con la siguiente definición.

$$A^{-1}=\frac{Adj\,(A)}{|A|}$$

Como se ha determinado el determinante de A y la Adjunta de A, procedemos a aplicar la definición de la inversa en función de la adjunta.

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}-2&1&1\\-4&8&-10\\2&10&2\end{bmatrix}}{-6}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-2&-4&2\\1&8&-4\\1&-10&2\end{bmatrix}$$

Aplicando la multiplicación de un escalar por una matriz

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}&-\frac{4}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}&\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Comprobación

Debemos comprobar la definición de $I=AA^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz inversa encontrada está correctamente calculada.

Es necesario *identificar que el valor del determinante de A sea diferente de 0, pues en caso contrario no sería posible la división requerida en él.*

Otro método para calcular el determinante es el **método descubierto por Cramer**, Sea A una matriz de n x n y suponga que $det\ A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema **Ax = b** está dada por el mismo que se simplifica en la siguiente fórmula:

$$AX = b \rightarrow x = \frac{|A_i|}{|A|}$$

En el Libro interactivo Proyecto Descartes de la Institución Universitaria Pascual Bravo revisar el capítulo III sección 2.4 encontramos la definición de la regla de Cramer y un ejercicio resuelto paso a paso de manera animada.

Este método nos sirve para resolver sistemas de ecuaciones, se debe cumplir que:

- La matriz Ax=b debe ser cuadrada (igual número de ecuaciones e igual número de incógnitas.
- $|A| \neq 0$. Caso contrario este método no procede

Para establecer el valor de cada incógnita se dispone los elementos de la matriz de la forma $Ax = b$, asignando a b en el lugar de cada variable a calcular, por ejemplo, si vamos a encontrar x la columna de b se reemplaza en el lugar que debería estar x en la matriz e igual manera si se va a calcular y y z.

La determinante del denominador se mantiene en todas las permutaciones que b posea y pues depende del número de variables que posea el sistema de ecuaciones en su forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \textit{Forma Matricial de un sistema de ecuaciones lineales}$$

Permutaciones en Cramer

$$|A_x|=\frac{\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \; |A_y|=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \; |A_z|=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \ldots X_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & p_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Establecemos el siguiente problema para solucionarlo, pasando del lenguaje natura al lenguaje matemático. En principio verificamos si la matriz A posee inversa o es inversible.

Se requiere averiguar el precio unitario de algunos productos para poder venderlos de algunos productos en una tienda de abarrotes, un cierto día llegó el proveedor de Nestlé dejó **10 cartones de Nescafé**,**8 cartones de La Lechera** y **5 cartones de Natura** y cobró un total de **72 dólares**. A la semana siguiente, dejo 6 **cartones de Nescafé**, 9 **cartones de La Lechera** y 4 **cartones de Natura** y cobró **49,85.** Y una semana después, dejó **5 cartones de Nescafé**,**7 cartones de La Lechera** y **10 cartones de Natura** y cobró un total de 50,25 dólares.

Solución

Se plantea el sistema de ecuaciones deducido del problema quedando de la siguiente manera.

Datos

X: Costo unitario del cartón de Nescafe.
Y: Costo unitario del cartón de la Lechera.
Z: Costo unitario del cartón de Natura.

Costo total= Costo unitario del cartón de Nescafe+ Costo unitario del cartón de la Lechera+ Costo unitario del cartón de Natura.

Tabla 4.

Tabla de datos

	Nescafe	La Lechera	Natura	
Entrega 1	10x	8y	5z	72
Entrega 2	6x	9y	4z	49,85
Entrega 3	5x	7y	10z	50,25

Nota. Tabla de datos derivado del problema propuesto. Elaboración propia.

$$\begin{aligned} 10x + 8y + 5z &= 72 \\ 6x + 9y + 4z &= 49{,}85 \\ 5x + 7y + 10z &= 50{,}25 \end{aligned}$$

Al resolver por la r**egla de Sarrus** el determinante tenemos que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 10 \cdot 9 \cdot 10 + 8 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot 7 - 5 \cdot 9 \cdot 5 - 7 \cdot 4 \cdot 10 - 10 \cdot 6 \cdot 8$$

$$= 285$$

$|A| \neq 0$, por tanto, podemos concluir que este sistema es compatible con solución única. Continuamos para encontrar la solución al sistema por la r**egla de Cramer**.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 72 & 8 & 5 \\ \frac{997}{20} & 9 & 4 \\ \frac{201}{4} & 7 & 10 \end{vmatrix} = \frac{3135}{2} = 1562.5$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 10 & 72 & 5 \\ 6 & \frac{997}{20} & 4 \\ 5 & \frac{201}{4} & 10 \end{vmatrix} = \frac{1425}{4} = 356.25$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 72 \\ 6 & 9 & \frac{997}{20} \\ 5 & 7 & \frac{201}{4} \end{vmatrix} = 399$$

$$x_1 = \Delta_x/\Delta = \frac{\frac{3135}{2}}{285} = \frac{11}{2} = 5.5$$
$$x_2 = \Delta_y/\Delta = \frac{\frac{1425}{4}}{285} = \frac{5}{4} = 1.25$$
$$x_3 = \Delta_z/\Delta = \frac{399}{285} = \frac{7}{5} = 1.4$$

Por tanto, por regla de Cramer la solución es $P(x, y, z) = (5.5{,}1.25{,}1.4)$

> **X:** El Costo unitario del cartón de Nescafe es **5.5** dólares.
> **Y:** Costo unitario del cartón de la Lechera es **1.25** dólares.
> **Z:** Costo unitario del cartón de Natura es **1.4** dólares.

3.5. Aplicaciones de determinantes

Otra alternativa para calcular la ecuación de la recta en R2 es utilizar la definición del determinante y el sistema de ecuaciones lineales homogéneo, este razonamiento se ha tomado de Morales (2022).

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema homogéneo, y tiene al menos una solución, la trivial, cuando a=b=c=0, pero sabemos que debe haber infinitas soluciones, ya que una ecuación de la recta puede ser múltiplo de otra, por lo tanto, la matriz de los coeficientes es singular y su determinante es 0 (recuerde que en este caso las incógnitas son a, b y c), por lo tanto, la ecuación de la recta estará dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como la tercera columna no afecta los resultados de las multiplicaciones, algunos autores simplifican la fórmula usando otro “determinante” que excluye esa tercera columna (p. 98).

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplos

Use determinantes para calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4,-6) y (3,-1).

Resolución:

Debemos calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6x + 3y - 4 + 18 - 4y - x = \mathbf{-7x - y + 14 = 0}$$

La ecuación quedaría $-7x - y + 14 = 0$

Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P_1(0,-2)$, $P_2(5,3)$ y $P_3(2,-6)$.

Resolución:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \\ 40 & 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 34 & 3 & 1 \\ 40 & -6 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 1 \\ 40 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 34 & 5 & 3 \\ 40 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)(0-4-30-6+10+0) - x(12-80-204-120+68+24) \\ + y(20+0+68-200-0-8) - (-120-136+0+400-0-24) \\ = 0\end{aligned}$$

$$-30(x^2+y^2) + 300x - 120y - 120 = 0$$

$$(x^2+y^2) - 10x + 4y + 4 = 0$$

$$x^2+y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$$

Ahora, le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades de las determinantes en la **sección 3.7 del texto básico págs. 42 - 45** y del **texto complementario sección 4.2 págs. 263 - 281**.
- Revisión de **ejercicios resueltos** en la **sección 3.7 (ejercicios 1 a 6) del texto básico** y los **ejercicios propuestos de la sección 4.2 págs. 281-283 del texto complementario.**
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Con el mismo ánimo le recuerdo valorar su aprendizaje realizando la siguiente autoevaluación, de seguro será positivo. Recuerde que en el solucionario podrá comparar sus respuestas. Actividad tomada de Grossman (2022) y Morales (2022)

Autoevaluación 3

1. De acuerdo con las siguientes expresiones, seleccione Verdadero o Falso.

a. ( ) En una matriz de orden 1x1, el valor su determinante será el valor correspondiente a a_{11}.

b. ( ) Si A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el $det(A) = a11a22 - a12a21$

c. ( ) Si A=$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, el $det(A) = det(A^T)$

d. ( ) Si A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, y B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es el resultado de intercambiar filas, entonces $det(A) = det(B)$

e. ( ) Si A es una matriz cuadrada que posee una fila nula, el valor del determinante no existe.

f. ( ) El cofactor de 3 en la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es -8

g. ( ) El cofactor Aij de aij es definido como $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$

h. ( ) Si A tiene inversa, entonces aplicando determinantes y su adjunta es factible $A^{-1} = \frac{det(A)}{Adj(A)}$

i. ( ) En un sistema lineal es factible obtener el valor de x_1, conociendo el determinante de la matriz de coeficientes (A) y el determinante de la matriz A_1 obtenida de reemplazar la columna de la variable x_1 en A por los términos independientes del sistema lineal (b).

j. ( ) Es factible utilizar la regla de Cramer cuando existe solución única del sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicios de aplicación

2. **Si** A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, determine para a_{11} y para a_{32}, su respectivo menor (M) y cofactor.

3. **Obtenga el valor del determinante** de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, aplicando desarrollo de cofactores, obtenga la adjunta y finalmente obtenga la inversa.

4. **Resuelva el sistema lineal aplicando la regla de Cramer**

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -20 \end{cases}$$

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma en cómo se resuelven paso a paso.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- Hay que recordar que una matriz cuadrada A, es invertible si y solo si determinante de A≠0
- En algunos ejercicios requerirá tener presente las propiedades de los determinantes para poder contestar adecuadamente.
- El determinante de una matriz 1x1 es: $det(x) = x$
- Si una matriz A tiene una fila de ceros, pues entonces |A|=0

Ir al solucionario

Ha realizado la tercera autoevaluación ¡Felicitaciones! Sigue adelante y cualquier inquietud que tenga no dude en comentar en la tutoría con el docente.

Semana 7

Actividades finales del bimestre

Con la finalidad de reforzar su aprendizaje realice las siguientes actividades recomendadas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Revisar los recursos planteados en esta guía y además del plan académico de la asignatura.
- Revisar otras bibliografías y recursos para que complementar su estudio. Se deja el recurso interactivo de Geogebra "matrices y determinantes" en el cual muestra el desarrollo de ejercicios aleatorios en donde el estudiante puede observar paso a paso el cálculo del determinante por la regla de Sarrus, adicionalmente posee un video explicativo de la regla mencionada.

Semana 8

Bienvenido a la última semana del primer bimestre, para reforzar sus conocimientos le animo a desarrollar las siguientes actividades de aprendizaje recomendadas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades de las determinantes en la **sección 3.7 del texto básico págs. 42 - 45** y del **texto complementario sección 4.2 págs. 263 - 280**.

- Revisión de **ejercicios resueltos** en la **sección 3.7 (ejercicios 1 a 6) del texto básico** y los **ejercicios propuestos de la sección 4.2 págs. 281-283 del texto complementario.**

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

- Resuelve problemas aplicando los conceptos de espacios vectoriales

Inicialmente, empezaremos aprendiendo la notación de vectores, diferencias entre magnitudes escalares y vectoriales, representación gráfica y matemática, se empezará con vectores en el plano R^2, R^3, producto escalar, producto cruz o vectorial, se estudiará los vectores en el plano, ampliaremos estos conceptos a vectores de cualquier dimensión, especialmente los vectores en el espacio, además de las aplicaciones en la recta, plano, áreas y volúmenes del paralelepípedo.

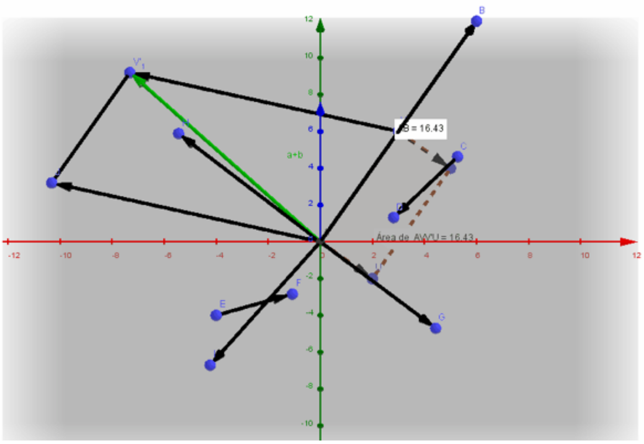
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 9

Unidad 4. Vectores

Figura 18.

Vectores en el espacio R^3



Nota. Representación gráfica de vectores en el espacio y vectores libres en Geogebra. Elaboración propia.

En la **figura 18**. Se ilustra como se representan algunos vectores en el espacio R3, las relaciones entre ellos y la representación que pueden tener en el caso de ser vectores libres.

4.1. Vectores en R^2 y R^3

Un vector es la representación de una magnitud que tiene dirección y sentido. Un vector de Rn es un conjunto ordenado de n números reales, los cuales son llamados componentes. Lo denotaremos de la siguiente manera:

$$\vec{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Por ejemplo, si nos referimos a vectores en R2 poseerán dos coordenadas que se representa de manera matemática como:

$$\vec{v} = (x_1, x_2)$$

Si nos referimos a vectores en R3 poseerán tres coordenadas que se representa de manera matemática como:

$$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$$

En matemática la definición es un poco más general, es simplemente un conjunto ordenado de números, que es la posición que ocupan esos números, se suele representar con los números entre paréntesis separados por una coma, en algunos casos se suele usar un punto y coma para separarlos.

Figura 19.

Componentes de un vector

$$R^2 = \{(\underbrace{x}_{\text{Primera componente}}, \underbrace{y}_{\text{Segunda componente}}) / x \in R, y \in R\}$$

Nota. Adaptado de componentes de vector [Fotografía], por Zapatero, A, s.f, Slideshare, enlace web

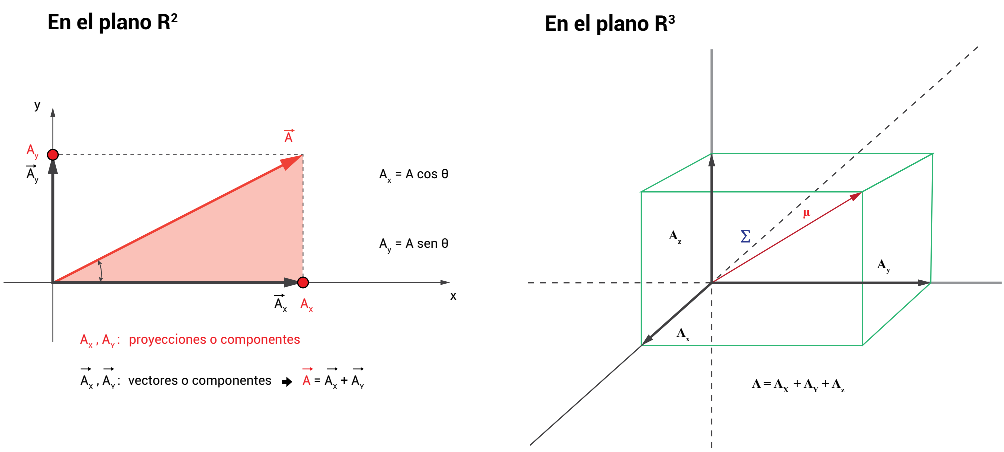
Al número de componentes que lo conforman se denomina *dimensión del vector* depende a que espacio vectorial pertenece a R^2 (plano cartesiano) o a R^3 (espacio tridimensional).

Inicialmente, trataremos con vectores de dimensiones 2 y 3 , en el video sobre vectores en 3 dimensiones se muestra las características de un vector en el plano tridimensional, la aplicación de operaciones elementales entre ellos y el análisis del resultado, si se trata de un vector o escalar.

Según Morales (2022) menciona que para representar un vector necesitamos un sistema de coordenadas, nos apoyamos en rectas perpendiculares entre sí, que coinciden en un punto llamado origen, generalmente una de estas rectas es horizontal y se la llama eje de las x o abscisas, la otra es vertical y suele nombrarse eje de las y u ordenadas. En R^3 necesitamos un tercer eje, perpendicular a los otros dos, al que se llama eje de las z. En conjunto forman un sistema de coordenadas rectangulares (p.76)

Figura 20.

Representación de vectores en el plano R^2 y R^3



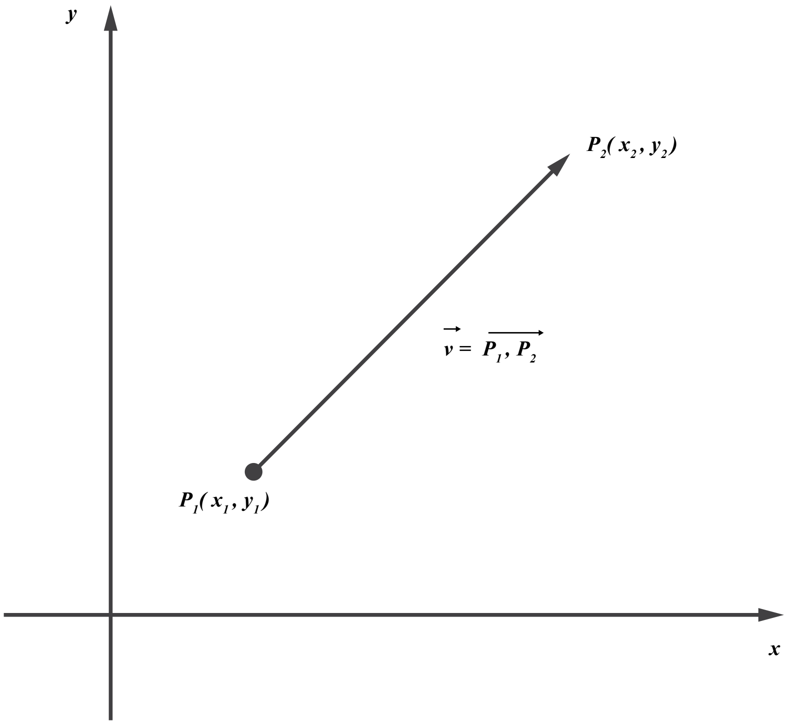
Nota. Adaptado de componentes de vector [Fotografía], por Zapatero, A, s.f, Slideshare, enlace web

Si conocemos puntos en el plano y no vectores podemos realizar una diferencia entre los puntos teniendo en cuenta el sentido que vamos a imaginar al vector, este procedimiento es para calcular las coordenadas de un vector en cualquier tipo de espacio.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Figura 21.

Vector entre dos puntos



Nota. Adaptado de Vector [Fotografía], por Villena, M, (p.2), s.f, enlace web

4.2. Longitud, distancia, magnitud o norma

Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector de R^2.La magnitud o norma de $\vec{v}$ denotada como $|\vec{v}|$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ ó } |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En R^3

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \text{ ó } |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}$$

La dirección de $\vec{v} = (x, y)$ esta definida por la inclinación de la línea de acción del vector, es decir por el ángulo θ que se lo considera en sentido antihorario como positivo, cuya referencia es el eje de las abscisas. Su cálculo es a través de la siguiente definición matemática.

$$\theta = arctan\,\frac{y}{x}$$

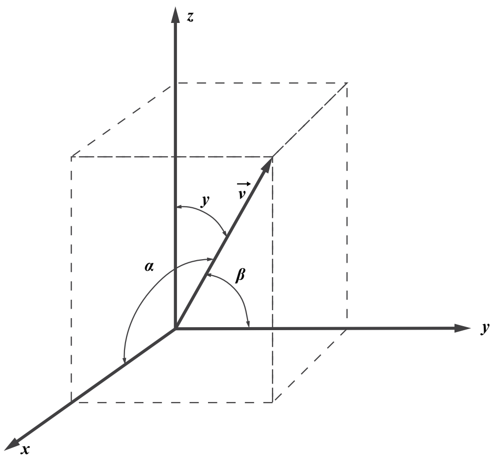
Si el vector se genera entre dos puntos tendremos otras definiciones tales como:

$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y su tangente o inclinación $\theta = arctan\,\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

En el plano R³, el cálculo de la dirección de un vector se lo trata a través de la definición de vectores directores, estos se definen por la medida de los ángulos que forma la línea de acción con los ejes x, y y z.

Figura 22.

Ángulos directores de un vector en R³



Nota. Adaptado de Vector [Fotografía], por Villena, M, (p.3), s.f, enlace web

Para calcular la dirección de un vector en R³ nos apoyamos en la definición de vector unitario.

$$Cos\,\alpha = \frac{x}{\|\vec{v}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$cos\,\beta = \frac{y}{\|\vec{v}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

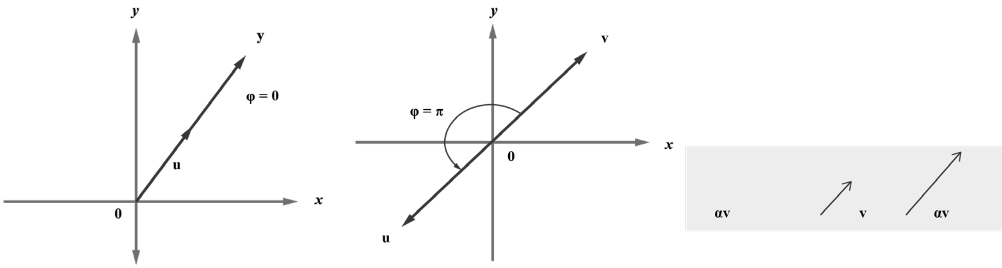
$$Cos\gamma = \frac{z}{\| \vec{v} \|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

En el caso del **sentido del vector** se representa por la cabeza de flecha que hace que se diferencie de un segmento no dirigido y se nombra su sentido de acuerdo con los puntos cardinales, esto es más notorio en el área de la física.

Si se trata de analizar las posiciones relativas de dos vectores diferentes de cero **u** y **v,** en el caso de que sean **paralelos,** el ángulo entre ellos es **cero**. Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas, en este caso hablamos de un **ángulo 180°**, como se puede observar su representación en la siguiente figura.

Figura 23.

Vectores paralelos



Nota. Adaptado de vectores paralelos (p. 248), por Grossman, S., Flores Godoy, J., & Vázquez Valencia, F., 2012, McGrawHill

Se suele definir una operación llamada **suma entre vectores**, usualmente como la suma de sus respectivas componentes, es decir, el vector suma de dos vectores (de la misma dimensión) es otro vector (de esa dimensión) de la siguiente manera:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)i + (u_y + v_y)j$$

La resta entre vectores es la operación contraria a la suma y eso se nota en el signo negativo donde el vector sustraendo cambia de sentido.

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$$
$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x)i + (u_y - v_y)j$$

Ejemplo:

$$\vec{u} = (2, 3, 4) + \vec{v} = (5, 7, 3) = \vec{w} = (7, 10, 7)$$

Enfoque geométrico

La gráfica de la suma de vectores por el método del paralelogramo en el que los vectores nacen desde el origen de los dos vectores, de acuerdo con su magnitud, dirección y sentido, se construye el paralelogramo, con sus proyecciones y en la intersección de estas recae el punto final del **vector suma**.

Estimado/a estudiante, le invito a revisar el siguiente recurso interactivo:

Visualizar e interactuar con la suma de vectores

Otra operación usual es el **producto de un vector por un escalar**, que se define como otro vector en el que cada componente es el producto del escalar por cada componente del vector original, $\vec{u} = k\vec{v}$, Ejemplo: 3*(2, 3, 4) = (6,9,12).

Morales (2022) menciona que un escalar es un elemento de un conjunto que cumple ciertas propiedades, al que en matemática se denomina cuerpo (o estructura de cuerpo), las propiedades que debe cumplir el cuerpo son la asociativa, conmutativa, elemento inverso y elemento neutro para la suma y la multiplicación, y la distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

A veces se habla de vector, fila o columna como matrices, surge entonces la pregunta

¿Un vector es una matriz?

Se podría decir que, si hay diferencias, con los vectores, porque hay operaciones de vectores que no se hacen con matrices, por ejemplo, el producto punto, producto cruz, hallamos la norma, encontramos vectores unitarios, etc., que se tratará más adelante.

Cuando los vectores y la operación suma y producto por un escalar cumplen ciertas propiedades forman lo que se llama un espacio vectorial $V(+,\cdot)$. (p.78).

Vector unitario

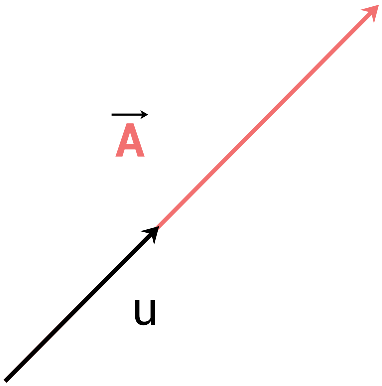
Es aquel vector que tiene una longitud de 1.

$$U_{\vec{u}} = \frac{\vec{v}}{\| \vec{v} \|}$$

$$U_{\vec{u}} = \frac{\vec{v}}{\| \sqrt{x^2 + y^2} \|}$$

Figura 24.

Representación gráfica del vector unitario



Nota. Representación gráfica del vector unitario en Geogebra. Elaboración propia.

La característica de este vector es que es paralelo al vector principal, y se generan tanto en R^2, R^3 y R^n, nos ayuda a identificar la dirección y sentido del vector principal. En el siguiente recurso de Geogebra, Vector unitario, se muestra cómo se genera un vector unitario a partir de un vector dado, el estudiante puede interactuar con esta actividad para comprender el concepto y utilidad de un vector unitario.

Para reforzar sus conocimientos, realice las siguientes actividades recomendadas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Revisar los conceptos y propiedades de los vectores en el **capítulo 2** secciones de **2.1 - 2.2** págs. **12-15** del **texto básico** y del **texto complementario capítulo 1** secciones **1.0 -1.1 págs. 1-17**.
- Revisar los **ejercicios resueltos** en las secciones 2.1 - 2.2 **(ejercicios 1 a 3) del texto básico** y los **ejercicios propuestos de la sección 1.1 págs. 16-17 del texto complementario.**
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Semana 10

4.3. Producto punto entre vectores

Hasta ahora hemos sumado dos vectores y multiplicado un vector por un escalar, de allí que surge la pregunta ¿es posible multiplicar dos vectores y su resultado será útil?

Tal producto es el producto escalar que nos ayuda a calcular el ángulo entre dos vectores ,el video Ángulo entre vectores, demostración de fórmula nos muestra la deducción matemática del cálculo del ángulo entre dos vectores a partir de la Ley de Cosenos, dicha deducción recae en la aplicación del producto escalar, también muy importante la utilidad en vectores ortogonales para demostrar la posición relativa de los mismos.

Como el producto escalar hereda las propiedades de los números reales, por tanto, se debe a algunas propiedades del producto punto, las cuales nos permiten realizar la aplicación de esta operación en cualquiera área de la ciencia, específicamente podemos decir en la enseñanza de la física, inteligencia artificial, robótica, ciencia de datos, etc.

En el video Producto punto de vectores se explica el cálculo del producto escalar de acuerdo con la definición (1), entonces el producto punto entre dos vectores **u** y **v** de dimensión n es igual a la sumatoria entre el producto de las respectivas componentes, siendo **u** y **v.**

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

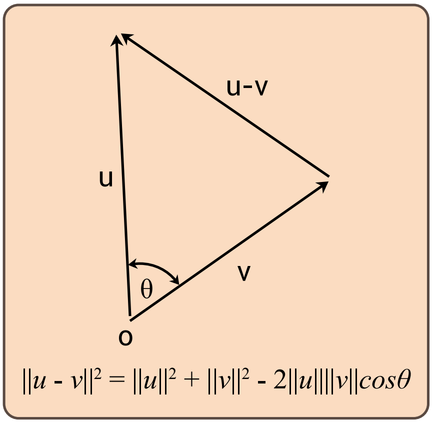
$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \square u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \qquad (1)$$

Si aplicamos la ley de los cosenos a la diferencia entre dos vectores obtendríamos

Figura 25.

Regla de cosenos



Nota. Adaptado de Regla de Cosenos [Fotografía], por Walter Mora, 2018, Researchgate, enlace web

$$||u - v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||||v||cos\theta$$

Aplicamos las propiedades del producto escalar

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \mid \vec{u} \parallel \vec{v} \parallel cos\,\theta$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \mid \vec{u} \parallel \vec{v} \parallel cos\;cos\,\theta$$

$$-2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \mid \vec{u} \parallel \vec{v} \parallel cos\,\theta$$

Simplificamos la ecuación y tenemos que el producto escalar en función del ángulo entre los dos vectores es

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}\,\|\,\vec{v}\,\|\cos\theta$$

Despejando de la siguiente expresión el $\cos\theta$, podemos encontrar el ángulo comprendido entre los dos vectores.

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}\,\|\,\vec{v}\,\|}$$

Podemos deducir de ello que dos vectores que no sean nulos son ortogonales si su producto escalar es 0.

Ejemplos:

Encontrar el producto escalar entre los siguientes vectores

Sean $\vec{v} = (8,-2,1,5)$ y $\vec{u} = (3,5,0,-5)$ estos vectores pertenecen a R^4. La definición matemática es la misma para cualquier vector en cualquier plano.

Resolución:

$$(8)(3) + (-2)(5) + (1)(0) + (5)(-5) = 24 - 10 + 1 - 25 = -10$$

Sean $\vec{v} = (0,-3,2,5,1)$ y $\vec{u} = (6,-2,1,2,-5)$ calcular $4\vec{v}.\vec{u}$

Resolución

$$4(0,-3,2,5,1).(6,-2,1,2,-5) = (0,-12,8,20,4).(6,-2,1,2,-5)$$

$$= 0 + 24 + 8 + 40 - 20$$

$$= 52$$

Otra manera de calcular la norma de un vector es aplicando el producto punto, es decir, multiplicar el vector escalarmente por sí mismo, como se ve a continuación:

$$|\mathbf{v}|^2 = a^2 + b^2$$
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = (a,b)\cdot(a,b) = a\cdot a + b\cdot b = a^2 + b^2 = |\mathbf{v}|^2$$

Sea $\vec{v} = (1, 2, 3, -5)$ este vector pertenece a R^4

Calcule la norma del vector a través del producto punto

Solución

$$\vec{v} = (1{,}2{,}3, -5) \cdot (1{,}2{,}3, -5)$$

$$|v|^2 = (1)(1) + (2)(2) + (3)(3) + (-5)(-5)$$

El vector tiene una medida de $\vec{v} = \sqrt{39}u$

¿Para qué valor de x, el vector (4,2, x) tiene norma 5?

Resolución:

$$v \cdot v = (4{,}2, x) \cdot (4{,}2, x) = (4)(4) + (2)(2) + (x)(x) = 20 + x^2 = |v|^2$$

$$|v|^2 = 20 + x^2$$

$$5^2 = 20 + x^2$$

$$25 = 20 + x^2$$

$$x^2 = 5$$

$$= \sqrt{5}\ u$$

Verificar que el vector dado es unitario

Sea $\vec{v} = \frac{(2,-2,-1,1)}{\sqrt{10}}$

Solución

$$v \cdot v = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\vec{v} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}$$

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}}$$

$\vec{v} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1 \therefore$ el vector es unitario

Calcular la distancia entre p_1 y p_2 ; p_1=(0,3,-1,1), p_2=(2,1,1,2)

Solución

$$\overrightarrow{p_2 p_1} = \overrightarrow{Op_2} - \overrightarrow{Op_1} = (2{,}1{,}1{,}2) - (0{,}3,-1{,}1) = (2,-2{,}21)$$

$$\vec{v} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2 + 1^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{13}$$

Sean $\vec{u}$= (1,-3,1,0) y $\vec{v}$= (5,-3,1,0), calcular el ángulo entre los vectores.

Solución

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(5+9+1+0)}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{25+9+1+0}} = cos^{-1}\frac{15}{\sqrt{11}\sqrt{39}} = cos^{-1}\frac{15}{\sqrt{429}}$$

$$= cos^{-1}(0{,}7240) = 43.597°$$

(Se toma el ángulo menor de las posibles respuestas, en el primer cuadrante)

El producto escalar es una operación muy importante en vectores sea R2 o R3, una de sus propiedades nos menciona que **si el producto escalar entre dos vectores es igual a 0**, los dos vectores son perpendiculares.

Obtener el producto punto entre los siguientes pares de vectores e indicar si son ortogonales.

- Sea $\vec{u}$= (4,2,0) y $\vec{v}$= (-1,2,-3)

Solución

$$(4{,}2{,}0).(-1{,}2,-3) = -4 + 4 + 0 = 0$$ son ortogonales

- Sean (2,-1,-2,4, 5), (-1,3,2,-2,1).

Solución:

$(2,-1,-2,4,5).(-1,3,2,-2,1) = -2-3-4-8+5 = -12$ no es igual a cero ∴ No son ortogonales

Calcule el ángulo entre los siguientes vectores e indique si son ortogonales, paralelos u otro.

- Sea $\vec{u}$= (4,6) y $\vec{v}$= (3,-2)

Solución

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(12-12)}{\sqrt{16+36}\sqrt{9+4}} = cos^{-1}(0) = 90°$$

Son vectores ortogonales o perpendiculares, ya que el ángulo comprendido entre los dos vectores es 90° siendo un ángulo recto.

- Sea $\vec{u}$= (-1,2,3), y $\vec{v}$= (-5,10,15)

Resolución:

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(5+20+45)}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{25+100+225}} = cos^{-1}\frac{70}{\sqrt{14}\sqrt{350}}$$
$$= cos^{-1}\frac{70}{\sqrt{4900}} = cos^{-1}(70/70) = cos^{-1}(1) = 0°$$

Son vectores paralelos, dado que el ángulo comprendido entre ellos es cero, es decir, se nota que entre estos vectores, el segundo es 5 veces el primer vector, es decir, el uno es múltiplo del otro o el uno depende del otro, existe relación entre ellos.

- Sea $\vec{u}$= (2,-1,3,5), y $\vec{v}$= (-4,2,6,-10).

Resolución:

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(-8-2-18-50)}{\sqrt{4+1+9+25}\sqrt{16+4+36+100}} = cos^{-1}\frac{-78}{\sqrt{39}\sqrt{156}}$$
$$= cos^{-1}\frac{-78}{\sqrt{6084}} = cos^{-1}(-78/78) = cos^{-1}(-1) = 180°$$

Son vectores opuestos (antiparalelos), es decir, el ángulo entre ellos es de 180°, por tanto, existe relación entre ellos, pero el sentido de los dos vectores son opuestos.

- Sea $\vec{u}$= (3,-4,5,-1,0), y $\vec{v}$= (2,-1,-1,1,1).

Resolución:

$$\theta = cos^{-1}\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = cos^{-1}\frac{(6+4-5-1+0)}{\sqrt{9+16+25+1+0}\sqrt{4+1+1+1+1}}$$

$$= cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{51}\sqrt{8}}$$

$$= cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{408}} = cos^{-1}(0{,}198) = 78{,}6^{o}$$

No es paralelo, antiparalelo ni perpendicular, es decir, el ángulo comprendido es de 78,6°, por tanto, no tienen ninguna relación, son independientes.

4.4. Proyección de un vector sobre otro

La proyección de ese vector en la dirección del otro, en nuestro caso llamaremos proyección de u en la dirección de v, simbolizándola $Proy_{v}\,\boldsymbol{u}$.

a. $v\ y\ Proy_{v}\,\boldsymbol{u}\ \ tienen\ la\ misma\ dirección\ si\ u$

b. $v\ y\ Proy_{v}\,\boldsymbol{u}\ tienen\ direcciones\ opuestas\ u \cdot v < 0.$

Para encontrar la norma de esa proyección multiplicamos la norma de $\vec{u}$ por el cos θ. Luego, para transformarla en un vector la multiplicamos por el vector unitario de $\vec{v}$

$$Proy_{v}\,\boldsymbol{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\|\vec{u}\|\hat{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|}\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^{2}}\vec{v}$$

Como la suma de la parte paralela y la parte ortogonal de $\vec{u}$ dan como resultado $\vec{u}$ es fácil deducir que la parte ortogonal se calcula con
$u\ -\ Proy_{v}\,\boldsymbol{u}\ es\ ortogonal\ a\ v$

Ejercicio

Encontrar la proyección de $Proy_{\,v}\,u$ de $\vec{u} = (3, -8)$, $\vec{v} = (-5{,}1)$

Solución

Parte paralela

$$Proy_{\,v}\,u = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{(3)(-5)+(-6)(1)}{\sqrt{-5^2+1^2}}(-5{,}1) = \frac{-15-6}{\sqrt{26}} = \frac{-21}{\sqrt{26}}(-5{,}1)$$

$$= \left(\frac{115}{26}, \frac{-23}{26}\right)$$

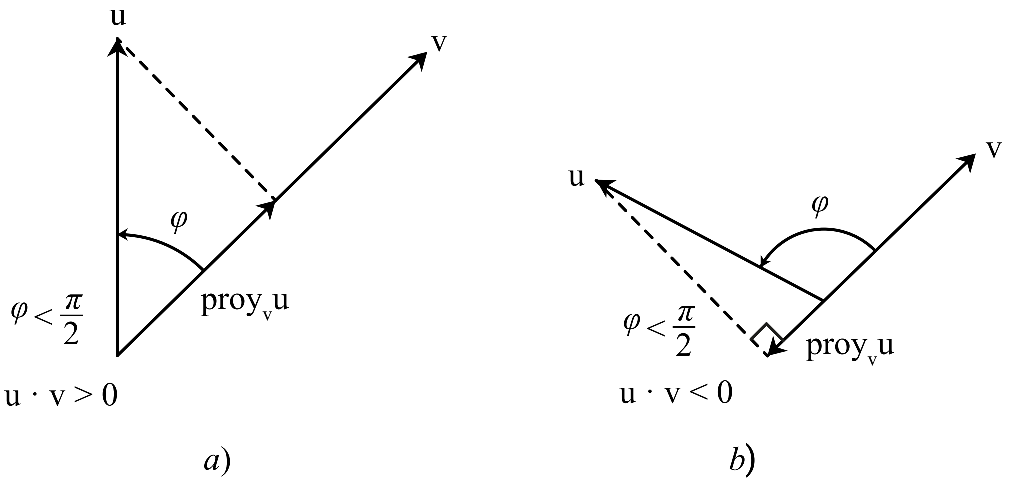
Parte ortogonal

$$\vec{u} - Proy_{\,v}\,u = (3,-8) - \left(\frac{115}{26}, \frac{-23}{26}\right) = \left(\frac{-37}{26}, \frac{-185}{26}\right)$$

Figura 26.

Proyecciones de un vector sobre otro

v y $\mathrm{proy}_{\mathrm{v}}\mathrm{u}$ tienen:
i) la mismas dirección si $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v} > 0$ y
ii) direcciones opuestas si $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v} < 0$



Nota. Adaptado de un vector sobre otro (p. 251), por Grossman, S., Flores Godoy, J., & Vázquez Valencia, F., 2012, McGrawHill

En el presente video Proyección vectorial (y escalar) de un vector sobre otro se muestra la proyección de un vector de manera gráfica y el cálculo de coordenadas del vector proyección resultante, llamaremos proyección de **u** en la dirección de **v**, simbolizándola $Proy_{v}\,\boldsymbol{u}$.

$$Proy_{v}\,\boldsymbol{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^{2}}\vec{v}$$

Como la suma de la parte paralela y la parte ortogonal de $\vec{u}$ dan como resultado $\vec{u}$ es fácil deducir que la parte ortogonal se calcula con $u - Proy_{v}\,\boldsymbol{u}$ *es ortogonal a v*

Ejercicio

Encontrar la proyección de $Proy_{v}\,\boldsymbol{u}$ de $\vec{u} = (3, -6)$, $\vec{v} = (-5, 1)$

Solución

Parte paralela

$$Proy_{v}\,\boldsymbol{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^{2}}\vec{v} = \frac{(3)(-5) + (-6)(1)}{\left(\sqrt{-5^{2} + 1^{2}}\right)^{2}}(-5{,}1) = \frac{-15 - 6}{26} = \frac{-21}{26}(-5{,}1)$$

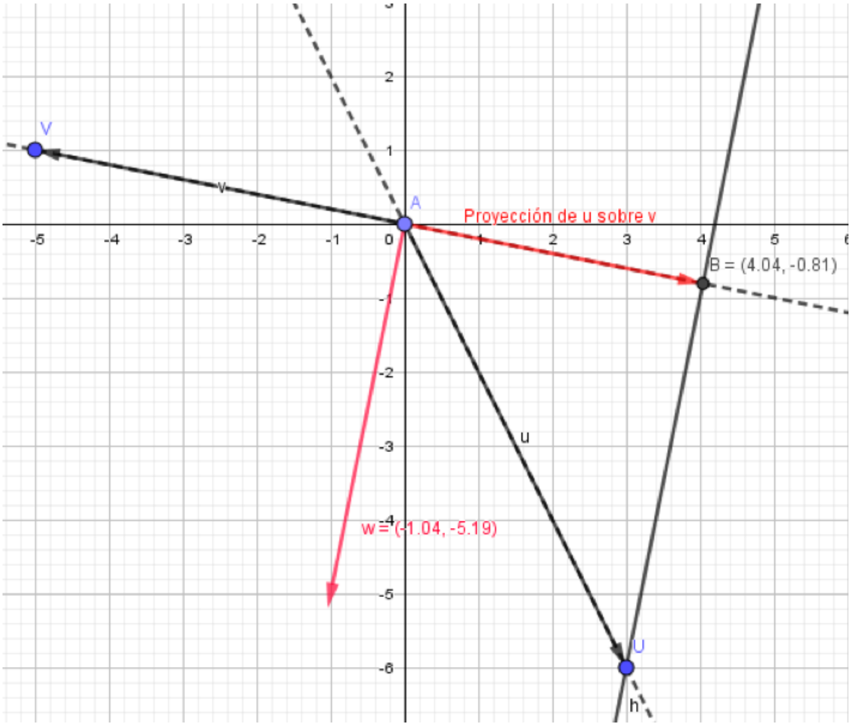
$$= \left(\frac{105}{26}, \frac{-21}{26}\right)$$

Parte ortogonal

$$\vec{u} - Proy_{v}\,u = (3, -6) - \left(\frac{105}{26}, \frac{-21}{26}\right) = \left(\frac{-27}{26}, \frac{-135}{26}\right)$$

Figura 27.

Representación gráfica del ejercicio resuelto



Nota. Gráfica de proyección de vectores realizada en Geogebra 5.0. Elaboración propia

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación.

Actividades de aprendizaje recomendadas

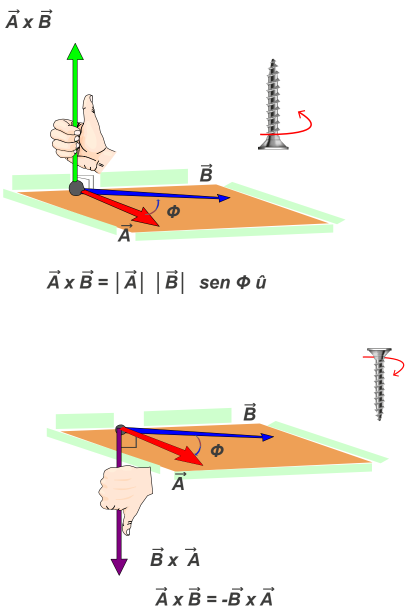
- Revisar los conceptos y propiedades del producto punto en la **sección 2.3 del texto básico págs. 15-21** y del **texto complementario sección 1.2 págs. 18-28**.
- Revisar los **ejercicios resueltos** en la **sección 2.3 (ejercicios 1 a 3) del -texto básico** y los **ejercicios propuestos de la sección 1.2 págs. 29-31 texto complementario.**
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

4.5. Producto cruz en R^3

La operación llamada producto vectorial se desarrolla solamente en R^3 (porque el resultado es otro vector en R^3) o producto cruz para diferenciarla del producto punto o escalar.

De acuerdo con Morales, (2022) al multiplicar dos vectores perpendiculares entre sí el resultado es otro vector perpendicular a los que lo producen, cuya magnitud es el producto de las magnitudes (normas) de los vectores que se multiplican y la dirección de este nuevo vector está dada por la regla de la mano derecha, el dedo índice de esa mano apunta en la dirección del primer vector, y el dedo medio apunta en la dirección del segundo vector, el resultado apunta en la dirección del pulgar de la mano derecha, ello implica que si cambiamos el orden de la multiplicación el resultado cambia a la dirección opuesta (p.93).

Figura 28.
Sentido del producto vectorial



Nota. Sentido del producto cruz con la regla de la mano derecha. Elaboración propia.

2 Bimestre

El presente recurso relacionado con Producto vectorial de dos vectores (o producto cruz) nos ayuda a entender ¿Qué es el producto vectorial? ¿Cómo se determina el sentido del vector resultante mediante la mano derecha? Además de su utilidad y algunos ejemplos de esta operación, al efectuar este producto entre dos vectores que están en la **misma dirección el resultado es 0.**

El **producto vectorial de Gibbs o producto cruz** es una operación binaria entre dos vectores en R3. El resultado es un vector perpendicular a los vectores que se multiplican, y, por lo tanto, normal al plano que los contiene y queda $\boldsymbol{u} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{v} = \| \ u \ \| \| \ v \ \| \ \ sen \ \theta$, siendo **u** x **v** un vector unitario perpendicular a **u** y **v** según la regla de la mano derecha y el ángulo entre los vectores.

Para calcular el producto cruz utilizamos la definición del "determinante" cuya primera fila son los vectores unitarios **i, j y k**, la segunda fila son las componentes del primer vector, y la tercera fila son los componentes del segundo vector. Se puede calcular el vector resultante por **Sarrus** o por la **Regla de expansión de cofactores** que es la propuesta en la siguiente definición.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \check{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \check{\mathbf{j}} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \check{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
$$= (b_1 c_2 - c_1 b_2)\check{\mathbf{i}} + (c_1 a_2 - a_1 c_2)\check{\mathbf{j}} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\check{\mathbf{k}}$$

Posee muchas aplicaciones en ciencia, tecnología y matemáticas, en este curso veremos en qué se puede aplicar, por ejemplo, para calcular el área de un triángulo y de un paralelogramo, el volumen de un paralelepípedo, la ecuación de una recta en R^2, de un plano en R^3, de una recta en R^3, etc.

Ejercicios

Sean los vectores $\vec{u}$= (1,1,-2) y $\vec{v}$ =(4,2,0).

a. Encontrar el vector $u \times v$

b. Probar que $u \times v$ y u son ortogonales

c. Probar que $u \times v$ y v son ortogonales

Resolución

a. $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\check{i} - 8\check{j} + 2\check{k} - (4\check{k} + 0\check{j} - 4\check{k})$$

$$= 4\check{i} - 8\check{j} - 2\check{k}$$

b. $(4, -8, -2).(1, 1, -2) = 4 - 8 + 4 = -8, \rightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ **y** $\mathbf{u}$ son ortogonales

c. $(4, -8, -2).(4, 2, 0) = 16 - 16 + 0 = 0, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

En cada una de las parejas de vectores anteriores, encuentre, si es posible, un vector ortogonal a ambos de magnitud 5.

Resolución:

a. $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (9\check{\mathbf{i}}, 3\check{\mathbf{j}}, 2\check{\mathbf{k}})$$

$$w = 5\frac{u \times v}{\|u \times v\|} = 5\frac{(9,3,2)}{\sqrt{81+9+4}} = \frac{(45,15,10)}{\sqrt{94}} = \left(\frac{45}{\sqrt{94}}, \frac{15}{\sqrt{94}}, \frac{10}{\sqrt{94}}\right)$$

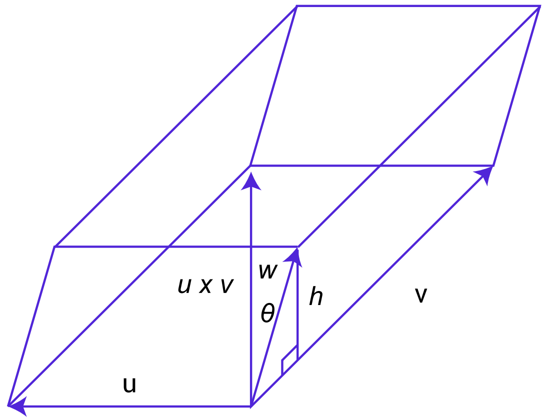
Calcule el área del triángulo formado por los puntos
$P_1 = (2\check{\imath}, 5\check{\jmath}), P_2 = (2\check{\imath}, -2\check{\jmath})$ y $P_3 = (-1,1)$

Resolución

$$\text{Área}= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-4-5+2-2-10-2| = \frac{1}{2}|-21| = 10,5u^2$$

Hallar el volumen de un paralelepípedo sustentado por tres vectores

Figura 29.
Área del paralelepípedo por el producto vectorial



Nota. Adaptado de Interpretación geométrica del triple producto escalar (p. 273), por Grossman, S., Flores Godoy, J., & Vázquez Valencia, F., 2012, McGrawHill

$$h = \text{ componente de } w \text{ en la dirección } u \times v = \left| \frac{w \cdot (u \times v)}{|u \times v|} \right|$$

Entonces

Volumen del paralelepípedo = área de la base x altura

$$|u \times v| \left[\frac{|w \cdot (u \times v)|}{|u \times v|} \right] = |w \cdot (u \times v)|$$

Es decir, $= |(u \times v).w|$

Hallar el volumen del paralelepípedo sustentado por tres vectores por $P_1 = (1,1,2),\ P_2 = (0,5,1)\ y\ P_3 = (-2,1,3)$

Resolución:

$$Volumen = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = |15 - 2 + 0 + 20 + 0 - 1| = |33| = 33u^3$$

2 Bimestre

Calcule el volumen de un tetraedro que tiene como vértices a los puntos $P_1 = (3{,}4{,}1), P_2 = (1{,}1{,}-2), P_3 = (4{,}2{,}-2)\ y\ P_4 = (-1{,}2{,}1)$

$$P_1P_2 = P_2 - P_1 = (1, 1, -2) - (3, 4, 1) = (-2, -3, -3)$$

$$P_1P_3 = P_3 - P_1 = (4, 2 - 2) - (3, 4, 1) = (1, -2, -3)$$

$$P_1P_4 = P_4 - P_1 = (-1{,}2{,}1) - \ (3{,}4{,}1) = (-4, -2{,}0)$$

$$\vec{u} = (-2, -3, -3)$$

$$\vec{v} = (1, -2, -3)$$

$$\vec{w} = (-4, -2{,}0)$$

$$V_T = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{(15-2+0)-(-20+0+1)}{6} = \frac{32}{6} = 5.33u^3$$

Podemos verificar el volumen del tetraedro entre los puntos es la sexta parte de un paralelepípedo

Otra alternativa de calcular el volumen del tetraedro es tomar los cuatro puntos dados y asociarlos a un determinante, completando la matriz con una columna de 1 para completar una matriz cuadrada, dado que el determinante se lo efectúa en matrices cuadradas.

Sean $P_1 = (1, -1{,}0), P_2 = (2{,}3, 1)\ y\ P_3 = (-1{,}0{,}3)$ los vértices del triángulo, determinar sus ángulos interiores y perímetro.

Solución:

$$\overrightarrow{P1P2} = (1{,}4{,}1);\ \overrightarrow{P2P3} = (-3, -3{,}2);\ \overrightarrow{P3P1} = (2, -1, -3)$$

$$\|\underline{P_1P_2}\| = (1{,}4{,}1) \cdot (1{,}4{,}1) = \sqrt{18}$$

$$\|\underline{P_2P_3}\| = (-3, -3{,}2) \cdot (-3, -3{,}2) = \sqrt{22}$$

$$\|\underline{P_3P_1}\| = (2, -1, -3) \cdot (2, -1, -3) = \sqrt{14}$$

Perímetro = $\sqrt{18}+\sqrt{22}+\sqrt{14}=12{,}67\ u$

$$Cos\theta_1=\frac{(1{,}4,1).(-3,-3,2)}{\sqrt{18}\sqrt{22}}=\frac{-3-12+2}{\sqrt{396}}=-\frac{13}{\sqrt{396}}=-0{,}6533\rightarrow\theta_1=130.79^{\circ}$$

$$Cos\theta_2=\frac{(-3,-3{,}2).(2,-1,-3)}{\sqrt{22}\sqrt{14}}=\frac{-6+3-6}{\sqrt{308}}=\frac{-9}{\sqrt{308}}=-0{,}5128\rightarrow\theta_2=120.85^{\circ}$$

$$Cos\theta_3=\frac{(1{,}4,1).(2,-1,-3)}{\sqrt{18}\sqrt{14}}=\frac{2-4-3}{\sqrt{252}}=\frac{-5}{\sqrt{252}}=-0{,}3150\rightarrow\theta_3=108{,}36^{\circ}$$

En el presente ejercicio se verifica el cálculo de la norma de los vectores y de los ángulos directores que determinan la dirección de un vector en R^3, con la aplicación del producto escalar.

4.6. Rectas y planos

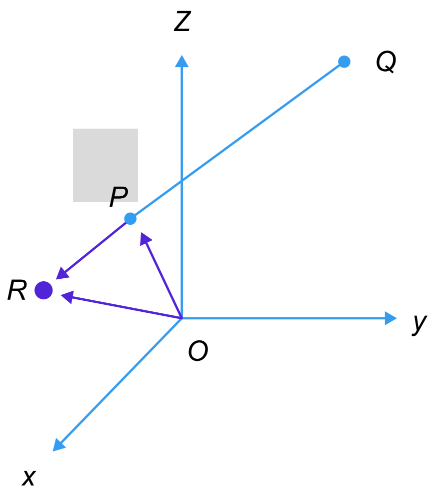
Se puede trazar una recta conociendo dos puntos de ella, o bien un punto y la pendiente sobre ella. Pero en R^3, si se conoce un punto y la dirección de la recta, puede ser posible encontrar su ecuación.

Si se tiene dos puntos $P=(x_1,y_1,z_1)$ y $Q=(x_2,y_2,z_2)$ sobre la recta L. Un vector paralelo a L, entonces podemos trazar un vector $\overrightarrow{PQ}$ nos valemos de los puntos conocidos, por tanto, las coordenadas del vector:

$$v=\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$$

Este vector es paralelo a la recta L. Ahora, si tomamos un tercer punto $R=(x,y,z)$ sobre la recta, se puede notar que $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ y a la vez paralelo al vector $\vec{v}$.

Figura 30.
Recta en el espacio



Nota. Adaptado de Rectas y planos (p. 279), por Grossman, S., Flores Godoy, J., & Vázquez Valencia, F., 2012, McGrawHill

$$\overrightarrow{PR} = tv$$

t es un escalar, un número real que está contenido t veces en esa recta infinita. Si en la gráfica despejamos a que es igual $\overrightarrow{0R}$.

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR}$$

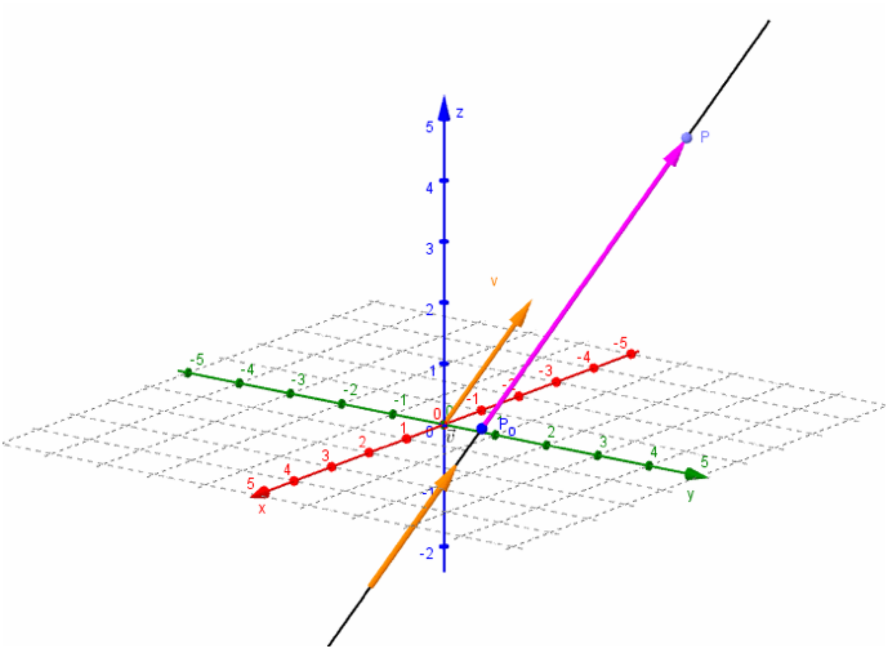
Al deducir esta ecuación reemplazamos el valor de $\overrightarrow{PR}$ resultando lo siguiente

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + tv$$

Siendo esta expresión la ecuación vectorial de la recta, de donde se derivan las siguientes ecuaciones:

Figura 31.

Recta en R³ realizada en Geogebra



Nota. Recta graficada en el espacio R3 realizada en Geogebra. Elaboración propia

$$xi + yj + zk = x_1 i + y_1 j + z_1 k + t(x_2 - x_1)i + t(y_2 - y_1)j + t(z_2 - z_1)k$$

ecuación vectorial de la recta en función de sus coordenadas

De aquí se deducen las **ecuaciones paramétricas**

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Y de estas las **ecuaciones simétricas o cartesianas**

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad con\ a, b\ y\ c\ \neq 0$$

Cualquier punto de la recta (x, y, z) será la suma de dos vectores: el punto inicial, de coordenadas (x0,y0,z0) sumado al vector que da la dirección (a, b, c) multiplicado por una constante cualquiera t a la que llamaremos parámetro.

En el video sobre la recta en el espacio encontrará la explicación de la deducción de la ecuación vectorial de la recta, las ecuaciones paramétricas y finalmente las ecuaciones simétricas, permitiendo diferenciar los elementos necesarios para cada tipo de estas formas de ecuaciones de recta en el espacio.

Ejercicio

Determine las ecuaciones paramétrica y simétrica de la recta que pasa por (1,2,3) y (2,3, 1).

Resolución:

Determinamos el vector que da dirección a la recta restando las coordenadas de los puntos (en cualquier orden).

$$\vec{v} = (2,3,1) - (1,2,3) = (1,1,-2)$$

Tomamos uno de los dos puntos (cualquiera)

$$(x, y, z) = (1,2,3) + t(1,1,-2) \text{ Ecuación Vectorial de la recta}$$

La ecuación en forma paramétrica quedaría

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Y en la forma simétrica

$$x - 1 = y - 2 = \frac{3 - z}{2}$$

4.7. Plano en el espacio

En el siguiente video se explica el origen de la deducción de la ecuación de un plano en su forma vectorial, paramétricas e implícitas, teniendo presentes algunas definiciones como determinante, regla de expansión de cofactores.

Para encontrar la ecuación del plano en el espacio es conociendo un vector normal al mismo. Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $n = ai + bj + ck$. Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k$ Como $\overrightarrow{PQ} \perp n$, tenemos que $\overrightarrow{PQ} \cdot n = 0$. Pero esto implica que el producto punto con el vector normal (perpendicular) al plano sería igual a 0, con lo que tendríamos la ecuación:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

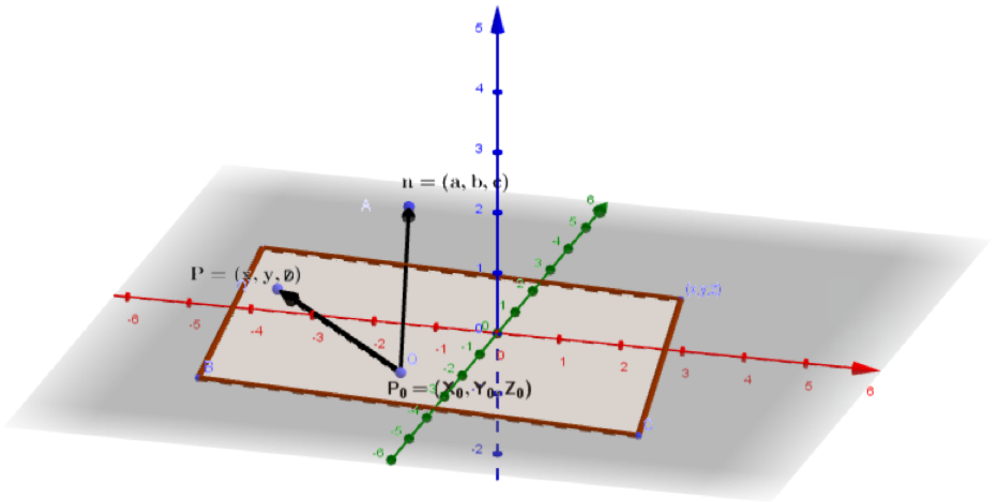
Constituyendo esta expresión matemática la ecuación cartesiana de un plano en su forma general o implícita

$$ax + by + cz = d$$

donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot n$

Figura 32.

Plano en el espacio



Nota. Deducción de la ecuación de un plano en el espacio en Geogebra. Elaboración propia.

En la figura 33. Se muestra cómo se deduce la ecuación del plano con la utilización de un punto fijo, el vector normal y el vector trazado desde un punto fijo Po del plano a otro punto sobre el mismo plano, cumpliendo con la perpendicularidad de la normal y el vector $\overrightarrow{PoP}$.

Ejercicio

Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos
$A = (1{,}2,-4), B = (2{,}3{,}7)\ y\ C = (4,-1{,}3)$

Encontramos las coordenadas del vector, el punto final menos el punto inicial

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2{,}3{,}7) - (1{,}2,-4) = (1{,}1{,}11)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (4,-1{,}3) - (1{,}2,-4) -= (3,-\,3{,}7)$$

Aplicamos el producto vectorial para encontrar el vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$ al plano

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 1 & 11 \\ 3 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 7\check{\mathbf{i}} + 33\check{\mathbf{j}} - 3\check{\mathbf{k}} - (3\check{\mathbf{k}} + 7\check{\mathbf{j}} - 33\check{\mathbf{i}})$$

$$\vec{n} = (a\check{i} - b\check{j} - c\check{k}) = 40\check{i} + 26\check{j} - 6\check{k}$$

$$= 20\check{\mathbf{i}} + 13\check{\mathbf{j}} - 3\check{\mathbf{k}}$$

La definición de plano es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Tomamos cualquiera de los puntos propuestos para determinar la ecuación del plano que lo contiene.

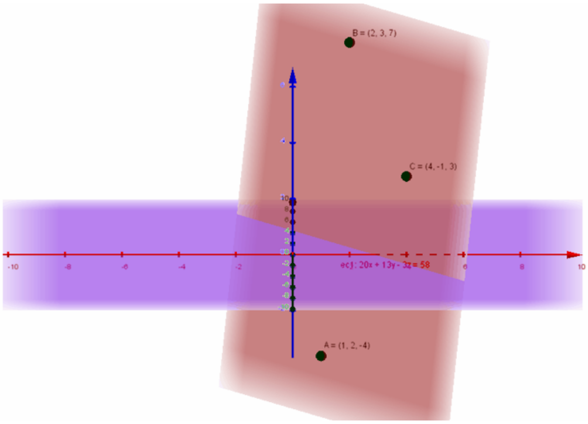
$$20(x - 1) + 13(y - 2) - 3(z + 4) = 0$$

$$20x - 20 + 13y - 26 - 3z - 12 = 0$$

$$20x + 13y - 3z - 58 = 0$$

Figura 33.

Plano generado dado tres puntos



Nota. Plano generado dado tres puntos en Geogebra. Elaboración propia.

Podemos visualizar los tres puntos en el plano, los mismos nos dieron suficiente información para encontrar su ecuación y poder trazarlo en Geogebra, además notamos cómo los puntos son coplanares, ya que pertenecen a un mismo plano.

Le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Revisar los conceptos y propiedades de **producto cruz** y aplicaciones en la **sección 1.3 págs. 48-53** del texto complementario.
- Revisar los **ejercicios resueltos** en la **sección 2.3 del texto básico** y los **ejercicios propuestos de la sección 1.4 págs. 53-56 texto complementario.**
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Estamos en la cuarta unidad, de seguro le resultará más fácil resolver los problemas planteados con el éxito esperado de la siguiente autoevaluación, recuerde comparar sus respuestas en el solucionario. Actividad retomada de Morales (2022).

Autoevaluación 4

1. **De acuerdo con las siguientes expresiones, seleccione Verdadero o Falso.**

a. ( ) El segmento de recta dirigido que se extiende desde el punto P al punto Q en R2 es denotado por $\overrightarrow{PQ}$.

b. ( ) Dos segmentos de rectas son equivalentes si tienen la misma magnitud y dirección.

c. ( ) Un vector **v** en R^2, es un par ordenado de números reales (a, b), los números a y b se denominan componentes del vector v.

d. ( ) El vector cero en R^2 es el vector (0,0).

e. ( ) v = (a, b), entonces $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

f. ( ) La adición de vectores $u = (1, -2{,}5)$ y $v = (3{,}2, -1)$ en R^3 se realiza operando $(u1 + v1, u2 + v2, u3 + v3)$, por lo que **u+v** = (4,0,4).

g. ( ) Dos vectores son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero.

h. ( ) La distancia entre los puntos (1,2,3) y (3,5,-1) es $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$

i. ( ) $(i + 3k - j) \cdot (k - 4j + 2i)$ =9.

j. ( ) $(i - j + 2k)x(2i + 3j - 4k) = -2i + 8j + 5k$.

Ejercicios de aplicación

2. Si **a** = (2,3,4), **b**=(1,-2,5) y el escalar *c* = 2 determine:

   a. c.a =
   b. a + b =
   c. $a.b$ =
   d. $\|a\|$ =
   e. **axb** =

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante revisar a literatura antes de realizar la autoevaluación, ya que comprenderá con mayor claridad el paso a paso de resolución de los ejercicios.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- Un vector se forma cuando un punto se desplaza una distancia y dirección dada.
- Se puede tener un vector [0,0] también llamado vector cero.
- Revisar las propiedades algebraicas (distributiva, asociativa, conmutativa) de los vectores en R^2, R^3, R^n, respectivamente, para resolver los ejercicios.
- Cada vector en R^3 entonces tendrá tres coordenadas en el plano del espacio.
- Para resolver vectores en R^n hay que recordar la aritmética de los números reales, ya que no se podrán dibujar para las explicaciones.

Ir al solucionario

Semana 12

Unidad 5. Espacios vectoriales reales

Para abordar espacios vectoriales reales es necesario conocer definiciones, postulados y propiedades de los espacios y subespacios vectoriales, estos conceptos son necesarios para comprender combinación lineal, espacio generado, dependencia e independencia lineal, culminando con los conceptos de rango, nulidad y su aplicación en la resolución de ecuaciones.

5.1. Espacios vectoriales

Es preciso revisar el siguiente video de espacio vectorial en el cual se nombra algunas propiedades de espacios vectoriales, la dimensión por cada tipo de espacio vectorial, esto con el fin de poder conocer la estructura de cualquier espacio vectorial tal como vector, matriz, polinomio, plano, recta, etc., necesitamos vectores, escalares y dos operaciones: suma entre dos vectores y el producto de un escalar por un vector $(V,+,\cdot)$

Los vectores no necesariamente son los vectores tales como los conocemos, pueden ser matrices, funciones, polinomios, etc.

A través del siguiente video podemos analizar una serie de demostraciones referente al demostrar un espacio vectorial, a través de sus diez propiedades paso a paso, con ello el estudiante puede aplicar conceptos básicos de fundamentos matemáticos para lograr comprender la estructura de cualquier estructura vectorial. Un espacio vectorial es una terna (V, +, ·), donde V es un conjunto no vacío y +, $\cdot$. Si tenemos al conjunto V de los vectores $(V,+,\cdot)$, al campo K se tiene que cumplir con las siguientes propiedades o axiomas en este video se muestra la explicación de los axiomas de un espacio vectorial identificando la nomenclatura matemática y cómo se debe interpretar, adicionalmente se complementa con la demostración de un ejemplo de un espacio vectorial.

i. $x \in V$ y $y \in V$, $entonces$ $x + y \in V$ $(cerradura$ $bajo$ la $suma)$.

ii. $Para$ x, y y $z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ Ley asociativa de la suma de vectores

iii. $Existe$ un $vector$ $0 \in V$ tal que $para$ $todo$ $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$ el **0** se llama **vector cero** o **idéntico aditivo.**

iv. Si $x \in V$, $existe$ un $vector$ $-x$ en $\in V$ tal que $x + (-x) = 0$ **-x** se llama **el inverso aditivo de x**

v. Si x y y $están$ en V, $entonces$ $x + y = y + x$ **Ley conmutativa de la suma de vectores**

vi. Si $x \in V$ y α es un $escalar$, $entonces$ $\alpha x \in V$ Cerradura bajo la multiplicación por un escalar.

vii. Si x y y $están$ en V y α es un $escalar$, $entonces$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ Primera Ley distributiva

viii. Si $x \in V$ y α y β son $escalares$, $entonces$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ Segunda Ley distributiva

ix. Si $x \in V$ y α y β son $escalares$, $entonces$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ Ley Asociativa de la Multiplicación por escalar

x. $Para$ $cada$ $vector$ $x \in V$, $1x = x$ Ley de identidad del producto

Ejercicios:

Comprobamos que el subconjunto $U = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 2x - y + 5z = 0\}$ es un subespacio vectorial de R^3.

i. Si $x \in V$ y $y \in V$, $entonces$ $x + y \in V$ $(cerradura$ $bajo$ la $suma)$.

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = 2x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) + 5x_3 + y_3 = 0$$

$$= 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 5(x_3 + y_3) = 0$$

Demostramos que ambos vectores a través de la primera propiedad cumplen con la restricción del conjunto propuesto, descomponiendo tenemos:

$$= 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 5(x_3 + y_3) = 0$$

$$= 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$$

en función de las coordenadas del primer vector pasa la restricción del conjunto y cumple la primera propiedad el vector **x.** En este momento lo descomponemos al vector **y**

$$= 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 5(x_3 + y_3) = 0$$

$$= 2y_1 - y_2 + 5y_3 = 0$$

se descompuso esta expresión de vectores y se comprueba que el vector **y** pasa la restricción del conjunto cumpliendo con la primera propiedad o ley cerradura bajo la suma. Por tanto, los vectores **x** e **y** pertenecen al vector **U**.

ii. $Para\ x, y\ y\ z\ en\ V, (x + y) + z = x + (y + z)$ Ley asociativa de la suma de vectores

Para demostrarla partimos definiendo los vectores requeridos por esta propiedad, necesitamos tres vectores.

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$z = (z_1, z_2, z_3)$$

$x + (y + z) = (x_1, x_2, x_3) +$

$(y_1, y_2, y_3) + z_1, z_2, z_3) = (x_1 + y_1 + z_1,\ x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3)$ la pasamos por la restricción a nuestro vector suma y verificamos si cumple la propiedad.

$$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3)$$

$$= 2(x_1 + y_1 + z_1) - (x_2 + y_2 + z_2) + 5(x_3 + y_3 + z_3) = 0$$

$= 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$ *componentes del vector* x

$= 2y_1 - y_2 + 5y_3 = 0$ *componentes del vector* y

$= 2z_1 - z_2 + 5z_3 = 0$ *componentes del vector* z

Se ha descompuesto el resultado de la suma con las tres variables de manera individual por cada vector y pasa la restricción del conjunto y cumple la propiedad asociativa de la suma de vectores.

∴ Los vectores x, y y z pertenecen a U.

iii. $Existe\ un\ vector\ 0 \in V\ tal\ que\ para\ todo\ x \in V, x + 0 = 0 + x = x$ el **0** se llama **vector cero** o **idéntico aditivo.**

Definimos los vectores necesarios

$$0 = (0,0,0)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

$$(x_1, x_2, x_3) + (0,0,0) = (0,0,0) + (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$(x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0) = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3)$$

El resultado de esta propiedad, la evaluación en la restricción del conjunto

$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow 2x_1 - x_2 + 5x_3$ por tanto, pasa por la restricción y cumple esta tercera propiedad.

Tanto el vector $x\ y\ 0$ pertenecen a U

iv. $Si\ x \in V, existe\ un\ vector\ -x\ en\ \in V\ tal\ que\ x + (-x) = 0$

Definimos los vectores necesarios para esta actividad

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$-x = (-x_1, -x_2, -x_3)$$

$$x + (-x) = (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3)$$

$$= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3))$$

$$\hat{0} = (0,0,0)$$

Restricción

$$2(0) - (0) + 5(0) = 0$$

$$\therefore \textit{El vector } x \textit{ pertenece al conjunto } U$$

v. $\quad Si\ x\ y\ y\ están\ en\ V, entonces\ x + y = y + x$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$x + y = y + x$$

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3)$$

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3)$$

Restricción

$$2(y_1 + x_1) - (y_2 + x_2) + 5(y_3 + x_3) = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$$

$$2y_1 - y_2 + 5y_3 = 0$$

$$\therefore \textit{El vector } x \textit{ y } y \textit{ pertenece al conjunto } U$$

vi. $\quad Si\ x \in V\ y\ \alpha\ es\ un\ escalar, entonces\ \alpha x \in V$

Definimos el vector necesario para nuestra propiedad que es el vector

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\alpha \textit{ es un escalar o número real}$$

$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$ este vector resultante se lo evaluará que pasa la condición del conjunto U

$$2\alpha x_1 - \alpha x_2 - 5\alpha x_3 = 0$$

$$\alpha(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$$

$$\therefore \textit{El vector } x \textit{ pertenece al conjunto } U$$

vii. $Si\ x\ y\ y\ están\ en\ V\ y\ \alpha\ es\ un\ escalar, entonces\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\alpha(x_{1+}y_1, x_{2+}y_2, x_{3+}y_3)$$

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \alpha(y_1, y_2, y_3)$$

$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3)$$

$$= [\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \alpha(x_3 + y_3)]$$

$$= 2\alpha(x_1 + y_1) - \alpha(x_2 + y_2) + 5\alpha(x_3 + y_3) = 0$$

$$= 2\alpha x_1 - \alpha x_2 + 5\alpha x_3 = 0$$

$$= \alpha(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$$

$$= \alpha = 0$$

$$= (2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$$

$$= 2\alpha y_1 - \alpha y_2 + 5\alpha y_3 = 0$$

$$= \alpha(2y_1 - y_2 + 5y_3) = 0$$

$$= \alpha = 0$$

$$= (2y_1 - y_2 + 5y_3) = 0$$

$$\therefore \textit{El vector } x \textit{ y } y \textit{ pertenece al conjunto } U$$

viii. $Si\ x \in V\ y\ \alpha\ y\ \beta\ son\ escalares, entonces\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

α y β pertenecen a los reales

$$(\alpha + \beta)(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(x_1, x_2, x_3)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \alpha x_3 + \beta x_3)$$

$$= (\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, (\alpha + \beta)x_3$$

$$= 2(\alpha + \beta)x_1 - (\alpha + \beta)x_2 + 5(\alpha + \beta)x_3 = 0$$

$$= (\alpha + \beta)(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$$

Restricción

$$= (\alpha + \beta) = 0$$

$$= (2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$$

$$\therefore \textit{El vector } x \textit{ pertenece al conjunto } U$$

ix. $Si\ x \in V, \alpha\ y\ \beta\ son\ escalares, entonces\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

α y β pertenecen a los reales

$$\alpha(\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3) = (\alpha\beta)(x_1, x_2, x_3)$$

$$(\alpha\,\beta x_1, \alpha\,\beta x_2, \alpha\,\beta x_3) = 0$$

Restricción

$$= 2\alpha\beta x_1 - \alpha\beta x_2 + 5\alpha\beta x_3 = 0$$

$$= \alpha\beta(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$$

$$= \alpha\beta = 0$$

$$= (2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$$

$$\therefore \textit{El vector } x \textit{ pertenece al conjunto } U$$

x. $\quad$ *Para cada vector* $x \in V$, $1x = x$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$1(x_1, x_2, x_3) = x_1, x_2, x_3$$

Restricción

$$= (2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$$

$$\therefore \textit{El vector } x \textit{ pertenece al conjunto } U$$

$$\therefore \textit{ El conjunto } \mathbf{U} \textit{ es un espacio vectorial}$$

5.2. Subespacios

Se dice que un subespacio vectorial (H) es un espacio vectorial si H es un subespacio no vacío de V, y H es un subespacio vectorial, junto con las operaciones de suma entre vectores y multiplicación por un escalar definidas de V. Algunos ejemplos de espacios vectoriales como matrices, polinomios, funciones, rotaciones, traslaciones, etc., también se requiere un cuerpo o campo de números, a los que llamamos escalares, generalmente son los números reales.

> Un subespacio es un subconjunto no vacío, en el video Subespacios vectoriales se efectúa la demostración de un conjunto correspondiente a una expresión perteneciente a un plano, a través de los axiomas o propiedades se analiza si se trata de un subespacio, es necesario que el estudiante ponga en práctica todo lo aprendido en fundamentos matemáticos como factorización, propiedades de números reales, manejo de funciones, etc.

Las propiedades que deben cumplir para que sea un subespacio vectorial son las siguientes

i. $\quad o \in H$

ii. $x \in H$ $y \in H$, *entonces* $x + y \in H$ (*cerradura bajo la suma*).

iii. *Si* $x \in H$, *entonces* $\alpha x \in H$ *para todo escalar* α (*cerradura bajo la multiplicación*)

Cabe recalcar que es muy importante verificar de qué el elemento cero (i) pertenece a un subespacio vectorial a demostrar, si no ocurre se puede concluir que no es un subespacio vectorial. Si una estructura matemática cumple que es un subespacio vectorial a la vez se concluye que es un espacio vectorial (V). Algunos ejemplos de (Morales, 2022) de subespacio y espacios vectoriales.

Ejercicios:

Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}, |a, b \in R \right\} \subseteq M_{22} = V$ ¿es un subespacio vectorial?

Resolución:

Sean A_{22}= $\begin{pmatrix} a_1 & 3a_1 - b_1 \\ b_1 & a_1 + b_1 \end{pmatrix}$ y B_{22}= $\begin{pmatrix} a_2 & 3a_2 - b_2 \\ b_2 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

La suma A_{22}+B_{22} $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 3a_1 - b_1 + 3a_2 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 3a_1 + 3a_2 - b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ =

$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 3(a_1 + a_2) - (b_1 - b_2) \\ b_1 + b_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \end{pmatrix}$ que también pertenece a H

Veamos ahora el producto por un escalar:

$$\alpha \begin{pmatrix} a & 3a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(3a-b) \\ \alpha b & \alpha(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & 3\alpha a - \alpha b) \\ \alpha b & \alpha a + \alpha b \end{pmatrix}$$

Vemos que el producto por un escalar también pertenece a H, por lo tanto cumple con las dos propiedades de la cerradura y, como es un subconjunto de un espacio vectorial, también es espacio vectorial.

Determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V

$$V = R^2; H = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Para demostrar que el conjunto H es un subespacio vectorial debe cumplir tres propiedades:

i. Que el $0 \in H$

$$(0,0); 0^2 + 0^2 \leq 1$$

$$0 \leq 1$$

$$\therefore \textit{El vector } 0 \textit{ pertenece al conjunto } H$$

ii. Si $\mathbf{x} \in H$,entonces $\alpha\, \mathbf{x} \in$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$y = (y_1, y_2)$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Restricción

$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq 1$$

Si analizamos las entradas de esta desigualdad al darle valores a estas componentes del vector suma siempre vamos a obtener valores mayores a cero, es decir positivos, además los valores que podemos tomar es a lo largo de los números reales, por tanto, no se va a llegar a tener el universo de número menores que 1, sino mayores.

$\therefore$

Los vectores x y y no cumplen con la propiedad de cerradura de la suma

y no pertenecen a H

$$\therefore \textit{El conjunto } H \textit{ no es un Subespacio}$$

5.3. Espacio generado e independencia lineal

Si todos los vectores de un espacio vectorial V, son generados por una combinación lineal en preciso hacer una revisión del video Conjunto generador de un espacio vectorial en el cual nos muestra un análisis de un espacio generador, cumpliendo estrictamente su definición, en tanto que emplea otras definiciones como combinación lineal y aplicando los conceptos básicos de fundamentos matemáticos.

Sabemos que cualquier vector se expresa en sus vectores unitarios de manera general por ejemplo un vector en R^3. La combinación lineal está inmersa en todas las expresiones matemáticas de matrices, funciones, polinomios, etc.

$$v = ai + bj + ck$$

En esta expresión se nota una primera combinación lineal de $\check{i}, \check{j}, \check{k}$ con a, b y c que vendría a ser números o escalares o números reales.

Combinación Lineal (CL)

Sean $v_1, v_2 \dots v_n$ es un espacio vectorial **V**. Entonces cualquier vector de la forma

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Donde $a_1, a_2\ y\ a_n$ son números reales o escalares se denomina una combinación lineal de $v_1, v_2 \dots v_n$.

Bajo esta definición universal podemos definir como debe ser un **conjunto generador** el cual se define cuando los vectores $v_1, v_2 \dots v_n$ es un espacio vectorial V que **genera** si todo vector en V se puede expresar en combinación lineal. Es decir, para todo **v** $\in$ **V** existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Como $vemos\ que \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} generan\ a\, M_{22}$

Espacio generado por un conjunto de vectores

Sea $v_1, v_2 \dots v_k$, k vectores de un espacio vectorial V. El espacio generado por $\{v_1, v_2 \dots v_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales $v_1, v_2 \dots v_k$. Es decir

$$gen\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \{v: v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots, + a_k v_k\}$$

Donde $a_1, a_2\ y\ a_k$ son escalares arbitrarios. Los vectores $e1 = i = (1{,}0)$ y $e2 = j = (0{,}1)$, generan a R^2.

Ejercicios

En R^2, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Demostrar si estos tres vectores generan el espacio al que pertenecen

Solución

Sea $(x, y) \in R^2$. Se debe verificar si todo vector se puede expresar en combinación lineal, es decir que existen escalares a_1, a_2, a_3 para todo $(x, y) \in R^2$ tal que

$$a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_2 \\ 4a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1a_3 \\ -2a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a_2 - a_3 \\ a_1 + 4a_2 - 2a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Construimos la matriz ampliada y la resolvemos por Gauss -Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & x \\ 1 & 4 & -2 & y \end{array}\right) F_1 \longleftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & x \\ 0 & 3 & -1 & y \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{3}F_2 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & x \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{x}{3} \end{array}\right) F_1 - 4F_2 \to F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{3y-4x}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{x}{3} \end{array}\right)$$

Entonces

$$a_1 - \frac{2}{3}a_3 = \frac{3y - 4x}{3}$$

$$c_2 - \frac{1}{3}c_3 = \frac{x}{3}$$

El sistema tiene infinitas soluciones. Entonces, existen dos escalares a_1, a_2, a_3 tal que $a_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ por tanto, los vectores $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ generan al espacio R2.

$Sea\ v_1 = (2,-1,4)\ y\ v_2 = (4,1,6)$. Se desea conocer si estos dos vectores propuestos general a R3.

Desarrollo

$H = gen\{v_1, v_2\} = \{v: v = a_1(2,-1,4) + a_2(4,1,6)\}$ de acuerdo con la definición de espacio generado. Por tanto,

$$x = 2a_1 + 4a_2$$

$$y = -a_1 + a_{23}$$

$$z = 4a_1 + 6a_2$$

Se deduce un sistema de ecuaciones lineales y lo transformamos a una matriz de la siguiente manera y de acuerdo con la definición de espacio generado. Las dos incógnitas son los escalares a_1 ,a_2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R1\to -R1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[\text{R3}\to\text{R3}-4\text{R1}]{\text{R2}\to\text{R2}+2\text{R1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 6 & x+2y \\ 0 & 10 & z+4y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R2\to\frac{1}{6}R2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & \frac{x+2y}{6} \\ 0 & 10 & z+4y \end{array}\right) \xrightarrow[\text{R3}\to\text{R3}-10\text{ R2}]{\text{R1}\to\text{R1}+\text{R2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x}{6}-\frac{2y}{3} \\ 0 & 1 & \frac{x}{6}+\frac{y}{3} \\ 0 & 10 & \frac{-5x}{3}+\frac{2y}{3+z} \end{array}\right)$$

Se evidencia que posee solución única solo si $\frac{-5x}{3}+\frac{2y}{3+z}$=0, quitamos del denominador z $\frac{-5x}{3}+\frac{2y}{3}+z=0$ y ahora multiplicamos por 3, nos queda $5x-2y-3z=0,$ que corresponde a la ecuación de un plano que pasa por el origen.

Dependencia e independencia lineal

Un grupo de vectores $v1, v2, \dots, vk$ en un espacio vectorial V, son, linealmente independientes o no, en el video Cómo saber si los Vectores son Linealmente INDEPENDIENTES o Dependientes se evidencia la demostración de tres vectores si son o no linealmente independientes, es necesario la comprensión de la definición de independencia lineal sobre ella se establece el análisis con la utilización de los conceptos básicos de fundamentos matemáticos necesarios.

Además, la utilización de los métodos de solución de ecuaciones, Gauss - Jordán, y todos los demás temas abordados anteriormente en la materia. El objetivo de la demostración es si existen n escalares a_1, a_2, a_3 todos cero tales que

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=0$$

Se dice que si no cumplen esta condición al menos un escalar diferente de cero serían lo contrario, es decir, linealmente dependientes. Son linealmente independientes si la ecuación $a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=0$, es decir de cumple $a_1=a_2\dots a_n=0$, otra estrategia de verificación de linealmente independiente es el utilizar el determinante, este debe ser diferente de cero.

Ejemplo:

Determine cuál es el espacio vectorial generado por los vectores (2,-1,-2,4,5) y (-1,3,2,-2,1) tomado de (Morales, 2022, p.114).

Resolución:

Planteamos el sistema de ecuaciones

$$c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\\4\\5\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\\w\end{pmatrix}$$

Planteamos la matriz ampliada y escalonamos:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&x\\-1&3&y\\-2&2&z\\4&-2&u\\5&1&w\end{array}\right)\xrightarrow[R1\leftrightarrow R2]{}\left(\begin{array}{cc|c}-1&3&y\\2&-1&x\\-2&2&z\\4&-2&u\\5&1&w\end{array}\right)\xrightarrow[R1=-R1]{}\left(\begin{array}{cc|c}1&-3&-y\\2&-1&x\\-2&2&z\\4&-2&u\\5&1&w\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R2=R2-2R1\\R3=R3+2R1\\R4=R4-4R1\\R5=R5-5R1}]{}\left(\begin{array}{cc|r}1&-3&-y\\0&5&x+2y\\0&-4&z-2y\\0&10&u+4y\\0&16&w+5y\end{array}\right)\xrightarrow[R2=R2/5]{}\left(\begin{array}{cc|r}1&-3&-y\\0&1&(x+2y)/5\\0&-4&z-2y\\0&10&u+4y\\0&16&w+5y\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R1=R1+3R2\\R3=R3+4R2\\R4=R4-10R2\\R5=R5-16R2}]{}\left(\begin{array}{cc|r}1&0&-y+3/5(x+2y)\\0&1&(x+2y)/5\\0&0&z-2y+4/5(x+2y)\\0&0&u+4y-2(x+2y)\\0&0&w+5y-16/5(x+2y)\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{cc|r}1&0&(3x+y)/5\\0&1&(x+2y)/5\\0&0&z+2/5(2x-y)\\0&0&u-2x\\0&0&w-(16x+7y)/5\end{array}\right)$$

Este sistema tiene solución múltiple solo cuando

$$z = -2/5(2x - y);\ u = 2x;\ w = (16x + 7y)/5,$$

que puede transformarse en

$$x = u/2;$$

$$w = (8u + 7y)/5y = (5w - 8u)/7 = 5/7w;$$

$$z = -2/5(u - (5w - 8u)/7) = -2/5u + 2/7w - 16/35u = 2/7w - 6/7u$$

por lo que, y haciendo a $u=t_1$ y $w=t_2$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -8/7 \\ -6/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5/7 \\ 2/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinar si dos vectores son linealmente independientes o dependientes se propone los siguientes vectores:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolución: siguiendo la definición de linealidad se tiene que

$$a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando el producto de un escalar por una matriz se tiene que

$$\begin{pmatrix} -1a_1 \\ 1a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a_2 \\ 0 \\ 1a_2 \\ 1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Realizando la suma de vectores se tiene

$$\begin{pmatrix} -a_1 - 2a_2 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformamos a un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &-a_1 - 2a_2 = 0 \\ &a_1 = 0 \\ &a_2 = 0 \\ &a_2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $a_1 = 0 \; y \; a_2 = 0$ y los vectores que son combinados de estos escalares existen, los vectores son linealmente independientes.

Determinar si los vectores son LI y LD.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los ponemos los vectores en combinación con los escalares

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores son linealmente independientes, los escalares existen cada uno es igual a cero.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Determinar si dos vectores son linealmente independientes o dependientes se propone los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} V_1 &= (1,2,-1) \\ V_2 &= (1,-2,1) \\ V_3 &= (-3,2,-1) \\ V_4 &= (2,0,0) \end{aligned}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ -2a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a_3 \\ 2a_3 \\ -a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 \\ 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 \\ -a_1 + a_2 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_1 - C_3 + C_4 &= 0 \\ C_2 - 2C_3 + C_4 &= 0 \end{aligned}$$

Por Gauss Jordán, lo resolvemos y notamos que el sistema tiene infinitas soluciones, por consiguiente, los vectores son Linealmente dependiente.

Los siguientes vectores {(2,2,3), (-1,-2,1), (0,1,0)} son ¿L.I o L.D?

Calculamos el determinante para comprobar si los tres vectores son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$$

Por lo tanto, los tres vectores si generan a R^3.

Determine un conjunto de vectores que genere el espacio solución de Ax=0, donde Tomado de (Morales, 2022, p.123).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución

Resolvemos el sistema de ecuaciones usando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F4-F1]{\substack{F2-F1 \\ F3-2F1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F4\leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3\leftrightarrow F4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F4-F2]{F3-2F2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Encontramos que

$$x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -x_3$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_2 = -x_3$$

$$x_4 = 0$$

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{r} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ genera al espacio solución.

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las siguientes actividades recomendadas

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Revisar los conceptos y propiedades de los espacios y subespacios vectoriales en el **capítulo 5 págs. 54-60** del texto básico y **sección 6.0, 6.1 y 6.2 págs. 427-456** del texto complementario.
- Revisar **los ejercicios propuestos de la sección 6.0 y 6.1 págs. -441-443 del texto complementario,** además de los ejercicios **págs.456-459**.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Semana 13

5.4. Bases y dimensión

El conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, es una base de V si, y solo son

i. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independientes y

ii. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera el espacio vectorial V

De acuerdo con lo mencionado por Morales (2022). La base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ se denomina base natural, estándar o canónica, estas bases tienen la forma ei = (0, 0,... ,1,... ,0) donde el único 1 (los demás componentes son ceros) está ubicado en la posición i, todos los elementos de esta base son, por lo tanto, unitarios y perpendiculares entre sí (ortonormales).

Un espacio vectorial es de dimensión finita si existe un subconjunto finito de V que es una base para V; caso contrario dicho espacio es de dimensión infinita.

Si S= $\{v_1, v_2, \dots, v_k\},$ } es una base de un espacio vectorial V, entonces cada elemento de V se puede escribir de una sola forma como combinación lineal de los elementos de S.

Sea S= $\{v_1, v_2, \dots, v_k\},$ } un conjunto de vectores no nulos de un espacio vectorial V, y sea W=gen S. Entonces algún subconjunto de S es una base de W.

Si S= $\{v_1, v_2, \dots, v_n\},$ es una base de un espacio vectorial V, y T= { $w_1, w_2, \dots, w_n\},$ } es un conjunto linealmente independiente de vectores en V, entonces $r \leq n$.

Si S= $\{v_1, v_2, \dots, v_n$ } y T= $\{w_1, w_2, \dots, w_n$ } son bases de un mismo espacio vectorial, entonces n=m

Asimismo, en todo subespacio W de V $dim(W) \leq dim(V)$

Un conjunto linealmente independiente de vectores de V puede ampliarse a una base de V (p.127)

Dimensión de los espacios vectoriales

Ejemplo: La dimensión de R^n

Con n vectores linealmente independientes en R^n constituyen una base, se observa que

$$dim\ R^n = n$$

Ejemplo: La dimensión de P_n

Los polinomios $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ constituyen una base en P_n. Entonces $dim\ P_n = n + 1$

Ejemplo: La dimensión de M_{mn}

En M_{mn}, sea A_{ij} la matriz de mxn con uno en la posición ij Como n vectores y cero en otra parte. Es sencillo demostrar que las matrices $A_{ij}\ para\ i = 1,2, \ldots, m\ y\ j = 1,2, \ldots, n$ forman una base para M_{mn}. Así, $dim\ M_{mn}\ = mn.$

Ejercicios

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^2?

- R^2: {(1,3), (1,-1)}

Resolución

Como son 2 y son linealmente independientes (ninguno es múltiplo del otro), si es una base para R^2.

- R^2: {(0,0), (1,2), (2,4)}

Resolución

Al ser 3 no pueden ser linealmente independientes, no constituyen una base para R^2, además uno de ellos es el vector nulo, que no puede formar parte de una base, los otros dos son múltiplos entre sí.

- R^3: {(3,2,2), (-1,2,1), (0,1,0)}

Son tres vectores, falta comprobar la independencia lineal calculando el determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

Como el determinante es diferente de cero, los 3 vectores son linealmente independientes, conforman, por lo tanto, una base en R^3.

R^3: {(1,0,0), (0,2,-1), (3,4,1), (0,1,0)}

Resolución:

Al ser 4 vectores no son linealmente independientes y, por lo tanto, no conforman una base.

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R4?

R^4: {(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,1,1,1), (0,1,1,1)}

Al ser 4 vectores necesitamos solamente comprobar su independencia lineal, usaremos la reducción a la forma escalonada (alternativa al uso del determinante).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que se conservan las cuatro filas, por lo tanto, los vectores son linealmente independientes y, por lo tanto, conforman una base en R4.

- R^4: {(0,0,1,1), (-1,1,1,2), (1,1,0,0), (2,1,2,1)}

Resolución:

Al ser cuatro vectores podrían formar una base en R4, solo falta comprobar si son linealmente independientes, utilizaremos la reducción a la forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F4+F2]{F3+F2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-2F3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para P2?

- P^2: $\{-t^2+t+2, 2t^2+2t+3, 4t^2-1\}$

Como P2 es de dimensión 3 y tenemos 3 vectores en el conjunto, podría ser una base de P2, hace falta comprobar su independencia lineal, lo haremos comprobando el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 16 + 2 = 0$$

Como el valor del determinante es cero, los tres vectores no son linealmente independientes y, por lo tanto, no constituyen una base en P2.

- P^2: $\{t^2+2t-1, 2t^2+3t-2\}$

Resolución:

El conjunto tiene dos vectores, y el espacio necesita 3, por lo tanto, no constituye una base.

- P^2: $\{t2+1, 3t^2+2t, 3t^2+2t+1, 6t^2+6t+3\}$

Resolución:

Hay cuatro vectores en el conjunto, no puede ser una base de P2.

Demuestre que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ forman una base del espacio vectorial de todas las matrices cuadradas M_{22}.

La dimensión del espacio vectorial y el número de matrices coincide, hace falta ver si son linealmente independientes, para ello las escribimos en forma de vectores verticales y formamos una matriz, luego la reducimos a la forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-F3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la forma escalonada conserva 4 filas, las cuatro matrices son linealmente independientes y el conjunto de cuatro matrices forma una base del espacio vectorial de todas las matrices cuadradas M_{22}.

Determine cuál de los subconjuntos dados forma una base para R^3. Luego exprese el vector (2,1,3) como combinación lineal de los vectores en cada conjunto que sea una base.

- R^3: {(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)}

Resolución:

Al ser tres vectores podrían formar una base, debemos comprobar antes que son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

Al ser el determinante diferente de cero, confirmamos que los tres vectores son linealmente independientes y forman una base en R3.

- R^3: {(1,2,3), (2,1,3), (0,0,0)}

Resolución:

Al ser uno de los vectores del conjunto el vector cero, este no puede ser una base.

- R^3: {(2,1,3), (1,2,1), (1,1,4), (1,5,1)}

Resolución:

Son 5 vectores, por lo tanto, no pueden ser una base de R3.

- R^3: {(1,1,2), (2,2,0), (3,4,-1)}

Resolución:

Como son 3 vectores podrían, si son linealmente independientes, conformar una base para R3, vamos a comprobarlo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 16 - 12 + 2 = 4$$

Si forman una base en R^3, vamos ahora a expresar el vector (2,1,3) como una combinación lineal de los vectores de esta base, para ello conformamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos este sistema utilizando el método de Cramer

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4 + 24 - 18 + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-1 + 16 + 9 - 6 + 2 - 12}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6 + 4 - 8 - 6}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Aplicamos estos valores y comprobamos

$$1(1{,}1{,}2) + 2(2{,}2{,}0) - 1(3{,}4{,}-1) = (1 + 4 - 3{,}1 + 4 - 4{,}2 + 1) = (2{,}1{,}3)$$

Determine si los subconjuntos dados forman una base Para P^2, si ello ocurre exprese $5t^2$-3t+8 como combinación lineal de los vectores en cada subconjunto que sea una base.

- P_2: {t²+t, t-1, t+1}

Resolución:

Resolveremos el sistema por la forma escalonada reducida, así reencontraremos los valores para la combinación lineal al tiempo que averiguamos si los vectores son linealmente independientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\1&1&1&-3\\0&-1&1&8\end{array}\right)\xrightarrow{F2-F1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&1&-8\\0&-1&1&8\end{array}\right)\xrightarrow{F3+F2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&1&-8\\0&0&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{F3/2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&1&-8\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2-F3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&-8\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

Entonces, se puede expresar $5t^2-3t+8$ como

$5(t^2+t)-8(t-1)+0(t+1)=5t^2+5t-8t+8=5t^2-3t+8$

- P_2: {t²+1, t-1}

Resolución:

Al ser solo dos vectores, no pueden ser una base para P_2.

- P_2: {t²+t, t², t²+1}

Resolución:

Al ser tres vectores podrían conformar una base en R^3, lo comprobaremos al tiempo que encontramos los coeficientes de la combinación lineal usando operaciones elementales de fila para reducir la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\1&0&0&-3\\0&0&1&8\end{array}\right)\xrightarrow{F2-F1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\0&-1&-1&-8\\0&0&1&8\end{array}\right)\xrightarrow{-F2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\0&1&1&8\\0&0&1&8\end{array}\right)\xrightarrow{F1-F2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&1&8\\0&0&1&8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2-F3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&8\end{array}\right)$$

Como si es una base, utilizamos los coeficientes encontrados para comprobar la combinación lineal.

$$-3(t^2+t)+0(t^2)+8(t^2+1)=-3t^2-3t+8t^2+8=5t^2-3t+8$$

P_2: $\{t^2+1, t^2-t+1\}$

Resolución:

Necesitamos al menos tres vectores en la base, por lo tanto, el conjunto dado no puede ser base de P_2.

Considere el siguiente subconjunto de P3: S= $\{t^3+t^2-2t+1, t^2+1, t^3-2t, 2t^3+3t^2-4t+3\}$. Determine una base para el subespacio de W=gen S. ¿Cuál es dim W?

Resolución:

Usamos la reducción a la forma escalonada para comprobar si los 4 vectores son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F2-F1 \\ F3+2F1 \\ F4-F1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4-F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se conservan 3 renglones no nulos, tenemos solo 3 vectores linealmente independientes, conservamos los tres primeros (podríamos tomas tres cualquiera de los cuatro).

$$B=\{t^3+t^2-2t+1, t^2+1, t^3-2t\}$$

La dimensión del subespacio es 3.

Determine una base para los vectores de la forma (a+c, a-b, b+c, -a+b)

Resolución:

El vector general de este subespacio se puede expresar de la forma:

$$(a+c, a-b, b+c, -a+b)=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para ver si los tres vectores involucrados $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes, formamos una matriz y la transformamos a la forma reducida.

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F4+F1]{F2-F1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-F2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[F4-F2]{F3-F2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Vemos que solo 2 de los 3 vectores son linealmente independientes, podemos tomar dos cualquiera de ellos, por ejemplo, el tercero y el primero.

$$Base = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Encontrar la base de H y su dimensión. Sea $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 2x + 11y - 17z = 0\right\}$. ¿Entonces dim H = 2?

Solución:

Despejamos

$$2x = 17z - 11y$$

$$x = \frac{17z - 11y}{2}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{17z-11y}{2}\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{11y}{2}\\y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{17z}{2}\\0\\z\end{pmatrix}$$

$$= y\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}\frac{17}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

La base del conjunto H es Base = $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Los vectores encontrados son $\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{17}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes, la dimensión está dada por el número de vectores L.I, por tanto, la dim=2.

5.5. Sistemas homogéneos

Un sistema lineal homogéneo $Ax = b$ es aquel en el que el vector b es el vector nulo, quedando $Ax = 0$. Todo sistema lineal homogéneo tiene al menos una solución, a la que llamamos trivial, en otras palabras, todas las incógnitas son iguales a cero.

Si A es una matriz de orden mxn, llamaremos (nulidad de A) a la dimensión del espacio nulo de A. En el video sobre Cómo hallar el Núcleo y Nulidad de una Matriz se muestra paso a paso su cálculo, teniendo presente su definición y la intervención de otros temas como kernel, base, dimensión y rango a través del método de Gauss - Jordán.

Para comprender mejor la definición de un sistema lineal homogéneo es necesario revisar el enlace Sistemas Homogéneos, en este material se muestra la teoría necesaria del tema complementando con un video explicativo de los tipos de soluciones que se puede tener con un sistema homogéneo, también trata de la relación del número de ecuaciones y variables, rango de ese sistema, además se usa matrices y el método de Gauss-Jordan para llegar a una matriz escalonada reducida.

Ejercicios

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas tomado de Morales (2022).

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss -Jordan la solución del sistema es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & -18 \\ 0 & 1 & -20 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el sistema planteado es un sistema compatible, indeterminado, con soluciones infinitas, r=2 y n=4, tenemos n-r=4-2=2 variables libres.

$$\begin{cases} x_1 = 13x_3 + 18x_4 \\ x_2 = 20x_3 + 29x_4 \end{cases}$$

Tanto x_1 y x_2 dependen x_3 y x_4.

Determine una base para el espacio nulo de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución:

Llevamos la matriz a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F4-F1]{\substack{F2-2F1 \\ F3-3F1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F4+F2]{F3+2F2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1-2F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que, cuando z=t y w=s equivale a las ecuaciones

$$x = 5t - 3s$$

$$y = 2s - 4t$$

Que vectorialmente se pueden expresar así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que una base de este espacio vectorial sería:

$$Base = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determine una base para el espacio solución del sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)x = 0$ para cada escalar λ y matriz A.

$$\lambda = 1, \ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución

Calculamos

$$(\lambda I_n - A)$$

$$1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & -2 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego resolvemos el sistema $(\lambda I_n - A)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2+F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que nos queda la ecuación

$$x + y = 0 \rightarrow x = -y; y = t$$

En forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

Base=$\{(-1{,}1)\}$

Su dimensión es igual a 1.

Determine todos los números reales λ tales que el sistema homogéneo (λIn-A) x=0 tiene una solución no trivial.

- A=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Resolución:

Calculamos λI_n-A

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -2 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0 para que el sistema tenga múltiples soluciones.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Encontramos que hay dos soluciones:

$$\lambda = 3; \ \lambda = -2$$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Calculamos λI_n-A

$$\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&-3\\0&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&-3\\0&4&5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda+2&0&0\\0&\lambda+2&3\\0&-4&\lambda-5\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0 para que el sistema tenga múltiples soluciones.

$$\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\0&\lambda+2&3\\0&-4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-5)+12(\lambda+2)=0$$

$$(\lambda+2)[(\lambda+2)(\lambda-5)+12]=0$$
$$(\lambda+2)[\lambda^2-3\lambda+2]=0$$
$$(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

Con lo que el conjunto solución es:

$$\lambda\epsilon\{-2,1,2\}$$

Resuelva el sistema lineal

$$\begin{cases}x+2y-z-w=3\\x+y+3z+2w=-2\\2x-y+4z+3w=1\\2x-2y+8z+6w=8\end{cases}$$

Y escriba la solución x como x=xp+xh, donde xp es una solución particular del sistema dado y xh es una solución del sistema homogéneo asociado.

Resolución:

Transformamos el sistema a la forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&-1&3\\1&1&3&2&-2\\2&-1&4&3&1\\2&-2&8&6&8\end{array}\right)\xrightarrow[F4-2F1]{\substack{F2-F1\\F3-2F1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&-1&3\\0&-1&4&3&-5\\0&-5&6&5&7\\0&-6&10&8&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5\\ 0 & -5 & 6 & 5 & 7\\ 0 & -6 & 10 & 8 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[F4+6F2]{F3+5F2}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5\\ 0 & 0 & -14 & -10 & 32\\ 0 & 0 & -14 & -10 & 32\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F3/14}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -16/7\\ 0 & 0 & -14 & -10 & 32\end{array}\right)\xrightarrow{F4+14F3}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -16/7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Si las columnas representan a las incógnitas x,y,z y w, y hacemos w=t, encontraremos (de abajo hacia arriba).

$$z = -\frac{16}{7} - \frac{5}{7}t$$

$$y = 5 + 4\left(-\frac{16}{7} - \frac{5}{7}t\right) + 3t = -\frac{29}{7} + \frac{1}{7}t$$

$$x = 3 - 2\left(-\frac{29}{7} + \frac{1}{7}t\right) + \left(-\frac{16}{7} - \frac{5}{7}t\right) + t = 9 - t$$

Esta respuesta se puede expresar vectorialmente como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - t \\ -\frac{29}{7} + \frac{1}{7}t \\ -\frac{16}{7} - \frac{5}{7}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{29}{7} \\ -\frac{16}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{7}\begin{pmatrix} -7t \\ t \\ -5t \\ 7t \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{29}{7} \\ -\frac{16}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$ sería la solución particular y $\begin{pmatrix} -7t \\ t \\ -5t \\ 7t \end{pmatrix}$ la solución homogénea

Estos últimos ejercicios son tomados de la guía de (Morales, 2022, p.144).

5.6. Rango de una matriz

Para encontrar el rango de una matriz por determinantes es necesario ver este video donde se explica claramente las características para calcular el rango de una matriz no necesariamente cuadrada, también trata los conceptos de linealidad (proporcionalidad), se utiliza el ***determinante como el método de cálculo del rango***, tomando en cuenta, el valor del determinante, si es igual a 0 o no, es necesario que el estudiante tenga una idea clara de los conceptos de espacios vectoriales, en principio v, la llevamos a la forma escalonada que es otro método de cálculo del rango (por Gauss). En el video Cómo Calcular el Rango de una Matriz se muestra paso a paso cómo calcular el rango de una matriz cuadrada y otra que no es cuadrada, la cual se debe escalonar la matriz a su forma reducida por Gauss - Jordán y contamos el número de filas no nulas, aquel número es el rango de una matriz.

Como manifiesta Morales (2022). Si A es una matriz mxn, entonces rango A + nulidad A=n, una matriz es no singular si, y solo si, rango A =n, esto equivale a decir que el rango de $A = n$ si, y solo si, $|A| \neq 0$. Otras definiciones equivalentes son: el sistema lineal $Ax = b$ tiene solución única si, y solo si, rango $A = n$; un conjunto de vectores es linealmente independiente si, y solo si, el determinante formado por los mismos no es igual a 0; un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas tiene una solución no trivial si, y solo si el rango $A < n$; un sistema lineal $Ax = b$ tiene solución si, y solo si, el rango A =rango $(A|b)$ (p.144).

Por tanto, *la dimensión es el máximo número de vectores independientes que podemos tener en el espacio o subespacio*. En otras palabras, es el máximo rango que puede tener un conjunto de vectores. Es también el rango de cualquier sistema generador de dicho espacio.

Ejercicio:

Sea S= $\{v1, v2, v3, v4, v5\}$, donde
$v1 = (1,4,6,-2), v2 = (3,2,5,1), v3 = (4,6,1,0), v4 = (0,0,10,-1)\ y\ v5 = (7,8,6,1)$

Determine una base para el subespacio de R4, V=gens.

Transformamos la matriz a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F2-3F1 \\ F3-4F1 \\ F5-7F1 \\ F4\leftrightarrow F5}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & -10 & -13 & 7 \\ 0 & -10 & -23 & 8 \\ 0 & -20 & -36 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{F2}{-10} \\ F4+20F2 \\ F3+10F2 \\ F1-4F2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 13/10 & -7/10 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{F3}{-10} \\ F5-10F3 \\ F4+10F4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 13/10 & -7/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos las filas no nulas y estas forman la base pedida

$$Base = \{(5,0,4,4), (0,1,13,-7), (0,0,1,-1)\}$$

$$Rango = 3$$

$$Nulidad = 2$$

$$Dim = 3$$

Con la finalidad de reforzar su aprendizaje, realice las siguientes actividades recomendadas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Revisar los conceptos y propiedades Bases y dimensión en la sección 5.2 **págs. 61-65,** rango y nulidad, págs. **73-78** del texto básico y las **págs. 191 - 209** del texto complementario.
- Revisión de los ejercicios propuestos **de bases y dimensión, sección 3.6, sistemas homogéneos y rango de una matriz, págs. 209 - 211** del texto complementario.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

5.7. Bases y dimensión

De acuerdo con Morales (2022). En una base ordenada S= $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de un espacio vectorial V. Si un vector v, del espacio vectorial V se puede expresar como $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ con $c_1, c_2, \dots, c_n$ números reales, se dice que $[v]_S$= $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ son las coordenadas de v en la base S.

Un mismo vector puede tener diferentes representaciones en bases diferentes, en ese contexto la matriz de transición de la base T a la base S (P_{ST}) es una matriz formada por los vectores en columna de los elementos de la base T en la base S.

Para trasladar las coordenadas de la base T a la base S hay que multiplicar la matriz de transición de la base S por las coordenadas del vector en la base T. $[v]_S = P_{ST}\,[v]_T$.

La matriz de transición de la base S a la base T es la inversa de la matriz de transición de la base T a la base S. $P_{TS}=(P_{ST})^{-1}$

Ejercicios

Sean $\vec{a}_1 = (1,-2,-5), \vec{a}_2 = (2,5,6)$ y $\vec{b} = (7,4,-3) \in R^3$. Determina si $\vec{b}$ es combinación lineal de $\vec{a}_1 y\ \vec{a}_2$. En caso afirmativo obtén los escalares x_1, x_2 tales que $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$. Realiza lo mismo para $\vec{c} = (7,4,-4)$.

Comenzamos escribiendo la definición de combinación lineal

$$x_1\begin{bmatrix}1\\-2\\-5\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\\-3\end{bmatrix}$$

que es lo mismo que:

$$\begin{bmatrix}x_1 + 2x_2\\-2x_1 + 5x_2\\-5x_1 + 6x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\\-3\end{bmatrix} o \begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 5\\-5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\\-3\end{bmatrix}$$

Por tanto, hemos de resolver el sistema lineal: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = -3 \end{cases}$

Resolvemos el sistema transformando la matriz ampliada a la forma escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema es compatible, por tanto, $\vec{b}$ es c.l. del conjunto $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. La solución, y por tanto los coeficientes, son $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Es decir,

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Sean $S = \{(1{,}2), (0{,}1)\}\ y\ T = \{(1{,}1), (2{,}3)\}$ bases para R2. Sean $v = (1{,}5)\, y\ w = (5{,}4)$ tomado de Morales (2022)

a. Determine los vectores de coordenadas v y w con respecto a la base T.
b. ¿Cuál es la matriz de transición P_{ST} de la base T a la base S?
c. Determine los vectores de coordenadas v y w con respecto a S utilizando P_{ST}.
d. Determine directamente los vectores de coordenadas de v y w con respecto a S.
e. Determine la matriz de transición Q_{TS} de la base S a la base T.
f. Determine los vectores de coordenadas v y w con respecto a T utilizando Q_{TS}. Compare las respuestas con las de a).

Resolución:

a. Establecemos dos sistemas de ecuaciones, uno para cada vector, los podemos resolver simultáneamente por el método de Gauss-Jordan de la siguiente manera (recuerde que usamos los vectores de la base T):

$$\left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F2-F1} \left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F1-2F2} \left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right\rangle$$

Con lo que obtenemos

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}_T$$

y

$$w = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}_T$$

b. Para la matriz de transición debemos expresar los vectores de T en función de la base S, usamos un procedimiento similar.

$$\left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F2-2F1} \left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right\rangle$$

Con lo que la matriz de transición nos queda

$$P_{S \leftarrow T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c. Para determinar los vectores dados en la base S utilizamos la matriz de transición.

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}_T = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S$$

d. Ahora calculamos directamente estos vectores en S

$$\left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F1-2F1} \left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{array} \right\rangle$$

Resultando los vectores $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S$ y $w = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S$

e. Hallamos ahora Q_{TS}

$$\left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F2-F1} \left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F1-2F2} \left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle$$

Con lo que

$$Q_{T \leftarrow S} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

f. Utilizamos esta matriz para calcular las coordenadas de los vectores v y w

$$v = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}_T$$

y

$$w = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Que resultan ser las mismas respuestas encontradas en a)

Sean S={v1,v2} y T={w1,w2} bases para R^2, donde v1=(1,2), v2=(0,1) si la matriz de transición de S a T es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine los vectores de la base T. Tomado de Morales (2022).

Resolución:

Es suficiente aplicar la matriz de transición a los vectores de la base S para obtener los vectores de la base T.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}_T$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_T$$

5.8. Bases ortonormales

Se dice que un conjunto de vectores es ortogonal si los vectores son perpendiculares, es decir, todos los vectores son perpendiculares entre sí, y es ortonormal si además de ser ortogonal, todos los vectores son unitarios, es decir, se dice que es base ortonormal si todos sus vectores son de norma 1 y son ortogonales dos a dos.

El video Bases ortogonales y ortonormales que muestra ¿qué significa ortogonal?. Además de algunos ejemplos en donde se evidencia, el uso del producto escalar puede ayudar a identificar la ortogonalidad.

La base canónica es aquella cuyos vectores tienen como componentes casi todos ceros y tienen un uno, sucesivamente en las diferentes posiciones, es un conjunto ortonormal.

Un conjunto de vectores ortogonales (ortonormales) no nulos es linealmente independiente.

Un vector v se puede expresar en una base ortonormal $\{u1, u2, \ldots, u_n\}$ como $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$, donde $ci = v.u_i$.

Un vector v se puede expresar en una base ortogonal $\{u1, u2, \ldots, u_n\}$ como $= c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$, donde $c_i = \frac{v.u_i}{u_i.u_i}$

Todo subespacio no nulo de R^n tiene una base ortonormal.

Ejercicios tomados de Morales (2022)

Construya una base ortonormal en R^3 comenzando con la base

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución

Se tiene $|v_1| = \sqrt{2}$, entonces $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $|\mathbf{v}_2'| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Continuando, se tiene $v_3' = v_3 - (v_3 \cdot u_1)u_1 - (v_3 \cdot u_2)u_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Así, una base ortonormal en R³ es $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Construir una base ortonormal en R^2 comenzando con la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Solución

$$V_1 = (1,-3) \qquad V_2 = (3,0)$$

Aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt

Primer vector

$$U_1 = V_1 = (1,-3)$$

$$u_1 = (1,-3)$$

Segundo vector

$$U_2 = V_2 - \frac{V_2 \cdot U_1}{\| U_1 \|^2} U_1$$

$$U_2 = (3{,}0) - \frac{(3{,}0)\cdot(1,-3)}{\|(1,-3)\|^2}(1,-3)$$

$$U_2 = (3{,}0) - \frac{3}{10}(1,-3)$$

Al resolver las operaciones pertinentes nos da como resultado

$$U_2 = \left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right)$$

Normalizamos los vectores u_1 y u_2

$$\omega_1 = \frac{u_1}{\| u_1 \|} = \frac{(1,-3)}{\|(1,-3)\|}$$

$$\omega_1 = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}; \frac{-3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$w_2 = \frac{U_2}{\| U_2 \|} = \frac{\left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right)}{\left\| \left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right) \right\|}$$

$$w_2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

Entonces una base ortonormal en R^2 es

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10}\right), \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$$

De acuerdo con Morales (2022) se utiliza el proceso de Gram-Schmidt para determinar una base ortonormal. El video Cómo hallar una Base ortogonal y una Base ortonormal muestra paso a paso el cálculo de bases ortonormales, se parte desde una base ortogonal y luego se convierte en ortonormal por el proceso de Gram-Schmidt, es decir, a los vectores se los va a normalizar (además de ser ortogonales su norma es igual uno), por ejemplo, se tiene el subespacio de R^4 con base {(1,1,-1,0), (0,2,0,1), (-1,0,0,1)} tomado de Morales (2022).

Resolución:

Como primer vector podemos tomar cualquier vector de la base, por ejemplo, el primero: (1,1,-1,0).

Para el segundo vector tomamos solo de los de la base, y le quitamos su proyección en la dirección del primero.

$$v_2 = (0,2,0,1) - \frac{(0,2,0,1).(1,1,-1,0)}{3}(1,1,-1,0) = (0,2,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,-1,0)$$
$$= (0,2,0,1) - \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},0\right) = \left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3},1\right)$$

Podemos eliminar los denominadores, nos interesa por ahora solamente la dirección del vector, que quedaría:

$$v_2 = (-2,4,2,3)$$

Para el vector restante tomamos el que queda y le quitamos sus componentes en la dirección de los anteriores.

$$v_3 = (-1,0,0,1) - \frac{(-1,0,0,1).(1,1,-1,0)}{3}(1,1,-1,0) - \frac{(-1,0,0,1).(-2,4,2,3)}{33}(-2,4,2,3)$$

$$v_3 = (-1,0,0,1) + \frac{1}{3}(1,1,-1,0) - \frac{5}{33}(-2,4,2,3) = \frac{1}{11}(-4,-3,-7,6) \rightarrow (-4,-3,-7,6)$$

Transformamos ahora los vectores ortogonales en ortonormales haciéndolos vectores unitarios

$$\widehat{v_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1,0) = (\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$$

$$\widehat{v_2} = \frac{1}{\sqrt{33}}(-2,4,2,3) = \left(-\frac{2\sqrt{33}}{33},\frac{4\sqrt{33}}{33},\frac{2\sqrt{33}}{33},\frac{\sqrt{33}}{11}\right)$$

$$\widehat{v_3} = \frac{1}{\sqrt{110}}(-4,-3,-7,6) = (\frac{-2\sqrt{110}}{55},\frac{-3\sqrt{110}}{110},\frac{-7\sqrt{110}}{110},\frac{3\sqrt{110}}{55})$$

Tome la base ortonormal de R^3 $S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right),(0,1,0)\right\}$. Escriba el vector (2,-3,1) como combinación lineal de los vectores en S.

Resolución:

Recordemos que si tenemos una base ortonormal formada por vectores $\hat{u}_i$, cualquier vector $\vec{v}$ se puede expresar como $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$, donde $c_i = \vec{v}.\vec{u}_i$

Aplicando esto al problema tenemos

$$c_1 = (2,-3,1).\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5} - 0 + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$c_2 = (2,-3,1).\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5},0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{-4\sqrt{5}}{5} - 0 + \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$c_3 = (2,-3,1)(0,1,0) = 0 - 3 + 0 = -3$$

Con lo que

$$(2,-3,1) = \frac{4\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{3\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 3(0,1,0)$$

5.9. Complemento ortogonal

Sea W un subespacio vectorial de R^n. Sea W un subespacio de R^n. Definimos el complemento ortogonal de W como el conjunto de vectores de R^n que son perpendiculares a todos los vectores de W :

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in R^n \mid \vec{v} \cdot \vec{w} = 0\ \forall \vec{w} \in W\}$$

En el video complemento ortogonal evidencia algunas definiciones tales como, complemento ortogonal, espacio columna, nulidad, transpuesta y espacio trivial, en este sentido el estudiante debe profundizar estos conceptos para poder obtener un complemento ortogonal de W.

$$B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\} \in W$$

$\vec{v} \in W^{\perp}$, implica que $\vec{v} \cdot \vec{w}_i = 0 \forall i = 1, \dots, k$

El complemento ortogonal es la solución al sistema homogéneo dado por la matriz de coeficientes cuyas filas son una base del subespacio.

Si A es una matriz mxn los espacios fundamentales asociados a A satisfacen las siguientes propiedades de ortogonalidad:

$$(\mathrm{Col}(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^{T})$$
$$(\mathrm{Nul}(A))^{\perp} = \mathrm{Col}(A^{T}) = \mathrm{Ren}(A)$$

Propiedades

Si W es un subespacio de R^n, entonces

i. $W^{\perp}$ es un subespacio de R^{n}

ii. $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

iii. $dim\, W^{\perp} = n - dim\, W$.

Para una matriz:

El espacio nulo de la matriz es el complemento del espacio fila de la misma y el espacio nulo de la matriz transpuesta es el complemento del espacio columna de dicha matriz.

Según Morales (2022) las proyecciones de un vector sobre un subespacio vectorial tienen algunas propiedades muy útiles que pueden aprovecharse de diferentes maneras, como veremos:

Si W es un subespacio de R^n con una base ortonormal $\{w1, w2, \dots, wn\}$ y v es un vector de R^n, entonces la proyección ortogonal de v sobre W, denotada por la $proy_w v$ esta dada por:

$$proy_w v = (v \cdot w_1)w_1 + (v \cdot w_2)w_2 + \cdots + (v \cdot w_k)w_k$$

Se observa que $proy_w v$ ∈ W.

Podemos calcular la distancia de v a W usando ||v- $proy_W V$||. En otras palabras, el vector en W más cercano a v es - $proy_W V$ o, lo que es lo mismo, ||v-w|| es mínima cuando w=- $proy_W V$.

2 Bimestre

Ejercicios

Hallar el complemento ortogonal de la variedad en R^4, resultado de la intersección de los planos:

$$A = \left\{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{smallmatrix} x+5y-2z=0 \\ x+y-z+u=0 \end{smallmatrix} \right\}$$

Necesitamos:

- Una base de A
- Un producto escalar: el euclídeo.

$$A = \left\{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{smallmatrix} x+5y-2z=0 \\ x+y-z+u=0 \end{smallmatrix} \right\}$$

Despejando y encontramos los parámetros

$$\left.\begin{smallmatrix} x+5y-2z=0 \\ x+y-z+u=0 \end{smallmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y = 2\lambda \\ x + y = \lambda - \mu \\ z = \lambda \\ u = \mu \end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix} x + 5y = 2\lambda \\ x + y = \lambda - \mu \\ z = \lambda \\ u = \mu \end{matrix}\right\} \overset{\substack{f_2 - f_1 \\ -\frac{1}{4}f_2 \\ f_1 - 5f_2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = -\frac{7}{4}\lambda - \frac{5}{4}\mu \\ y = \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4}\mu \\ z = \lambda \\ u = \mu \end{cases}$$

Entonces una base de A es

- Una base de $AB = \{(-7{,}3{,}4{,}0), (-5{,}1{,}0{,}4)\}$
- Un producto escalar: el euclídeo.

Los vectores base se pueden multiplicar por cualquier otro vector por su transpuesto y nos debe dar 0.

$$A^{\perp} = \left\{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \; \begin{smallmatrix} (-7,3,4,0)(x,y,z,u)^t=0 \\ (-5,1,0,4)(x,y,z,u)^t=0 \end{smallmatrix} \right\}$$

El ortogonal de un plano es otro plano.

Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Encontrar una base para $W\perp$.

Solución

$$W = Col(A), A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W^{\perp} = (col(A))^{\perp}$$

Para encontrar el = $Nul(A^{\top})$ determinamos la At, y deducimos un sistema homogéneo quedando de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \longrightarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +2 & 0 \end{bmatrix}$$

Regresamos a un sistema de ecuaciones $-y + 2z = 0$, $y = 2z$

$$x + y - z = 0, \qquad x + 2z - z = 0$$

$$x = -z$$

$$W^{\perp} \ contiene \ los \ vectores \ de \ la \ forma$$

$$\begin{bmatrix} x \\ u \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W^{\perp} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Por tanto, una base para $W^{\perp}$ es $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sea W un subespacio de R^3 con base {w1,w2}, donde w1=(1,0,1) y w2=(1,1,1). Exprese el vector v=(2,2,0) como suma de un vector en $W^{\perp}$ y otro vector en W, tomado de Morales (2022).

Resolución:

Tomemos un vector $u = (a, b, c) \in W^{\perp}$, este vector será perpendicular a cualquier vector de W, en particular a los de la base

$$(a, b, c)(1,0,1) = a + c = 0 \rightarrow a = -c$$

$$(a, b, c).(1,1,1) = a + b + c = b = 0$$

Si c=t

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que podemos afirmar que

$$Base\ de\ W^{\perp} = (-1,0,1)$$

De acuerdo con lo solicitado en el problema:

$$(2,2,0) = vector\ en\ W + vector\ en\ W\perp$$

$$(2,2,0) = [d(1,0,1) + e(1,1,1)] + f(-1,0,1)$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y lo transformamos mediante operaciones elementales de fila

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F3/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$f = -1$$

$$e = 2$$

$$d + e - f = 2 \rightarrow d = 2 - e + f = 2 - 2 + (-1) = -1$$

$$(2,2,0) = -1(1,0,1) + 2(1,1,1) - 1(-1,1,0) = (1,2,1) + (1,0,-1)$$

Donde (1,2,1) pertenece al subespacio W y (1,0,-1) pertenece a W⊥, puede además comprobar que los dos vectores son ortogonales.

Sea W un subespacio de R^3 generado por el vector $\vec{w}$= (2,-3,1). Determine una base para W⊥. Tomado de Morales (2022)

Resolución:

Sea (a, b, c) un vector de W⊥, este vector será perpendicular a cualquier vector de W, en especial a (2,-3,1).

$$(a, b, c).(2, -3, 1) = 2a - 3b + c = 0; c = t; a = r \to 3b = 2r + t \to b = \frac{1}{3}(2r + t)$$

Expresamos paramétricamente el vector (a, b, c)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \frac{1}{3}(2r + t)t \\ t \end{pmatrix} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{r}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que

$$Base\ W^{\perp} = \{(0,1,3), (3,2,0)\}$$

Podríamos añadir que el subespacio W es la recta que pasa por el origen y por (2,3,-1) y W⊥ es el plano perpendicular a esa recta que también pasa por el origen tomado de Morales (2022).

Calcule los cuatro espacios vectoriales asociados con A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$ y compruebe que el espacio nulo de A es el complemento del espacio fila de A y que el espacio nulo de AT es el complemento ortogonal del espacio columna de A.

Resolución:

Transformamos la matriz A para encontrar el espacio fila y el espacio nulo de A.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F3-2F1 \\ F4-F1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F3-F2 \\ F4+F2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos $z = t; s = r$

Tomamos la ecuación de la segunda fila (igualando a 0) y despejamos y

$$-3y + 7z - 2s = 0 \rightarrow y = \frac{7t - 2r}{3}$$

Tomamos la ecuación de la primera fila (igualando a 0) y despejamos x

$$x + y - 2z + 3s = 0 \rightarrow x = -\frac{7t - 2r}{3} + 2t - 3r = \frac{-t - 7r}{3}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -t - 7r \\ 7t - 2r \\ 3t \\ 3r \end{pmatrix} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{r}{3}\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y obtenemos que $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para el espacio nulo de A

Y

$$T = \{(0,-3,7,-2),(1,1,-2,3)\}$$

Es una base para el espacio fila de A.

Se puede verificar que los vectores de S y T son ortogonales entre sí.

Nos toca ahora trabajar con A^T para el espacio columna.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & -9 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1 \leftrightarrow -F2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -2 & -9 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F4-4F1]{\substack{F2-2F1 \\ F3-3F1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -14 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F2 \leftrightarrow -F3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F3+3F2 \\ F4+7F2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontramos que para el espacio nulo de A^T (y haciendo z=t y s=r):

$$y = \frac{t+3r}{2}$$

$$x = -3y + t + 4r = -3\frac{t+3r}{2} + t + 4r = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}r$$

Con lo que queda

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \frac{t}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{r}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que una base del espacio nulo de A^T será:

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Y la base del espacio columna será:

$$T' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Se puede comprobar que cada vector de S' es perpendicular a cada vector de T', con lo que concluimos que el espacio nulo de A^T es complemento ortogonal del espacio columna de A.

Determine la - $proy_W V$ para el vector v= (3,4,-1) y el subespacio de R^3 con base $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$. Tomado de Morales (2022).

Resolución:

La fórmula de la proyección para vectores ortonormales es:

$$Proy_W v = (v.u_1)u_1 + (v.u_2)u_2$$

Reemplazando

$$Proy_W v = (3{,}4,-1).(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}) + (3{,}4,-1).(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$Proy_W v = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{7}{\sqrt{5}}(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$Proy_W v = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) - (-\frac{14}{5}, 0, \frac{7}{5})$$

$$Proy_W v = (3{,}0,-1)$$

Determine la - $proy_W V$ para el vector v= (-5,0,1) y el subespacio de R^3 con base $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$. Tomado de Morales (2022)

Resolución:

Aplicamos nuevamente la fórmula

$$Proy_W v = (v.u_1)u_1 + (v.u_2)u_2$$

Reemplazando

$$Proy_W v = \left((-5{,}0{,}1).\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + (-5{,}0{,}1).\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$Proy_W v = -\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{11}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$Proy_W v = (-5{,}0{,}1)$$

Nótese que $Proy_W v$ =v, esto sucede debido a que v está en W; podría suceder también que la proyección sea 0, en este caso se debería a que v es ortogonal a W.

Determine la distancia del punto (2,3,-1) al plano 3x-2y+z=0 tomado de Morales (2022).

Resolución:

Como ese plano pasa por el origen, constituye un subespacio en R3, determinaremos una base ortonormal del mismo.

Despejamos z

$$z = 2y - 3x$$

Un punto cualquiera del plano sería

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que una base para el plano sería

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Pero esta base no es ortogonal, para hacerla tomamos cualquiera como primer vector, por ejemplo (0,1,2), el segundo vector será (quitándole su proyección en la dirección de W).

$$(1,0,-3) - \frac{(1,0,-3).(0.1.2)}{5}(0,1,2)$$

$$(1,0,-3) + \frac{6}{5}(0,1,2)$$

$$\left(1, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right) \rightarrow (5,6,-3)$$

Una base ortogonal sería

$$\{(1,0,-3),(5,6,-3)\}$$

Y la base ortonormal sería

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{5}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}\right)\right\}$$

La proyección del vector (2,3,-1) en el plano sería

$$Proy_W v = (v.u_1)u_1 + (v.u_2)u_2$$

$$= (2,3,-1).\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$
$$+ (2,3,-1).\left(\frac{5}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}\right)$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{31}{\sqrt{70}}\left(\frac{5}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{31}{14}, \frac{93}{35}, -\frac{93}{70}\right)$$

$$= \left(\frac{19}{7}, \frac{93}{35}, -\frac{18}{7}\right)$$

El vector ortogonal sería

$$(2,3,-1) - \left(\frac{19}{7}, \frac{93}{35}, -\frac{198}{70}\right) = \left(-\frac{5}{7}, \frac{12}{35}, -\frac{268}{70}\right)$$

$$= \left(-\frac{50}{70}, \frac{24}{70}, -\frac{268}{70}\right)$$

La norma de este vector sería la distancia del punto (2,3,-1) al plano 3x-2y+z=0

$$\vec{n} = (a, b, c) = (3, -2, 1)$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 2 \cdot (3) + 1(-1)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{14}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14} = 0.27\ u$$

5.10. Mínimos cuadrados

El tipo de solución inconsistente en un sistema matricial Ax=b, es decir, no tiene una solución que satisfaga todas las ecuaciones, por tanto, es necesario encontrar A$\hat{x}$=$proy_w v$ que sería la solución más próxima a todas las ecuaciones dadas.

Si nos planteamos A$\hat{x}$-b=0 y lo multiplicamos por A^T tenemos:

$A^T(A\hat{x} - b) = 0\ A^T A\hat{x} = A^T b$ (solución por mínimos cuadrados de Ax=b), en el enlace propuesto se muestra la explicación paso a paso de la aplicación de conceptos de matriz transpuesta, inversa, producto de matrices para obtener los elementos del modelo lineal para llegar a la forma $y = ax + b$ para ajustar a un modelo lineal.

Con lo que $\hat{x}$=$(A^TA)^{-1}A^Tb$

Este procedimiento se utiliza frecuentemente para encontrar el ajuste de una recta (en general de un polinomio) a un grupo de datos que supera el necesario para tener una solución exacta del problema.

Ejercicio

Hallar la recta que mejor se ajusta a los puntos $(1{,}5); (2{,}9); (3,-1); (6{,}3)$ tomado de Morales (2022)

Solución

Hallar la matriz A y B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(A^\top A)^{-1} A^\top B$

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 50 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa $A^\top = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 50 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 12 & 1 & 0 \\ 12 & 50 & 0 & 1 \end{array}\right) \tfrac{1}{4}R_1 \to R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 12 & 50 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 - 12R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 14 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\tfrac{1}{14}R_2 \to R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/14 & 1/14 \end{array}\right)$$

$$F_(1 \to) F_1 - 3F_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 25/28 & -3/14 \\ 0 & 1 & -3/14 & 1/14 \end{array}\right)$$

Entonces

$$(A^{\top} \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 25/28 & -3/14 \\ -3/14 & 1/14 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $(A^{\top} \cdot A)^{-1} \cdot A^{\top} \cdot B$

$$(A^{\top} \cdot A)^{-1} \cdot A^{\top} \cdot B = \begin{pmatrix} 25/28 & -3/14 \\ -3/14 & 1/14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

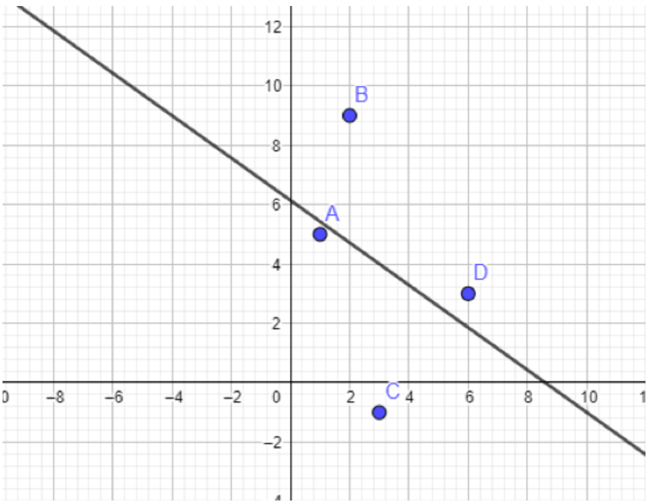
$$= \begin{pmatrix} 19/28 & 13/28 & 1/4 & -1/28 \\ -1/7 & -1/14 & 0 & 3/14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(A^{\top} A)^{-1} A^{\top} B = \begin{pmatrix} 43/7 \\ -5/7 \end{pmatrix}$$

La recta que mejor se ajusta es:

$$y = \frac{43}{7} - \frac{5}{7}x$$

$$y = 6{,}14 - 0{,}71x$$



Nota. Aproximación de datos con matrices en Geogebra. Elaboración propia.

Encuentre la recta que da el mejor ajuste para los datos {(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)}.

Solución:

En este caso la matriz A es dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Obteniendo los demás elementos se tiene:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 51 \end{bmatrix} = z \text{ luego } (A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} \text{ y la solución es}$$

$$x = (A^T A)^{-1} bz = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{34}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.7 \end{bmatrix}$$

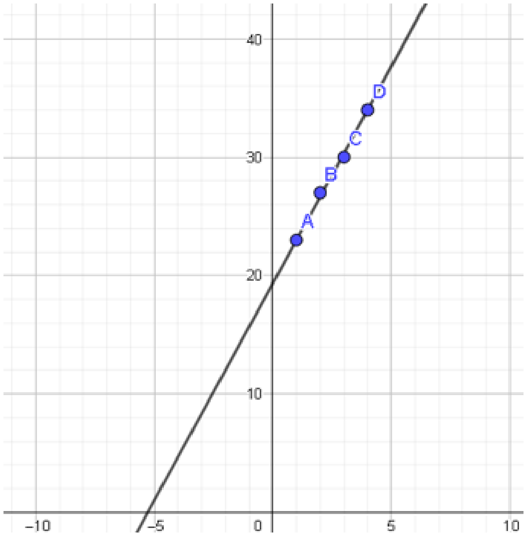
Luego $y = 0 + 1.7x = 1.7x$ es la recta que mejor aproxima estos cuatro puntos.

Una empresa pequeña lojana ha estado en el negocio durante cuatro años y ha registrado ventas anuales (en decenas de miles de dólares) de la siguiente manera:

Tabla 5.
Ventas anuales (en decenas de miles de dólares)

Año	1	2	3	4
Ventas	23	27	30	34

De acuerdo, a los puntos de la tabla se tiene la siguiente gráfica de acuerdo con el siguiente modelo $f(t) = \alpha + \beta t$ que mejor encaja los datos en el sentido de mínimos cuadrados:



En este caso la matriz A es dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 23 \\ 27 \\ 30 \\ 34 \end{bmatrix} \text{ y } x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 27 \\ 30 \\ 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 114 \\ 203 \end{bmatrix}$$

La solución es: $x = (A^T A)^{-1} \cdot [\,203\,] = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 114 \\ 203 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.5 \\ 3.6 \end{bmatrix}$

Por lo que se predice que las ventas en el año t serán $f(x) = 19.5 + 3.6x$. Por ejemplo, las ventas para el año cinco son 375000.

Para una mejor comprensión del tema, se sugiere revisar el siguiente video referente a mínimos cuadrados para complementar su aprendizaje.

Le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades

Actividades de aprendizaje recomendadas

Se recomienda realizar la revisión de los recursos propuestos para complementar el aprendizaje de los temas planeados en la asignatura.

- Revisar los conceptos y propiedades de los espacios y subespacios vectoriales en el **capítulo 7 págs. 88-95** del texto básico y **sección 5.1, págs. 368- 376, sección 5.2 págs. 378- 387, 6.3, págs. 463-479, sección 7.3 págs. 568 - 586** del texto complementario

- Revisar los ejercicios propuestos **de la sección 5.2 págs. 387 -388, 5.7, págs. 376-378, 6.3 págs. 471- 472, 7.3 págs. 586 -589** del texto complementario.

- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Es aconsejable que realice la siguiente autoevaluación, esto es necesario para verificar su nivel de conocimientos y competencias adquiridas respecto a la unidad estudiada. Usted puede encontrar las respuestas al final de la guía didáctica. Actividad tomada de Morales (2022)

Autoevaluación 5

1. De acuerdo con las siguientes expresiones, seleccione verdadero o falso.

a. ( ) Un espacio vectorial real es un conjunto de vectores que cumple propiedades de la suma y multiplicación por escalar entre ellos.

b. ( ) Si u y v son elementos cualesquiera de V, dado que u $\oplus$ v está en V, dicha característica constituye la propiedad de cerradura en Å

c. ( ) Si V es un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V que no cumple las operaciones de suma y multiplicación por escalar, W es subespacio de V.

d. ( ) Todo espacio vectorial tiene el subespacio {0}

e. ( ) Un subespacio cumple las condiciones de la operación $\oplus$ y $\odot$ en un espacio vectorial.

f. ( ) Un espacio vectorial V no puede ser expresado con un conjunto finito de vectores contenidos en V.

g. ( ) Cada vector de un espacio vectorial V puede ser generado por un conjunto de vectores del espacio vectorial V, por lo que el conjunto de vectores no se puede denominar generador de V.

h. ( ) Para establecer si un conjunto de vectores genera al espacio vectorial V, se selecciona un vector arbitrario v en V, luego se determina si v es una combinación lineal de los vectores dados.

i. ( ) Un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, son linealmente dependientes si existen constantes todas iguales a cero tal que al ser multiplicadas por los vectores mencionados, el resultado sea 0.

j. ( ) Un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, forman una base para V, si generan a V y son linealmente independientes.

k. ( ) Un espacio vectorial es de dimensión finita si existe un subconjunto finito de V que es una base para V.

l. ( ) El número de vectores en una base para V, es la dimensión de un espacio vectorial.

m. ( ) La dimensión del espacio fila de A se denomina rango fila de A y la dimensión del espacio columna de A se denomina rango columna de A.

n. ( ) El rango fila y el rango columna de una matriz $A=(a_{ij})$ de mxn no son iguales.

o. ( ) Para obtener el rango de una matriz A, se debe llevar a su forma escalonada reducida por filas, el número de las filas no nulas constituye el rango.

Ejercicios de aplicación

2. Determine si el conjunto dado V es cerrado (constituye o no espacio vectorial) bajo las operaciones ⊕ y ⊙.

1. V={(x,y)/y=2x+1, x∈R, es decir V, es el conjunto de puntos en R^2 que están sobre la recta y=2x+1, suponga 2 puntos para las operaciones (x1,y1) y (x2,y2), los cuales están en V.

2. V, es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x,y), donde x>0 y *y*>0; donde las operaciones están definidas como: *(x,y)*⊕*(x1,y1)* = *(x+ x1,y+ y1)* y *c*⊙*(x,y)= (cx, cy)*

3. Determine si el conjunto *W*, formado por todos los puntos de R^2, que tiene la forma (x,x), es una línea recta y si puede ser considerado un subespacio.

4. Determine si los vectores v1=(1,2,0,1), v2=(1,0,-1,1) y v3=(1,6,2,0) son linealmente independientes.

5. Sea *S*={v1,v2,v3,v4}, donde v1=(1,2,2), v2=(3,2,1), v3=(11,10,7), y v4=(7,6,4). Determine una base para el subespacio R^3, y la dimensión.

6. Determine el rango y nulidad de A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 7 & 8 & -5 & -1 \\ 10 & 14 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma en cómo se resuelven paso a paso.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios

- Las propiedades que se debe tomar en cuenta para los espacios vectoriales serían: Cerradura, conmutativa, asociativa y distributiva
- Recuerde que las propiedades que definen un espacio vectorial son las mismas que se aplican directamente a los números reales
- Puede resumirse los espacios vectoriales de la siguiente manera:
- R= conjunto de todos los números reales
- R^2= conjunto de todos los pares ordenados
- R^3= conjunto de todas las tercias ordenadas
- R^n= conjunto de todas las n-adas ordenadas
- Para la solución de los ejercicios de aplicación cabe señalar que es importante tener en cuenta el producto por un escalar y este debe cumplir con las propiedades para ser un espacio vectorial.

Ir al solucionario

2 Bimestre

2 Bimestre

Semana 15

Actividades finales del bimestre

Con la finalidad de reforzar su aprendizaje, realice las siguientes actividades recomendadas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades, Bases ortonormales en la sección 5.2 **págs. 369-376,** Complementos ortogonales en la sección 5.2 **págs. 379-387 y m**ínimos cuadrados en la sección 7.3 **págs. 568-586** del texto complementario, rango de una matriz en la sección 2.0 **págs. 72-76** y del tema de sistemas homogéneos sección 2.2 **págs. 76-79** del texto complementario.
- Revisión de los ejercicios propuestos de bases normales sección 5.2 **págs. 376-378,** Complementos ortogonales en- la sección 5.2 **págs. 387- 388 y** Mínimos cuadrados **sección 7.3 págs. 586-589** del texto complementario**.**

Semana 16

Bienvenido a la última semana del segundo bimestre, para reforzar sus conocimientos, le animo a desarrollar las siguientes actividades de aprendizaje recomendadas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
- Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en los del texto básico y complementario detallado en cada unidad.

4. Solucionario

Autoevaluación 1			
Pregunta		**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	V	Si y=mx tenemos una recta que pasa por el origen.
	b	F	La representación gráfica de una ecuación lineal es una recta.
	c	V	Si tenemos m ecuaciones con n incógnitas en total, tenemos un sistema de ecuaciones lineales.
	d	F	a1, a2, a3, … son los coeficientes de la ecuación
	e	F	Los sistemas lineales compatibles tienen solución única o infinitas soluciones.
2		a	En b y c tenemos incógnitas elevadas a una potencia distinta de uno.
3		1b, 2a,3c	Si las rectas se cortan en un solo punto tenemos una solución única, si las rectas coinciden tenemos infinitas soluciones, si las rectas no se cortan no tenemos solución.
4		1b, 2a	En los sistemas consistentes hay alguna solución (una o infinitas), en lo sistemas inconsistentes no hay solución.
5		c	Los puntos de intersección representan las soluciones del sistema.
6	a		Tiene solución única.
	b		Tiene solución única.
	c		No tiene solución.
	d		Tiene solución única.
	e		Tiene solución única.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 2			
Pregunta		**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	V	Un conjunto de ecuaciones lineales es un sistema lineal.
	b	V	Resolver un sistema de ecuaciones lineales es encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones.
	c	F	Algunos sistemas de ecuaciones lineales pueden no tener una solución, es decir, ser inconsistentes.
	d	V	Las tres opciones que tiene un sistema lineal son: infinitas soluciones, solución única o no tener solución.
	e	F	m representa el número de filas y n el de columnas.
	f	F	Una matriz es igual a otra cuando todos sus elementos son respectivamente iguales.
	g	F	El resultado es una matriz de orden 1x1
	h	F	La multiplicación de matrices no tiene la propiedad conmutativa.
	i	V	Dos matrices son inversas, la una de la otra, si su producto es igual a la matriz identidad.
	j	V	En la forma escalonada el elemento pivote de cada fila es 1.
	k	F	Las operaciones elementales por fila o renglón son: intercambio de filas, multiplicación de la fila por un número diferente de 0; y restar a una fila otra multiplicada por un número.
	l	V	El método de Gauss-Jordan consiste en transformar la parte izquierda de la matriz ampliada a la forma escalonada reducida.
	m	V	El primer elemento de cada fila diferente de 0 debe ser.
	n	F	Los elementos de la segunda y tercera fila de la matriz producto no son iguales a los de la matriz identidad.
	o	F	No necesariamente, depende del número de filas.
	p	F	Para tener una matriz equivalente debemos haber realizado previamente una operación fundamental por renglón.
2	a	x = 1, y = 2, z = 3	Se trata de un sistema compatible de solución única.
	b	x = 3, y = 2, z = 1	Se trata de un sistema compatible de solución única.
3		$AB = (12\ 27\ 8\ -4\ \ 30\ 13\ 26\ 2\ ), AC = (15\ 24\ 20\ 22\ ), BC\ no\ se\ puede\ multiplicar$	
		Las dimensiones de las matrices juegan un papel fundamental en la solución del producto de matrices.	
4	a	x= 1, y = 2, z= 3	Se trata de un sistema compatible de solución única b. x =2, y = -1, z = 3
	b		Se trata de un sistema compatible de solución única
	c	El sistema no tiene solución	Se trata de un sistema incompatible.

Solucionario

Autoevaluación 2

Pregunta		Respuesta	Retroalimentación
5	a	$B^{-1} = \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2} - 1 \ -1 \right)$	Compruebe multiplicando la matriz original con su inversa, el resultado debe ser la matriz identidad.
	b	$A^{-1} = (1\ 1\ 1\ 0\ 2\ 3\ 5\ 5\ 1)$	Compruebe multiplicando la matriz original con su inversa, el resultado debe ser la matriz identidad.
	c	No posee inversa	La segunda fila es el doble de la primera.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 3			
Pregunta		**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	V	El determinante de una matriz con un único elemento será el valor de ese único elemento.
	b	V	El valor del determinante es $a_{11}a_{22}$-$a_{12}a_{21}$
	c	V	El determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales.
	d	F	Cuando intercambiamos una vez filas, el valor del determinante cambia de signo.
	e	F	El valor del determinante es 0, existe.
	f	F	El valor del cofactor es 8.
	g	V	La fórmula enunciada es correcta.
	h	F	La fórmula proporcionada está invertida.
	i	V	Correcto, es parte del método de Cramer.
	j	V	Correcto, es la condición (que tenga solución única)
2		$M_{11} = \lvert 5\ 6\ 4\ 8 \rvert = 16, c_{11} = 16$ $M_{32} = \lvert 3\ -4\ 2\ 6 \rvert = 26, c_{32} = -26$	Verifique.
3		$A^{-1} = (4\ 3\ 2\ -1\ \ 0\ -1\ 0\ 0\ \ -7\ 0\ 6\ 0\ \ -1\ 8\ 1\ -7\ )$	
		Verifique multiplicando por A, el resultado debe ser la matriz identidad.	
4		$x_1 = \frac{144}{55}, x_2 = -\frac{61}{55}, x_3 = \frac{46}{61}$	Verifique los valores.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 4			
Pregunta		**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	V	El sentido del vector es una característica indispensable en vectores.
	b	V	La equivalencia de vectores es una estrategia en el análisis de vectores.
	c	V	La representación gráfica de un vector nos ayuda a comprender el tema de vectores.
	d	V	El elemento cero es parte también del conjunto de los reales.
	e	V	La magnitud de un vector es una característica intrínseca de un vector la cual depende de sus componentes.
	f	V	La suma de vectores se efectúa con vectores pertenecientes al mismo espacio vectorial.
	g	V	Las leyes del producto escalar pueden ayudar a comprender la perpendicularidad entre vectores.
	h	V	Tener claro la diferencia entre una magnitud escalar o magnitud vectorial.
	i	V	El orden prevalece cuando calculamos el producto escalar entre vectores.
	j	V	Es importante diferenciar el resultado entre producto escalar y el producto vectorial además del manejo de la regla de Sarrus.
2	a	c.a = (4,6,8)	Multiplicamos los componentes de a por 2
	b	a + b = (3,1,9)	Sumamos los respectivos componentes de a y b
	c	a.b = 16	(2)(1) +(3)(-2)+(4)(5)=16
	d	llall = $\sqrt{29}$	$2^2+3^2+4^2=29$
	e	axb = 23i – 6j - 7k	Verificamos aplicando un método diferente al usado para llegar a la respuesta.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 5			
Pregunta		**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	V	Para demostrar un espacio vectorial o subespacio necesitamos conocer los axiomas que rigen a los espacios vectoriales.
	b	V	La propiedad clausurativa es muy importante porque permite verificar si estamos analizando los objetos matemáticos del espacio vectorial al que pertenece.
	c	F	Para que sea un subespacio vectorial debería cumplir con la propiedad de cerradura de las operaciones suma y producto.
	d	V	Es necesario verificar si el elemento cero si forma parte de ese espacio vectorial.
	e	V	Un subespacio hereda las propiedades de un espacio vectorial.
	f	F	Si existen los espacios vectoriales con finitos elementos, por ejemplo, los binarios.
	g	F	Si cada vector de V puede ser generado por un conjunto de vectores, a este conjunto se lo denomina generador de V
	h	V	Para analizar un vector particular de un espacio vectorial evaluarlo mediante los diez axiomas con respecto a la suma y al producto, si cumple con estos diez axiomas.
	i	F	El enunciado debería decir "diferentes" de cero.
	j	V	Es importante para verificar si son base de un espacio vectorial resolverlo por Gauss- Jordán y al finalizar tener una respuesta única para que pueda concluirse de que si son LI y que generan al espacio al que pertenecen.
	k	V	La definición de base es un conjunto finito de vectores que generan a un espacio vectorial.
	l	V	Siendo una base un conjunto finito de vectores, el número de vectores que forman la base determina su dimensión.
	m	V	Se sabe que cada tipo de matriz posee dimensión y rango diferente.
	n	F	El rango fila y el rango columna de una matriz son iguales.
	o	V	El rango es el número de filas no nulas, se requiere que la matriz se reduzca a una matriz escalonada.

Autoevaluación 5			
Pregunta		**Respuesta**	**Retroalimentación**
2	1	no constituye un espacio vectorial.	No contiene al vector (0,0)
	2	no es un espacio vectorial	No contiene al vector (0,0)
	3	Puede ser considerado un subespacio vectorial de R^2	Es parte del espacio vectorial R2 y cumpla las propiedades de cerradura para la suma y el producto escalar.
	4	Los vectores son linealmente independientes	Se puede comprobar a través de la definición.
	5	Base posible v_1, v_2, dimensión = 2	Solo dos de los vectores son linealmente independientes.
	6	Rango=2, nulidad=2	Se reduce a la forma escalonada usando operaciones elementales de fila, solo hay dos filas no nulas.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

5. Glosario

Determinante: es una matriz A cuadrada, en donde se pueden combinar para encontrar un número real "determinante", y que luego se utiliza para resolver ecuaciones lineales simultáneamente.

Ecuación: es una igualdad algebraica que contiene números y letras que representan números, así por ejemplo se tiene que: $x+3y+6z=7$, es una ecuación.

Ecuación lineal: la ecuación de primer grado está representada por incógnitas que tienen una potencia 1, por ejemplo: $6(x-2) +3x =-3x$, para este caso se tiene una ecuación de primer grado o también definida como "lineal".

Espacio vectorial: determinado por un conjunto de elementos definidos como vectores y un conjunto de números reales definidos como escalares; se puede realizar la adición vectorial y la multiplicación por un escalar.

Igualdad: es una expresión matemática que contiene una igualdad "=".

Igualación: un tipo de método de resolución de sistemas lineales despeja una variable en ambas ecuaciones para igualar entre sí las expresiones obtenidas, finalmente se tiene una ecuación con una sola incógnita que se resuelve.

Identidad: es una expresión algebraica que muestra evidencia ser verdadera.

Matriz cuadrada: es una matriz A que tiene el mismo número de filas y columnas.

Matriz identidad: es una matriz A de dimensión mxn en donde se tiene un valor de uno en la diagonal principal y cero en el resto de los elementos.

Matriz Inversa: una matriz cuadrada A inversa cuando existe una matriz B con la propiedad de que AxB=1.

Matriz diagonal: si todos los elementos que no están sobre la diagonal principal son cero.

Matriz transpuesta: una matriz cuadrada que responde a la definición $Aij = Aji$

Reducción: Un tipo de método de resolución de sistemas lineales, en la que se promueve que una de las dos variables aparezca con coeficientes opuestos para que, al realizar la adición entre las expresiones, se elimine, obteniendo una ecuación con una única variable. La otra variable se obtiene sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones originales, el valor de la variable conocida.

Sistema compatible: sistema lineal que tiene solución.

Sistema compatible definido: sistema que tiene una única solución.

Sistema incompatible: sistema que no tiene ninguna solución.

Subespacio: es un subconjunto W de un espacio vectorial V que es cerrado bajo la operación de la suma y la multiplicación por un escalar.

Sustitución: un tipo de método de resolución de sistemas lineales, que despeja una las variables de una de las dos ecuaciones y sustituye la expresión algebraica resultante en esa misma variable, pero en la segunda ecuación.

Término: es un sumando cualquiera utilizada en una expresión algébrica.

Vector: es el nombre genérico para cualquier elemento de un espacio vectorial.

Vector unitario: es un vector de longitud 1.

Proyección: es la perpendicular que se proyecta de un vector sobre otro cuyo punto de intersección de la perpendicular es el punto final del vector proyección.

Matriz adjunta: es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto

Menor: queda después de borrar el renglón i y la columna j de A

Cofactor: determina el signo del menor.

Triangular superior: si todos sus elementos debajo de la diagonal principal son cero.

Triangular inferior: si todos sus elementos arriba de la diagonal principal son cero.

Glosario

6. Referencias bibliográficas

Aranda, E. (2013). *Álgebra lineal con aplicaciones y Python*. http://galois.azc.uam.mx/mate/LIBROS/algebralineal2.pdf

Grossman, S., & Flores, J. (2012). Algebra Lineal. In *McGraw Hill*. https://www.academia.edu/33824391/Algebra_Lineal_Stanley_I_Grossman_7ed

Kolman, B. /Hill, D. (2013). Álgebra *Lineal, Fundamentos y Aplicaciones* (Primera, Vol. 1). Pearson. https://visorweb.utpl.edu.ec/reader/algebra-lineal-fundamentos-y-aplicaciones?location=41

Morales, G. (2022). *Álgebra Lineal* (pp. 1-198). Universidad Técnica Particular de Loja.

Pérez, Mauricio. (2018). Álgebra Lineal Ejercicios de práctica. Primera Edición. Ciudad de México: Patria.

Referencia de recursos

Fresno.pntic.mec.es. 2022. Álgebra. [online] tomado de http://fresno.pntic.mec.es/~jvaamond/producto.htm> Accedido el 23 enero 2022.

GeoGebra. 2022. Introducción Interactiva al Álgebra Lineal. [online*] tomado de:* <https://www.geogebra.org/m/vmeqdn4u> [Accedido el 23 enero 2022].

GeoGebra. 2022. Matriz traspuesta o transpuesta. [online]. Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/mafmgjpd> [Accedido el 26 enero 2022].

Llopis, J., 2022. Suma de matrices: ejemplos y ejercicios resueltos: Bachiller. [online] Matesfacil.com tomado de: <https://www.matesfacil.com/matrices/resueltos-matrices-suma.html> [Accedido el 26 enero 2022].

Es.liveworksheets.com. 2022. Ejercicio de Método Matriz Ampliada Sistema de 2 ecuaciones. [online] tomado de: <https://es.liveworksheets.com/fr2111498bx> [Accedido el 26 enero 2022].

Es.liveworksheets.com. 2022. Ejercicio de Inversa de matrices. [online] tomado de: <https://es.liveworksheets.com/gp1266932jz> [Accedido de 26 enero 2022].

Amaguaña, N., 2022. Ejercicio interactivo de Matriz Inversa. [online] Es.liveworksheets.com. Tomado de: <https://es.liveworksheets.com/ag1364123ju> [Accedido el 26 enero 2022].

García, M., 2022. Libro digital interactivo. [online] Proyectodescartes.org. Tomado de: <https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/AlgebraLinealBachillerato-JS/indexb.html> [Accedido el 26 enero 2022].

Didactalia.net. 2022. Vectores - Didactalia: material educativo. [online] Tomado de: <https://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/vectores/9bf65429-06b3-406f-b5f5-3a682a1c33a5> [Accedido el 26 enero 2022].

Didactalia.net. 2022. Vectores en R3 - Didactalia: material educativo. [online] Tomado de: <https://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/vectores-en-r3/8e510412-4d1b-42df-8af1-a491bed91541> [Accedido el 26 enero 2022].

Matefacil, 2022. 33. Ángulo entre vectores, demostración de fórmula | Cálculo vectorial. [video] Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=5oUBDSi1q5k> [Accedido el 26 enero 2022]. Youtube.com. 2022. 32. Propiedades del producto punto. Con demostración | Cálculo vectorial. [online] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=v13fgi4lDpQ> [Accedido el 26 enero 2022].

Matefacil, 2022. https://www.youtube.com/watch?v=cfe-IS-gNoU. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=cfe-IS-gNoU> [Accedido el 26 enero 2022].

Matefacil, 2022. 48. Producto punto de vectores. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=yEwXQm9GKtQ> [Accedido el 26 enero 2022].

Geometría Analítica. 2022. Cómo calcular el producto vectorial de dos vectores (ejemplos). [online] Tomado de: <https://www.geometriaanalitica.info/producto-vectorial-de-dos-vectores-cruz-formula-ejemplos-ejercicios-resueltos/> [Accedido el 23 enero 2022].

Mates con Andrés, 2022. Cómo Obtener las Ecuaciones de la Recta en el Espacio (ecuación vectorial, paramétrica y continua). [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=2fb7SsAF1uk> [Accedido el 26 de enero 2022].

Mates con Andrés, 2022. Cómo Obtener las Ecuaciones de un Plano en el Espacio (ecuación vectorial, paramétrica e implícita). [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=RllkKTqIA58> [Accedido el 23 de enero 2022].

profesor10demates, 2022. Espacios vectoriales 1 que es un espacio vectorial. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=q6IQJA8qvok> [Accedido el 24 de enero 2022].

Morilloon, G., 2022. Definición y Ejemplos de Espacios Vectoriales. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=UIsQir8CXas> [Accedido el 25 de enero 2022].

Escuela Superior Politécnica del Litoral, 2022. Problemas sobre espacios vectoriales - Sesión 12 - 2/12. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=QmnvV4M5wh0> [Accedido el 26 de enero 2022].

Matemáticas Javi, 2022. Subespacios vectoriales ejercicios resueltos paso a paso - CURSO de Álgebra Lineal. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=faZnL8E6XEw&t=19s> [Accedido el 25 de enero de 2022].

Matemáticas Javi, 2022. Conjunto generador de un espacio vectorial. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=5F4UfNIE1oo> [Accedido el 26 de enero 2022].

Matemáticas Javi, 2022. Cómo saber si los Vectores son Linealmente independientes o Dependientes. [video] Tomados de: <https://www.youtube.com/watch?v=IwDDu1GzdLY> [Accedido el 23 de enero 2022].

Matemáticas Profesor Luis Felipe, 2022. Determinar si estos Vectores son Linealmente Dependientes o Independientes | Álgebra Lineal. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=0jJ5yf0Mxq0> [Accedido el 23 de enero 2022].

Ciencias.medellin.unal.edu.co. 2022. Universidad Nacional de Colombia : Clase 5. Parte 2. Sistemas homogéneos. [online] Tomado de: <https://ciencias.medellin.unal.edu.co/cursos/algebra-lineal/clases/8-clases/52-clase-5-parte2.html> [Accedido el 26 de enero 2022].

Matemáticas Javi, 2022. Cómo hallar el núcleo y nulidad de una matriz ejercicios resueltos Álgebra Lineal. [video] Tomado de: <http://nulidad A> [Accedido el 26 de enero 2022].

unicoos, 2022. Rango de una matriz por determinantes. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=jHP6TdVUT5o> [Accedido el 26 de enero 2022].

Mates con Andrés, 2022. Cómo Calcular el rango de una matriz | método de Gauss. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=RjG6mGw41-8> [Accedido el 26 de enero 2022].

lasmatematicas.es, 2022. Vectores ortogonales. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=NHnnLSoDEjI> [Accedido el 25 de enero 2022].

Matemáticas Javi, 2022. BASE ORTOGONAL y una base ortonormal usando el método de Gram Schmidt. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=VV1nRj7IQfY > [Accedido el 25 de enero 2022].

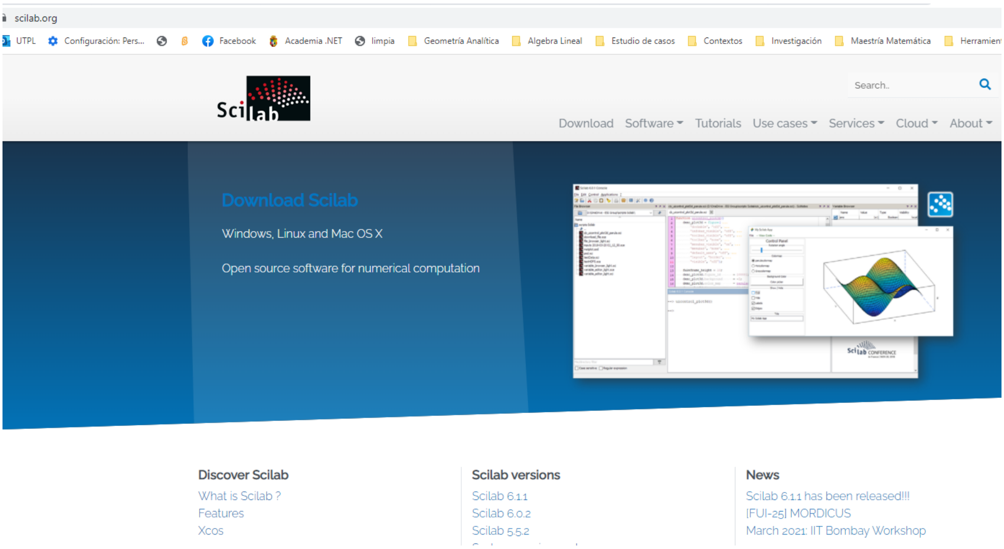
Universidad Nacional de Colombia, 2022. https://www.youtube.com/watch?v=Jpcc-iwjYso. [video] Tomado de: <https://www.youtube.com/watch?v=Jpcc-iwjYso> [Accedido el 25 de enero 2022].

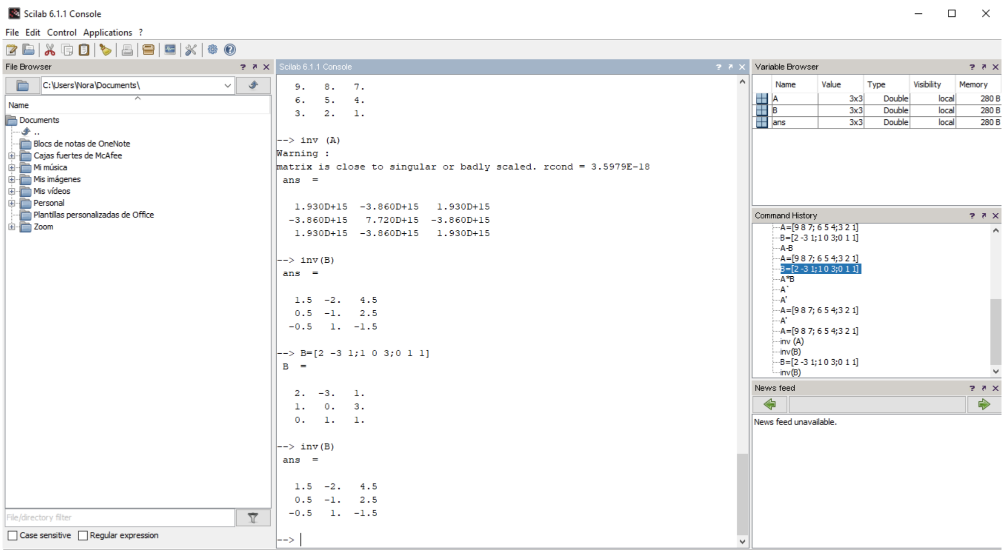
Matemáticas Javi, 2022. Aproximación por Mínimos cuadrados Álgebra lineal. [video] Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=uzIzgDr77L4> [Accessed 24 January 2022].

7. Anexos

Anexo 1. Uso de SCILAB (LICENCIA LIBRE) en matrices

Descargarlo del sitio www.scilab.org





Comandos de Scilab

Definición de una matriz

```
--> A=[9 8 7;6 5 4;3 2 1]
 A  =

   9.    8.    7.
   6.    5.    4.
   3.    2.    1.
```

Obtener elementos de una matriz

```
--> A(2,2)
 ans  =

   5.
```

Vector columna

```
--> A=[8;-2;3]
 A  =

   8.
  -2.
   3.
```

Vector fila

```
--> A=[8 -2 3]
 A  =

   8.  -2.   3.
```

Operaciones con Matrices

Suma de matrices

```
--> A=[9 8 7; 6 5 4;3 2 1]
 A  =

   9.    8.    7.
   6.    5.    4.
   3.    2.    1.

--> B=[2 -3 1;1 0 3;0 1 1]
 B  =

   2.   -3.    1.
   1.    0.    3.
   0.    1.    1.

--> A+B
 ans  =

   11.    5.    8.
   7.     5.    7.
   3.     3.    2.
```

Resta de matrices

```
--> A=[9 8 7; 6 5 4;3 2 1]
 A  =

   9.    8.    7.
   6.    5.    4.
   3.    2.    1.

--> B=[2 -3 1;1 0 3;0 1 1]
 B  =

   2.   -3.    1.
   1.    0.    3.
   0.    1.    1.

--> A-B
 ans  =

   7.    11.    6.
   5.    5.     1.
   3.    1.     0.
```

Anexos

Matriz Transpuesta

```
--> A=[9 8 7; 6 5 4;3 2 1]
 A  =

   9.   8.   7.
   6.   5.   4.
   3.   2.   1.

--> A'
 ans  =

   9.   6.   3.
   8.   5.   2.
   7.   4.   1.
```

Suma de matrices

```
--> A=[9 8 7; 6 5 4;3 2 1]
 A  =

   9.   8.   7.
   6.   5.   4.
   3.   2.   1.

--> B=[2 -3 1;1 0 3;0 1 1]
 B  =

   2.  -3.   1.
   1.   0.   3.
   0.   1.   1.

--> A*B
 ans  =

   26.  -20.   40.
   17.  -14.   25.
   8.   -8.    10.
```

Matriz inversa

```
--> B=[2 -3 1;1 0 3;0 1 1]
 B  =

   2.  -3.   1.
   1.   0.   3.
   0.   1.   1.

--> inv(B)
 ans  =

   1.5  -2.    4.5
   0.5  -1.    2.5
  -0.5   1.   -1.5
```

Figura 34.

Reglas de manejo de matrices en Matlab

Notación para formar las submatrices y las matrices aumentadas.

`f = A(2,3)`	f es el elemento en el segundo renglón, tercera columna de A.
`d = A(3,:)`	d es el tercer renglón de A.
`d = A(:,3)`	d es la tercera columna de A.
`C = A([2 4]),:)`	C es la matriz que consiste del segundo y cuarto renglones de A.
`C = [A b]`	Forma una matriz aumentada $C = (A\|b)$.

Ejecución de operaciones por renglones.

`A(2,:) = 3*A(2,:)`	$R_2 \rightarrow 3R_2$
`A(2,:) = A(2,:)/4`	$R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2$
`A([2 3],:) = A([3 2],:)`	Intercambia los renglones 2 y 3
`A(3,:) = A(3,:) + 3*A(2,:)`	$R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2$

Nota. Adaptado de Introducción a Matlab (p. 30), por Grossman, S., Flores Godoy, J., & Vázquez Valencia, F., 2012, McGrawHill

Figura 35.

Intercambio de renglones del 2 por 3 y 1 por 2

```
--> A([3,2],:)=A([2,3],:)
 A  =

   9.   8.   7.
   3.   2.   1.
   6.   5.   4.

--> A([1,2],:)=A([2,1],:)
 A  =

   3.   2.   1.
   9.   8.   7.
   6.   5.   4.
```