UTPL
La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento del Cálculo y su Didáctica

Guía didáctica

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Departamento de Ciencias de la Educación

Sistemas de Conocimiento del Cálculo y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	*PAO Nivel*
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)*	VII

Autor:

Sánchez Romero José Edmundo

EDUC_4151

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento del Cálculo y su Didáctica
Guía didáctica
Sánchez Romero José Edmundo

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-315-9

4 de octubre, 2021

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física, basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.

- Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado en relación con las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.

- Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza-aprendizaje y de evaluación que integren la práctica de investigación acción hacia la producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

- Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

La incipiente didáctica al momento de estudiar derivación, al interpretar gráficamente con la recta tangente y analíticamente con el cociente incremental, no favorece la conceptualización adecuada de la derivación y sus aplicaciones, lo cual tampoco facilita la solución de problemas del entorno natural y social, ocasionando un conocimiento teórico algorítmico apartado de la realidad del estudiante.

El limitado uso de herramientas tecnológicas no permite practicar la matemática experimentalmente a través de softwares al alcance de todos, lo cual dificulta el logro de aprendizajes significativos respecto de los grandes conceptos del cálculo: derivación e integración.

A través del análisis y aplicación de la modelización con la derivación e integración, se aborda con mayor propiedad y pertinencia el objeto de estudio y naturaleza de la matemática, lo cual favorece para que la matemática se convierta en una herramienta sustancial para el estudio de otras ciencias y un pilar para el desarrollo del pensamiento formal del estudiante.

La didáctica aplicada en la enseñanza de los conocimientos de matemática se enfoca al desarrollo de conceptos de manera teórica y textual, sin considerar que el aprendizaje deber ser experimental, partiendo de la manipulación de un material concreto dado por algunas herramientas virtuales, explorando detalles conceptuales que permiten plantear inquietudes, comunicando los aportes a otros estudiantes y docente y verbalizando sus conclusiones matemáticas.

2. Metodología de aprendizaje

En cada concepto, se partirá de la **manipulación de material concreto, utilizando herramientas virtuales,** para luego llegar a la debida **exploración** que permite observar situaciones de aprendizaje que posibilitan la **comunicación** entre compañeros y el profesor, finalizando con la **verbalización** en los escritos de aportes y conclusiones, todo este procedimiento relacionado con una metodología activa ABP. Para profundizar sobre los fundamentos que orientan esta metodología de aprendizaje, la invitación para acceder a través de metodología activa ABP.

Aunque no existe un procedimiento único, lo esencial para el estudio de este curso es la utilización del texto básico y micro videos, apoyados en otros recursos como los cuestionarios interactivos y las infografías; anticipando el estudio de los aspectos teóricos que serán consolidados luego con la práctica experimental al momento de desarrollar los aportes, principalmente cuantificados, contando con la presencia física del profesor en algunos casos y casi siempre a través de videoconferencias, fomentando el trabajo colaborativo en función de los distintos estilos de aprendizaje y enfocados a lograr resultados de aprendizaje que orientan el desarrollo de las competencias.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Aplica los conceptos y leyes de los límites y derivadas para la resolución de problemas relacionados con el entorno natural y social.

Para desarrollar con éxito el resultado de aprendizaje propuesto en el primer bimestre, es conveniente estimado estudiante considerar que, la situación didáctica del aprendizaje y enseñanza de la matemática en general nos recomienda que, antes del desarrollo de ejercicios y resolución de problemas, es muy importante lograr un suficiente dominio teórico conceptual, partiendo de definiciones, teoremas y propiedades, analizando procesos o algoritmos apropiados para la aplicación y propuestos en los ejemplos ilustrativos del texto básico y la guía didáctica, y solo después de eso, desarrollar un suficiente número de ejercicios que nos brinde la experticia suficiente, así como resolver los problemas relacionados con el entorno natural y social.

Al iniciar nuestro estudio vale señalar que, en ciclos anteriores estudiamos detalladamente los conceptos de los diferentes tipos de funciones: polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas; además, con el estudio de geometría plana y del espacio y de la geometría analítica, estamos preparados para estudiar en el presente curso, primero el cálculo diferencial y luego el cálculo integral, para esto, los docentes debemos tener presente:

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Principio didáctico: La derivación es uno de los conceptos trascendentales en el estudio matemático, su análisis debe partir de la conceptualización gráfica y analítica y luego, la modelización en aplicaciones.

Los conceptos fundamentales del cálculo son la derivación y la integración, correspondientes al ***cálculo diferencial*** y ***cálculo integral***, objetos de nuestro estudio, con ellos se ha podido modelar situaciones de la vida real que antes de su aparecimiento era imposible. Citaremos solo dos casos: por ejemplo, en la optimización de la potencia requerida y en la trayectoria de vuelo de los cohetes lanzados al espacio (Murcia, J. y Portilla, G., 2017); también, en la maximización de la utilidad, así como en la minimización de costos de transacción y optimización de distribución de riesgo en los bancos ecuatorianos (Franco, 2020), son algunos de los elementos donde la derivación de funciones cumple un rol esencial.

¡Bienvenido, ánimo y adelante!

Semana 1

Unidad 1. Límites y sus propiedades

Por su importancia al momento de conceptualizar la derivación de funciones, iniciamos analizando algunos temas relacionados con los límites y sus propiedades, en esta primera unidad nos apoyaremos en los siguientes temas:

- Una mirada previa al cálculo
- Cálculo de límites de manera gráfica y numérica
- Cálculo analítico de límites
- Continuidad y límites laterales o unilaterales
- Límites al infinito

Estimado estudiante, antes de adentramos en el mundo fascinante del estudio de los límites y sus propiedades, primero demos respuesta a los siguientes cuestionamientos: ¿Cuáles son las razones por las cuales se debe estudiar Cálculo? ¿Cuáles fueron las razones para su aparecimiento hace más de tres siglos? ¿Cuáles son los dos grandes problemas que se resuelven con el estudio de esta asignatura? ¡Adelante, iniciemos con este estudio!

1.1. Una mirada previa al cálculo

¿Cuáles son las razones por las cuales se debe estudiar Cálculo?

En la formación de un docente de matemáticas, el cálculo diferencial e integral es como la "cereza en el pastel" de su preparación para profesor, aquí se conocen aquellos contenidos que se convierten en las herramientas para resolver problemas relacionados con otras carreras como Ingeniería Civil, Economía, Industrias, Administración de empresas, Medicina, entre otras tantas. Participe de la actividad interactiva y descubra las aplicaciones en las distintas profesiones.

Uso del cálculo en las distintas profesiones

Con esta actividad usted pudo descubrir distintas actividades del cálculo diferencial o integral. Por ejemplo, en las **ingenierías**, con el uso del cálculo se pueden plantear ecuaciones diferenciales como un modelo de crecimiento poblacional, crecimiento de activos de empresas, comportamiento de partes mecánicas de un automóvil, entre otras; en **física**, se aplican estos conceptos para interpretar la velocidad de una partícula en un momento determinado; en la **química** el cálculo sirve para determinar los ritmos de las reacciones y el decaimiento radioactivo. En **medicina,** es usado para encontrar el ángulo de ramificación óptimo de un vaso sanguíneo para maximizar el flujo; en **economía** se aplica para minimizar costos en una empresa que se dedica a empacar productos de exportación; en **informática y computación** el cálculo es aplicado para la fabricación de chips microprocesadores o en simulaciones donde se emulan comportamientos de sistemas mediante la resolución de sistemas de ecuaciones (Nayeruiz98. 2016).

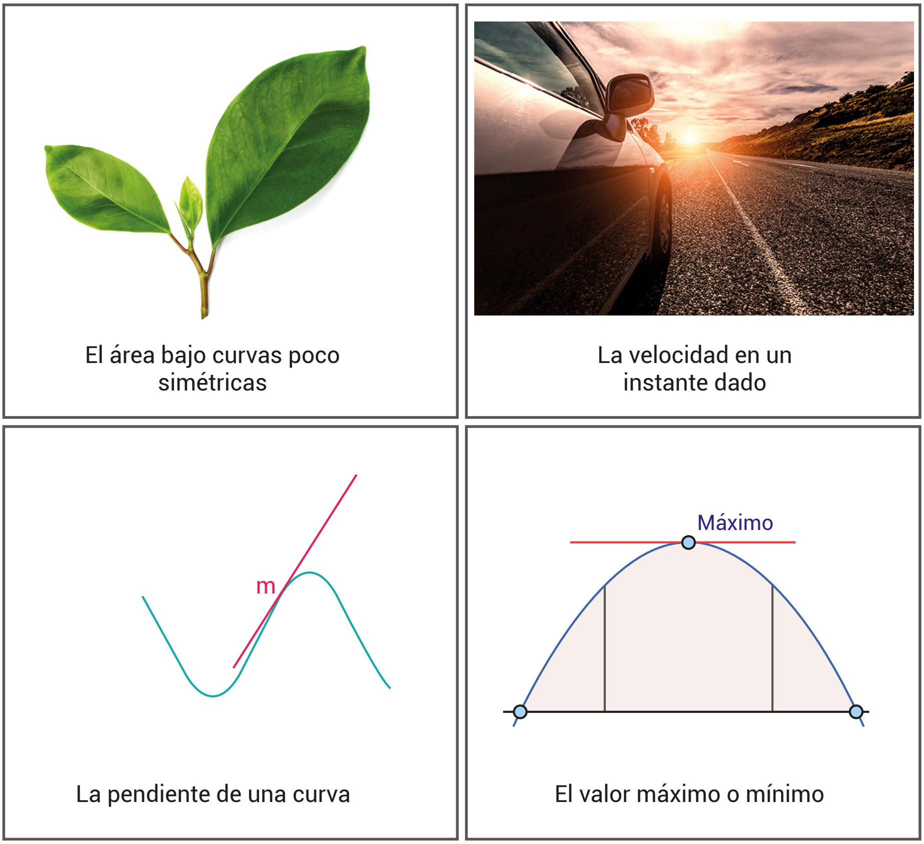
Otra razón por la que se debe estudiar cálculo se debe a que, sus conocimientos básicos aparecen en la malla curricular del bachillerato ecuatoriano y de todas las carreras técnicas a nivel superior, inclusive en muchas especializaciones de algunas de las ramas de las ciencias sociales. Además, el tratamiento de sus temas y la modelización adecuada, fortalece el desarrollo de las capacidades de razonamiento y el pensamiento formal del ser humano.

¿Cuáles son las razones para su aparecimiento hace más de tres siglos?

Newton y Leibniz son los dos inventores del Cálculo, ellos por separado trabajaron en su estructuración, aunque los enfoques fueron distintos, se trataron de los mismos conceptos. Seguramente, las razones que motivaron su invención, fueron entre otras, la necesidad para determinar: El área bajo curvas poco simétricas, la velocidad en un instante dado, la pendiente de una curva en un punto determinado o el valor máximo o mínimo en un intervalo.

Figura 1.

Temas que abordó el Cálculo



Nota. Hoja verde. Adaptado de enlace virtual

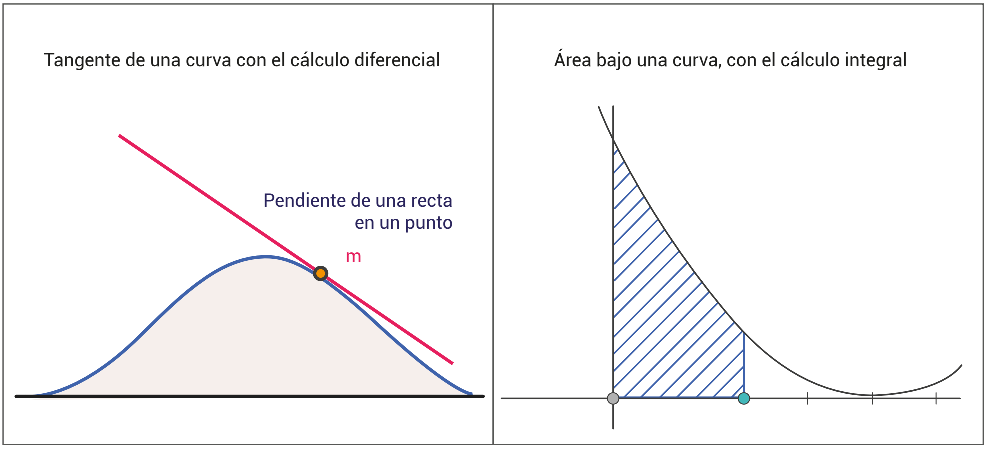
Estos cuatro temas fueron tratados y estudiados desde muchos siglos antes, pero con ciertas limitaciones, por ejemplo, el área bajo una curva se podía calcular si la curva era simétrica como la circunferencia o la parábola. También la velocidad y aceleración fueron estudiadas con anterioridad, pero existían dificultades para su interpretación en un instante dado. La pendiente de una recta se calculaba desde mucho antes, pero solo en función de las coordenadas de dos puntos dados, no podían calcular la pendiente de una curva en un punto dado, esto lo ha permitido el concepto de derivación dentro del Cálculo.

¿Cuáles son los dos grandes problemas que se resuelven con el estudio de esta asignatura?

Aunque las aplicaciones son ilimitadas tanto en el cálculo diferencial como en el cálculo integral, existen dos grandes problemas, uno para cada caso, que se constituyen en los dos grandes problemas que se resuelven con su aplicación.

Figura 2.

Dibujos de los dos problemas del cálculo



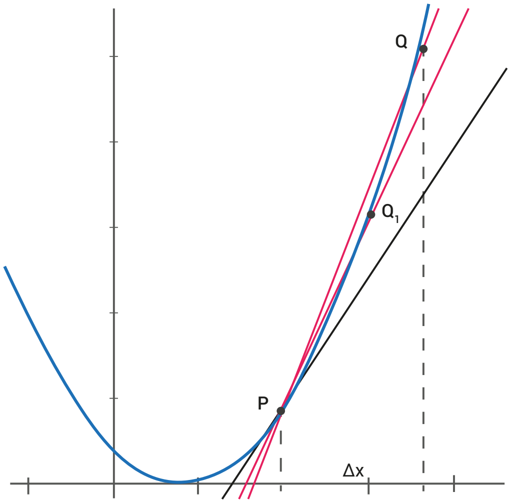
Nota. Dibujos de los dos problemas del Cálculo. Adaptado de Cownstrucciones en GeoGebra

En las imágenes anteriores se ilustra de manera gráfica los dos grandes problemas que se pueden resolver mediante la aplicación de los conceptos del cálculo diferencial y del cálculo integral.

1.1.1. El problema de la tangente

Figura 3.

Límite de la secante. Tangente



Nota. Construcción propia en GeoGebra.

La pendiente de una recta se calcula a partir de dos puntos conocidos P y Q. Por ejemplo, en la parábola graficada de azul, a partir de las coordenadas de los puntos P y Q podríamos calcular el valor de la pendiente *m* de la recta secante PQ (color rojo): $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Similar, a partir de los puntos P y Q_1 se puede calcular el valor de la pendiente de la secante PQ_1 (color rojo también) $m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Sin embargo, en el caso de la recta tangente (de color negro) que topa a la curva en un solo punto P, y es el límite de la secante**,** cuando el incremento de x (Δx) tiende a cero, el valor de la pendiente es: $m = \frac{y_2 - y_1}{\Delta x}$.

Ahora, le invito estimado estudiante para que experimente: cómo una secante, conforme un punto se acerca al otro, se convierte en una tangente, situación que se extrapola para hablar del límite de una función y posterior concepto de la derivada.

Experimentación de secante a tangente

En esta experimentación, se observa con claridad cómo la secante se transforma o convierte en una tangente. Para esto, conforme el punto A se acerca al punto P, el incremento de *x* (Δx) disminuye. Y lo sustancial sucede cuando, el punto A se confunde y llega a la posición del punto P, es decir, ya no existen dos puntos, sólo existen un punto y el incremento de *x* (Δx) se hace cero, en este momento la tangente que se forma se convierte en el límite de la secante cuando $\Delta x = 0$.

Con la finalidad de solucionar este inconveniente, es decir, para solucionar el problema de calcular la pendiente de una recta cuando se conoce un sólo punto, aparece el *concepto de derivada* , cuyo estudio puede realizarse partiendo del *límite de una función.*

1.2. Determinación de límites de manera gráfica y numérica

Estimado estudiante, para llegar a la conceptualización de derivación y luego, al de integración, es necesario partir del estudio de los límites, tanto de manera gráfica como numérica o analítica. La importancia de estudiar estos temas radica en que, los límites se convierten en el puente que une las matemáticas previas al cálculo y las matemáticas del cálculo. En los párrafos anteriores analizamos la necesidad de estudiar los límites, para esto partiremos de una definición intuitiva del límite de una función continua en algún punto *a* conocido:

El límite de cuando tiende a un valor conocido , es igual a :

En la definición anterior debemos aclarar que, los valores que puede tomar la variable *x* son cercanos al valor *c* pero no iguales a *c*.Aparentemente, esta definición es formal, pero no lo es, por cuanto las siguientes dos frases, no son precisas:

Primera frase no precisa:"*f(x)* se acerca de manera arbitraria a un número *L*"

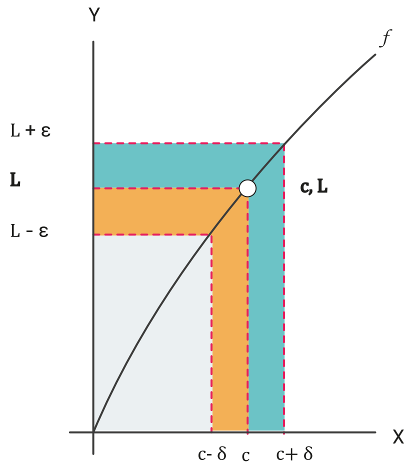
Segunda frase no precisa: “*x* se aproxima a *c*"

¿Rigurosidad a estas frases?

El primer matemático en dar un significado riguroso a estas dos frases, fue Augustín Cauchy (1789 – 1857), cuya definición perdura hasta la actualidad. Para entender esta rigurosidad, observemos el siguiente gráfico y la definición precisa de límite.

Figura 4.

Representación del límite de una función



Nota. Construcción propia con GeoGebra

La función *f* está representada en la gráfica por una parte de la parábola, y el intervalo abierto en el que está definida la función *f* es $(c-\delta,\ c+\delta)$.

La frase *"f(x)* se acerca de manera arbitraria a un número L" significa que, *"f(x)* pertenece al intervalo $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$ el cual se puede escribir como $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Mientras que, la frase "x se aproxima a c" significa que existe un número positivo δ tal que, pertenece al intervalo $(c-\delta,\ c)$ o bien al intervalo $(c,\ c+\delta)$ lo cual se puede escribir como la doble desigualdad $0<|x-c|<\delta$. De donde, la primera desigualdad: $0<|x-c|$ nos asegura que, x ≠ *c*; mientras que, la segunda desigualdad: $|x-c|<\delta$ nos indica que x está a una distancia de *c* menor que δ.

Definición formal - de límite

Sea una función definida en un intervalo abierto que contiene a un número (salvo, posiblemente en mismo) y otro número real. Entonces, se dice que el límite de cuando tiende a es y se expresa como .

Esta expresión significa que, para cada número existe otro número tal que, sí entonces .

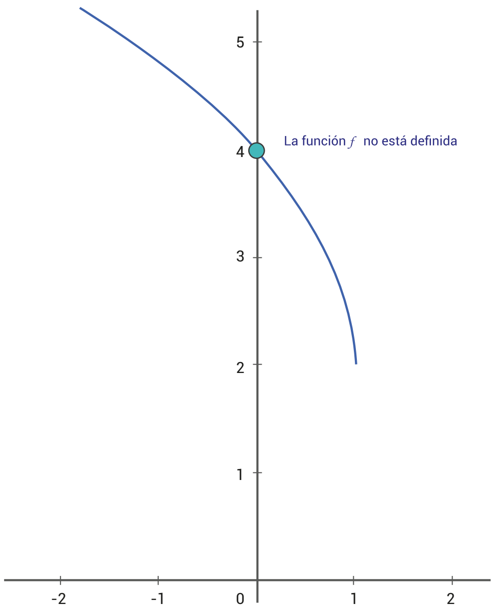
Le invito a profundizar el aprendizaje mediante la revisión de los siguientes ejemplos:

Ejemplo ilustrativo 1

Evaluemos la función $\frac{2x}{1-\sqrt{1-x}}$ en varios puntos cercanos a x = 0 y usemos el resultado para inferir el valor de $\frac{2x}{1-\sqrt{1-x}}$.

Figura 5.

Gráfica de la función no definida en un punto



Nota: Construcción propia en GeoGebra

La función *f* no está definida cuando x = 0 por lo que, no podemos asignar un valor cero a la variable, pero si podemos asignar valores cercanos a ella por la derecha y por la izquierda, lo cual nos permitirá inferir el límite de la función.

Entonces, calculemos los valores que toma la función $\frac{2x}{1-\sqrt{1-x}}$ con números cercanos a x = 0, por la izquierda y por la derecha:

Tabla 1.

La variable independiente toma valores cercanos a cero

x toma valores cercanos a 0 por la izquierda		0	x toma valores cercanos a 0 por la derecha	
$x < 0$	$\frac{2x}{1-\sqrt{1-x}}$		$\frac{2x}{1-\sqrt{1-x}}$	$x > 0$
x = -0,1	4,0976177	**cerca de 4**	3,8973666	x = 0,1
x = -0,01	4,0099751	**+ cerca de 4**	3,9899748	x = 0,01
x = -0,001	4,0009998	**+ cerca de 4**	3,9989997	x = 0,001
x = -0,0001	4,0000999	**+ cerca de 4**	3,9998999	x = 0,0001
x = -0,00001	4,0000100	**+ cerca de 4**	3,9999899	x = 0,00001
El valor de f(x) se aproxima a 4		**4**	El valor de f(x) se aproxima a 4	

Nota. Elaboración propia.

Ahora, si analizamos los datos obtenidos en la tabla anterior observamos que, mientras más cercanos a cero son los valores que se asignan a la variable independiente x, en la variable dependiente *f*(*x*) se obtienen valores cada vez más cercanos a 4. Entonces, se puede inferir que, el límite de la función f cuando x tiende a cero (0), es 4. Lo cual se puede escribir de la siguiente manera:

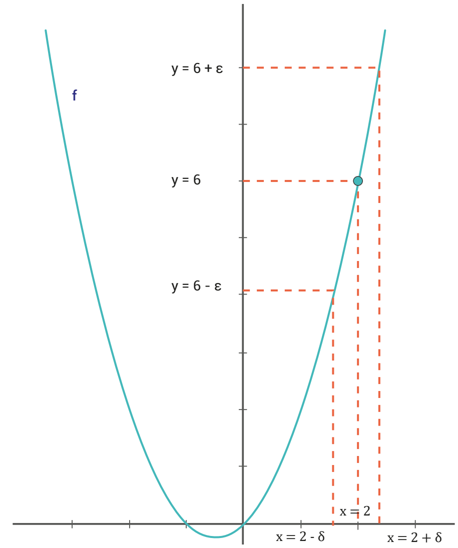
$$= 4$$

Ejemplo ilustrativo 2

Utilicemos la definición ε - δ de límite para comprobar que $x^2 + x = 6$.

Figura 6.

Gráfica del límite de la función



Nota. Construcción propia en GeoGebra.

Por la definición de límite, en donde *f(x)* = *L* significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En este caso, lo que se debe probar es que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|(x^2 + x) - 6| < \varepsilon$. Entonces, esta implicación es la que comprobaremos.

Puesto que la elección de δ depende de ε, es conveniente establecer una relación, entre los valores absolutos $|(x^2 + x) - 6|$ y $|x-2|$Para esto, busquemos esa relación.

$$|(x^2 + x) - 6| = |x2 + x - 6| = |(x+3)(x-2) = |x+3|*|x-2|$$

De tal manera que, para cada $\varepsilon > 0$ dado se puede tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{|x+3|}$.

En consecuencia, podemos asegurar que, esta opción funciona porque $0 < |x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{|x+3|}$ implica que $|(x^2 + x) - 6| = |x + 3||x - 2| < |x + 3| \cdot \frac{\varepsilon}{|x+3|} = \varepsilon$

Lo cual queda comprobado: LQQC

Recursos didácticos

- Para profundizar el análisis en la definición de límite, usted debe leer el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 48 en donde se explica con ejemplos ilustrativos la aplicación de la definición ε - δ de un límite, conceptos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 1.2 EJERCICIOS desde la página 55.

- Es conveniente también que, estudie el video Introducción a los límites en donde se explica de forma muy didáctica y concreta, la forma intuitiva de hallar el límite de una función. Además, aquí se explican detalladamente los límites laterales y límites al infinito.

Introducción a los límites

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta primera semana estudiamos la introducción a los límites, la aplicación de la definición intuitiva de límite, límites laterales y límites infinitos, para reforzar estos aprendizajes teóricos es conveniente experimentarlos con la aplicación GeoGebra, desarrollando y resolviendo lo siguiente:

- Construya una tabla de valores y utilice el resultado para estimar el límite $\frac{x-3}{x^2-9}$. Luego, represente la función con la herramienta indicada y confirme su resultado.
- Grafique con la aplicación indicada la función *g(x)* = {1+*x*, si *x* < -1*x*2, *si* -1 ≤ *x* < 12-*x*, si *x* ≥ 1 y determine el valor de c para los cuales g(x) existe.
- Encuentre el límite L. Luego utilice la definición $\varepsilon - \delta$ de límite para demostrar que el límite es L: $\sqrt[3]{x}$.
- Experimente con la aplicación propuesta y halle el x^2 ln ln x. Luego con una tabla de valores, compruebe el valor.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo practicar y experimentar la representación y el proceso para encontrar intuitivamente el límite de una función, algo sencillo pero muy valioso para los siguientes temas de estudio.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta primera semana en donde se ha podido recordar el uso y aplicación de GeoGebra, así como iniciar intuitivamente el estudio de límites, le invito para conocer las fórmulas y procesos que permiten calcular límites, pero de manera simplificada.

Semana 2

1.3. Cálculo analítico de límites

En esta segunda semana, estudiaremos aquellas propiedades que nos permitirán calcular límites en distintos tipos de funciones por *sustitución directa* , aplicando procesos simplificados y estrategias que el autor del texto básico llama *propiedades de los límites*. A continuación, en el siguiente recurso se exponen las más importantes y la invitación para que interactúe conectando los lenguajes verbal y simbólico de acuerdo a las indicaciones dadas. Antes de participar en esta el recurso , usted debe estudiar el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo,** a partir de la página 59, revisando todas las propiedades y teoremas de los límites.

Propiedades y teoremas de límites

Con su participación en el recurso interactiva pudo interiorizar las propiedades más importantes de los límites de una función, lo cual facilita la resolución de ejercicios y problemas de aplicación. Lo invito a revisar los siguientes ejemplos:

Ejemplo ilustrativo 3.

Determinemos los límites siguientes por sustitución directa, justificando cada paso, con las propiedades de la infografía:

a. $(5x^4 - \frac{1}{2}x^3)$; b) $\frac{4-2x^3}{x^3-2x^2-1}$

a. $(5x^4 - \frac{1}{2}x^3) = 5x^4 - \frac{1}{2}x^3$ *(Por la ley 2)*

$= x^4 - x^3$ *(Por la ley 3)*

$= 5(2^4) - \frac{1}{2}(2^3)$ *(Por la ley 9)*

$= 80 - 4$

$\left(5x^4 - \frac{1}{2}x^3\right) = 76$

b. $\frac{4-2x^3}{x^3-2x^2+1} = \frac{(4-2x^3\ )}{(x^3-2x^2+1)}$ *(Por la ley 5)*

$= \frac{4-2x^3}{x^3-2x^2+1}$ *(Por las leyes 1 y 2)*

$= \frac{-2(3^3)}{-+1}$ *(Por las leyes 3 y 9)*

$\frac{4-2x^3}{x^3-2x^2+1} = -5$

Técnicas de cancelación y racionalización

El proceso para aplicar las leyes del cálculo de límites por sustitución directa es muy sencillo y amigable, sin embargo, no todos los límites se pueden evaluar o determinar por sustitución directa, en estos casos, se debe operar algebraicamente, aplicando la técnica de cancelación o la técnica de racionalización.

Ejemplo ilustrativo 4

Calculemos el límite por racionalización: $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} =$ (No se puede aplicar sustitución porque se obtiene 0/0)

$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$ (Racionalizamos el numerador)

$= \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$ (Ya no tenemos radicales en el numerador)

$= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$ (Simplificamos o cancelamos el factor x)

$$= \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$ (Ahora podemos realizar la sustitución

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{1}{4}$$

Entonces, cuando no se puede realizar la sustitución por cuanto se obtiene la forma indeterminada 0/0 es necesario aplicar procesos algebraicos que permitan cambiar la forma racional dada originalmente por otra equivalente en donde sí se pueda realizar el proceso de sustitución. Para mayor detalle en estos procesos, le invito a revisar el video de límites por racionalización. En este recurso se proponen sendos ejercicios desarrollados sobre la racionalización de expresiones racionales, luego de lo cual se puede aplicar sustitución y hallar el límite de la función.

límites por racionalización

1.4. Continuidad y límites laterales o unilaterales

Estimado estudiante, luego de conocer la definición precisa de límite estamos capacitados para estudiar algunos casos especiales, pero previamente, analicemos la continuidad de una función, término relacionado con el concepto común: un proceso continuo, llevado a cabo gradualmente, sin cambios bruscos o interrupciones.

¿Cuándo una función es continua?

En el siguiente recurso usted podrá trabajar dos conceptos:

1. Cuándo una **función *f* es continua en un punto c.**
2. Cuándo una **función *f* es continua en un intervalo abierto (a, b).**

La continuidad y los límites

Luego de su trabajo interactivo usted interiorizó los conceptos y condiciones para la continuidad de una función, lo cual lo aplicaremos a continuación en los ejemplos ilustrativos siguientes:

Ejemplo ilustrativo 5

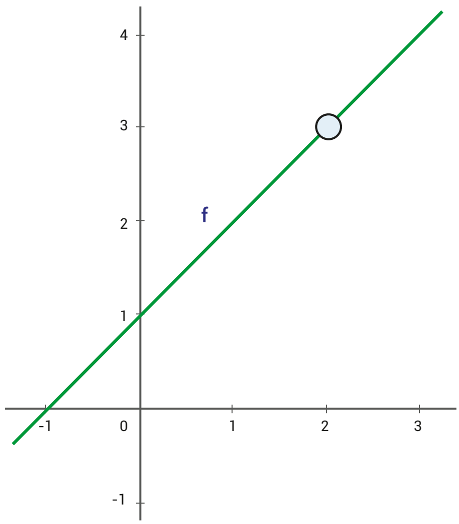
Analicemos la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$; b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$; c) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 1 & si\ x = 2 \end{cases}$; d) $j(x) = [\![x]\!]$

Análisis de la función *f.* Primero graficamos la función y procedemos a identificar las condiciones para su continuidad.

Figura 7.

Gráfica de la función f



Nota. Construcción propia en GeoGebra

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$$

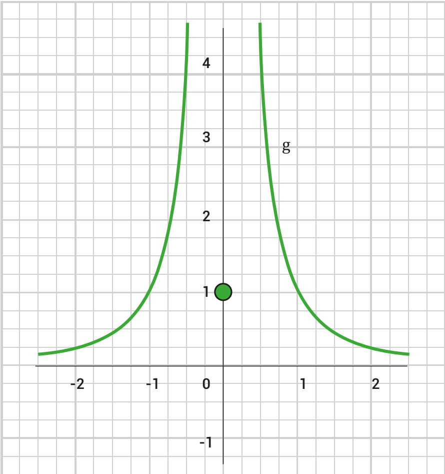
El dominio de esta función *f* lo constituyen todos los números reales excepto x = 2.

Al observar el dibujo de *f* identificamos en la gráfica que f(2) no está definido, por lo que f es discontinua en x = 2.

Análisis de la función *g*. Primero graficamos la función y procedemos a identificar las condiciones para su continuidad.

Figura 8.

Gráfica de la función g



Nota: Construcción propia en GeoGebra

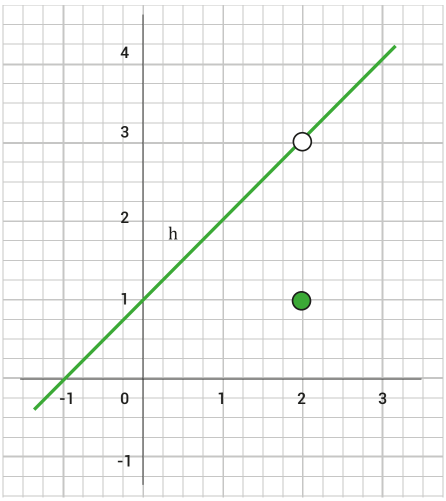
$$g(x) = \{\frac{1}{x^2}\ si\ x \neq 0\ 1\quad si\ x = 0$$

El dominio de esta función *g* lo constituyen todos los números reales, lo cual se puede corroborar en la gráfica de la función pero. Y, aunque el $\frac{1}{x^2}$ existe, pero al no ser igual a *f(0)*, se puede afirmar que la función *g* es discontinua en x = 0.

Análisis de la función h**.** Primero graficamos la función y procedemos a identificar las condiciones para su continuidad.

Figura 9.

Gráfica de la función h discontinua en un punto



Nota: Construcción propia en GeoGebra

$$h(x) = \{\frac{x^2-x-2}{x-2} si\ x \neq 2\ 1\qquad si\ x = 2$$

El dominio de esta función *h* lo constituyen todos los números reales, aunque en la primera ramificación no se define para x = 2, sí se define en la segunda parte, lo cual se comprueba en el gráfico de la izquierda. Ahora, calculemos *h*(*x*) y comparemos con *f*(2) = 1:

$$h(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} =$$

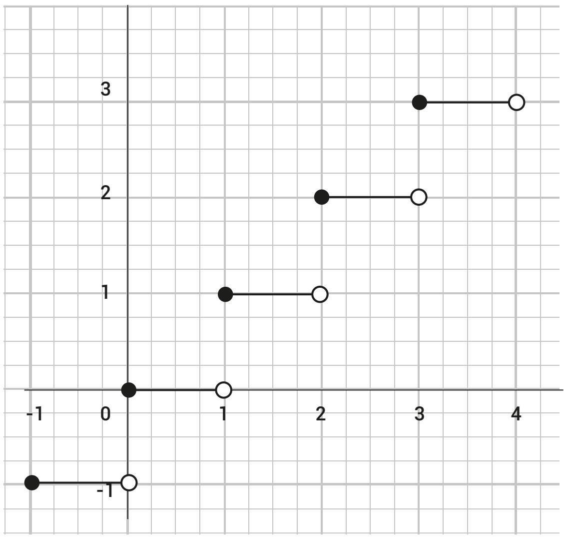
= (x+1) = 3

Si observamos *h(x)* ≠ *f(2)* por lo que, podemos afirmar que: *h* **no es continua en** x = 2

Análisis de la función *j.* Primero graficamos la función y procedemos a identificar las condiciones para su continuidad.

Figura 10.

Gráfica de la función j



$j(x) = [\![x]\!]$

La función conocida como parte entera tiene discontinuidades porque el $[\![x]\!]$ no existe si n es un entero.

En este caso especial, se observa una discontinuidad de salto, porque la función "salta" de un entero a otro.

Nota. Construcción propia en GeoGebra

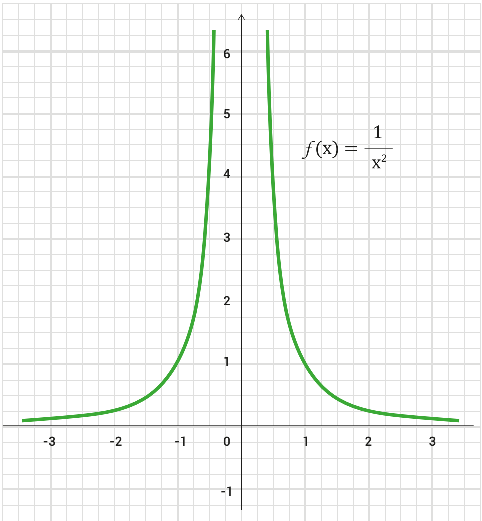
1.5. Límites infinitos

¿A qué se llama límite infinito?

Cuando en una función *f* , el valor de la ordenada f(x) crece o decrece sin cota o sin límite cuando *x* tiende a cierto valor *c*, se llama límite infinito.

Figura 11.

Gráfica de la función con límite



Nota. Construcción propia en GeoGebra

El gráfico de la izquierda corresponde a la función *f*, en donde se observa con claridad que, las ordenadas o valores de *f(x)* crecen sin límite cuando la abscisa *x* tiende a 0, tanto por la izquierda como por la derecha, lo cual se puede comprobar en la siguiente tabla:

Tabla 2.

Valores de f(x) crecen al infinito

Por la izquierda		Por la derecha	
x	f(x)	X	f(x)
-1	1	-1	1
-0,5	4	-0,5	4
-0,1	100	-0,1	100
-0,001	10000	-0,001	10000
-0,0001	1000000	-0,0001	1000000

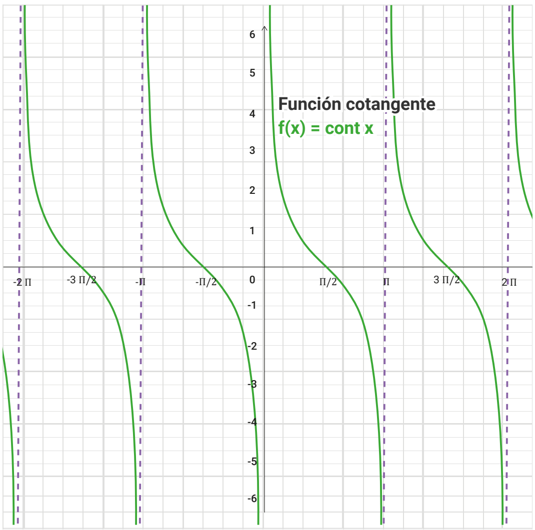
Nota. Construcción propia

En la tabla observamos que las imágenes (ordenadas) *f(x)* crecen sin límite y no se acercan a ningún valor real, lo cual se comprueba en la gráfica, en donde se puede distinguir que, cuando los valores de *x* se acercan a cero, las imágenes crecen sin límite y no se acercan a ningún número real, por lo tanto, el límite no existe en los números reales y se puede escribir: $\frac{1}{x^2}$ no existe como un número real. Esta situación de la inexistencia del límite cuando las imágenes crecen indefinidamente y tienden al infinito nos lleva a escribir de la siguiente manera: $\frac{1}{x^2} = \infty$. Eso no quiere decir que el límite exista, más bien, ese infinito es la razón de la inexistencia del límite, pues el infinito en este caso no es un número real.

Asíntotas verticales

Cuando se observan en una gráfica límites infinitos, estas rectas se denomina asíntotas verticales de dicha gráfica.

Figura 12.
Gráfica de una función con asíntotas verticales



En la gráfica de la función cotangente, en donde se producen algunos límites infinitos, se puede observar también que esta función tiene infinitas asíntotas verticales.

En la función cotangente *f(x) = cot x*, las asíntotas verticales aparecen cada $x = n\pi$, siendo n un número entero.

Nota. Construcción propia en GeoGebra

¿Cómo se determina una asíntota vertical?

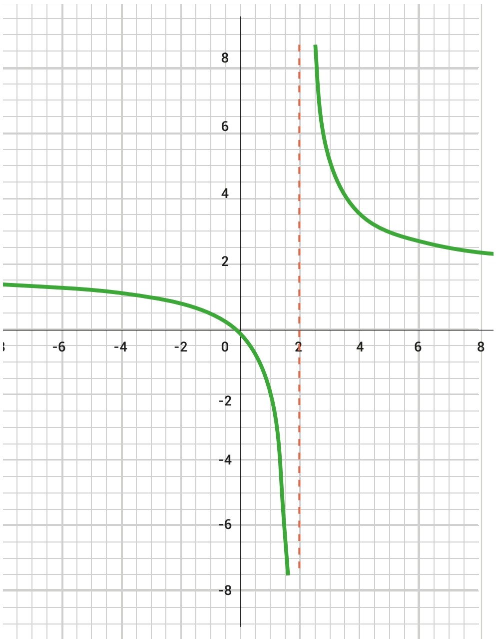
Si la función racional es de la forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ puede tener una asíntota vertical. Para su cálculo, primero se debe verificar que haya un número *c* que cumpla *g (c) ≠ 0*. Luego, se hace *h(x) = 0,* y se determina el valor o valores de la ecuación asíntota vertical.

Les invito a profundizar su aprendizaje mediante la revisión del siguiente ejemplo:

Ejemplo ilustrativo 6

Determinemos todas las asíntotas verticales de la gráfica de $f(x) = \frac{2x}{x-2}$.

Figura 13.
Gráfica de la función con asíntota vertical *x* = 0



Nota. Construcción propia en GeoGebra

En la gráfica de esta función $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ se observa que se produce un límite + ∞ cuando *x = 2* se acerca por la derecha y -∞ cuando se acerca a *x = 2* por la izquierda. Es decir, el límite no existe en los números reales y se puede escribir $\frac{2x}{x-2} = \infty$, en consecuencia, en este punto se tiene una asíntota vertical. Para su cálculo verificamos que el numerador es distinto de cero cuando x = 2.

Luego, si hacemos x - 2 = 0 podemos despejar x y hallar la wasíntota vertical.

Solución: la asíntota vertical se produce en x = 2, lo que me permite asegurar que la ecuación de la asíntota vertical es: x - 2 = 0.

Recursos didácticos

- Para profundizar el análisis en el cálculo de límites, continuidad y límites infinitos, sugiero que revise estos temas en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 59 en donde se explican con claridad definiciones, teoremas y propiedades de los conceptos, así como se desarrollan sendos ejemplos ilustrativos de aplicación. El estudio de estos temas debe complementarse con el desarrollo suficiente de ejercicios propuestas al final de cada sección.

- Es conveniente también que, estudie el video Cálculo de límites, en donde se explica de forma muy didáctica y concreta, la aplicación de las leyes de los límites en algunos casos.

Cálculo de límites

- También estudie el video continuidad de una función, en donde se explica primero, la definición de continuidad y luego, los algoritmos para desarrollar límites laterales o unilaterales.

Continuidad de una función

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta segunda semana se ha estudiado el cálculo de límites, la continuidad y límites infinitos, la invitación para que desarrolle los ejercicios y problemas que se proponen a continuación y compruebe su resultado experimentando con la aplicación GeoGebra:

- Determine el valor de los límites de las funciones:

$$(2x^2+3)\ ;\ \frac{3x}{\sqrt{x+6}}\ ;\ \frac{\sqrt{x+2}}{x-4}$$

- Calcule el límite (si existe) de la función trigonométrica:

$$\frac{3(1-\cos\cos x)}{x}\ ;\ \frac{\cos\cos x}{\cot\cot x}\ ;\ \frac{1-\tan\tan x}{sen\ x-\cos\cos x}$$

- Halle el límite (si existe). Si no existe, explique el por qué.

$$\frac{|x-10|}{x-10}\ ;\ (2-[\![-x]\!]$$

- Determine los valores de x (si existe alguno) en los que f no es continua. ¿Cuáles discontinuidades son evitables o removibles?

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1};\ g(x)=\{x,\quad si\ x\leq 1\ x^2\quad si\ \ x>1$$

- Encuentre las asíntotas verticales (si las hay) dela gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-2-2};\ g(x) = \frac{x^2-2x-15}{x^3-5x^2+x-5}$$

- Resuelva: De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa *m* de una partícula depende de su velocidad *v*; es decir $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$, donde m_o es la masa cuando la partícula está en reposo y *c* es la velocidad de la luz. Calcular el límite de la masa cuando *v* tiende a *c*

Con el desarrollo de las seis actividades recomendadas, usted pudo reforzar los aprendizajes de los límites, la continuidad y límites infinitos, aplicando definiciones, propiedades y teoremas en el desarrollo de ejercicios y resolución de problemas de la vida real.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta segunda semana en donde se ha concluido con el estudio de los límites y la continuidad, conceptualizando los principales conceptos y aplicando las principales propiedades en la resolución de problemas, estamos capacitados para emprender en el concepto de derivación, pero antes desarrollemos la autoevaluación de la unidad estudiada.

Autoevaluación 1

Seleccione verdadero o falso en las siguientes proposiciones.

1. ( ) En la técnica de cancelación para hallar el límite de una función racional, en donde el denominador podría hacerse 0, se obtienen factores y se procede a la cancelación de alguno de ellos, logrando de esta manera, una función equivalente pero válida para realizar la sustitución directa.

2. ( ) Una función *f* es continua en *c* si satisface las tres condiciones siguientes: 1. *f(c)* está definida; 2. *f(x)* existe; *f(x)* = *f(c)*.

En las siguientes preguntas identifique la alternativa correcta.

3. El límite de la función *f* definida por $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 3x + 2}$ cuando x tiende a 2 que se puede escribir como $\sqrt[3]{3x^2 - 3x + 2}$, es:

   a. 0.
   b. 2.
   c. 4.

4. Considerando que la función de posición *s(t)* = $-16t^2 + 500$ ofrece la altura (en pies) de un objeto que lleva cayendo *t* segundos desde una altura de 500 pies. La velocidad en el instante *t* = *a* segundos está dada por $\frac{s(a)-s(t)}{a-t}$. Entonces, si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies. La velocidad a la que estará cayendo luego de 2 segundos, es:

   a. -64 pies/s (rapidez = 64 pies/s).
   b. –35 pies/s (rapidez = 35 pies/s).
   c. -96 pies/s (rapidez = -96 pies/s).

5. La constante *a,* tales que la función sea continua en toda la recta real, para la función $f(x) = \{x^3, \; si \; x \leq 2 \; ax^2, \; si \; x > 2$, es:

a. a = 2.
b. a = 4.
c. a = 1.

6. Describa el o los intervalos en los que la función es continua:
$f(x) = \{\frac{x^2-1}{x-1}, \quad x \neq 1 \;\; 2, \qquad x = 1$

a. (-∞, ∞).
b. (-10,5).
c. (5, 10).

7. Las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función:
$f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$, son:

a. No hay asíntotas verticales.
b. x = 1.
c. x = -1.

8. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y determinar el límite lateral: $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$; *f(x)*

9. Considerar $f(x) = \frac{secsec\,(x)-1}{x^2}$ y desarrollar lo siguiente:

a. Determinar el dominio de *f.*

b. Utilizar una herramienta de graficación para hacer la representación de *f*. ¿Resulta evidente el dominio de *f* a partir de la gráfica? Si no es así, explicar por qué.

c. Utilizar la gráfica f para calcular el *f(x)*

10. **Resuelva el problema de medio ambiente:** Una central térmica quema carbón para generar energía eléctrica. El costo *C* en dólares, de eliminar *p*% de las sustancias contaminantes del aire en sus emisiones de humo es $C = \frac{80000p}{100-p}, 0 \leq p \leq 100.$ Calcular cuánto cuesta eliminar: a) 15 %, b) 50 % y c) 90 % de los contaminantes. d) Encontrar el límite de *c* cuando $p \to 100^{-}$

a. $ 14 117,65.
b. $ 80 000,00.
c. $ 720 000,00.
d. ∞.

Ir al solucionario

1 Bimestre

Unidad 2. Derivación

Uno de los dos grandes conceptos estudiados en este curso de Cálculo corresponde a la derivación, por su importancia en la formación disciplinar de usted estimado estudiante, abarcaremos todos los temas correspondientes a este componente de la matemática, tales como:

- La derivada y el problema de la recta tangente
- Reglas básicas de derivación y razones de cambio
- Reglas del producto, del cociente y derivadas de orden superior
- La regla de la cadena
- Derivación implícita
- Razones de cambio relacionadas

Estimado estudiante, antes de ingresar en el mundo fascinante del estudio de la derivación, vale cuestionarnos ¿Cuáles son las razones por las cuáles se debe estudiar la derivación? ¿En dónde pueden aplicarse este concepto? ¿Tiene aplicaciones en la vida real? Para contestarnos estas inquietudes ¡Adelante, iniciemos con el estudio!

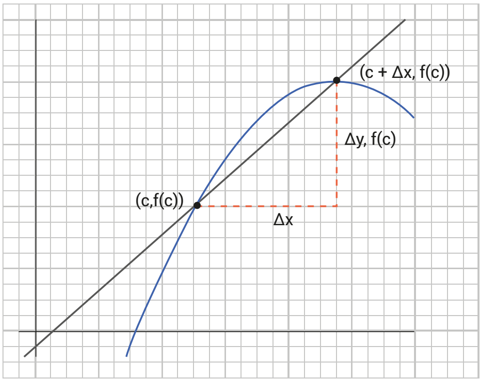
2.1. La derivada y el problema de la recta tangente

Estimados estudiantes, hace aproximadamente 370 años se desarrollaron los dos grandes conceptos del Cálculo: integración y derivación, antes de eso, se venía estudiando ya algunos problemas que se podían interpretar mediante conceptos de límite. Quizás el más importante de estos problemas, es aquel referido a la interpretación de la recta tangente a una curva, lo cual, en esencia, se reduce a determinar la pendiente de la recta a partir de dos puntos conocidos, sin embargo, esto se complica cuando se cuenta con un solo punto de la curva. Aquí es donde entra el concepto de derivada.

Recordemos que la pendiente de una recta a partir de dos puntos conocidos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se calcula con la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Apliquemos esto en el siguiente gráfico:

Figura 14.

Interpretación geométrica del concepto de derivada



Nota. Construcción propia en GeoGebra

Si en el gráfico propuesto aplicamos la fórmula de la pendiente, a la recta secante, tenemos:

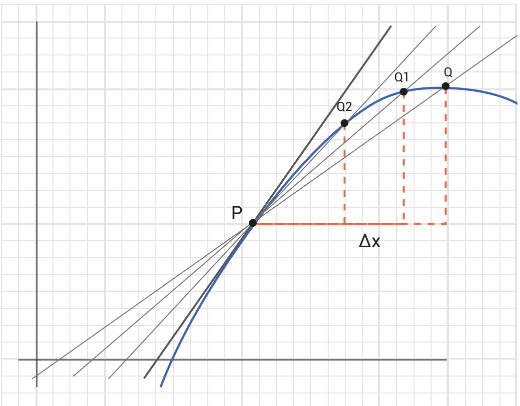
$$m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{(c+\Delta x) - c}$$

En esta fórmula, el numerador es igual al incremento en y (Δy), mientras que, el denominador es igual al incremento en *x* (Δx).

El problema de la tangente y que lo soluciona el cálculo está ligado a que, conforme un punto se acerca al otro punto, como se ilustra en el gráfico siguiente, la recta secante se convierte en la recta tangente a la curva en un punto.

Figura 15.

Límite de la secante es la tangente



Nota. Construcción propia en Geogebra

En el gráfico de la izquierda se observa cómo el punto Q se va acercando al punto P y que, mientras más se acerca, el incremento en *x* (Δx) disminuye y cuando se hace cero, la secante (color negro) se convierte en la tangente a la curva.

Esta situación de la tangente, se puede relacionar con la fórmula de la pendiente mediante un límite, de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

Entonces, la pendiente de la tangente en un punto de una curva es igual al límite de sus incrementos cuando el incremento en x (Δx) tiende a cero. Este aspecto es fundamental y crucial en el estudio del cálculo porque este límite utilizado para definir la pendiente de una curva en un punto dado, se puede aplicar en la nueva operación matemática llamada: **derivación**.

Definición de derivada

La derivada de la función *f* en *x* está dada por

$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ siempre que exista ese límite. Además, para todos los *x* para los que existe el límite, la derivada *f* es una función de x.

Ejemplo ilustrativo 7

Calculemos la derivada de $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x$.

Aplicamos la definición de derivada, poniendo atención al momento de reemplazar el valor de la variable independiente:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4}{3}(x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x) - \left(\frac{4}{3}x^3 - 2x\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\frac{4}{3}[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - 2x - 2(\Delta x) - \frac{4}{3}x^3 + 2x}{\Delta x}$$

$$\frac{\frac{4}{3}x^3 + 4x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + \frac{4}{3}(\Delta x)^3 - 2x - 2(\Delta x) - \frac{4}{3}x^3 + 2x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta x[4x^2 + \frac{9}{4}x\Delta x + \frac{3}{4}(\Delta x)^2 - 2]}{\Delta x}$$

$$[4x^2 + \frac{9}{4}x\Delta x + \frac{3}{4}(\Delta x)^2 - 2]$$

$f'(x) = 4x^2 - 2$ **Sol.**

2.2. Reglas básicas de derivación y razones de cambio

En el tema anterior se definió a la derivada de una función como el límite de la función cuando el incremento de x (Δx) tiende a cero. En este apartado se sistematizan algunas reglas básicas para calcular directamente la derivada de una función. Antes de su estudio vale aclarar que, la simbología de la derivada de una función se puede expresar de algunas formas, entre las más conocidas tenemos las siguientes:

Si $f(x) = 3x^4 - 2x^3$ entonces, la derivada de la función *f* se puede denotar o simbolizar de las siguientes maneras: $f'(x)$; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx}(3x^4 - 2x^3)$

Ahora, para que usted estimado estudiante, logre experticia en la aplicación de las reglas de derivación, es necesario que desarrolle la mayor cantidad de ejercicios. Antes, sugiero revise dichas reglas de derivación, participando de el siguiente recurso :

Regla de la derivación

Ahora que ha podido interiorizar las reglas de la derivación, usted está preparado para aplicarlas, antes le invito para que analice los ejemplos desarrollados.

Ejemplo ilustrativo 8

Encontremos la derivada de la función en donde hay sumas, restas, potencias y constantes: $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 80$.

$$f'(x) = \frac{3}{5} \cdot 5x^4 - \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0$$

$f'(x) = 3x^4 - x^3$ **Sol.**

Ejemplo ilustrativo 9

Encontremos la derivada de la función en donde hay sumas, restas, constantes, senos y cosenos: $f(x) = 2\ sen\ x + 2\ cos\ cos\ x - \frac{1}{4}x^4 + 0.5x^2$.

$$f'(x) = 2\ cos\ cos\ x\ + 2(-sen\ x) - \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0.5(2x)$$

$f'(x) = 2\ cos\ cos\ x - 2sen\ x - x^3 + x$ **Sol.**

Recursos didácticos

- Estimado estudiante, para profundizar su experticia en la aplicación de las reglas de la derivación, sugiero que analice los ejemplos ilustrativos que se proponen en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 96 en donde se explican con claridad definiciones, teoremas y algoritmos relacionados a la aplicación de las reglas de derivación. Su aprendizaje debe reforzarse con el desarrollo de un número suficiente de los ejercicios y problemas propuestos.

- Es conveniente también que, estudie el video: reglas básicas de derivación, en donde se explica de forma muy didáctica y concreta, los principales teoremas básicos para encontrar la derivada de un a función.

  Reglas básicas de derivación

- También, estudie el video sobre: continuidad de una función, en donde se explica, primero la aplicación de la regla para derivación de funciones potencia y luego la derivada de funciones que contienen el seno y el coseno.

  Continuidad de una función

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta tercera semana se ha estudiado las reglas básicas para encontrar directamente la derivada de una función, entonces, usted debe reforzar sus aprendizajes, desarrollando actividades que le preparen para luego desarrollar las distintas actividades calificadas y prepararse para las evaluaciones parciales y presenciales, como las siguientes:

- Encuentre la derivada de la función mediante el proceso de límite: $f(x) = 2 - x^2$.

- Aplique las reglas básicas de la derivación y halle la derivada de las siguientes funciones: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8$; $g(x) = \sqrt[4]{x^3}$; $h(x) = \frac{5}{2x^3} + 2\, cos\, cos\, x$.

- Encuentre la pendiente de la gráfica de la función en el punto indicado. Utilice la aplicación GeoGebra para verificar el resultado: $f(x) = 3(5-x)^2$; $(5,0)$

- Determine el valor de k para que la recta dada sea tangente a la gráfica de la función: $f(x) = kx^3$; Recta: $y = x + 4$.

- Halle la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto (0, 1) y es tangente a la recta $y = x - 1$ en el punto (1, 0).

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas, usted pudo reforzar los aprendizajes de la derivación mediante límites y la aplicación de las reglas básicas de derivación, aplicando definiciones, propiedades y teoremas en el desarrollo de ejercicios y resolución de problemas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta tercera semana, en donde se ha concluido con el estudio de la derivación definida con límites y la aplicación de las reglas básicas de derivadas, estamos listos para profundizar y aprender las reglas para derivar el producto de funciones, el cociente y las derivadas de orden superior.

Semana 4

2.3. Reglas del producto, del cociente y derivadas de orden superior

Estimado estudiante, en esta cuarta semana iniciamos con el estudio de dos reglas de derivación muy importantes: la regla del producto de funciones y luego, la regla del cociente de dos funciones. Los teoremas que respaldan cada una de las reglas, se encuentran muy bien explicados en el texto básico, además, allí encontrará una variedad suficiente de ejemplos muy bien ilustrados.

Luego de ese trabajo conceptual, en donde se parte de las definiciones, teoremas y luego se trabaja con ejemplos muy bien ilustrados, usted podrá ingresar e interactuar con el recurso de referida a las fórmulas para derivación, en donde, se resumen las reglas en el lenguaje verbal, simbólico y se dispone de sendos ejemplos.

Reglas fundamentales de la derivación

Luego de este ejercicio de gamificación, la invitación para que analicemos la manera de derivar algunos ejercicios de la multiplicación y del cociente de funciones, con lo cual lograremos interiorizar algunos algoritmos importantes.

Ejemplo ilustrativo 10

Encontremos la derivada del producto de funciones:

$$\frac{d}{dx}[\left(\frac{1}{3}x^3-2x\right)(2x-4]) \;=\left(\frac{1}{3}x^3-2x\right)\frac{d}{dx}(2x-4)+(2x-4)\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^3-2x)$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-2x\right)(2)+(2x-4)(x^2-2)$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^3-4x\right)+(2x^3-4x-4x^2+8)$$

$$=\frac{2}{3}x^3-4x+2x^3-4x-4x^2+8$$

$$=\frac{8}{3}x^3-4x^2-8x+8 \text{ Sol.}$$

Ejemplo ilustrativo 11

Determinemos la derivada del cociente de funciones:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-2x}{3x-1}\right] = \frac{(3x-1)\frac{d}{dx}(x^2-2x)-(x^2-2x)\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}$$

$$=\frac{(3x-1)(2x-2)-(x^2-2x)(3)}{(3x-1)^2}$$

$$=\frac{6x^2-6x-2x+2-3x^2+6x}{(3x-1)^2}$$

$$=\frac{3x^2-2x+2}{(3x-1)^2} \text{ Sol.}$$

2.4. La regla de la cadena

En el estudio matemático con mucha frecuencia nos encontrarnos con funciones compuestas, por ejemplo: $h(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 2x}$ es una función compuesta por: $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$ y *g(x)* = 3x² -2*x* , lo cual se escribe *(fog) = f' (g(x))*.

Ejemplo ilustrativo 12

Determinemos las funciones que son parte de las siguientes funciones compuestas:

Si $f(g(x)) = \sqrt{x^3 - 2x}$ entonces $f(x) = \sqrt{g(x)}$ y $g(x) = x^3 - 2x$

Si $h(f(x)) = senx^3$ entonces $h(x) = sen\ f(x)$ y $f(x) = x^3$

Si $g(h(x)) = tan^2 x$ entonces $g(x) = (h(x))^2$ y $h(x)$ $=tan\ tan\ x$

Para estos casos de funciones y que por cierto son muy frecuentes en nuestro estudio, se debe aplicar el teorema regla de la cadena, el cual aparece propuesto en el texto básico en la página 129, para favorecer su aprendizaje, sugiero participe del siguiente recurso propuestos con la definición de este valioso teorema.

Teorema de la Regla de la Cadena

Ejemplo ilustrativo 13

Apliquemos la regla de la cadena para determinar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x}$.

$f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x}$ *función dada*

$f(x) = (\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x)^{1/2}$

escribimos la función como la potencia

La función compuesta *f(g(x))* se puede interpretar :

$f(g(x)) = (\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x)^{1/2}$, en donde la función g(x) es:

$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x$.

Entonces, aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x)$$ *aplicamos la regla de la cadena*

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^3 - 2x^2 - 5)$$ *derivamos la función g(x)*

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 2x^2 - 5)}{2(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x)^{\frac{1}{2}}}$$

escribimos con exponentes positivos

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 2x^2 - 5)}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x}}$$ **Sol**

Ejemplo ilustrativo 14

Hallemos la derivada de la función $f(x) = sen(\frac{5}{3}x^3)$.

En la función compuesta dada podemos identificar *f(g(x) = sen (g(x))* siendo $g(x) = \frac{5}{3}x^3$. Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$f(x) = sen(\frac{5}{3}x^3)$$ *función dada*

$$f'(x) = cos(\frac{5}{3}x^3) \cdot \frac{d}{dx}(\frac{5}{3}x^3)$$ *aplicamos la regla de la cadena*

$$f'(x) = cos(\frac{5}{3}x^3) \cdot (5x^2)$$ *derivamos la función g(x)*

$$f'(x) = 5x^2 cos(\frac{5}{3}x^3)$$ **Sol.**

Ejemplo ilustrativo 15

Dibujemos la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{(2-x^2)^2}$ comparando con la gráfica de *f′ (x)* y luego, escribamos la o las intersecciones de *f′(x)* y el análisis sobre los límites de esta función derivada.

Primero hallamos la derivada de la función *f′(x)* dada:

$f(x) = \sqrt[3]{(2-x^2)^2}$	*función dada*
$f(x) = (2-x^2)^{2/3}$	*escribimos la función sin el radical*
$f'(x) = \frac{2}{3}(2-x^2)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{d}{dx}(2-x^2)$	*derivamos aplicando la regla de la cadena*
$f'(x) = \frac{2}{3}(2-x^2)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-2x)$	*nuevamente aplicamos regla de la cadena*
$f'(x) = \frac{-4x}{3(2-x^2)^{1/3}}$	*operando y poniendo exponentes positivos*
$f'(x) = \frac{-4x(2-x^2)^{2/3}}{3(2-x^2)}$	*racionalizando y operando*

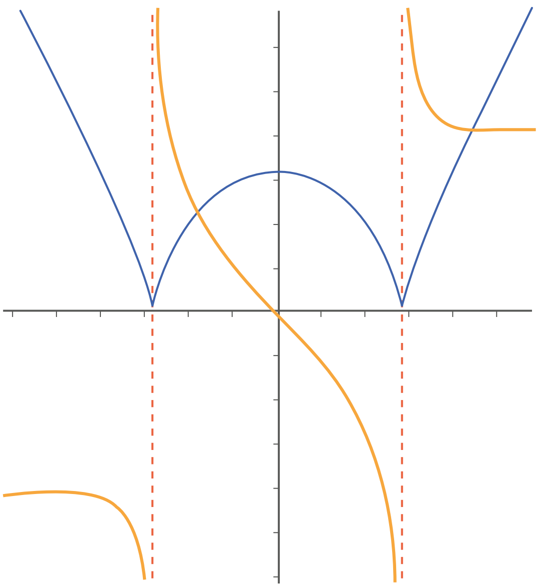
$$f'(x) = \frac{-4x(2-x^2)^{2/3}}{3(2-x^2)}$$ **Sol.**

Ahora, aprovechamos GeoGebra y graficamos las funciones *f′(x)* y *f′(x):*

1 Bimestre

Figura 16.

Gráfica de una función y su respectiva derivada



Nota. Construcción propia en Geogebra

La función dada $f(x) = \sqrt[3]{(2-x^2)^2}$ la graficamos en azul. Mientras que a la función derivada $f'(x) = \frac{-4x(2-x^2)^{2/3}}{3(2-x^2)}$ la pintamos de color naranja, observando que no está definida en los puntos $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$ en donde se producen sendas asíntotas verticales.

¿Cuál es el dominio de f'(*x*)?

El dominio de la función derivada es el conjunto de los números reales excepto los puntos en donde la función derivada no está definida: Dominio = R - {-√2, √2}.

Recursos didácticos

- Estimado estudiante, para profundizar su experticia en la aplicación de las reglas de la derivada de un producto y de un cociente de funciones, y la regla de la cadena, sugiero que analice los ejemplos ilustrativos y las brillantes explicaciones que se proponen en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 129 en donde se explican con claridad definiciones, teoremas y algoritmos relacionados a la aplicación de las reglas más importantes para la derivación. Su aprendizaje debe reforzarse con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios y problemas.

- Es conveniente también que, estudie el video: regla de la cadena, en donde se explica de forma didáctica y concreta, la función compuesta y la aplicación de la regla de la cadena en ejercicios prácticos.

  Regla de la cadena

- Revise adicional el video: derivadas de las funciones seno y coseno.

  Derivadas de las funciones seno y coseno

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego del estudio de los contenidos previstos para la cuarta semana, en donde se analizaron las dos reglas más importantes para la derivación, así como el teorema de la regla de la cadena fundamental para nuestro curso, es muy importante estimado amigo que, refuerce los aprendizajes logrados desarrollando actividades que le preparen para luego trabajar distintas actividades calificadas y prepararse de la mejor manera para las evaluaciones parciales y presenciales, tales como:

- Utilice la regla de la derivada del producto de funciones y encuentre $\frac{d}{dx}(2x^4 - 3x)^3(2x^2 - 2)$

- Aplique la derivación del cociente de funciones y encuentre el valor correspondiente a: $\frac{d}{dx}\frac{(2x-1)^2}{(3-2x)^3}$

- Mediante la aplicación de la regla de la cadena derive las siguientes funciones compuestas: $f(x)= (2x^2 - x^3)^2$; $g(x) = sec^2 (2x^3)$; $h(x) = 3\ sec^2 (\pi x - 1)$

- Determine la derivada de la función en el punto indicado, utilizando una herramienta de graficación para verificar los resultados: $y = \frac{1}{x} + \sqrt{cos\ cos\ x}$; Punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{\pi})$.

- **Resuelva:** Un péndulo de 15 cm se mueve según la ecuación $\theta = 0{,}2\ cos\ cos\ 8t$, donde θ es el desplazamiento angular de la vertical en radianes y t es el tiempo en segundos. Calcular el máximo desplazamiento angular y la razón de cambio de θ cuando $t = 3$ segundos.

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas propuestas, usted pudo reforzar los aprendizajes para derivar funciones mediante las reglas del producto y del cociente, así como aplicar la regla de la cadena en la derivación de funciones compuestas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta cuarta semana, en donde se ha concluido con el estudio de la derivación y la regla de la cadena, estamos listos para analizar y distinguir entre las funciones implícitas y explícitas y desarrollar procesos de derivación.

Semana 5

Estimado estudiante, en la quinta semana nos corresponde estudiar dos temas muy importantes: la derivación implícita y las razones de cambio relacionadas. En el primer caso, primero aprenderemos a distinguir entre funciones explícitas e implícitas y después, cómo hallar la derivada de una función por derivación implícita. Mientras que, en el segundo tema, se resuelven algunos problemas de la vida real con razones de cambio relacionadas.

2.5. Derivación implícita

Estimado estudiante, iniciemos puntualizando que hasta ahora se simbolizaron a las funciones de manera explícita, por ejemplo: $f(x) = x^2 -2x + 1$ o simplemente $y = 3x^2 - 9$, entonces, decimos que la variable dependiente *y* está escrita explícitamente como función de la variable independiente *x*.

Sin embargo, en algunas ocasiones, nos encontraremos con otro tipo de funciones, en donde es un tanto complicado despejar la variable *y*, por ejemplo: $2x^2 - 4y - 3y = 10$. En estos casos, el proceso de hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ se convierte un tanto difícil, es por esa razón que, aparece la derivación implícita.

Para realizar esta forma de derivación, se procede con normalidad cuando se trata de términos con la variable *x*, pero en aquellos términos que contienen la variable *y*, se debe aplicar la regla de la cadena, dejando indicado $\frac{dy}{dx}$.

Ejemplo ilustrativo 16

Derivemos respecto de la variable x, las siguientes funciones:

c. $$\frac{d}{dx}\left[3x^2-\frac{2}{5}y^5\right]=\frac{d}{dx}[3x^2]-\frac{d}{dx}[\frac{2}{5}y^5]$$

$$=3\frac{d}{dx}[x^2]-\frac{2}{5}\frac{d}{dx}[y^5]$$

$$=3.2x-\frac{2}{5}\cdot 5y^4\frac{dy}{dx}$$

$$=6x-2y^4\frac{dy}{dx}\ \textbf{Sol.}$$

d. $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3y^2\right]=\frac{d}{dx}[\frac{1}{4}x^4]-\frac{d}{dx}[\frac{2}{3}x^3y^2]$$

$$=\frac{d}{dx}[\frac{1}{4}x^4]-\frac{d}{dx}[\frac{2}{3}x^3y^2]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4x^3-\frac{2}{3}[x^3\cdot\frac{d}{dx}(y^2)+y^2\cdot\frac{d}{dx}(x^3)]$$

$$=x^3-\frac{2}{3}[x^3\cdot 2y\frac{dy}{dx}+y^2\cdot 3x^2]$$

$$=x^3-\frac{4}{3}x^3y\frac{dy}{dx}-2x^2y^2\ \textbf{Sol.}$$

2.6. Razones de cambio relacionadas

La derivación implícita tiene gran aplicación en la resolución de problemas referidos a las razones de cambio relacionadas, pero ¿qué son las razones de cambio relacionadas? Para contestar esta inquietud, vale aclarar que, en la vida cotidiana, existen muchos pares de variables relacionadas entre sí que, cuando una de ellas cambia en función del tiempo transcurrido la otra variable también lo hace, en estos casos, hablamos de *razones de cambio relacionadas*. Por esto, se dice que, las razones de cambio respecto al tiempo, están relacionadas entre sí y toman el nombre de *razones de cambio relacionadas.*

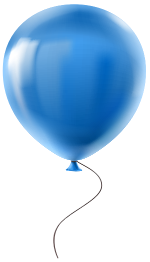
Le invito a profundizar el aprendizaje mediante la revisión del siguiente ejemplo:

Ejemplos ilustrativos 17

Observemos algunos casos en donde se presentan razones de cambio relacionadas.

a. Cuando se infla un globo esférico, el radio de la esfera varía respecto al tiempo transcurrido y también varía el volumen de la esfera respecto al tiempo. Aquí, se puede observar la razón de cambio relacionada del volumen respecto al radio.

Figura 17.
Globo esférico



Nota. vectorpocket | freepik.es

b. En el desplazamiento de una partícula, la velocidad de la partícula cambia respecto al tiempo y también varía su energía cinética respecto al tiempo. Aquí, se puede observar la razón de cambio relacionada de la energía cinética, respecto a la velocidad.

Figura 18.
Partículas

Nota. Ezume Images| shutterstock.com

c. Si en un lago en calma se deja caer una piedra se forman ondas circulares concéntricas, el radio del círculo exterior varía en función del tiempo y también el área del círculo varía en función del tiempo. Aquí, se puede observar la razón de cambio relacionada del radio respecto al área del círculo.

Figura 19.
Ondas en el agua

Nota. RikoBest | shutterstock.com

d. Si dos autos A y B viajan en distintas direcciones, la velocidad del auto A se modifica respecto al tiempo y también varía la velocidad del auto B respecto al tiempo. Aquí, se puede observar la razón de cambio relacionada entre las distancias que recorren los dos autos.

Otra de las aplicaciones importantes de la derivación implícita se refiere a encontrar razones de cambio de dos o más variables que se encuentran relacionadas y que están cambiando en función de alguna otra variable. Observemos el siguiente ejemplo ilustrativo:

Ejemplo ilustrativo 18

Sabiendo que x e y son variables relacionadas en una función representada por $2xy = x^2 + 3y$, calculemos $\frac{dy}{dt}$ para x = 1 , sabiendo además que: $\frac{dx}{dt} = 2$ y y = 2 para x = .

Iniciamos, derivando ambos lados de la ecuación con respecto de la variable t, utilizando para esto la regla de la cadena.

$2xy = x^2 + 6y$ *ecuación original*

$$2(x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt}) = 2x\frac{dx}{dt} + 6\frac{dy}{dt}$$ *derivacion implícita respecto de t*

$$x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = x\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt}$$ *cancelamos 2 en los dos miembros*

$$1 \cdot \frac{dy}{dt} + 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2 + 3\frac{dy}{dt}$$ *reemplazamos los datos conocidos*

$\frac{dy}{dt} = 1$ **Sol.**

Para la resolución de problemas sobre *razones de cambio relacionadas* es importante que considere la estrategia a seguir, para eso le invito a participar en la siguiente actividad lúdica:

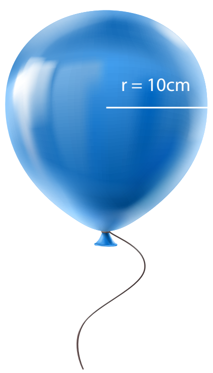
Resolución de problemas de razones de cambio relacionadas

Con la participación en la actividad lúdica propuesta, usted interiorizó la estrategia a seguir en la resolución de problemas con *razones de cambio relacionadas*

Ejemplo ilustrativo 19

Se infla un globo esférico y su volumen crece a razón de 200 cm^3/s. Determinemos, qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 20 cm.

Figura 20.
Globo esférico



Nota. Globo esférico. Adpatado de PartyCity.

La incógnita del problema es: La rapidez de incremento del radio cuando el diámetro es 20 cm.

$\frac{dr}{dt} = ?.$

La razón de incremento del volumen del globo es 200 cm^3/s: $\frac{dV}{dt} = 200\ \frac{cm^3}{s}$.

Planteamos la ecuación: El volumen de una esfera está dado por la siguiente fórmula: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Derivamos: aplicando la regla de la cadena.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi (10)^2} 200$$

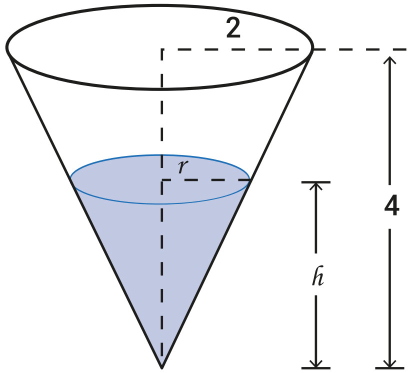
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi}$$

Sol. El radio del globo, cuando el diámetro es 20 cm, se incrementa a razón de 0,159 cm/s.

Ejemplo ilustrativo20

Un depósito de agua tiene la forma de un cono circular invertido. El radio de la base es de 4 m y la altura 8m. Si el agua se bombea hacia el depósito a razón de 5 m^3/min, hallemos la rapidez con la que sube el nivel del agua cuando la profundidad *h* es de 6 m.

Figura 21.
Depósito de agua



Nota. Construcción propia en Illustrator.

La incógnita del problema es: La rapidez con la cual sube el nivel del agua cuando la altura *h* es de 6 m: $\frac{dr}{dt} = ?$

Como se bombea el agua a razón de 5 m³/min, podemos afirmar que la razón de incremento del volumen del recipiente es: $\frac{dV}{dt} = 5\frac{cm^3}{s}$.

La fórmula del volumen de un cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, en donde el volumen está en función de dos variables.

Para expresar el volumen *V* en función de una sola variable, sólo en función de *h*, eliminamos *r*, aplicando semejanza de triángulos.

$\frac{r}{h} = \frac{4}{8}$ de donde tenemos que: $r = \frac{h}{2}$

Reemplazando en la fórmula del volumen se tiene que:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^2$$

Si ahora derivamos en los dos miembros aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi \cdot 36} \cdot 5$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{20}{\pi \cdot 36}$$

Sol. La rapidez con la cual sube el nivel del agua, cuando la altura *h* es de 6 m, es 0,177 m/min.

Recursos didácticos

- Para profundizar su aprendizaje en los procesos de la derivación implícita y en la aplicación para resolver problemas cotidianos referidos a las *razones de cambio* relacionadas, le solicito estimado estudiante que, de la manera más responsable característica de un estudiante UTPL, revise los teoremas, procesos, ejemplos ilustrativos y explicaciones acertadas que se proponen en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 140. Su aprendizaje debe reforzarse con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios y problemas propuestos al final de estos temas.

- Es conveniente también que, estudie el video: derivación implícita, en donde se explica de forma clara, la aplicación de la regla de la cadena parar derivar funciones en donde la variable dependiente no ha sido despejada.

Derivación implícita

Actividades de aprendizaje recomendadas

Después de estudiar los contenidos propuestos para esta quinta semana, en donde se analizó la derivación implícita y los problemas de aplicación de las razones de cambio relacionadas, es necesario estimado amigo que, refuerce los aprendizajes logrados, desarrollando actividades que le preparen para luego trabajar las actividades calificadas y prepararse de la mejor manera para las evaluaciones parciales y presenciales, como las siguientes:

- Encuentre dy/dx por medio de derivación implícita y calcule la derivada en el punto indicado: $(x^3 + y^3) = x^3 + y^3$; (-1, 1).

- Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia en el punto indicado. Utilice una herramienta de graficación para representar la ecuación, la recta tangente y la recta normal: $x^2 + y^2 = 25$; (4, 3); (-3, 4).

- Localice los puntos en los que la gráfica de la ecuación tiene recta tangente horizontal o vertical: $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$.

- **Volumen.** En una planta de arena y grava, la arena cae de una cinta transportadora creando un montículo de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montículo es de aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué razón cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?

- **Deportes:** Al caer una gota alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a un ritmo proporcional a su área superficial ($S = 4\pi r^2$). Demostrar que el radio de la gota decrece a ritmo constante.

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas propuestas, usted pudo reforzar los aprendizajes para la derivación implícita aplicando la regla de la cadena, así como aplicar la derivación implícita para resolver problemas de aplicación de razones de cambio relacionadas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de estudiar derivación implícita y sus problemas de aplicación con razones de cambio relacionadas, se ha concluido el estudio de la unidad derivación, por lo que, le invito mi estimado amigo para que, desarrolle la autoevaluación propuesta a continuación:

Autoevaluación 2

Seleccione verdadero o falso en las siguientes proposiciones.

1. ( ) Si $y = (1-x)^{1/2}$, entonces $y' = \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$.

2. ( ) Si *f(x) = sen*^{2}*(x)*, entonces *f'(x) = 2(sen2x)(cos cos 2x.*

3. ( ) La segunda derivada representa la razón de cambio de la primera.

En las siguientes preguntas identifique la alternativa correcta.

4. Aplicando la regla de la cadena se puede determinar que la derivada de y = 3x^2 sen x , es:

    a. 3*(x cos cos x*+2 *sen x).*
    b. 3*x (cos cos x* + 2 *sen x).*
    c. 3*(xx* + 2 *cos x).*

5. Un péndulo de 15 cm se mueve según la ecuación *θ = 0,2 cos cos 8t*, donde *θ*, es el desplazamiento angular de la vertical en radianes y *t* es el tiempo en segundos. El máximo desplazamiento angular y la razón de cambio de *θ* cuando *t = 3* segundos, es:

    a. 0,2 rad;1,45 rad/s.
    b. 0,4 rad; 2 rad/s.
    c. 2 rad; 4,25 rad/s.

6. El o los puntos en el intervalo *(0, 2π)* en donde la gráfica de *f(x) = 2 coss cos x + sen 2x* tiene una tangente horizontal es:

    a. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right).$
    b. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{5}, 0\right).$
    c. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right).$

7. La segunda derivada de la función $f(x) = \text{sen } x^2$ es:

   a. $2\ (\cos \cos x^2 - 2x^2 \text{ sen } x^2$.
   b. $(\cos \cos x^2 - x^2 \text{ sen } x^2)$.
   c. $(x^2 - 2x^2 \cos x^2)$.

8. La segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ en términos de *x* e *y*, de $x^2 - y^2 = 36$, es:

   a. $-\frac{36}{y^3}$.
   b. $-\frac{4}{y^2}$.
   c. $-\frac{x}{y^3}$.

En las siguientes preguntas resuelva el problema y anote su desarrollo.

9. **Desarrolle el problema sobre control de vuelo:** Un avión vuela en condiciones de aire en calma a una velocidad de 275 millas por hora. Si asciende con un ángulo de 18^0, calcular el ritmo al que está ganando altura.

10. **Resuelva y escriba el desarrollo del problema de la sombra en movimiento:** Se deja caer una pelota desde una altura de 20m, a una distancia de 12m de una lámpara. La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo, ¿A qué ritmo se está moviendo la sombra un segundo después de soltar la pelota?

Ir al solucionario

Unidad 3. Aplicaciones de la derivada

En esta parte del curso de Cálculo se discutirán diferentes aplicaciones de la derivada de una función, las cuales se dividen en tres grandes grupos: trazado de curvas, optimización y técnicas de aproximación, por esta razón los contenidos se detallan de la siguiente manera:

- Extremos en un intervalo
- El teorema de Rolle y el teorema del valor medio
- Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada
- Concavidad y el criterio de la segunda derivada
- Límites al infinito
- Análisis de gráficas
- Problemas de optimización
- Método de Newton
- Diferenciales

Estimado estudiante, en la sexta semana iniciamos con el estudio de la unidad de aplicaciones de la derivada, considerando en primer lugar los extremos de un intervalo, luego el teorema de Rolle y el teorema del valor medio y para finalizar las funciones crecientes y decrecientes en base al criterio de la primera derivada, aclarando que en los procesos de comprobación y verificación es muy importante que usted se apoye en la aplicación GeoGebra.

3.1. Extremos en un intervalo

¿Cuáles son los valores extremos de una función?

Una función no siempre tiene un máximo o un mínimo en un intervalo. Recordemos dos definiciones muy importantes:

1. *f(c)* es el mínimo si se cumple que $f(c) \leq f(x)$ en todo el intervalo
2. *f(c)* es el máximo si se cumple que $f(c) \geq f(x)$ en todo el intervalo

Se denomina *valores extremos* de una función, a los *máximos y mínimos en cierto intervalo*. Pero, vale aclarar que, una función no siempre tiene un máximo o un mínimo en un intervalo, a menos que la función sea continua y el intervalo sea cerrado. Es decir: **si una función *f* es continua en un intervalo cerrado, entonces *f* tiene un mínimo como un máximo en el intervalo.**

¿Cuáles son los extremos relativos y los números críticos?

Si los máximos o mínimos ocurren en un intervalo abierto, se habla de *máximos relativo* o de *mínimos relativo*. Vale considerar aquí que, algunos máximos o mínimos relativos son picudos como el valor absoluto. Sugiero que revise el apartado de la página 165 y 166 del texto básico en donde se explica detalladamente el surgimiento de los puntos críticos y la derivada en estos casos.

¿Cómo se determinan extremos en un intervalo cerrado?

Primero, puntualizar que, los puntos críticos se consiguen haciendo $f'(c) = 0$ o si f no es derivable en el punto c . Para aplicar este teorema y las estrategias para la determinación de extremos en un intervalo cerrado, luego de analizar el ejemplo ilustrado en el texto básico página 167, participe en el siguiente juego:

Puntos críticos y los extremos en un intervalo

Luego de participar de esta actividad académica, usted interiorizó que los números críticos de una función no necesariamente producen extremos relativos, pero nos permiten calcular los extremos en un intervalo.

3.2. El teorema de Rolle y el teorema del valor medio

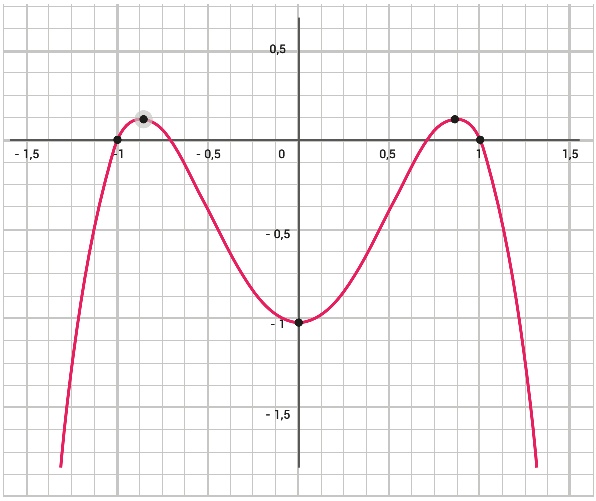
El teorema de Rolle establece que, cuando f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) de tal manera que $f'(c) = 0$.
Observemos esta situación a través del ejemplo ilustrativo siguiente:

Ejemplo ilustrativo 21

Analicemos la gráfica de $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$ en el intervalo [-1, 1] , sus intersecciones y verifiquemos el teorema de Rolle.

Figura 22.

Gráfica con intersecciones



La función cumple las condiciones del teorema de Rolle: *f* es continua y derivable en el intervalo [-1, 1] además debido a que $f(-1) = f(1) = 0$, por lo que según el teorema de Rolle existe al menos un *c* en *f(c)* tal que $f'(c) = 0$. Por lo tanto, los puntos críticos son:

$f'(x) = -8x^3 + 6x$

Nota. Construcción propia con GeoGebra.

Factorizando: $x(4x^2 - 3) = 0$; Entonces, la derivada tiene tres intersecciones y es cero en tres valores de x: $x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}; x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

¿A qué se refiere el teorema del valor medio?

El teorema del valor medio se refiere a una aplicación del teorema de Rolle y se lo expresa de la siguiente manera:

Si tenemos una función *f* continua en el intervalo cerrado [*a, b*] y derivable en intervalo abierto (*a, b*) entonces existe un número c en el intervalo (*a,b*) tal que: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Según este teorema, con la derivada se puede obtener una tangente en la mitad del intervalo.

Antes de resolver problemas de aplicación solicito señor estudiante que, de la manera más responsable estudie los dos ejemplos ilustrativos propuestos en las páginas 175 del texto básico.

3.3. Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada

¿Cuándo una función es creciente y cuándo es decreciente?

Aunque son conceptos básicos y estudiados en cursos anteriores, vale recalcar que su definición a través del siguiente juego en donde usted debe enlazar adecuadamente de acuerdo a las definiciones dadas en el texto básico:

Definición de funciones crecientes y decrecientes

Luego de esta actividad interactiva, seguro que se reforzaron los criterios sobre cuándo una función es creciente y decreciente, felicitaciones.

Para identificar con facilidad los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función *f* continua en el intervalo *(a, b)* siga las estrategias recomendadas en el texto básico:

1. Localice los puntos críticos en *(a, b)* y construya intervalos de prueba.
2. Determine el signo de $f'(x)$ en un valor de prueba en cada uno de los intervalos.
3. Si $f'(x) > 0$, *f* es creciente.
4. Si $f'(x) < 0$, *f* es decreciente.
5. Si $f'(x) = 0$, *f* es constante.

Para profundizar su aprendizaje le invito a revisar el siguiente ejemplo:

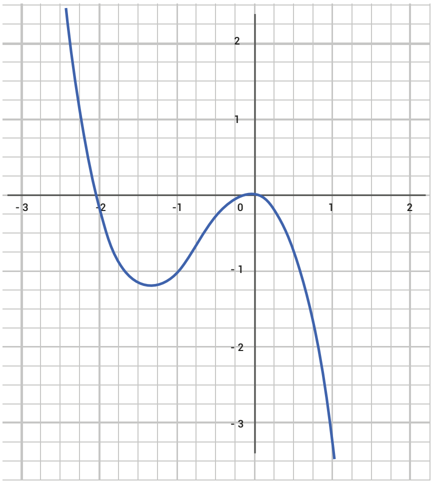
Ejemplo ilustrativo 22

Determinemos los intervalos abiertos en los cuales la función $f(x) = -x^3 -2x^2$ es creciente o decreciente.

1 Bimestre

Figura 23.

Gráfica con tramos crecientes y decrecientes



Nota. Construcción propia en GeoGebra

Primero, observemos que la función es derivable en toda la recta real. Ahora, para hallar los puntos críticos hacemos $f'(x) = 0$

$$f(x) = -x^3 - 2x^2$$

$$f'^{(x)7} = -3x^2 - 4x$$

$$-x(3x+4) = 0$$

Puntos críticos: $x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{4}{3}$

Como no hay puntos en los cuales f no exista, los únicos puntos críticos son los anteriores.

Ahora, en una tabla realizamos el análisis en los intervalos que se forman:

Tabla 3.

Tabla con los intervalos de tramos crecientes y decrecientes

Intervalo	**$-\infty < x < -4/3$**	**$-4/3 < x < 0$**	**$0 < x < \infty$**
Valor de prueba	x = -2	x = -1	x = 2
Signo de f'(x)	$f'(x) = -4 < 0$	$f'(x) = 1 > 0$	$f'(x) = -20 < 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente

Nota. Construcción propia

Sol. En conclusión: f es decreciente en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ y $(0, \infty)$; mientras que es creciente en el intervalo $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

¿Para qué sirve el criterio de la primera derivada?

Luego de estudiar la manera de identificar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función, el criterio de la primera derivada se aplica para hallar los mínimos o máximos relativos. Al respecto, en el texto básico página 181 se plantea el respectivo teorema *criterio de la primera* *derivada*, para reforzar su interiorización, solicito estimado estudiante, su participación en el siguiente recurso.

Criterio de la primera derivada

Con la participación en esta actividad lúdica, seguro que fortaleció su aprendizaje respecto al teorema que fundamenta *criterio de la primera derivada* y ahora**,** está más preparado para resolver problemas de aplicación con estos conceptos.

Recursos didácticos

- Estimado estudiante, para profundizar su experticia en la aplicación de definiciones y teoremas relacionados a los extremos de un intervalo, el teorema de Rolle y el teorema del valor medio, y las funciones crecientes y decrecientes con el criterio de la primera derivada, sugiero que analice las explicaciones y estrategia didácticas en los ejemplos ilustrativos brillantemente propuestos en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 162. Vale señalar que, su aprendizaje debe reforzarse con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios y problemas propuestos al finalizar cada uno de estos temas.
- Es conveniente también que, estudie el video: Criterio de la primera derivada, en donde se explica de forma didáctica y concreta, la forma para determinar los mínimos y máximos relativos.

Criterio de la primera derivada

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta sexta semana se ha estudiado los extremos de un intervalo, el teorema de Rolle y el teorema del valor medio, y las funciones crecientes y decrecientes con el criterio de la primera derivada, entonces, usted debe reforzar sus aprendizajes, desarrollando ejercicios y problemas que le preparen para luego realizar las distintas actividades calificadas y prepararse para las evaluaciones parciales y presenciales. Entonces, le invito a resolver:

- Ubicar los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado: $f(x) = cos\ cos\ \pi x\ ; [0, \frac{1}{6}]$.

- Realice lo siguiente: a) usar un sistema de álgebra por computadora para representar la función y aproximar cualesquiera extremos absolutos sobre el intervalo dado. b) Utilizar una herramienta de graficación para determinar cualesquiera puntos críticos y emplear éstos para encontrar todos los extremos absolutos no ubicados en los puntos extremos o terminales: $f(x) = 3{,}2x^5 + 5x^3 - 3{,}5x$; [0, 1].

- Determinar si es posible aplicar el teorema de Rolle a ƒ en el intervalo cerrado [a, b]. Si se puede aplicar el teorema de Rolle, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tales que $f'(c) = 0$. Si no se puede aplicar, explicar por qué no: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+2}$; [-1, 3]

- Utilizar una herramienta de graficación para a) representar la función *f* sobre el intervalo, b) encontrar y representar la recta secante que pasa por los puntos sobre la gráfica de *f* en los puntos terminales del intervalo dado y c) encontrar y representar cualesquiera rectas tangentes a la gráfica de *f* que sean paralelas a la recta secante: $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $[-\frac{1}{2}, 2]$.

- Realizar a) encontrar los puntos críticos de *f* (si los hay), b) determinar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, c) aplicar el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y d) utilizar una herramienta de graficación para confirmar los resultados: $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+1}$.

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas, usted pudo reforzar los aprendizajes de la semana seis de derivación, aplicando definiciones, propiedades y teoremas en el desarrollo de ejercicios y resolución de problemas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta sexta semana, en donde se ha concluido con el estudio y aplicación del *criterio de la primera derivada* , estamos listos para profundizar y aprender la concavidad y el estudio de la concavidad y el criterio de la segunda derivada.

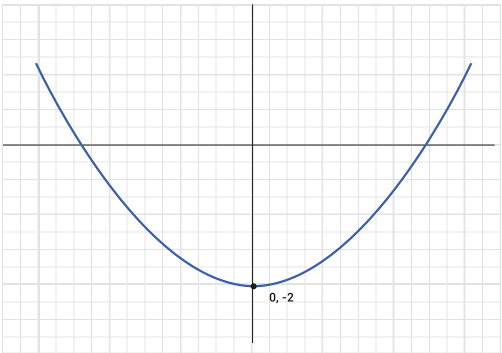
Semana 7

3.4. Concavidad y el criterio de la segunda derivada

La concavidad está relacionada con los conceptos creciente y decreciente, por esta razón se manifiesta que, la gráfica es cóncava hacia arriba cuando es creciente y es cóncava hacia abajo cuando es decreciente, observemos el siguiente gráfico.

Figura 24.

Gráfico de una función con concavidad



Nota. Construcción propia en GeoGebra

En el gráfico propuesto se observa que la gráfica tiene dos partes:

la parte de la izquierda, en el intervalo (-∞,0) la gráfica es cóncava hacia abajo y es decreciente en dicho intervalo.

Mientras que, la parte derecha, en el intervalo (∞,0), la gráfica es cóncava hacia arriba y es creciente en dicho intervalo. Las definiciones formales de concavidad las encuentra en el texto básico a partir de la página 190.

¿Cómo se utiliza el criterio de la segunda derivada?

El criterio de la primera derivada lo utilizamos para identificar cuándo la función es creciente o decreciente en un intervalo. En el caso de la concavidad, utilizamos el criterio de la segunda derivada para descubrir en qué intervalos la gráfica de la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Para esto se utiliza el teorema del criterio de concavidad, definido en el texto básico y que lo sintetizamos a continuación: Si *f* es una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto *I*, entonces:

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.

2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

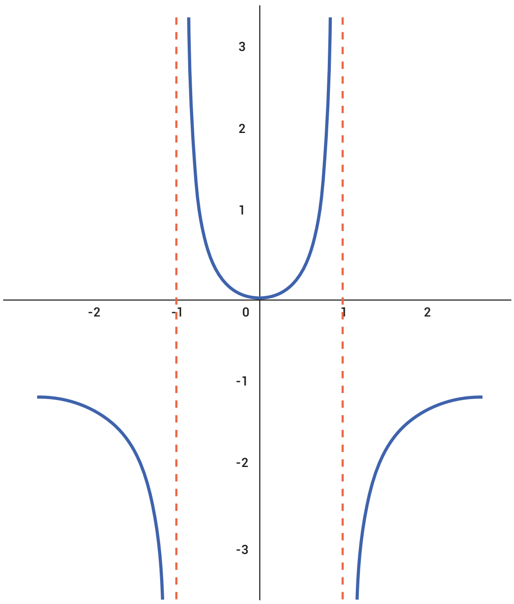
Continuemos con el aprendizaje mediante la revisión de los siguientes ejemplos.

Ejemplo ilustrativo 23

Determinemos los intervalos abiertos sobre los cuales la función $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Figura 25.

Gráfica con intervalos de concavidad



Primero determinamos la segunda derivada:

$$f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1-x^2)\frac{d}{dx}x^2-(x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1-x^2)\cdot 2x-(x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x-2x^3+2x^3}{(1-x^2)^2}$$

Nota. Construcción propia en GeoGebra.

La primera derivada es: $f'(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$

La segunda derivada es:

$$f''(x) = \frac{(1-x^2)^2 \cdot \frac{d}{dx}\, 2x - (2x) \cdot \frac{d}{dx}(1-x^2)^2}{((1-x^2)^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1-x^2)^2 \cdot 2 - 2x \cdot 2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)^2 + 8x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2) + 8x^2}{(1-x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(1-x^2)^3}$$

Entonces, no hay puntos en los reales en donde *f'(x)* = 0, pero en ± 1 la función *f* no es continua (se produce un cero en el denominador), por lo que, se prueba la continuidad en los intervalos: (-∞, -1), (-1,1) y (1, ∞).

Tabla 4.

Intervalos de concavidad

Intervalo	-∞ < x < -1	-1 < x < 1	1 < x < ∞
Valor de prueba	x = -2	x = 0	x = 2
Signo de *f*	$f''(-2) = -\frac{26}{27} < 0$	*f'(0) = 2 > 0*	$f''(2) = -\frac{26}{27} < 0$
Conclusión	**Cóncava hacia abajo**	**Cóncava hacia arriba**	**Cóncava hacia abajo**

Nota. Construcción propia.

¿Cuándo se produce un punto de inflexión?

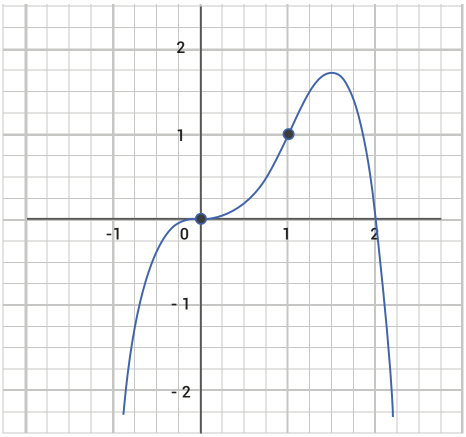
Un punto de inflexión se produce cuando cambia la concavidad de la gráfica y para su determinación aplicamos el criterio de la segunda derivada. La explicación formal aparece en el texto básico a partir de la página 192, en donde se anota el teorema que fundamenta el procedimiento. Observemos el siguiente ejemplo ilustrativo al respecto.

Ejemplo ilustrativo 24

Determinemos los puntos de inflexión y analicemos la concavidad de la gráfica de la función $f(x) = -x^4 + 2x3$.

Figura 26.

Gráfica con puntos de inflexión



Nota. Construcción propia en GeoGebra.

Primero hallamos la segunda derivada de la función dada:

$f(x) = -x^4 + 2x^3$

$f'(x) = -4\text{-}x^3 + 6x^2$

$f'(x) = -12\text{-}x^2 + 12x$

$f'(x) = -12\text{-}x(x - 1)$

Haciendo $f'(x) = 0$, descubrimos que los puntos de inflexión ocurren en x = 0 y x = 1.

Ahora, hacemos el análisis de la concavidad, mediante una tabla de comprobación:

Tabla 5.

Intervalos de concavidad

Intervalo	**-∞ < x < 0**	**0 < x < 1**	**1 < x < ∞**
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 1/2$	$x = 3/2$
Signo de f''	$f'(-1) = -24 < 0$	$f'(1/2) = 3 > 0$	$f'(3/2) = -9 < 0$
Conclusión	**Cóncava hacia abajo**	**Cóncava hacia arriba**	**Cóncava hacia abajo**

Nota. Construcción propia.

3.5. Límites al infinito

En esta sección estudiaremos el significado de los límites al infinito, las asíntotas horizontales y los límites infinitos al infinito. Estos temas son muy importantes en el estudio de las funciones racionales y sus gráficas.

Iniciemos definiendo los límites al infinito, para lo cual tomaremos lo propuesto en el texto básico, cuya definición debe reforzar participando del juego interactivo:

Definición de límites al infinito

¿Cuándo se produce una asíntota horizontal?

La definición de una asíntota horizontal se puede sintetizar de la siguiente manera: Una recta *y = L* es una asíntota horizontal de la gráfica de una función *f* si ocurre *f(x) = L* o *f(x) = L* .

Al evaluar límites al infinito, es conveniente tener presente el siguiente teorema:

Si r es un número racional positivo y c es un número real, entonces:
$\frac{c}{x^r} = 0.$ Por ejemplo: $\frac{4}{x^3} = 0$; $\frac{-2}{x} = 0$. Además, si x^r se define cuando x es negativa, entonces se cumple: $\frac{c}{x^r} = 0$.

Ejemplo ilustrativo 25

Hallemos el límite de la función racional $f(x) = \frac{2x^2-4}{x^2}$ cuando x tiende al infinito.

Entonces debemos hallar el límite: $\frac{2x^2-4}{x^2}$. Para aplicar el teorema anterior, debemos escribir: $\frac{2x^2-4}{x^2}$. De donde se tiene que:

$$\frac{4}{x^2}) = 2 - \frac{4}{x^2} = 2 - 0 = 2$$

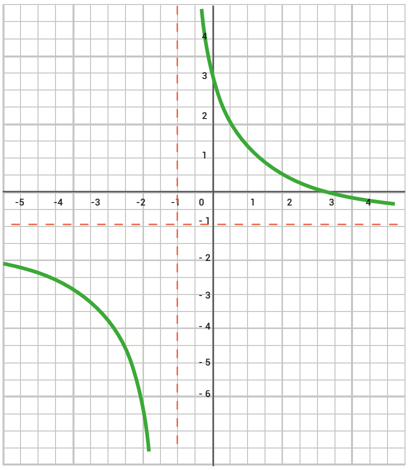
Sol. $\frac{4}{x^2})$ **= 2**

Ejemplo ilustrativo 26

Calculemos el límite de la función racional $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$ cuando *x* tiende al infinito y hallemos la asíntota horizontal.

Figura 27.

Gráfica con límite función racional



Nota. Construcción propia con GeoGebra.

Lo que se quiere calcular es: $\frac{3-x}{x+1}$

En este caso, al intentar aplicar límites cuando *x* tiende al infinito, tanto en el numerador como en el denominador obtenemos infinito, lo cual ocasiona una forma indeterminada: $\frac{\infty}{\infty}$

Para solucionar este problema, se divide tanto el numerador como el denominador entre *x*.

$$\frac{3-x}{x+1} = \frac{\frac{3-x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{3}{x}-1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{x}-1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{0-1}{1+0}$$

Por lo tanto: $\frac{3-x}{x+1} = \frac{0-1}{1+0} = -1$. La recta *y = -1* es una recta horizontal, lo cual se verifica con el gráfico trazado inicialmente. Si hallamos el límite cuando $x \to -\infty$, obtendremos también una recta horizontal *y = -1*, lo cual se justifica con el teorema estudiado.

Sol. ***y = -1*** **es la asíntota horizontal**

Recursos didácticos

- Estimado estudiante, para completar el estudio de la concavidad y el criterio de la segunda derivada, así como los límites al infinito, sugiero que analice los ejemplos ilustrativos y las explicaciones que se proponen en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2014). Cálculo**, a partir de la página 187 en donde se explican con claridad definiciones, teoremas y algoritmos relacionados a la determinación de la concavidad de la gráfica de una función. Su aprendizaje debe reforzarse con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios y problemas propuestos a final de cada tema.

- Adicional al trabajo anterior, es conveniente también que usted estudie el video: Concavidad de una función, en donde se explica de forma muy didáctica y concreta, el procedimiento para determinar los intervalos en donde la gráfica de una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Concavidad de una función

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego de estudiar los contenidos previstos para la séptima semana, en donde se analiza la concavidad en una función y los límites al infinito, es muy importante estimado amigo que usted refuerce los aprendizajes logrados, desarrollando actividades que le preparen para luego desarrollar distintas actividades calificadas y prepararse de la mejor manera para las evaluaciones parciales y presenciales:

- Determine los intervalos abiertos en los cuales la gráfica de la siguiente función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo:
  $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

- Encuentre los puntos de inflexión y analice la concavidad de la gráfica de la función $f(x) = \frac{4}{x^2-1}$.

- Dibuje la gráfica de una función *f* que tenga las características dadas a continuación: $f(0) = f(2) = 0;$

  $f'(x) > 0$ si $x < 1$

  $f'(x) > 0$

  $f'(x) < 0$ si $x > 1$

  $f''(x) < 0$

- Encuentre el límite: $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}$
- Utilice un sistema algebraico por computadora para analizar la gráfica de la función. Marcar cualquier extremo y/o asíntota que existan: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas propuestas, usted pudo reforzar los aprendizajes para aplicar los conceptos de la primera y segunda derivada.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Estimado estudiante, luego de esta séptima semana, en donde se ha concluido con el estudio de aplicaciones de la primera y segunda derivada en el análisis de la gráfica de una función, nos preparamos para cerrar el primer bimestre.

Semana 8

Actividades de finales del bimestre

Estimado estudiante en la última semana de estudio, la invitación para que revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello considere:

- Su diario de notas
- Actividades de aprendizaje recomendadas
- Actividades de aprendizaje calificadas
- Actividades de aprendizaje interactivas
- Evaluaciones parciales

Recuerde

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en las tres unidades estudiadas en el primer bimestre: límites y sus propiedades, derivación y aplicaciones de la derivada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del primer bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero lo siguiente:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en las tres unidades desarrolladas en este primer bimestre.
- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.
- En cada una de las unidades, es importante que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

- Aplica las reglas y teoremas básicos de las aplicaciones de la derivada y de las integrales en la resolución de problemas relacionados con el entorno natural y social.

Estimado estudiante, al iniciar el segundo bimestre y con la finalidad de lograr el resultado de aprendizaje propuesto, señalar que continuaremos analizando las aplicaciones de las derivadas y posteriormente, estudiaremos las definiciones, propiedades y teoremas de la integración, resolviendo problemas de aplicación que están relacionados con nuestro entorno natural y social.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 9

3.6. Análisis de gráficas

Por la influencia tecnológica, cada vez más decisiva en el proceso de aprendizaje, la semiótica en la ciencia matemática, ha tomado mayor fuerza y dominio didáctico, porque facilita tremendamente aprendizajes de diferentes conceptos matemáticos, por esta razón, vale resaltar la importancia de considerar que los lenguajes matemáticos más utilizados como el coloquial, simbólico y gráfico, están muy relacionados cuando se analiza la gráfica de una función matemática. Al respecto, sobresale la importancia del lenguaje gráfico que, en muchas ocasiones, complementa la explicación verbal y simbólica de las matemáticas. En este contexto, para construir la gráfica de una función, actualmente nos apoyamos en distintos graficadores virtuales que facilitan los procesos, sin embargo, es importante fundamentar el proceso mediante la aplicación de conceptos fundamentales estudiados en secciones anteriores.

Aunque la gráfica de una función se obtiene con mucha facilidad en las calculadoras gráficas o aplicaciones en la web, es importante que al momento de analizar la gráfica de una función se consideren conceptos, como intersecciones, simetría, dominio y rango, continuidad, asíntotas, extremos relativos, concavidad, puntos de inflexión y los límites al infinito.

¿Estrategias para analizar la gráfica de una función?

Con la finalidad de entender correctamente las características de las gráficas, es conveniente seguir un proceso en su análisis, por esta razón le invito revise en el texto básico la estrategia para analizar la gráfica de una función en la página 206 y luego participe del juego interactivo y redescubra las estrategias más convenientes al momento de este trabajo académico.

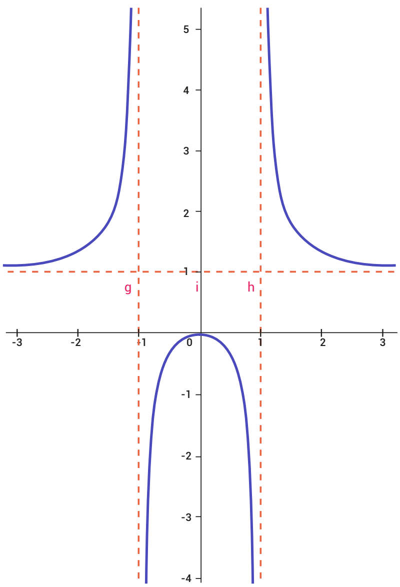
Estrategias para analizar la gráfica de una función

Ejemplo ilustrativo 27

Ilustremos el análisis para comprender el proceso para graficar la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

Figura 28.
Gráfica de una función racional



Nota. Construcción propia con GeoGebra.

Iniciamos calculando la **primera derivada**:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Luego, hallamos la **segunda derivada**:

$$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

Hallamos las **intersecciones en eje X**, haciendo: *f(x) = 0* → *x = 0* : (0, 0)

Hallamos las **intersecciones en eje Y**, haciendo: *y = 0* ;

Las **asíntotas verticales**, haciendo el denominador cero: *x = -1; x = 1*

Asíntotas horizontales, hallando $\frac{x^2}{x^2-1}$ = 1.

Punto crítico: *x = 0*

Punto de inflexión: no existen

Dominio, todos los números reales excepto 1 y -1.

Intervalos de prueba: (-∞, -1); (-1,0); (0,1) y (1, ∞)

Tabla 6.

Análisis de elementos para la graficación

Para prueba	f(x)	f'(x)	f''(x)	Conclusión para la gráfica
-∞ < x < -1		+	+	Creciente cóncava hacia arriba
x = -1	indefinida	indefinida	indefinida	Asíntota vertical
-1 < x < 0		+	-	Creciente cóncava hacia abajo
x = 0	0	0	-	
0 < x < 1		-	-	Decreciente cóncava hacia abajo
x = 1	indefinida	indefinida	indefinida	Asíntota vertical
1 < x < ∞		-	+	Decreciente cóncava hacia arriba

Nota. Construcción propia.

Cuando se realice un análisis sobre la gráfica de una función, se debe experimentar su trazo a través de una herramienta virtual de tal manera que, todo el análisis sea comprobado y verificado.

Recursos didácticos

- Para profundizar el análisis en el trazado de curvas, usted debe leer el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 206 en donde se explica con ejemplos ilustrativos la aplicación dos conceptos estudiados en secciones anteriores y las estrategias para analizar la gráfica de una función, lo cual debe ser reforzado con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 3.6 EJERCICIOS desde la página 212.
- Es conveniente también que, estudie el video Análisis de la gráfica de una función en donde se explica de forma muy didáctica y concreta, la

forma de analizar la gráfica de una función, con base en la aplicación de conceptos estudiados en unidades anteriores.

Análisis de la gráfica de una función

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta novena semana estudiamos el análisis de la gráfica de una función, para profundizar estos aprendizajes y reforzar su experticia para las gráficas, es conveniente experimentarlos con la aplicación GeoGebra, desarrollando y resolviendo lo siguiente:

- Analice y dibuje la gráfica de la función $y = \frac{-x^2-4x-7}{x+3}$ luego indique todas las intersecciones, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Utilice una herramienta de graficación para verificar los resultadsdos.
- Utilice un sistema algebraico por computadora para analizar y representar gráficamente la función *f(x) = x cot cot x; -2π < x < 2π* Identifique todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.
- Utilice una herramienta de graficación para representar la función $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$. Explique por qué no hay asíntota vertical cuando una inspección superficial de la función indica que debería haber una.
- Genere una función cuya gráfica tenga las siguientes características:
    - Asíntota vertical *x = 3.*
    - Asíntota horizontal *y = 0*.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo practicar y experimentar la representación y el proceso para interpretar algunos conceptos aplicados, algo sencillo pero muy valioso para los siguientes temas de estudio.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta novena semana en donde se ha podido analizar la gráfica de una función de forma manual y con GeoGebra, le invito para estudiar una de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial, los problemas de optimización.

Semana 10

3.7. Problemas de optimización

Entre las aplicaciones fundamentales de la derivada tenemos la *solución de problemas de optimización* en donde se trata de hallar la solución óptima a un problema planteado, aquí aparecen entonces los problemas de máximos y mínimos de una función, observando temas como: mayor beneficio, mínimo costo, mayor volumen, mínimo material, máxima resistencia, máxima distancia o tamaño mínimo, entre algunos de los más importantes y conocidos.

¿Existe una estrategia adecuada para resolver problemas con máximos y mínimos?

Para que usted se familiarice con la estrategia para aplicar máximos y mínimos de una función en la resolución de problemas, le invito a participar de la siguiente recurso:

Estrategias para gráficar una función.

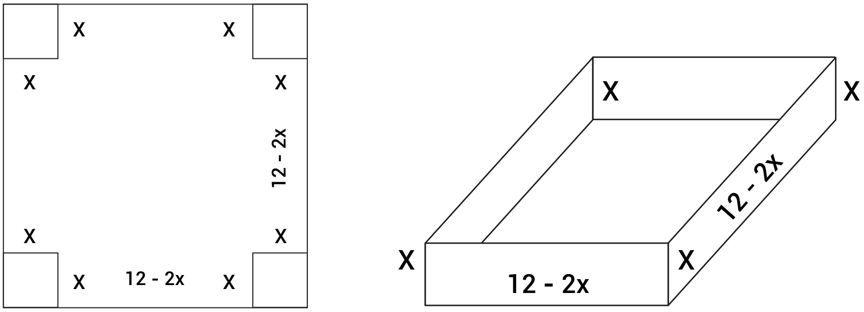
Con la actividad usted pudo practicar y reforzar acerca de la aplicación de la estrategia Va seguro en la resolución de problemas sobre optimización.

Ejemplo ilustrativo 28

Se desea construir cajas abiertas a partir de planchas cuadradas de cartón que miden 12 cm de lado, cortando pedazos cuadrados en las esquinas y doblando los lados. Calculemos la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener la caja de volumen máximo.

Figura 29.

Dibujos de una caja abierta



Nota. Construcción propia en Illustrator.

En las ilustraciones gráficas se observa la plancha cuadrada y la caja sin tapa que se quiere hacer. Si se cortan pedazos cuadrados en las esquinas, el volumen V en cm^3 será:

$$V(x) = (12 - 2x) \,.\, (12 - 2x).\, x$$

$$V(x) = (144 - 48 + 4x^2).\, x$$

$$V(x) = 144 - 48x^2 + 4x^3$$

Después, vemos que el dominio de esta función $V(x)$ está en el intervalo [0, 6] y aplicando el teorema de Fermat concluimos que el volumen de la caja tiene un valor máximo absoluto en dicho intervalo. Por lo que, para hallarlo aplicamos la derivada a la función: $V(x) = 144 - 48x^2 + 4x^3$ y luego igualamos a cero para encontrar los números críticos.

$$V'(x) = 144 - 96 + 12x^2$$

$$144 - 96 + 12x^2 = 0$$

$$12x^2 - 96 + 144 = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 6;\ x_2 = 2$$

Por lo tanto, los números críticos del Volumen V son 2 y 6, los cuales están dentro del intervalo cerrado correspondiente al dominio de la función.

Entonces, el valor máximo absoluto del volumen debe ocurrir en uno de estos números críticos o en un extremo del intervalo. Por lo que, hallamos los valores: V(0), V(2) Y V(6)

$$V(x) = 144 - 48x^2 + 4x^3$$

$$V(x) = 144(0) - 48(0)^2 + 4(0)^3 = 0$$

$$V(x) = 144(2) - 48(2)^2 + 4(2)^3 = 128$$

$$V(x) = 144(6) - 48(6)^2 + 4(6)^3 = 0$$

En consecuencia, concluimos que el valor máximo del volumen V en el intervalo [0, 6] es 128 lo cual ocurre cuando $x = 2$

Solución: El volumen máximo es de 128 cm^3 y se obtiene cuando la longitud del pedazo cuadrado que se corta en las esquinas es de 2 cm.

Ejemplo ilustrativo 29.

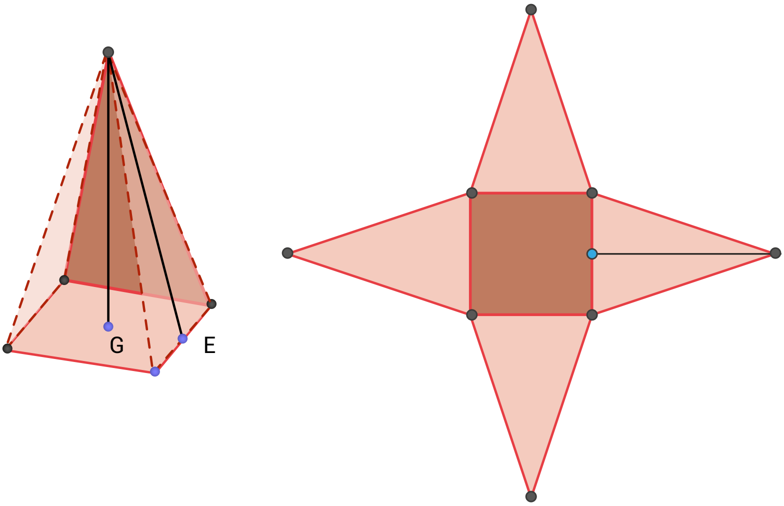
Hallemos las medidas aproximadas de una carpa con forma de pirámide cuadrangular que se puede construir a partir de una superficie de tela gruesa de 16 metros.

Interpretamos de forma gráfica, escribiendo los datos del problema:

2 Bimestre

Figura 30.

Pirámide cuadrangular con su desarrollo



Nota. Construcciones propias en GeoGebra.

Ahora, procedemos a escribir la función a maximizar, volumen *V*:

$$V = \frac{1}{3} Base \cdot altura$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} l^2 \cdot h$$

Luego, nos percatamos que el volumen se encuentra en función de otras dos variables, entonces buscamos relacionar dichas variables, para esto consideremos que el área total de la pirámide (16 m) es la suma de la base más el área lateral:

$$A = B + L = l^2 + 2lh \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

Conocemos también que, la altura inclinada de la pirámide h_1 es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma y se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras:

$${h_1}^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h_1 = \sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}} \qquad \text{(Ecuación 2)}$$

Luego, reemplazamos la ecuación 2 (h1) en la ecuación 1:

$$A = l^2 + 2lh_1 = l^2 + 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$A = l^2 + 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

Ahora despejamos h y luego lo reemplazamos en el volumen que se quiere maximizar:

$$A = l^2 + 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$A - l^2 = 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{A-l^2}{2l}$$

$$h^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{A^2 - 2Al^2 + l^4}{4l^2}$$

$$h^2 = \frac{A^2 - 2Al^2 + l^4}{4l^2} - \frac{l^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{A^2 - 2Al^2}}{2l}$$

A continuación, reemplazamos el valor de (h) en la función a maximizar:

$$V(l) = \frac{1}{3}l^2 \cdot h$$

$$V(l) = \frac{1}{3}l^2 \cdot \frac{\sqrt{A^2 - 2Al^2}}{2l}$$

$$V(l) = \frac{1}{6}l \cdot \sqrt{A^2 - 2Al^2}$$

Obtenemos la primera derivada de la función para obtener posteriormente los puntos críticos en donde seguramente se produzca un máximo valor del volumen:

$$V'(l) = \frac{1}{6}[l \cdot \frac{1}{2} \cdot (A^2 - 2Al^2\ )^{-1/2} \cdot (-4Al) + (A^2 - 2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}[l \cdot \frac{1}{2}\ \frac{-4Al}{(A^2-2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}} + (A^2 - 2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{-2Al+A^2-2Al^2}{(A^2-2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}}]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{-2Al^2+A^2-2Al^2}{(A^2-2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}}]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{+A^2-4Al^2}{(A^2-2Al^2\ )^{\frac{1}{2}}}]$$

Sustituimos el área A que es el área total de la tela gruesa igual a 16 m^2:

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{16^2-4\cdot 16l^2}{\sqrt{16^2-2\cdot 16l^2}}]$$

Igualamos a cero la primera derivada para hallar los puntos críticos:

$$V'(l) = \frac{1}{6}[\frac{16^2-4\cdot 16l^2}{\sqrt{16^2-2\cdot 16l^2}}] = 0$$

$$16^2 - 4 \cdot 16l^2 = 0$$

$$l^2 = 4$$

$$(1 + 2)(l - 2) = 0$$

Hallamos los dos puntos críticos, aplicando el teorema del factor cero:

$$l_1 = 2;\ l_2 = -2$$

El valor del lado l que se encuentra dentro del dominio[0, 4], es $l_1 = 2$ m.

Reemplazamos este valor en la fórmula de la altura h y encontramos la altura:

$$h = \frac{\sqrt{A^2-2Al^2}}{2l} = \frac{\sqrt{16^2-2\cdot 16(2^2)}}{4} = \frac{\sqrt{128}}{4} = 2{,}83 \text{ m}$$

Solución: Por lo tanto, el máximo volumen que se puede obtener con la carpa de superficie 16 m^2 será: $V = \frac{1}{3}l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2{,}83 = 3{,}77\ m^3$

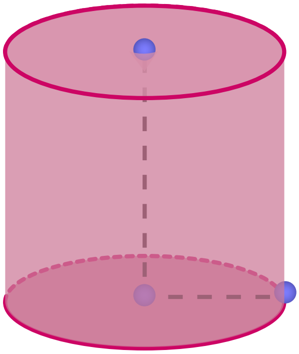
Lo invito a continuar con el aprendizaje mediante la revisión de mas ejemplos 30, 31 y 32

Ejemplo ilustrativo 30

Se trata de construir un recipiente con la forma de un cilindro recto y que tenga un volumen de 40 cm^3. Hallemos las medidas del cilindro para que la cantidad de material empleado (área total) sea mínima.

Figura 31.

Cilindro recto



Nota. Construcción propia en GeoGebra.

En este caso, se desea minimizar el área total del cilindro recto, la cual es:

A = área lateral + área de las dos bases

$$A = 2\pi r \cdot h + 2\pi^2$$

En esta función del área del cilindro, la cual se quiere minimizar, observamos que depende de dos variables: radio (r) y altura (h).

Entonces, buscaremos una relación entre estas variables, considerando además el dato del volumen: V = 40 cm^3.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$40 = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$h = \frac{40}{\pi r^2}$$

Si reemplazamos este valor en la fórmula del área a minimizar, obtenemos:

$$A = 2\pi r \cdot \frac{40}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{80}{r} + 2\pi r^2$$

$$A = 80r^{-1} + 2\pi r^2$$

Ahora, procedemos a encontrar la primera deriva de la función a minimizar, para encontrar los puntos críticos:

$$A = 80r^{-1} + 2\pi r^2$$

$$A' = -80r^{-2} + 4\pi r$$

$$A' = -\frac{80}{r^2} + 4\pi r$$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos a cero, según el teorema de Fermat:

$$-\frac{80}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$$-80 + 4\pi r^3 = 0$$

$$\pi r^3 - 20 = 0$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$$

En este punto crítico $r = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$ se produce un valor mínimo del área, por lo que ahora procedemos a encontrar también, el valor de la altura (h) y resolver el problema:

$$h = \frac{40}{\pi r^2}$$

$$h = \frac{40}{\pi(\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}})^2}$$

$$h = \frac{40\cdot\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}}{\pi(\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}})^2\cdot\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}}$$

$$h = \frac{40\cdot\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}}{\pi\cdot\frac{20}{\pi}}$$

$$h = 2\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$$

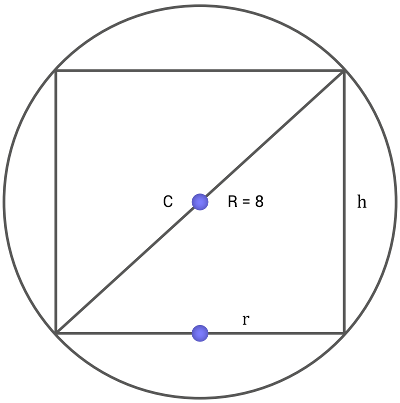
2 Bimestre

Solución: Las medidas del cilindro recto que se quiere construir para que, la cantidad de material empleado (área total) sea mínima, son: Radio $r = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$ y altura $h = 2\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$.

Ejemplo ilustrativo 31

Hallemos las medidas del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 8 cm.

Figura 32.
Cilindro inscrito en una esfera



Nota. Construcción propia en GeoGebra.

Consideremos que, en el gráfico de la izquierda se representa una vista frontal del cilindro dentro de la esfera, en donde *R* es el radio de la esfera, es el radio de la base del cilindro y *h* es la altura del cilindro.

Como se trata de optimizar el volumen del cilindro, debemos escribir la función de su volumen:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

El volumen (variable dependiente) está escrito en función de dos variables independientes, por esta razón, aplicamos geometría para expresar el radio de la base en función de la altura del cilindro. Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$; despejamos $(2r)^2$

$(2r)^2 = (2R)^2 - h^2$; reemplazamos $R = 8$

$4r^2 = (2 * 8)^2 - h^2$;

$$r^2 = \frac{256 - h^2}{4}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - h^2}$$

Reemplazamos este valor en la función volumen:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = (\tfrac{1}{2}\sqrt{256 - h^2})^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \tfrac{1}{4}(256 - h^2) \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{(h)} = 64\pi h - \frac{\pi h^3}{4}$$

Después, aplicamos la primera derivada para hallar el punto crítico en donde se produce un máximo:

$$V'_{(h)} = 64\pi - \frac{3\pi h^2}{4}$$

Por el teorema de Fermat igualamos la primera derivada a cero para hallar el punto crítico:

$$64\pi - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

256 - 3h^2 *= 0*; Factorizamos

$(16 + \sqrt{3}h)$ $(16 - \sqrt{3}h)$= 0; Aplicamos el teorema del factor cero

$$h_1 = -\frac{16}{\sqrt{3}};\ h_2 = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Considerando que el dominio de la función volumen es (0, 2R), es decir (0, 16), aceptamos el valor de $h = \frac{16\sqrt{3}}{3}$, que será el valor en donde se producirá un máximo, por lo que, ahora debemos calcular el valor de *r.*

$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - h^2}$; en esta fórmula se reemplaza el valor de *h*

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - \left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - \frac{256 \cdot 3}{9}}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - \frac{256}{3}}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{512}{3}}$$

Por lo tanto, las medidas del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 8 cm, son:

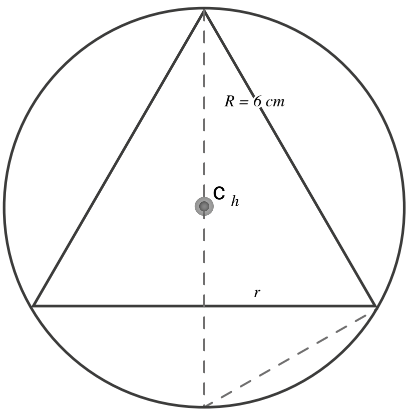
Solución: Radio de la base: $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{512}{3}}$; Altura del cilindro: h = $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

Ejemplo ilustrativo 32

Hallemos las medidas del cono de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera que tiene 6 cm de radio.

Figura 33.

Cono inscrito en una esfera



Nota. Construcción propia en GeoGebra.

En el gráfico de la izquierda se representa una vista frontal del cono dentro de la esfera, en donde *R* es su radio que tiene un valor de 6 cm, *r* es el radio de la base del cono y *h* es la altura del cono.

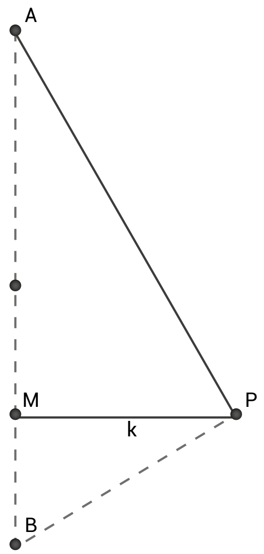
Ahora, como se trata de optimizar el volumen del cono, debemos escribir su función volumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Aquí se observa que el volumen del cono depende de los valores del radio *r* y altura *h* por lo que, se va a expresar *r* en términos de *h.*

Figura 34.

Gráfica con triángulos semejantes



Nota. Construcción propia en GeoGebra.

Para esto, se considera la figura NN de la izquierda en donde, por el ***teorema de la altura*** y considerando que los dos triángulos tienen la misma altura se puede escribir:

$\frac{AM}{MP} = \frac{MP}{MB}$ en donde $\frac{h}{r} = \frac{r}{2R-h}$ y de aquí despejamos *r*

Operando y despejando se obtiene:

$r^2 = h(2R - h)$; reemplazando esta expresión en la función volumen, nos queda:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h(2R - h) \cdot h$$

$V = \frac{1}{3}(2R\pi h^2 - \pi h^3)$; reemplazamos R = 6 y obtenemos la función volumen en donde la variable independiente es *h.*

$$V_{(h)} = \frac{1}{3}(12\pi h^2 - \pi h^3);$$

Ahora procedemos a derivar, considerando que el dominio de la función volumen es polinómica y puede tomar cualquier valor en el intervalo (0, 2R) = (0, 12):

$$V'_{(h)} = \frac{1}{3}(24\pi h - 3\pi h^2);$$

Después, aplicamos el teorema de Fermat e igualamos a cero la primera derivada, para hallar los puntos críticos:

$$\frac{1}{3}(24\pi h - 3\pi h^2) = 0$$

Luego de factorizar y operar descubrimos que los puntos críticos son:

$$h(8 - h) = 0; \text{ de donde}$$

$$h = 0; h = 8$$

Aceptamos el valor de h = 8 (altura del cono) en donde se produce un máximo volumen y calculamos el valor correspondiente de su radio:

$$r^2 = h(2R - h)$$

$$r^2 = h(12 - h); \text{ reemplazamos } h = 8$$

$$r^2 = 8(12 - 8)$$

$$r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Por lo tanto, las medidas del cono recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 6 cm, son:

Solución: Radio de la base: $r = 4\sqrt{2}\ cm$; Altura del cilindro: h = 8 cm

Recursos didácticos

- Estimado amigo, para profundizar su experticia en la resolución de problemas de optimización, debe estudiar los ejemplos ilustrativos que se proponen en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 215 en donde se explican con claridad y mucha didáctica la aplicación de las estrategias.

- Sugiero también que, estudie el video: problemas de optimización, en donde se explica de forma muy didáctica y concreta, los principales teoremas básicos para encontrar la derivada de una función.

Problemas de optimización

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta semana diez hemos estudiado la aplicación de estrategias para resolver problemas sobre máximos y mínimos (optimización) desarrollando algunos ejemplos de los problemas de aplicación, sin embargo, conviene que usted refuerce los procesos que, le preparen para luego desarrollar las distintas actividades calificadas y prepararse para las evaluaciones parciales y presenciales, tales como las siguientes:

- **Área mínima**: una página rectangular contendrá 30 pulgadas cuadradas de área impresa. Los márgenes de cada lado son de 1 pulgada. Encontrar las dimensiones de la página de manera tal que se use la menor cantidad de papel.
- **Área superficial mínima:** un sólido se forma juntando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de 14 cm^3. Encuentre el radio del cilindro que produce el área superficial mínima.
- **Volumen máximo**: determinar las dimensiones de un sólido rectangular (con base cuadrada) de volumen máximo si su área rectangular es de 337.5 cm^2
- **Volumen máximo:** encontrar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.
- **Longitud mínima**: dos fábricas se localizan en las coordenadas $(x,0)$ $(x,0)$ y con su suministro eléctrico ubicado en $(0,h)$. Determinar y de manera tal que la longitud total de la línea de transmisión eléctrica desde el suministro eléctrico hasta las fábricas sea un mínimo.

Con el desarrollo de los cinco problemas de optimización recomendados, usted pudo reforzar los aprendizajes para la resolución de problemas de aplicación con máximos y mínimos, empleando la primera derivada y hallando valores críticos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta semana diez, en donde se resuelven problemas de optimización, estamos listos para profundizar y culminar con las aplicaciones de la derivada, por esta razón, ahora estudiaremos el método de Newton y las diferenciales que nos proyectarán al nuevo concepto de integración.

Semana 11

3.8. Método de Newton

Vale la pena repasar algo de los innumerables aportes de Newton, recordando que fue uno de los "padres" del cálculo, para esto, interactúa con el siguiente escrito y contesta las tres interrogantes.

Historia del Método de Newton

Entonces, de acuerdo a lo que usted interactuó con el juego anterior, se puede entender que el método de Newton se refiere a los ceros de una función, es decir las raíces de una ecuación.

¿Cuándo se aplica el método de Newton?

En muchas ocasiones al intentar encontrar los ceros de una función o las raíces de una ecuación, nos encontramos con valores reales que no son enteros, en estos casos se puede aplicar este método.

¿Cómo se aplica el método de Newton?

Según el método de Newton se trata de realizar aproximaciones (iteraciones), aplicando el concepto de derivada y la recta tangente. Inicialmente, se parte de la consideración: sea $f(c)=0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene a c. Luego, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1. Hacemos una estimación inicial con x_1 muy cercana a c.

Paso 2. Determinamos una nueva aproximación: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Paso 3. Si el valor absoluto $|x_n - x_{n+1}|$ está dentro de la precisión deseada, entonces el valor x_{n+1} es la aproximación final.

Paso 4. Si el valor absoluto no está dentro de la precisión deseada, se regresa al paso 2. Y se calcula otra aproximación.

Ejemplo ilustrativo 33

Encontremos la tercera aproximación x_3 a la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$ partiendo de $x_1 = 2$.

Primero partimos que la función es: $f(x) = x^3 - 2x - 5$ y la derivada será entonces: $f'(x) = 3x^2 - 2$.

Para el proceso iterativo planteamos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n^{\,3} - 2x_n - 5}{3x_n^{\,2} - 2}$$

Los cálculos para tres interacciones los presentamos en una tabla:

Tabla 7.

Aproximaciones con el método de Newton

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	2,000000	-1,000000	10,000000	-0,1000000	2,100000
2	2,100000	0,0610000	11,230000	0,00054319	2,094568
3	2,094568	0,0001844	11,161645	0,00001652	2,094551
4	2,094551				

Nota. Construcción propia.

Aunque en la actualidad este método ha perdido vigencia para el cálculo de aproximaciones de las raíces de una ecuación o ceros de una función por el aparecimiento de software que permite con mucha facilidad determinar estos valores, sin embargo, este método de Newton es fundamental para entender el concepto de las diferenciales.

3.9. Antiderivadas

Como una consecuencia o aplicación de las aproximaciones por recta tangente que se estudió en la sección anterior, se puede llegar a la conceptualización de las diferenciales, para esto es fundamental interiorizar su definición, que la tomamos del texto básico.

Definición de diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene a x; además, la **diferencial de** x (denotada por dx) cualquier número real distinto de cero; entonces, la **diferencial de** y (denotada por dy) es: $dy = f'(x)\,dx$ **.**

¿Cómo se aplican las diferenciales?

Todas las fórmulas de la derivación pueden escribirse en forma diferencial, para esto observemos los siguientes casos en la siguiente tabla:

Tabla 8.

Comparación con derivada y diferencial

	Función dada	Derivada	Diferencial
1	$y = 3x^3$	$\frac{dy}{dx} = 9x^2$	$dy = 9x^2dx$
2	$y = 3\sqrt[3]{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{2/3}}$	$dy = 9x^2dx$
3	$y = \frac{2}{x^2}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^3}$	$dy = 9x^2dx$
4	$y = 3\ \mathrm{sen}\ x$	$\frac{dy}{dx} = 3\cos x$	$dy = 9x^2dx$
5	$y = (x^4 - 4)^4$	$y = 16x^3(x^4 - 4)^3$	$dy = 16x^3(3x^4 - 4)^4dx$

Nota. Construcción propia.

Le invito a profundizar su aprendizaje mediante el siguiente juego interactivo

Derivada y Diferencial

Continuemos con el aprendizaje mediante la revisión del ejemplo.

Ejemplo ilustrativo 34

Hallemos la diferencial de la función compuesta: $f(x) = \sqrt[3]{(2x^3 + 1)}$.

Hallamos la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt[3]{(2x^3 + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^3 + 1)^{-\frac{2}{3}}(6x^2) = \frac{2x^2}{(2x^3 + 1)^{\frac{2}{3}}}$$

Escribimos como diferencial:

Sol. $dy = f'(x) = \frac{2x^2}{(2x^3+1)^{\frac{2}{3}}}\ dx$

Recursos didácticos

- Estimado estudiante, para profundizar su destreza y habilidad en los procesos para aplicar el método de Newton y hallar diferenciales, sugiero que analice los ejemplos ilustrativos que se proponen en el texto básico Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo, a partir de la página 231 en donde se explican con claridad definiciones, teoremas y algoritmos relacionados a las diferenciales. Su aprendizaje debe reforzarse con el desarrollo de un número suficiente de los ejercicios y problemas propuestos. Es conveniente también que, estudie el video: Las diferenciales, en donde se explica de forma muy didáctica y concreta, los principales teoremas básicos para encontrar la diferencial de un a función.

Las diferenciales

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta semana once se han estudiado: el método de Newton para aproximar los ceros de una función o las raíces de una ecuación. De igual manera, el concepto y fórmulas de las diferenciales, en esta consideración usted debe reforzar estos aprendizajes, desarrollando las siguientes actividades calificadas:

- Utilice el método e Newton y continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran menos de 0,001. A continuación, encuentre los ceros utilizando una herramienta de graficación y compare los resultados: $f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$

- Encuentre sobre la gráfica de *f(x) = 4 -x*^{2} el punto más cercano al punto (1, 0).

- Encuentre la diferencial *dy* de las siguientes funciones: $y = \frac{x+1}{2x-1}$; $y = \frac{sec^2 x}{x^2+1}$

- Un topógrafo que está a 50 pies de la base de un árbol mide el ángulo de elevación de la parte superior de este último y obtiene un ángulo de elevación de 71,5^0 ¿Con qué precisión debe medirse el ángulo si el error porcentual en la estimación de la altura de este mismo será menor que 6%?

- Escriba una breve explicación de por qué la siguiente aproximación es válida: $\sqrt{}\,4{,}02 \approx 2 + \frac{1}{4}(0{,}02)$.

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas, usted pudo reforzar los aprendizajes de la aplicación del método de Newton para aproximaciones y cómo se determina la diferencial de una función.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta undécima semana, en donde se ha concluido con el estudio de las aplicaciones de las derivadas, estamos en condiciones de autoevaluarnos acerca de todos estos aprendizajes, entonces ¡adelante, participemos con mucha responsabilidad!

Autoevaluación 3

Seleccione verdadero o falso en las siguientes proposiciones.

1. ( ) El máximo de una función que es continua en un intervalo cerrado puede ocurrir en dos valores diferentes del intervalo.

2. ( ) La gráfica de todo polinomio cúbico tiene precisamente un punto de inflexión.

3. ( ) Si *f(x) > 0* para todo número real x, entonces f es creciente sin límite.

En las siguientes preguntas identifique la alternativa correcta.

4. Los extremos absolutos de la función y = $3^{2/3}$ -2x en el intervalo cerrado [-1, 1], son:

   a. Mínimo (0, 1); Máximo (-1, 9).
   b. Mínimo (0, 0); Máximo (-1, 5).
   c. Mínimo (0, 0); Máximo (2, 4).

5. **Contracción de la tráquea**. La tos obliga a que la tráquea (conducto de aire) se contraiga, lo cual afecta la velocidad v del aire que pasa a través de este conducto. La velocidad del aire al toser es $v = k(R-r)r^2$ siendo $0 \leq r \leq R$ donde k es una constante, R es el radio normal de la tráquea y r es el radio cuando se tose ¿Qué radio producirá la máxima velocidad del aire?

   a. $r = \frac{2R}{3}$.
   b. $r = \frac{4R}{3}$.
   c. $r = \frac{1}{3R}$.

2 Bimestre

6. El valor del límite $\frac{5x^2}{x+3}$ es:

a. -∞.
b. ∞.
c. 0.

7. Sabiendo que una página rectangular contendrá 3 pulgadas cuadradas de área impresa y los márgenes de cada lado son de 1 cm. Entonces, las dimensiones o medidas de la página de forma tal que, se use la menor cantidad de papel, son:

a. $(2+\sqrt{30})$ pulgadas por $(2+\sqrt{30})$ pulgadas.
b. $(4+\sqrt{30})$ pulgadas por$(4+\sqrt{30})$ pulgadas.
c. $(\frac{6}{7}+\sqrt{3})$ pulgadas por $(-\frac{6}{7}+\sqrt{3})$ pulgadas).

8. La suma de los perímetros de un triángulo equilátero y un cuadrado es igual a 10. Las dimensiones del triángulo y el cuadrado que producen el área total mínima, son:

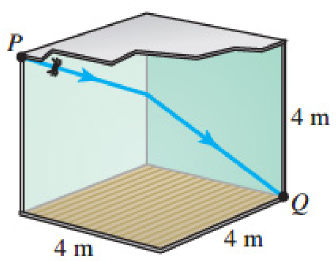
a. Lado del cuadrado: $\frac{10\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ y lado del triángulo $\frac{30}{9+4\sqrt{3}}$.
b. Lado del cuadrado 5 y lado del triángulo 6,4.
c. Lado del cuadrado $\frac{30}{9+4\sqrt{3}}$ y lado del triángulo $\frac{10\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$.

En las siguientes preguntas resuelva el problema y escriba su desarrollo

9. **Distancia máxima:** Considerar un cuarto en la forma de un cubo, de 4 metros de lado. Un insecto en el punto P desea desplazarse hasta el punto Q en la esquina opuesta, como se indica en la figura. Emplear el cálculo para determinar la trayectoria más corta. ¿Se puede resolver el problema sin el cálculo?

Figura 35.

Cubo cortado con sección



Nota. Adaptado de Larson y Edwards (2016)

Sol. máximo: (*2π; 17,57*); Mínimo: (*2,73; 0,88*).

10. **Longitud mínima:** Un triángulo rectángulo en el primer cuadrante tiene los ejes de coordenadas como lados, y la hipotenusa pasa por el punto (1, 8). Encontrar los vértices del triángulo de modo tal que la longitud de la hipotenusa sea mínima.

    Sol. (0, 0), (5, 0), (0, 10)

Ir al solucionario

Unidad 4. Integración

Estimado estudiante, los dos grandes conceptos que se aprenden en Cálculo son derivación e integración. Hasta la semana once, se estudiaron temas relacionados a la derivación y sus aplicaciones. A partir de esta semana, estudiaremos el segundo concepto: integración. Para esto, se consideran los siguientes temas específicos:

- Antiderivadas e integración indefinida
- Área
- Sumas de Riemann e integrales definidas
- Teorema fundamental del cálculo
- Integración por sustitución
- Integración numérica

Antes de ingresar en el mundo de la integración, vale cuestionarnos ¿La integración es una operación opuesta a la derivación? ¿En dónde pueden aplicarse el concepto de integración? ¿Cuál es el famoso teorema fundamental del cálculo? Para contestarnos estas y otras inquietudes.

¡Adelante, iniciemos con el estudio de la unidad: integración!

4.1. Antiderivadas e integración indefinida

Primero, debemos aclarar que la antiderivada de una función es, de alguna manera, una operación contraria a la derivada de una función. Antes de su definición formal, es necesario que usted juegue y practique sobre descubrí la función original de una derivada.

Descubrir antiderivadas

Muy interesante practicar y descubrir la función original, felicitaciones. Muy buen trabajo. Ahora podemos revisar la definición de antiderivada.

Definición de una antiderivada.- Una función F es una antiderivada de f, en un intervalo I, si se cumple: $F'(x) = f(x)$ para todo x en el intervalo I.

Además de la definición, es preciso puntualizar acerca de la representación de las antiderivadas, Al respecto se tiene el teorema 4.1 de donde, según lo que manifiestan Larson y Edwards (2016), se puede escribir: "Si *F* es una antiderivada de f en un intervalo *I* , entonces *G* es una antiderivada de *f* en el intervalo *I* si y sólo si, *G* es de la forma $g(x) = F(x) + C$, para todo *x* en *I*, siendo *C* una constante" (pág. 244).

Continuemos con el aprendizaje mediante la revisión del ejemplo.

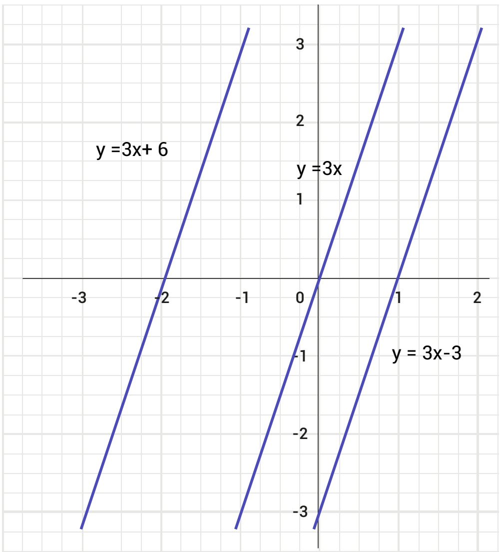
Ejemplo ilustrativo 35

Determinemos la solución general de la ecuación diferencial $y' = 3$.

Como se trata de la derivada $y' = 3$ podemos asegurar que la respectiva antiderivada, es una función cuya derivada es 3, es decir, la variable *x* debe estar elevada a la primera potencia.

Si $y' = 3$ entonces 3x es una antiderivada de 3. Por lo que, se puede escribir: $y' = 3x$.

Figura 36.
Dibujo de ecuación diferencial



Nota. Construcción propia en GeoGebra.

Pero, por el teorema 4.1 existe una solución general: $y = 3x + C$, en donde C es una constante que representa un número real.

En la gráfica de la izquierda, se grafica la solución general para los valores de $C = 6$, $C = 0$ y $C = -3$ Entonces, las tres ecuaciones específicas graficadas, son:

$$y = 3x + 6$$

$$y = 3x$$

$$y = 3x - 3$$

¿Cómo surge la integral indefinida?

Cuando se resuelve una ecuación diferencial, como en el caso anterior y' = 2 , es conveniente escribirla en la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$, lo cual es equivalente a *dy = f(x)dx* , y se denomina ecuación diferencial. En el caso anterior, sería: *dy = 2dx*, de donde como ustedes recordarán, se obtuvo la solución general: *y = 2x +c.*

Aquí algo muy importante, atención por favor: la operación para encontrar las soluciones de una ecuación diferencial se denomina antiderivación o integración indefinida y se denota mediante el signo de integral (∫) . En el caso anterior, podemos escribir: *y = ∫ 2dx = 2x +c.*

En forma general se puede escribir: *y = ∫ f(x)dx = F(x) +c*

¿Cuáles son las reglas básicas de integración?

Como lo observamos en párrafos anteriores, la integración o antiderivación y la derivación constituyes operaciones inversas, por lo cual se puede afirmar que: la integración es la inversa de la derivación. Por ejemplo: *∫ 2xdx =* x^2 *+c.*

En otras palabras, la derivada de la integral, es igual a la función original:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f'(x)dx\right] = f(x)$$

Por ejemplo, hallemos la derivada de la función *f(x) =* $3x^2$ y luego interpretemos la fórmula anterior.

La derivada de *f (x) =* $3x^2$ es *f'(x) = 6x* , entonces podemos afirmar que:

$$\frac{d}{dx}\left[\int 6x\ dx\right] = 3x^2$$

¿Cuáles son las reglas básicas de integración?

El análisis anterior nos permite y faculta escribir las principales reglas de integración a partir de las reglas de derivación, para esto solicito que usted participe de la siguiente actividad interactiva:

Reglas básicas de integración

Con su participación en la actividad interactiva, pudo comparar las reglas básicas de derivación e integración, de esta manera las podrá recordar con mayor facilidad. Vale la pena indicar que, la regla de la potencia para la integración tiene restricción para $n \neq -1$. Por esta razón se dice que, la evaluación de $\int \frac{1}{x}\,dx$ debe esperar hasta el análisis de la función logaritmo natural.

Ejemplo ilustrativo36

Evaluemos la integral indefinida: $\int 2x^3 dx$

$\int 2x^3 dx$	Integral indefinida dada
$\int 2x^3 dx = 2\int x^3 dx$	Aplicamos la regla de la constante

$$= 2 \cdot \left(\frac{x^4}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + C$$ **Sol.**

Recursos didácticos

- Estimado estudiante, para profundizar su experticia en la aplicación de las reglas de derivación y de integración, sugiero que analice los ejemplos ilustrativos y las brillantes explicaciones que se proponen en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 244 en donde se explican con claridad definiciones, teoremas y algoritmos relacionados a la integración partiendo de la derivación. Su aprendizaje debe reforzarse con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios y problemas propuestos al final de la temática.

- Es conveniente también que, estudie el video: reglas básicas de integración, en donde se explica de forma didáctica y concreta, las principales reglas de la integración.

Reglas básicas de integración

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego del estudio de los contenidos previstos para la décima segunda semana, en donde se analizaron las reglas básicas de la integración, es muy importante estimado amigo que, refuerce los aprendizajes logrados desarrollando ejercicios y problemas que le preparen para luego trabajar las distintas actividades calificadas y prepararse de la mejor manera para las evaluaciones parciales y presenciales; ejercicios o problemas, tales como:

- Encuentre la solución general de la ecuación diferencial y compruebe el resultado mediante derivación: $\frac{dy}{dx} = 9x^2$; $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2}$
- Complete la tabla propuesta para encontrar la integral indefinida:

Tabla 9.

Proceso para integrar y simplificar una función

Integral original	Reescribir	Integrar	Simplificar
$\int \sqrt[3]{x}\, dx$			
$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$			
$\int \frac{1}{(3x)^2} dx$			

Nota. Construcción propia.

- Encuentre la integral indefinida y compruebe el resultado mediante derivación: $\int (x+1)(3x-2)dx$; $\int (sec^2 x - sen\ x)\ dx$

- Determine la solución particular que satisface la ecuación diferencial y las condiciones iniciales: $f''(x) = sen\ x$; $f'(0) = 1$; $f(0) = 6$

- **Gravedad lunar.** Sobre la luna, la aceleración de la gravedad es de -1,6 m/s^2. En la luna se deja caer una piedra desde un peñazco y golpea la superficie de esta misma, 20 segundos después. ¿Desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas propuestas, usted pudo reforzar los aprendizajes para aplicar convenientemente las reglas básicas de la integración, así como resolver problemas relacionados con esta temática.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta décima segunda semana de estudios, cuando iniciamos con la conceptualización de los procesos de integración, felices por adquirir nuevos y valiosos conocimientos, por lo que podemos decir, estamos listos para analizar y aprender el concepto de área.

Semana 13

4.2. Área

Primero vale recordar de cursos anteriores la notación sigma para escribir y calcular una suma. La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ se escribe como: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. En donde *i* es el índice de suma, a_i es el *i - ésimo* término de la suma y los límites inferior y superior de la suma son 1 y n.

Ejemplos ilustrativos 37

Hallemos las sumas indicadas

a. $\sum_{i=1}^{8} i = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$

b. $\sum_{i=1}^{6} (3i-2) = (3.1-2)+(3.2-2)+(3.3-2)+(3.4-2)+(3.5-2)$

$= 1 + 4 + 7 + 10 + 13 = \mathbf{35}$

c. $\sum_{j=3}^{6} [j^3-1] = [3^3-1]+[4^3-1]+[5^3-1]+[6^3-1]$

$= 26 + 63 + 124 + 215 = \mathbf{428}$

Es importante considerar el teorema 4.2 propuesto en el texto básico, el cual se refiere a fórmula que facilitan calcular las sumatorias. Para interiorizar este teorema le invito a participar de la actividad interactiva siguiente:

Fórmulas de sumatoria

¿Para qué nos sirven estas fórmulas de sumatoria?

Las fórmulas que analizamos en el párrafo anterior tiene especialidad utilidad para calcular de forma aproximada el área de una región plana en donde alguno de sus lados es una curva.

Área

En páginas anteriores, al inicio del curso escribimos que el Cálculo está relacionado con dos grandes problemas: el problema de la recta tangente y el problema de del área. Anteriormente se analizó la solución del problema de la recta tangente mediante el concepto de derivada, partiendo del análisis de límites.

El otro problema del Cálculo, referido al cálculo de áreas en regiones planas en donde todos o alguno de los lados es una curva, lo analizamos a partir de este momento.

Por ejemplo, si se necesita calcular el área de la región plana de la figura propuesta a continuación, no podemos aplicar directamente una fórmula de la geometría euclideana, por lo que, es necesario ver otra estrategia, en esta parte de nuestro estudio, analizaremos una manera para obtener un valor aproximado a través de la suma de rectángulos.

Le invito a reforzar sus conocimientos revisando el siguiente ejemplo

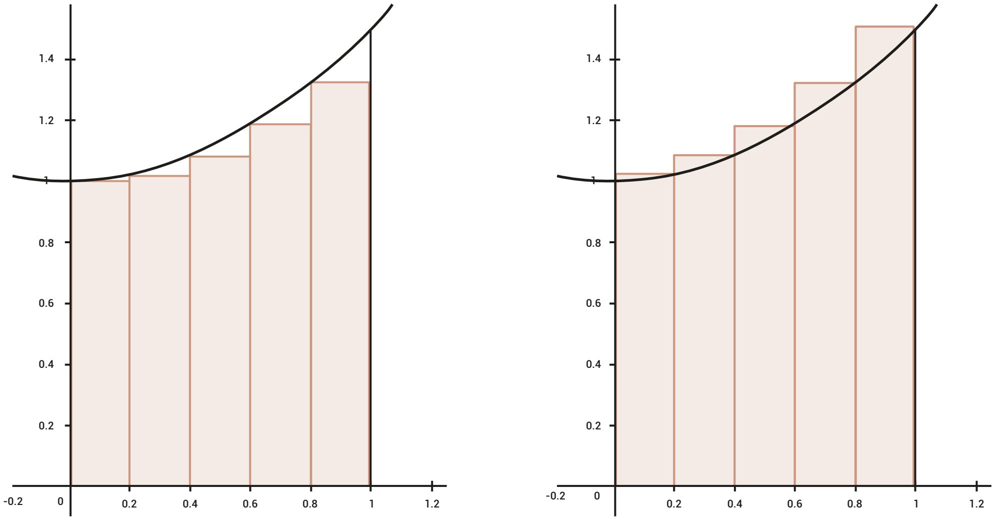
Ejemplo ilustrativo 38

Calculemos el valor aproximado del área de la región plana comprendida entre la curva dada por la función $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$, el eje *X*, el eje *Y*, y la recta $x = 1$, construyendo rectángulos, dentro y fuera de la región parabólica, y anotemos una conclusión.

Primero graficamos los dos casos posibles:

Figura 37.

Gráficos de áreas aproximadas



Nota. Construcciones propias en GeoGebra.

Si la región plana se divide en rectángulos, puede suceder lo siguiente:

La primera posibilidad: el área dela región plana es mayor a la suma del área de los rectángulos, como es el caso que se grafica arriba en la parte izquierda. Mientras que, **la segunda posibilidad**: el área de la región plana es menor al área de los rectángulos, lo cual se puede observar en el gráfico de arriba parte derecha.

a. Para resolver el ejemplo ilustrativo, primero analizamos el gráfico de la derecha en donde observamos que, todos los rectángulos miden de ancho 0,2 unidades o $\frac{1}{5}$. Por lo que, podemos escribir que los puntos terminales de los cinco intervalos son $\frac{1}{5}i$ siendo *i = 1,2.,3,4,5.* Mientras que, las alturas de cada rectángulo varían y sus valores se pueden obtener al encontrar el valor de la ordenada en el respectivo punto terminal de cada intervalo, es decir las alturas son $f\left(\frac{1}{5}i\right)$ para *i = 1,2.,3,4,5.*

Además, considerando que, el área de cada rectángulo es el producto de la base $(\frac{1}{5})$ por la altura $f\left(\frac{1}{5}i\right)$, el área total aproximada de la región plana limitada por la curva de la función dada, es:

$$\sum_{i=1}^{n} base\ x\ altura = \sum_{i=1}^{n} [\left(\frac{1}{5}\right) \cdot f\left(\frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}i\right)^2\right] = 1{,}22$$

Observamos que, en el caso de la gráfica de la derecha, la región plana se encuentra dentro de los rectángulos lo cual permite afirmar que, el área aproximada es menor al valor de 1,22.

b. Hacemos algo similar para el otro caso, analizamos el gráfico de la izquierda en donde observamos que, todos los rectángulos miden también 0,2 unidades o $\frac{1}{5}$. Por lo que, podemos escribir que los puntos terminales de los cinco intervalos son $\frac{1}{5}(i-1)$ siendo *i = 1,2.,3,4,5* o simplemente $\frac{1}{5}i$ siendo *i = 1,2.,3,4.* Mientras que, las alturas de cada rectángulo varían y sus valores se pueden obtener al encontrar el valor de la ordenada en el respectivo punto terminal de cada intervalo, es decir las alturas son $f\left(\frac{1}{5}i\right)$ para *i = 1,2.,3,4.*

Además, considerando que, el área de cada rectángulo es el producto de la base $\left(\frac{1}{5}\right)$ por la altura $f\left(\frac{1}{5}i\right)$ para *i = 1,2.,3,4*, el área total aproximada de la región plana limitada por la curva de la función dada, es:

$$\sum_{i=1}^{n} base\ x\ altura = \sum_{i=1}^{n} [\left(\frac{1}{5}\right) \cdot f\left(\frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}i\right)^2\right] = 1{,}12$$

Observamos que, en el caso de la gráfica de la izquierda, todos los rectángulos se encuentran dentro de la región plana lo cual permite afirmar que, el área aproximada es mayor que 1,22.

Si combinamos las dos conclusiones parciales, podemos escribir lo siguiente:

Sol. 1,12 < Área de la región) < 1,22

¿Qué sucede cuando el número de rectángulos aumenta indefinidamente?

Del análisis realizado en el ejercicio anterior se puede deducir que, para calcular el valor aproximado de una región plana se podría formar un gran número de rectángulos y que, mientras mayor sea el número de rectángulos, más aproximada será el valor del área que se determine.

Además, cuando el número de rectángulos aumenta, los valores del área con rectángulos inscritos y circunscritos tienden a ser iguales. De este análisis se puede inferir un teorema al respecto, el cual se encuentra detallado y explicado en el texto básico de Larson y Edwards (2016) y como consecuencia de este teorema, aparece una definición para calcular el área de una región limitada por una la gráfica de una función, el eje *X* y dos rectas verticales.

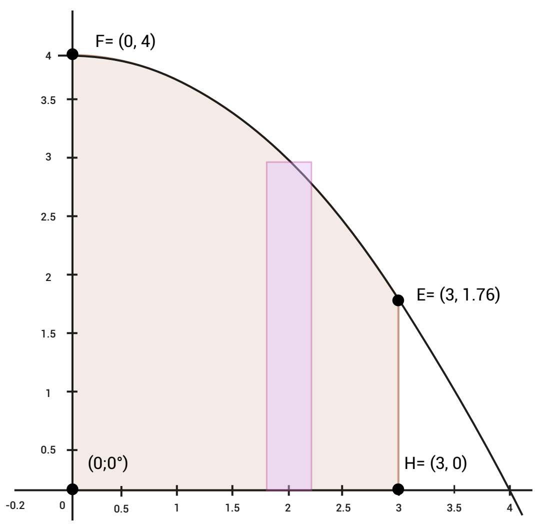
Esta definición respecto del área de una región en el plano manifiesta que, si *f* es continua y no negativa en el intervalo cerrado [*a*,*b*] el área de la región limitada por la gráfica de *f*, el eje equis y las rectas verticales *x = a* y *x = b* , entonces el área de la región plana es: Área = $\sum_{i=1}^{n} f(ci)\Delta x$, en donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Continuemos con el aprendizaje mediante la revisión del ejemplo.

Ejemplo ilustrativo 39

Encontremos el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$, el eje *X* y las rectas verticales *x = 0* y *x = 3.*

Figura 38.
Área de una región plana



Nota. Construcción propia con GeoGebra.

La función *f* es continua y no negativa en el intervalo [0, 3]. Entonces, dividimos el intervalo [0, 3] en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = \frac{3}{n}$. Además, los extremos derechos $c_i = \frac{3i}{n}$ son adecuados.

Para encontrar el área, aplicamos el límite cuando *n* tiende al infinito:

Área = $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

$$\text{Área} = \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \frac{1}{4}\left(\frac{3i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\text{Área} = \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{9i^2}{n^2}\right]\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\text{Área} = \sum_{i=1}^{n} 4 - \frac{27}{4n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2]$$

$$\text{Área} = \cdot\, 4n - \frac{27}{4n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$\text{Área} = 12 - \frac{9}{4} - \frac{27}{8n} - \frac{9}{8n^2})$$

$$\text{Área} = 12 - \frac{9}{4} - \frac{27}{8n} - \frac{9}{8n^2}$$

$$\text{Área} = 12 - \frac{9}{4} - 0 - 0$$

Área = 9,75

4.3. Sumas de Riemann e integrales definidas

Cuando se analizó el cálculo de áreas en la sección anterior, al intervalo que definía el área a calcular se lo dividía en *n* subintervalos iguales, lo cual se hizo por conveniencia y facilidad para los cálculos, sin embargo, podríamos dividir en subintervalos de distinto tamaño y el límite cuando *n* tiende a infinito nos sigue dando el valor del área de la región limitada por una curva correspondiente a una función.

Por esta razón, como lo afirman los autores Larson y Edwards (2016) la razón por la cual una partición particular en subintervalos de distinto tamaño, también nos da el área apropiada es que, ***cuando n crece, el ancho del subintervalo más grande tiende a cero***. Como lo afirman los autores del texto básico, esta es la característica clave de las integrales definidas.

Al ancho del subintervalo más grande de una partición Δ se denomina ***norma*** de la partición del intervalo [a,b]. Si todos los subintervalos tiene el mismo ancho, se dice que la partición es regular y la norma se denota de la siguiente manera: $\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$. De donde se observa que, cuando la norma $\|\Delta\|$ tiende a cero entonces el número de intervalos tiende al infinito: $n \to \infty$.

Integrales definidas

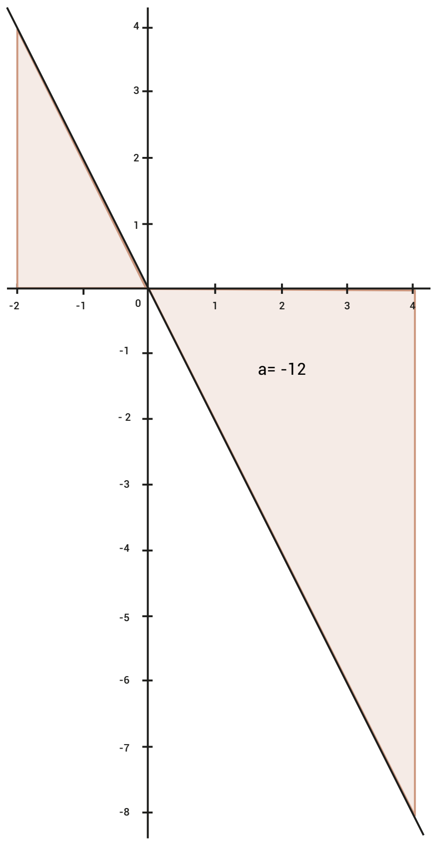
Para definir la integral definida, se considera el límite cuando la norma tiende a cero $\sum_{i=1}^{n} \quad f(c_i)\Delta x_i$. Para interiorizar adecuadamente esta definición le invito a participar de la siguiente actividad interactiva propuesta.

Integral definida

Ejemplo ilustrativo 40

Evaluemos la integral definida como límite: $\int_{-2}^{4} \quad -2x$.

Figura 39.
Integral definida como límite



En este caso, $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{6}{n}$, además si elegimos c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo, se obtiene: $c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{6i}{n}$.

Entonces, la integral definida será:

$$\int_{-3}^{2} \quad -2x = \sum_{i=1}^{n} \quad f(c_i)\Delta x_i$$

$$\int_{-3}^{2} \quad -2x = \sum_{i=1}^{n} \quad f(c_i)\Delta x_i$$

$$\int_{-3}^{2} \quad -2x = \sum_{i=1}^{n} \quad -2(-2+\frac{6i}{n})\cdot\frac{6}{n}$$

Nota. Construcción propia con GeoGebra.

$$\int_{-3}^{2} -2x = \sum_{i=1}^{n} (-2+\frac{6i}{n})$$

$$\int_{-3}^{2} -2x = -2\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$\int_{-3}^{2} -2x = -2n + \frac{6}{n}(\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$\int_{-3}^{2} -2x = -2n) - \frac{12}{n}\cdot\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}]$$

$$\int_{-3}^{2} -2x = 24 - 36 - \frac{36}{n})$$

$$\int_{-3}^{2} -2x = 24 - 36 - 0$$

Sol. $\int_{-3}^{2} -2x = -12$

¿La integral definida puede ser negativa?

Por supuesto que sí, la integral puede ser cualquier número real y para que represente un área, debe ser continua y no negativa en el intervalo [a, b]. En este caso no represeva en una parte del intervalo [-3, 2].

De aquí aparece el siguiente teorema de la integral definida como área de una región, que según está descrito por Larson y Edwards (2016), nos dice: "Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado [a,b] entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, está dada por: Área = $\int_{a}^{b} f(x)dx$".

Al respecto de las integrales que representan el área, le invito a participar de la actividad interactiva, en donde usted debe descubrir las áreas que representan a las respectivas integrales definidas.

Integral definida

Con su participación en la actividad interactiva usted ha logrado relacionar la integral de una diferencial con su respectiva función, lo cual le permitió interiorizar algunas propiedades que se cumplen en las integrales definidas.

¿Cuáles son las propiedades básicas de las integrales definidas?

En las integrales se cumplen algunas propiedades, como la propiedad aditiva de intervalos, propiedad del coeficiente, propiedad de la suma o resta de diferenciales, entre las más importantes. Todas ellas se explican e ilustran con sendos ejemplos en su texto básico desde la página 271.

Recursos didácticos

- Estimado estudiante, para profundizar sus aprendizajes del área, las sumas de Riemann y las integ, sugiero que analice las explicaciones y estrategia didácticas en los ejemplos ilustrativos brillantemente propuestos en el texto básico por **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 162. También vale señalar que, su aprendizaje debe reforzarse con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios y problemas de aplicación propuestos al finalizar cada uno de estos temas.

- Solicito también que, estudie el video: sumas de Riemann y cálculo de área, en donde se explica de forma didáctica y concreta, la forma para determinar el área de una región plana mediante la suma de algunos rectángulos a través de sumas de Riemann.

Sumas de Riemann y cálculo de área

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta decimotercera semana se ha estudiado áreas, sumas de Riemann e integrales definidas, entonces, usted debe reforzar sus aprendizajes, desarrollando ejercicios y problemas que le preparen para luego lograr el mayor éxito en las actividades calificadas y las evaluaciones parciales y presenciales. Por esta razón, le invito a desarrollar lo siguiente:

- Utilice las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para calcular la suma. Utilice la función de suma de la herramienta de graficación para comprobar el resultado: $\sum_{i=1}^{15} i(i-1)^2$.

2 Bimestre

- Mediante el proceso de límite, determine el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo indicado. Dibuje la región con GeoGebra: y = $x^2 - x^3$; $[-1,1]$.

- Demuestre la fórmula mediante inducción matemática, para lo cual se sugiere revise los conocimientos en algún curo de precálculo: $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$.

- Evalúe la integral definida mediante la definición de límite: $\int_{-2}^{1} (2x^2+3)dx.$

- Escriba el límite como una integral definida en el intervalo [*a, b*], donde c_i es cualquier punto en el *i -ésimo* subintervalo.

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas, usted pudo reforzar los aprendizajes sobre el cálculo aproximado de áreas a través de la aplicación de sumas de Riemann y la interpretación introductoria a las integrales definidas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta decimotercera semana, en donde se ha concluido con el estudio del cálculo de áreas utilizando métodos aproximados, las sumas de Riemann y la introducción a las integrales definidas, estamos listos para conocer uno de los dos teoremas más importantes del Cálculo.

Semana 14

4.4. Teorema fundamental del cálculo

Desde el tiempo de los griegos, hace ya más de dos mil años, según nos cuenta la historia, Arquímedes (287 -212 a.C.) utilizó los conceptos básicos de la integral definida. Es decir que, el concepto del cálculo integral que surge de la necesidad de calcular áreas definidas por curvas, es anterior al concepto del cálculo diferencial que surge del problema de la recta tangente, sin embargo y por cuestiones específicamente didácticas, se invierte su orden al momento de estudiarlos.

Ahora bien y como lo afirma Leithold Louis (1992), por el siglo XVII, dos matemáticos, casi simultáneamente, pero trabajando independientemente en países distintos, Newton y Leibniz, demostraron de qué manera se puede utilizar el Cálculo para determinar el área de una región acotada por curvas, para lo cual evaluaron mediante la antidiferenciación una integral definida.

El procedimiento anterior genera lo que se conoce como los *teoremas, fundamentales del cálculo*, en los cuales se puede distinguir la relación inversa entre la derivada y la integral.

Estimado estudiante, procedamos ahora, a escribir el primer teorema fundamental del cálculo: **Si una función *f* es continua en el intervalo cerrado [a,b] y *F* es una antiderivada de *f* en el intervalo [a,b] entonces:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La demostración del teorema fundamental del cálculo se propone en el texto básico de Larson y Edwards (2016) página 278, y para interiorizar con mayor facilidad, solicito que participe de la siguiente actividad interactiva:

Demostración del Teorema Fundamental del Cálculo

Luego de conocer y haber practicado con la demostración del primer teorema fundamental del cálculo, solicito a usted que, considere las estrategias para utilizar el teorema fundamental del Cálculo y resuelva problemas similares al que se explica a continuación.

Ejemplo ilustrativo 41

Calculemos las siguientes integrales definidas:

a. $\int_2^3 (2x^3 + x)\,dx = \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \left(2.\frac{3^4}{4} + \frac{3^2}{2}\right) - \left(2 \cdot \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2}\right) = 32$

b. $\int_{-3}^2 \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)dx = \left[\frac{5}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^2 = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{(-3)^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-3)^2}{2}\right) = \frac{365}{12}$

c. $\int_{-1}^1 \left(x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \left[\frac{x^{7/3}}{7/3} + 4 \cdot \frac{x^{4/3}}{4/3}\right]_{-3}^2 = \left(\frac{1^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + 4 \cdot \frac{1^{\frac{4}{3}}}{\frac{7}{3}}\right) - \left(\frac{(-1)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + 4 \cdot \frac{(-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right) = \frac{129}{28}$

d. $$\int_{-1}^{2} 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\int_{-1}^{2}\sqrt{x^3+1}(3x^2dx) = \frac{2}{3}\cdot\left[\frac{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left[\left(\frac{(2^3+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{(-1^3+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right]=\frac{4}{9}\cdot(27)=12$$

¿Se puede calcular el área de una región plana aplicando el teorema fundamental del Cálculo?

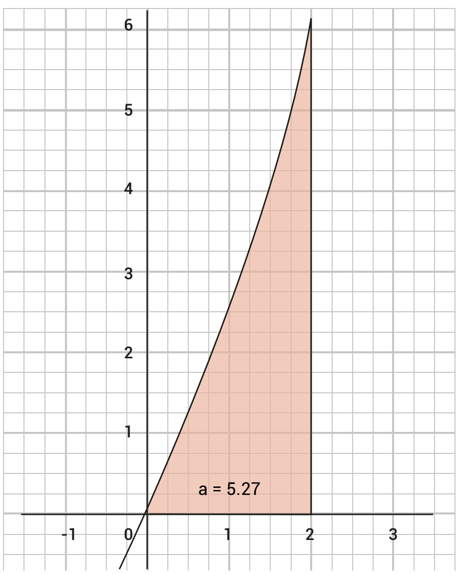
Claro que sí, justamente la importancia del teorema fundamental del Cálculo radica en que nos permite calcular de manera exacta el área de una región plana limitada por una o más curvas.

Ejemplo ilustrativo 42

Encontremos el área de la región plana delimitada por la gráfica de $y = x\sqrt{x^2+5}$, el eje *x* y la recta *x = 2.*

Figura 40.

Área de una región plana



Nota. Construcción propia en GeoGebra = 5,27

Primero verificamos que, el teorema pueda ser aplicado, para eso y debe ser mayor que cero en el intervalo [0, 2].

$$\text{Área} = \int_{0}^{2} x\sqrt{x^2+5}\;dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sqrt{x^2+5}\;(2x\,dx)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+5)^{3/2}}{3/2}\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left[(9)^{\frac{3}{2}}-(5)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(27-5\sqrt{5}\right)$$

Solución: el área exacta es de la región plana es $\frac{1}{3}(27-5\sqrt{5})$ o el valor aproximado, es 5,27 unidades cuadradas.

¿Cuál es el segundo teorema fundamental del Cálculo?

Los autores Larson y Edwards (2016) escriben el segundo teorema de la siguiente manera: “Si *f* es continua en un intervalo abierto *I* que contiene *a*, entonces, para toda *x* en el intervalo $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$.

El segundo teorema fundamental del cálculo se refiere a que, toda función *f* admite una antiderivada. Sin embargo, esta no necesita ser una función elemental.

Otra forma más sencilla de expresar el segundo teorema fundamental del cálculo es como lo plantea Leithold (1992) quien manifiesta que: "Si la función *f* es continua en el intervalo cerrado [a,b] y siendo *g* una función real tal que *g'(x) = f(x)* para toda *x* en [a,b] entonces: $\int_a^b f(t) = g(b) - g(a)$" (pág. 453).

Observemos dos ejemplos ilustrativos al respecto.

Ejemplo ilustrativo 43

Apliquemos el segundo teorema fundamental del cálculo para determinar: $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2-4}\,dt\right]$.

Primero verificamos que la función $f(t) = \sqrt{t^2-4}$ es continua en toda la recta real, por lo tanto, se puede emplear el segundo teorema fundamental del cálculo. La aplicación es muy sencilla y directa:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2-4}\,dt\right] = \sqrt{x^2+1}$$

Ejemplo ilustrativo 44

Apliquemos el segundo teorema fundamental del cálculo y encontremos el valor de la integral:

$$\int_2^3 x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^3 = \frac{(3)^4}{4} - \frac{(2)^3}{4} = \frac{81}{4} - 2 = \frac{73}{4}$$

Recursos didácticos

- Estimado estudiante, para profundizar su aprendizaje en el estudio del teorema fundamental del cálculo y sus aplicaciones sugiero que, de la manera más responsable característica de un estudiante UTPL, revise los teoremas complementarios, ejemplos ilustrativos y explicaciones acertadas que se proponen en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 277. Su aprendizaje debe completarse con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios y problemas propuestos al final de esta sección.

- Además, sugiero que estudie el video: teorema fundamental del cálculo, en donde se explica de forma clara, la utilización del teorema fundamental del cálculo y su aplicación para hallar el área de una región limitada por una o más curvas.

Teorema fundamental del cálculo

Actividades de aprendizaje recomendadas

Después de estudiar los contenidos propuestos para esta décima quinta semana, en donde se analizó la aplicación del *teorema fundamental del cálculo,* es necesario estimado amigo que, refuerce los aprendizajes logrados, desarrollando actividades que le preparen para luego trabajar las actividades calificadas y prepararse de la mejor manera para las evaluaciones parciales y presenciales, como las siguientes:

- Utilice una herramienta de graficación para representar la integral. Utilice la gráfica para determinar si la integral definida es positiva, negativa o cero. $\int_0^{\pi} \cos\cos x\, dx$

- Determine la integral definida de la función algebraica. Utilice una herramienta de graficación para comprobar el resultado: $\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{3}\, dx$.

- Encuentre el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 1 - x^4$, y la recta $y = 0$

- Determine los valores de *c* cuya existencia es garantizada por el teorema del valor medio para integrales de la función en el intervalo dado: $y = \frac{x^2}{4}$, [0, 6]
- Encuentre el valor medio de la función en el intervalo dado y todos los valores de *x* en el intervalo para los cuales la función es igual a su valor promedio: $f(x) = x^3$, [0,1]
- Utilice el segundo teorema fundamental del cálculo para determinarF'(x): $F(x) = \int_0^x \quad sec^3 t\, dt$.

Con el desarrollo de las seis actividades recomendadas propuestas, usted pudo reforzar los aprendizajes acerca de la aplicación de los teoremas fundamentales del cálculo.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

> Luego de estudiar el teorema fundamental del cálculo y sus teoremas complementarios, se pudo dar cuenta de algunas dificultades en ciertos ejercicios, por esta razón, en la siguiente semana estudiaremos dos técnicas importantes que nos facilitan la integración.

Semana 15

4.5. Integración por sustitución

Estimado estudiante, en esta semana, casi la finalizar el periodo de estudios, analizaremos la manera de integrar funciones compuestas, lo cual se fundamenta en la observación de la siguiente necesidad:

Para integrar cualquier función, es necesario que se cuente con su diferencial, por ejemplo:

a. $\int \quad x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$ En este caso, la diferencial de *x* es *dx*.

b. $\int \quad (x-1)^3\,dx = \frac{(x-1)^4}{4} + C$ En este caso, la diferencial de (x-1) es dx.

c. $\int \quad (3x-1)^3\,dx =$ En este caso, la diferencial de *(3x-1)* es 3*dx*.

por lo que debemos dividir y multiplicar por 3.

$\frac{1}{3}\int \quad (3x-1)^3\,(3dx) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^4}{4} + C$ En estas condiciones ya podemos integrar

d. $\int \quad (2-5x)^2\,dx =$ En este caso, la diferencial de (2-5*x)* es -5*dx*,

por lo que debemos dividir y multiplicar por -5.

$-\frac{1}{5}\int \quad (2-5x)^2\,(-5dx) = -\frac{1}{5}\cdot\frac{(2-5x)^3}{3} + C$ En estas condiciones ya podemos integrar

Por esta razón, se debe considerar un teorema que fundamenta la integración de una función compuesta, al respecto Larson y Edwards (2016) dicen: "Sea *g* una función cuyo rango es un intervalo *I*, y sea *f* una función continua en *I*. Si *g* es derivable en su dominio y *F* es una antiderivada de *f* sobre *I*, entonces $\int \quad f(g(x))\,g'(x)dx = F(g(x)) + c$. Si $u = g(x)$ entonces $du = g'(x)\,dx$ y $\int \quad f(u)du = F(u) + c$ (pág. 292).

Para aplicación de este teorema, muchas veces es conveniente hacer los cálculos mentalmente y determinar mediante un artificio mental, la derivada de la función compuesta acomodando los números o variables, lo cual los autores del texto básico denominan encontrar y aplicar patrones, como se detalla en los siguientes ejemplos:

Ejemplo ilustrativo 45

Apliquemos el teorema para integrar funciones compuestas y hallemos el valor de las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int x^2(x^3-2)^2dx = \frac{1}{3}\int (x^3-2)^2(3x^2dx) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3-2)^3}{3} + C = \frac{1}{9}(x^3-2)^3 + C$

b. $\int 2\,sen\,6x\,dx = \frac{1}{3}\int sen\,6x\,(6dx) = \frac{1}{3}(-\cos\cos 6x) + C = -\frac{1}{3}\cos\cos 6x + C$

c. $\int_0^2 5x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{5}{3}\int_0^2 (x^3+1)^{1/2}\,(3x^2dx) = \frac{5}{3}\left[\frac{(x^3+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2$

$$= \frac{10}{9}\left[(x^3+1)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{10}{9}\left[(8+1)^{3/2} - (0+1)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{10}{9}(27-1) = \frac{260}{9}$$

¿Cuándo se hace el cambio de variables o la sustitución?

Estimado estudiante, esta recomendación no es obligatoria, depende de su capacidad para el cálculo y retención mental, sin embargo, de acuerdo a la complejidad de las funciones compuestas, muchas veces conviene hacer un cambio de variables, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo ilustrativo 46

Apliquemos el cambio de variables para evaluar la integral indefinida:
$\int x\sqrt{x+2}\,dx.$

Para evaluar esta función por el proceso mental de identificar los patrones, observamos que es muy complicado por lo que, procedemos a realizar el cambio de variable y realizar la sustitución:

$u = \sqrt{x+2}$ de donde $u^2 = x + 2$; en esta igualdad, despejamos *x* y se escribe su diferencial

$x = u^2 - 2$ entonces $dx = 2u\,du$; ahora, procedemos a sustituir la nueva variable y luego, a integrar

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx = \int (u^2-2)\cdot u\cdot(2u\,du) = 2\int (u^4-u^2)\,du =$$

$$= 2\left[\int u^4\,du - \int u^2du + C\right] = \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + 2C$$

2 Bimestre

Luego de realizar integración, regresamos a la variable original, haciendo el reemplazamiento $u = \sqrt{x+2}$. Atención, en lugar de 2C escribimos C, es una constante.

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx = \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x+2})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{x+2})^3 + C$$

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx = \frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} + C$$

Ejemplo ilustrativo 47

Apliquemos el cambio de variable para evaluar la integral definida: $\int_0^{\pi/2} sen^3 x \cos\cos x\, dx$.

Procedemos a realizar el cambio de variables y realizar la sustitución:

u = sen x de donde *du = cos cos x dx*; En esta igualdad, despejamos *x* y se escribe su diferencial

Cuando $x = \frac{\pi}{2}$, $u = 1$; cuando x = 0, u = 0 calculamos los nuevos límites de acuerdo a la variable *u*

Luego sustituimos e integramos.

$\int_0^{\pi/2} sen^3 x \cos\cos x\, dx = \int_0^1 u^3\, du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1$ no es necesario regresar a la variable original

Sol. $\int_0^{\pi/2} sen^3 x \cos\cos x\, dx = \frac{1}{4}$

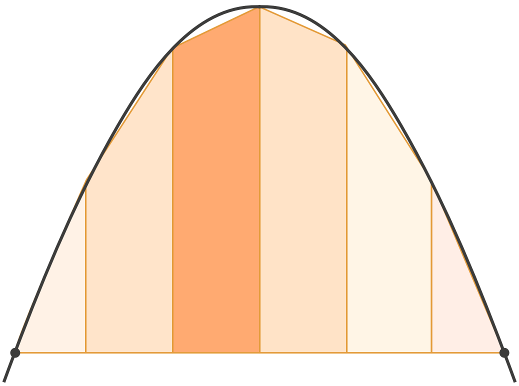
4.6. Integración numérica

En algunas ocasiones nos encontramos que algunas funciones elementales, no tienen antiderivadas que sean funciones elementales, en estos casos, la aplicación del teorema fundamental del Cálculo es bastante complicado por lo que, resulta más sencillo, recurrir a una técnica llamada **integración numérica.**

Por ejemplo, no hay función elemental que tenga alguna de las siguientes funciones como su derivada: $\sqrt{x^4-2}$; $\sqrt{x}\, cos\, cos\; x$; $sen\; x^2$.

Considerando que, la integral de una función está referida a su área, se considera dicha área y se forman trapecios, como se ilustra en el gráfico siguiente:

Figura 41.
Gráfica de una región con trapecios



Nota. Construcción propia con GeoGebra.

En la gráfica se observa cómo se ha divido la región plana en trapecios. A partir de esta gráfica, se puede entender la técnica que vamos a estudiar y que también se la conoce como la regla trapecial.

Para aplicar esta regla es necesario que la función sea continua en el intervalo [a, b].

La regla del trapecio, escrita como lo plantean Larson y Edwards (2016) es “sea *f* continua en [a,b]. La regla del trapecio para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ está dada por:

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Además, como n $\rightarrow\infty$ el lado derecho se aproxima a $\int_a^b f(x)dx$" (pág. 306).

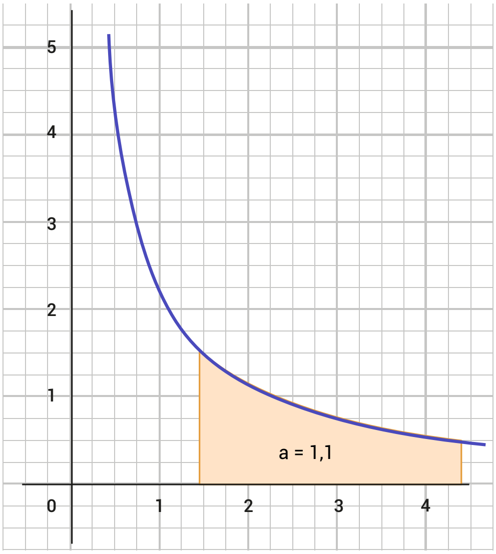
Le invito a continuar con el aprendizaje mediante la revisión de los siguientes ejemplos:

Ejemplo ilustrativo 48

Utilicemos las regla del trapecio con n = 5 para aproximar la integral $\int_1^3 \frac{1}{x}\, dx.$

Figura 42.

Gráfica de una región plana



Nota. Construcción propia

Con *n* = 5; *a* = 1; y *b* = 3 , se

tiene $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{5} = 0{,}4$

Entonces, aplicando la regla del trapecio, se tiene:

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(1)+2f(1{,}4)+2f(1{,}8)+2f(2{,}2)+2f(2{,}6)+f(3)]$$

$$\approx \frac{3-1}{10}\left[1+\frac{2}{1{,}4}+\frac{2}{1{,}8}+\frac{2}{2{,}2}+\frac{2}{2{,}6}+\frac{1}{3}\right]$$

$$\approx \frac{2}{10}\left[1+\frac{10}{7}+\frac{10}{9}+\frac{10}{11}+\frac{10}{13}+\frac{1}{3}\right]$$

Sol. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \approx$ **1,11027**

Ejemplo ilustrativo 49

Empleemos las regla del trapecio para aproximar con n = 5 para aproximar la integral $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$.

Figura 43.
Región plana para regla del trapecio

Con n = 4; a = 0 ; y b = 1, se tiene $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0{,}25$

Entonces, aplicando la regla del trapecio, se tiene:

Nota. Construcción propia con GeoGebra.

$$\int_0^1 \frac{2}{(x^2+2)^2}\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(0)+2f(0{,}25)+2f(0{,}5)+2f(0{,}75)+f(1)]$$

$$\int_0^1 \frac{2}{(x^2+2)^2}\,dx \approx \frac{1-0}{8}\left[\frac{2}{4}+\frac{2}{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\right]}+\frac{2}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\right]}+\frac{2}{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\right]}+\frac{2}{9}\right]$$

$$\int_0^1 \frac{2}{(x^2+2)^2}\,dx \approx 0{,}25\left[\frac{1}{2}+\frac{4}{5{,}0625}+\frac{4}{5{,}0625}+\frac{4}{6{,}5664}+\frac{2}{9}\right]$$

Sol. $\int_0^1 \frac{2}{(x^2+2)^2}\,dx \approx 0{,}36395$

Recursos didácticos

- Estimado estudiante, para completar el estudio de la integración por sustitución y de la integración aproximada, sugiero que analice los ejemplos ilustrativos y las explicaciones que se proponen en el texto básico **Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo**, a partir de la página 292 en donde se explican con claridad definiciones, teoremas y algoritmos relacionados a las aplicaciones de estas valiosas técnicas de integración. Su aprendizaje debe reforzarse con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios y problemas propuestos a final de cada tema.

- Adicional al trabajo anterior, es conveniente también que usted estudie el video: integración por sustitución, en donde se explica de forma muy didáctica y concreta, el procedimiento para realizar el cambio de variables cuando las funciones compuestas así lo exijan.

[Integración por sustitución]

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego de estudiar los contenidos previstos para la décimo quinta semana, en donde se analiza la integración por sustitución y la integración aproximada, es muy importante estimado amigo que usted refuerce los aprendizajes logrados, desarrollando actividades que le preparen para luego desarrollar distintas actividades calificadas y prepararse de la mejor manera para las evaluaciones parciales y presenciales:

- Determine la integral indefinida y compruebe el resultado por derivación: a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; b) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{5x^2}}\,dx$
- Resuelva la ecuación diferencial: a) $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{4x}{\sqrt{16-x^2}}$; b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+1}}$.
- Halle la integral indefinida: $\int \frac{sen\ x}{cos^3\ x}\,dx$
- Encuentre una ecuación para la función *f* que tiene la derivada dada y cuya gráfica pasa por el punto indicado: $f'(x) = -2x\sqrt{8-x^2}; (2,7)$.
- Calcule la integral definida y luego, utilice una herramienta de graficación para comprobar el resultado: $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\,dx$
- Aproxime la integral definida utilizando la regla de los trapecios y luego compare utilizando una herramienta de graficación: $\int_0^{\pi/2} x\ tan\ tan\ x\ dx$

Con el desarrollo de las seis actividades recomendadas propuestas, usted pudo reforzar los aprendizajes para aplicar los conceptos de las técnicas de integración.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Estimado estudiante, luego de esta décima quinta semana, en donde se ha concluido con el estudio de la unidad de Integración, usted debe desarrollar la autoevaluación de esta unidad.

Autoevaluación 4

Seleccione verdadero o falso en las siguientes proposiciones.

1. ( ) La antiderivada de *f(x)* es única.

2. ( ) La Si *p(x)* es una función polinomial, entonces *p* tiene exactamente una antiderivada o primitiva cuya gráfica contiene el origen.

3. ( ) La suma de los primeros*n* enteros positivos es $\frac{n(n+1)}{2}$.

En las siguientes preguntas identifique la alternativa correcta.

4. Evalúe la integral mediante la definición de límite y marque la respuesta correcta: $\int_1^2 \; x^3\,dx$.

   a. 11.
   b. 0.
   c. 6.

5. La integral definida de la función algebraica $\int_0^4 \; |x^2 - 9|\,dx$, es:

   a. 64/3.
   b. 20.
   c. 100/3.

6. El valor de la integral definida $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \; 4\,sec\,sec\,\theta\;\;tan\,tan\,\theta\,d\theta$, es:

   a. *0.*
   b. *∞.*
   c. *π/3.*

7. El área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = 4x - x^2$ y $y = 0$, es:

   a. 32/3.
   b. 44/3.
   c. 43/5.

8. El volumen *v* en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo $V = 0{,}1729t + 0{,}1522t^2 - 0{,}0374t^3$ donde *t* es el tiempo en segundos. Entonces, el volumen medio aproximado de aire en los pulmones durante un ciclo, es:

   a. Aproximadamente 0,5318 litros.
   b. Exactamente 3,25 litros.
   c. Aproximadamente 1,05432 litros.

En las siguientes preguntas resuelva el problema y escriba su desarrollo

9. **Flujo de agua:** El agua fluye de un tanque de almacenamiento a razón de (500 – 5t) litros por minuto. Encuentre la cantidad de agua que fluye fuera del tanque durante los primeros 18 minutos.

   Sol: 8190 litros

10. **Analizar una función:** Demuestre que la función $f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ es constante para *x* > *0*.

   Sol: $f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2+1} = 0$. Como *f(x) = 0* entonces *f(x)* es constante.

Ir al solucionario

Semana 16

Actividades de finales del bimestre

Estimado estudiante, en la última semana de estudio, la invitación para que revise los contenidos del segundo bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello considere:

- Su diario de notas
- Actividades de aprendizaje recomendadas
- Actividades de aprendizaje calificadas
- Actividades de aprendizaje interactivas
- Evaluaciones parciales

Recuerde

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en todas las unidades estudiadas en el primer y segundo bimestre: Límites y sus propiedades, derivación, aplicaciones de la derivada e Integración.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del segundo bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, se sugiere lo siguiente:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en las cuatro unidades desarrolladas en el primer y segundo bimestre.

- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.

- En cada una de las unidades, es importante que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

2 Bimestre

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	En la técnica de cancelación para hallar el límite de una función racional, en donde el denominador podría hacerse 0, se obtienen factores y se procede a la cancelación de alguno de ellos.
2	V	Una función *f* es continua en *c* si satisface las tres condiciones: 1. *f(c)* está definida; 2.*f(x)* existe; *f(x)* = *f(c)*.
3	b	El límite de la función *f* definida por $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 3x + 2}$ cuando x tiende a 2 que se puede escribir como $\sqrt[3]{3x^2 - 3x + 2}$, es 2.
4	a	Considerando que la función de posición s(t) = $-16t^2 + 500$ da la altura (en pies) de un objeto que lleva cayendo t segundos desde una altura de 500 pies. La velocidad en el instante t = a segundos está dada por $\frac{s(a)-s(t)}{a-t}$. Entonces, si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies. La velocidad a la que estará cayendo luego de 2 segundos, es -64 pies/s o la rapidez es 64 pies/s.
5	a	La constante *a*, tales que la función sea continua en toda la recta real, para la función $f(x) = \{x^3, \ si \ x \leq 2 \ ax^2, \ si \ x > 2$, es 2.
6	a	Los intervalos en los que la función es continua: $f(x) = \{\frac{x^2-1}{x-1}, \ x \neq 1 \ 2, \ x = 1$, es (-∞,∞).
7	a	Las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función: $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$ no existen.
8	∞	Para representar la función y determinar el límite lateral: $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$; f(x). Se utiliza GeoGebra, además: f(x) = ∞.
9	1/2	El dominio de $f(x) = \frac{secsec\,(x)-1}{x^2}$ son todos los valores $x \neq 0, \frac{\pi}{2} + n\pi$ y el *f(x)*es ½.

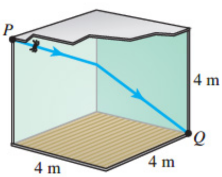
Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
10	14117,65	La solución del problema: Una central térmica quema carbón para generar energía eléctrica. El costo *c* en dólares, de eliminar *p*% de las sustancias contaminantes del aire en sus emisiones de humo es $C = \frac{80000p}{100-p}, 0 \leq p \leq 100.$ Calcular cuánto cuesta eliminar. Es: a) 15 %, b) 50 % y c) 90 % de los contaminantes. d) Encontrar el límite *C* de cuando p → 100^{-} Las soluciones son: a) \$ 14 117,65; b) \$ 80 000,00; c) \$ 720 000,00; d) ∞ .

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 2		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	F	Si y = (1-x)$^{1/2}$ y = (1-x)$^{1/2}$, entonces $y' = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$ es lo correcto.
2	F	Si *f(x)* = sen^2(2*x*) , entonces la derivada es *f'(x)* = 4(sen 2*x*)(cos cos 2x).
3	V	La segunda derivada representa la razón de cambio de la primera.
4	b	Aplicando la regla de la cadena se puede determinar que la derivada de y = 3x^2 sen x, es 3x(x cos x+2 sen x)].
5	a	Un péndulo de 15 cm se mueve según la ecuación θ = 0,2 cos cos 8t , donde *θ*, es el desplazamiento angular de la vertical en radianes y *t* es el tiempo en segundos. El máximo desplazamiento angular y la razón de cambio de *θ* cuando *t = 3* segundos, es 0,2 rad; 1,45 rad/s.
6	a	El o los puntos en el intervalo (0,2π) en donde la gráfica de *f(x) = 2 cos cos x+sen 2x* tiene una tangente horizontal es $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{5\pi}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$.
7	a	La segunda derivada de la función *f(x) = sen x*^{2} es *2(cos cos x*^{2} *- 2x*^{2} sen *x*^{2} .
8	a	La segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ en términos de x e y, de x^2 - y^2 = 36 , es $-\frac{36}{y^3}$.
9	84,9	**El problema:** Un avión vuela en condiciones de aire en calma a una velocidad de 275 millas por hora. Si asciende con un ángulo de 18^0, calcular el ritmo al que está ganando altura. Tiene una solución alrededor de 84,9797 mill/h.
10	-97,96	**El problema:** Se deja caer una pelota desde una altura de 20m, a una distancia de 12m de una lámpara. La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo, ¿A qué ritmo se está moviendo la sombra un segundo después de soltar la pelota? Tiene un sol. alrededor de -97,96 m/s.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	El máximo de una función que es continua en un intervalo cerrado puede ocurrir en dos valores diferentes del intervalo.
2	V	La gráfica de todo polinomio cúbico tiene precisamente un punto de inflexión.
3	F	Si *f'(x) > 0* para todo número real x, entonces f es creciente en ese intervalo.
4	b	Los extremos absolutos de la función y = $3x^{2/3}$ -2x en el intervalo cerrado [-1, 1], son: Mínimo (0, 0); Máximo (-1, 5).
5	a	Si la tos obliga a que la tráquea (conducto de aire) se contraiga, lo cual afecta la velocidad v del aire que pasa a través de este conducto. La velocidad del aire al toser es v= k(R-r) r^2 siendo $0 \leq r \leq R$ donde k es una constante, *R* es el radio normal de la tráquea y *r* es el radio cuando se tose ¿Qué radio producirá la máxima velocidad del aire?. Entonces: $r = \frac{2R}{3}$.
6	a	El valor del límite $\frac{5x^2}{x+3}$ es -∞ .
7	a	Sabiendo que una página rectangular contendrá 3 pulgadas cuadradas de área impresa y los márgenes de cada lado son de 1 cm. Entonces las dimensiones o medidas de la página de forma tal que se use la menor cantidad de papel, son: $(2+\sqrt{30})$ pulgadas por $(2+\sqrt{30})$ pulgadas.
8	a	La suma de los perímetros de un triángulo equilátero y un cuadrado es igual a 10. Las dimensiones del triángulo y el cuadrado que producen el área total mínima, son: Lado del cuadrado: $\frac{10\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ y lado del triángulo $\frac{30}{9+4\sqrt{3}}$
9	M:(2π; 17,57) m: (2,73; 0,88)	Distancia máxima. Considerar un cuarto en la forma de un cubo, de 4 metros de lado. Un insecto en el punto P desea desplazarse hasta el punto Q en la esquina opuesta, como se indica en la figura. Emplear el cálculo para determinar la trayectoria más corta. ¿Se puede resolver el problema sin el cálculo?  La solución es: Máximo: (2π; 17,57); Mínimo: (2,73; 0,88)

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
10	(0, 0), (5, 0), (0, 10)	Longitud mínima. Un triángulo rectángulo en el primer cuadrante tiene los ejes de coordenadas como lados, y la hipotenusa pasa por el punto (1, 8). Encontrar los vértices del triángulo de modo tal que la longitud de la hipotenusa sea mínima. La sol. es: (0, 0), (5, 0), (0, 10)

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	F	La antiderivada de f(x) no es única, son infinitas posibles.
2	V	La Si p(x) es una función polinomial, entonces tiene exactamente una antiderivada o primitiva cuya gráfica contiene el origen.
3	V	La suma de los primeros enteros positivos es $\frac{n(n+1)}{2}$
4	b	La integral mediante la definición de límite $\int_1^2 x^3\,dx$ es 0.
5	a	La integral definida de la función algebraica $\int_0^4 \lvert x^2-9\rvert\,dx$, es 64/3.
6	a	El valor de la integral definida $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}$ sec sec θ tan tan θ dθ, es 0.
7	a	El área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones y = $4x-x^2$ y y= 0, 32/3 unidades cuadradas.
8	a	El volumen v en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo V = $0{,}1729t + 0{,}1522t^2 - 0{,}0374t^3$, donde es el tiempo en segundos. Entonces, el volumen medio aproximado de aire en los pulmones durante un ciclo, es aproximadamente 0,5318 litros.
9	8190	El agua fluye de un tanque de almacenamiento a razón de (500 – 5t) litros por minuto. Entonces, la cantidad de agua que fluye fuera del tanque durante los primeros 18 minutos, es 8190 litros.
10	Const.	La demostración que la función $f(x)=\int_0^{1/x}\frac{1}{t^2+1}\,dt+\int_0^{x}\frac{1}{t^2+1}$ es constante para x > 0, $f'(x)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2+1}=0$. Como *f'(x) = 0* entonces *f(x)* es constante.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

5. Referencias bibliográficas

Apostol, Tom. (1980). ***Cálculus.*** Segunda edición en español. Editorial Reverté. Barcelona.

EDUCACIÓN AMBIENTAL. (2019). ***Ondas de agua.*** Enlace web

Franco, A. (2020). ***El teorema fundamental del cálculo.*** Enlace web

Larson, R. y Edwards, B. (2016). ***Cálculo Tomo I.*** Décima edición. Editorial CENGAGE Learning. México.

Larson, R. y Edwards, B. (2014). ***Cálculo.*** Novena edición. Editorial Mc Graw Hill. México.

Leithold, L. (2002). ***El cálculo con Geometría analítica.*** Octava edición. Editorial Harla. México.

Murcia, J. y Portilla, G. (2014). ***Simulación de la trayectoria de un cohete de dos etapas para posicionamiento de un nanosatélite en órbita***. Enlace web

Miller, Heeren y Hornsby. (2006). ***Matemática: razonamiento y aplicaciones.*** Décima edición. Editorial Pearson Wesley. México.

Nayeruirz98. (2016). *Cálculo.* ***La importancia de aprender***. Enlace web

Rafinno, M. (2020). ***Partículas subatómicas***. Enlace web

Stewart, J. (2018). ***Cáculo de una variable. Trascendentes tempranas***. Octava edición. Cengage. México.

Stewart, Redlin y Watson. (2017). ***Precálculo Matemáticas para el cálculo***. Séptima edición. Editorial Cengage. México.