UTPL
La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Fundamentos Matemáticos

Guía didáctica

UTPL

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Departamento de Ciencias de la Educación

Fundamentos Matemáticos

Guía didáctica

Carrera	*PAO Nivel*
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)*	I
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de la Química y la Biología)*	III

Autor:

José Edmundo Sanchéz Romero

EDUC_2121

Universidad Técnica Particular de Loja

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS
Guía didáctica
José Edmundo Sanchéz Romero

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital -978-9942-25-805-2

06 de mayo 2020

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación–Orientaciones de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física, basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.

- Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad, y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado en relación a las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.

- Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza– aprendizaje y de evaluación que integren la práctica de investigación acción hacia producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

- Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

Limitada preparación de bachillerato en los conceptos básicos y fundamentos teóricos de la matemática dificulta el aprendizaje significativo de nuevos conocimientos disciplinares y, en consecuencia, impiden una formación integral enfocada a la modelización y resolución de problemas del entorno natural y social.

2. Metodología de aprendizaje

Con la finalidad que el estudio de la asignatura Sistemas de conocimiento de funciones exponenciales y logarítmicas y su didáctica, se convierta en una experiencia de aprendizaje permanente, se diseñan actividades y estrategias fundamentadas con una metodología activa, en donde los estudiantes acceden a los aspectos iniciales de la conceptualización teórica viendo micro videos y accediendo a recursos planteados en el EVA, mientras que el trabajo en contacto con el docente se convierte en un taller de aplicación dando el enfoque experimental en esta segunda parte de tal manera que, se consoliden los aprendizajes de manera experimental, siendo el estudiante el actor principal en su aprendizaje, apoyado en videoconferencias semanales que serán grabadas para aquellos estudiantes que no pudieron participar en línea.

Aunque no existe un procedimiento único, lo esencial es la utilización del texto básico y micro videos, apoyados de otros recursos como los cuestionarios interactivos y las infografías; anticipando el estudio de los aspectos teóricos que serán consolidados luego, con la práctica experimental al momento de desarrollar los aportes, principalmente cuantificados, contando con la presencia física del profesor en algunos casos y casi siempre a través de videoconferencias, fomentando el trabajo colaborativo en función de los distintos estilos de aprendizaje y enfocados a lograr resultados de aprendizaje que orientan el desarrollo de las competencias.

En cada concepto, se partirá de una situación problemática y de la **manipulación de material concreto,** para luego llegar a la debida **exploración** que permite observar situaciones de aprendizaje que posibilitan la **comunicación** entre compañeros y el profesor, finalizando con la **verbalización** en los escritos de aportes y conclusiones, todo este procedimiento relacionado con una metodología activa ABP. Para profundizar sobre los fundamentos que orientan esta metodología de aprendizaje, acceda a través de metodología activa ABP.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Bienvenidos al curso **Fundamentos Matemáticos**, en donde estudiaremos aquellos conceptos básicos de matemáticas que se constituyen en prerrequisitos para el estudio de otros cursos en nuestra carrera. En esta asignatura consideramos una revisión de conceptos ligados a los números reales, las ecuaciones y el plano cartesiano. Aunque estoy seguro de que usted se encuentra familiarizado con estos temas, es necesario analizar cómo a través de estos conceptos se pueden resolver problemas y modelar situaciones prácticas de la vida cotidiana.

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1	Utiliza axiomas y conceptos básicos de los números, del álgebra de polinomios y de las ecuaciones para modelar y resolver problemas del entorno natural y social.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 1

Para alcanzar el resultado de aprendizaje que nos encamine al logro de las competencias, lo primordial en cualquier concepto es entender el significado, partir de la definición, conocer las leyes y propiedades que se cumplen y que pueden ser aplicadas, sólo después de esto, realizar correctamente las operaciones con números reales, algebra de polinomios y las ecuaciones, mismas que nos permitirán utilizar los algoritmos adecuados para la modelización y resolución de problemas. En este camino, resaltar la importancia de emplear con rigor el lenguaje matemático apropiado que se apoya en una terminología universal de la ciencia formal de los números y las formas. Sin descuidar que, el modelaje estará referido a situaciones de la vida cotidiana y relacionadas con el entorno natural y social.

Estimados estudiantes:

La asignatura **Fundamentos matemáticos**, en este primer bimestre, desarrollará cuatro unidades didácticas. Para su estudio y aprendizaje, contamos con un texto básico pertinente, el cual cuenta con un número suficiente de ejemplos ilustrativos y ejercicios resueltos y ejemplos de modelado matemático con problemas completamente desarrollados, lo cual posibilitará un estudio eficaz de los conceptos y sus aplicaciones. Los conocimientos para estudiarse son:

- Números reales
- Exponente y radicales
- Expresiones algebraicas
- Expresiones racionales

Estimado estudiante, en esta primera semana, iniciamos con la revisión de los contenidos básicos de los números reales, estudio enfocado principalmente a conocer las propiedades que se cumplen en las principales operaciones matemáticas.

Unidad 1. Números Reales

Los números reales son el resultado de la evolución de los conjuntos de números desde los primeros tiempos, al inicio aparecen los números naturales (N) cuando el hombre siente la necesidad natural de contar, luego se presentan los números enteros (Z) para dar solución a aquellos casos en donde el sustraendo es mayor que el minuendo, posteriormente aparecen los números racionales (Q) que dan solución a las divisiones que no son exactas, después aparecen los números irracionales (I) que interpretan aquellos casos en donde no se puede expresar un número como el cociente indicado de dos enteros. Y, finalmente, la unión de los números racionales e irracionales da origen al conjunto de los números reales (R). Invito para que descubras cómo aparecen los números reales, habilitando el hipervínculo Llegando a los números reales.

> **Retroalimentación:** Con la observación del video, seguro que algunas inquietudes se aclararon, espero esto sirva de motivación para iniciar el estudio de los números reales, los cuales aparecen luego de la evolución de los naturales, enteros, racionales e irracionales, hasta llegar a los números reales.

1.1. Propiedades de los números reales

Los Números Reales son parte importante de nuestra vida diaria. Los usamos continuamente y de manera inconsciente, aparecen en simples cálculos, en las cuentas de la casa, el banco, el presupuesto, a la hora de hacer compras, cuando hacemos negocios, cuando jugamos, entre otros casos (Miller et al. , 2017).

Para las operaciones matemáticas de la adición y la multiplicación, en el conjunto de los números reales, tenemos las siguientes propiedades:

Propiedad conmutativa: el orden de los sumandos en la adición no altera la suma y el orden de los factores en la multiplicación, no altera el producto.

Propiedad asociativa: en la adición de tres o más sumandos se puede agrupar de distintas maneras y se obtiene la misma suma; mientras que, en la multiplicación de tres o más factores se pueden multiplicar de distintas formas y se obtiene el mismo producto.

Propiedad distributiva: el producto de un número por una suma de dos o más números es igual a la suma de los productos del primer factor por cada uno de los sumandos.

Recurso de aprendizaje

Para comprender de mejor manera estos temas introductorios y básicos, pero muy importantes para su formación, por cuanto constituyen los fundamentos axiomáticos del curso, invito para que:

- Estudien la explicación detallada de los tipos de intervalos y algunas ejemplificaciones, habilitando el hipervínculo Intervalos.

- Revisen las páginas del texto en su primera unidad, recordando los conceptos de adición y sustracción, multiplicación y división, la recta de los números reales, los conjuntos de intervalos y el valor absoluto, lo cual aparece explicado hasta la página 12.

> **Retroalimentación:** En el video se explica con claridad los tipos de intervalos y su representación e interpretación en la recta numérica de los números reales. Mientras que, en el texto básico, se detallan todos los conceptos básicos referidos a las operaciones y propiedades en el conjunto de los números reales, los intervalos, el valor absoluto y la distancia. Al final, se ofrecen varios ejercicios de aplicación que constituyen un reto para su conocimiento.

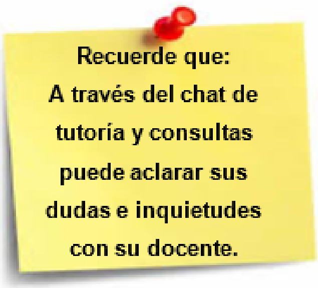
Actividades de aprendizaje recomendadas

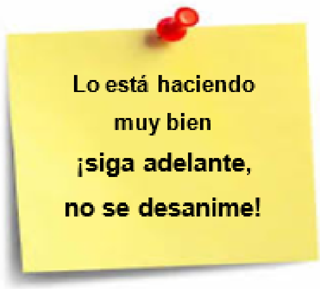
Antes de pasar a la autoevaluación, le invito a resolver las cuestiones siguientes, consultando el texto siempre que sea necesario. Recuerde que, la realización de estas actividades le permite a usted algunas ventajas como, por ejemplo, desarrollar sus capacidades intelectuales y entender mejor el tema.

Compruebe su avance en el estudio de las propiedades de los números reales, y resuelva las interrogantes planteadas.

- Desarrolle un ejemplo de cada una de las propiedades de los números reales
- ¿Cuáles son los números naturales? Explique.
- ¿Cuáles son los números enteros? Explique

- Defina a los números racionales, explique sobre su clasificación.
- Escriba cinco elementos del conjunto de los números irracionales
- Determine a qué conjuntos de números pertenecen los siguientes números: $\frac{4}{5}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{2}$ y π.
- Dibuje el conjunto de los números reales con todos sus subconjuntos.
- Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y luego, trace la gráfica en la recta de números reales: (–2, 4] y [–3, 2)





Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 1

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de **Los números reales**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

1. **La expresión $(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$, corresponde a la propiedad:**

   a. Conmutativa
   b. Asociativa
   c. Distributiva

2. **La expresión $2 \times (3 + 5) = (2 \times 3) + (2 \times 5)$, corresponde a la propiedad:**

   a. Conmutativa
   b. Asociativa
   c. Distributiva

3. **La expresión $(-4)(-3)$ es equivalente a:**

   a. $4 \times (-3)$
   b. 4×3
   c. -4×3

4. **El resultado de la expresión $-(5 - 8)$ es:**

   a. $8 - 5$
   b. $-5 - 8$
   c. $5 + 8$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

5. **La respuesta de la expresión $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$ es:**

   a. $\frac{10}{21}$

   b. $\frac{14}{15}$

   c. $\frac{2+5}{3+7}$

6. **La expresión $\frac{2}{5} + \frac{7}{5}$ es igual a:**

   a. $\frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$

   b. $\frac{2+7}{5+5} = \frac{9}{10}$

   c. $\frac{2+5}{5+7} = \frac{7}{12}$

7. **Los números reales se pueden representar por puntos sobre:**

   a. El Plano cartesiano
   b. La recta numérica
   c. Las paralelas

8. **Decimos que α menor que b,α < b, geométricamente quiere decir que:**

   a. a está a la izquierda de b en la recta numérica
   b. a esta a la derecha de b en la recta numérica
   c. a es mayor que b en la recta numérica.

9. **El siguiente conjunto A={1,2,3,4,5,6} lo podemos escribir en forma descriptiva o por comprensión de la siguiente manera:**

   a. A={x/x es un entero y 0 < x < 7}
   b. A={x/x es un entero y 1 < x < 8}
   c. A={x/x es un entero y 2 < x < 7}

10. El valor absoluto de $|-3|$ es igual a:

a. $|9|$
b. -3
c. 3

Ir al solucionario

Semana 2

Estimado estudiante, en esta segunda semana, iniciamos el estudio de la unidad de exponentes y radicales, en donde se analizan conceptos muy importantes para la operatoria aritmética previa al estudio del álgebra.

Unidad 2. Exponentes y Radicales

Los exponentes y radicales, son temas fundamentales para el estudio de cursos superiores, lo importante será que usted siempre parta de la definición, las operaciones y propiedades. Si cumple con el estudio siguiendo este orden, seguramente no tendrá dificultades para desarrollar los ejercicios y problemas de aplicación. En esta unidad, se detallan temas específicos, como: Exponentes enteros, Notación científica, Radicales, Exponentes racionales y Racionalización del denominador.

2.1. Exponentes enteros

Cuando hablamos de exponentes, es necesario considerar la operación matemática llamada potenciación, cuya definición está relacionada con el producto de factores iguales.

Notación exponencial

Si es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la potencia ***n–ésima potencia*** de a, es: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots.\ a$.. El número a se denomina base y n se denomina exponente.

Es importante considerar que, cuando el exponente es cero, la potencia siempre será 1 y cuando el exponente es negativo, la potencia es el inverso multiplicativo con exponente positivo (Sullivan, 2017).

Existen reglas que aparecen a continuación como simples leyes, las cuales deben ser estudiadas y convienen aplicarlas al momento que trabaje con productos y potencias.

1. **Producto de potencias que tienen la misma base**

   El producto de potencias con la misma base es igual a otra potencia con la misma base y exponente igual a la suma de los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

   Ejemplos: $2^3 \cdot 2^4 = 2^5$

2. **División de potencias que tienen la misma base**

   La división de potencias con la misma base es igual a otra potencia con la misma base y exponente igual a la resta de los exponentes.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

   Ejemplos: $2^6 \div 2^4 = 2^2$; $3^5 \div 3^{-2} = 3^{5+2} = 3^7$;

$$(-4)^2 \div (-4)^5 = (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3}$$

3. **Potencia de una potencia**

La potencia de una potencia es igual a otra potencia con la misma base y exponente igual al producto de los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplos: $(2^3)^2 = 2^6$

4. **Potencia de un producto**

La potenciación es distributiva para la multiplicación. Es decir, la potencia de un producto es igual al producto de las potencias con el mismo exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplos: $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

5. **Potencia de un cociente**

La potenciación es distributiva para la división. Es decir, la potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias con el mismo exponente.

$$(a \div b)^n = a^n \div b^n$$

Ejemplos: $(8 \div 3)^4 = 8^4 \div 3^4$

2.2. Notación científica

La notación científica es una forma compacta de escribir números demasiado grandes o demasiado pequeños, tiene especial aplicación cuando es utilizada por científicos en laboratorios o en el espacio. Revisemos su definición.

Notación científica

Un número positivo *x* está escrito en **notación científica** cuando tiene la forma $\mathbf{x = a \cdot 10^n}$, donde $\mathbf{1 \leq a < 10}$ y **n** es un número entero.

Ejemplos 1:

La estrella próxima Centauri está a $4 \cdot 10^{13}$ km = 40 000 000 000 000 km.

La masa de un átomo de hidrógeno es $1,66 \cdot 10^{-24}$ km, igual a

= 0, 00000000000000000000000166 g

Recursos de aprendizaje

Sigamos adelante, continuemos con la consolidación de los temas estudiados en esta semana, referentes a los exponentes enteros, para aplicar sus leyes en el desarrollo de ejercicios y la notación exponencial; entonces, la invitación para que:

- Estudie un video que ayudará a profundizar el estudio de la notación científica, para lo cual se debe habilitar el hipervínculo Escribir en Notación Exponencial.
- Revise las páginas del texto en la segunda unidad, recordando conceptos de exponentes enteros, leyes de los exponentes y la notación científica, hasta la página 17.

Retroalimentación: En el video se explica con mucha claridad cómo escribir cualquier número en notación científica, así como el proceso para escribir en notación decimal a partir de la notación científica. Mientras que, en el texto básico se explican desde las definiciones,

> las propiedades y leyes, llegando a presentar ejercicios desarrollados de manera muy ilustrativa sobre las leyes de la potenciación y la notación científica.

Semana 3

En esta semana continuamos con el estudio de la unidad 2, específicamente se estudiarán los temas de radicales, exponentes racionales y la racionalización de monomios.

2.3. Radicales

La operación contraria a la potenciación es la radicación. En la potenciación se trata de buscar un número llamado **potencia** que resulta de multiplicar la **base,** las veces que indica el **exponente**. Mientras que, en la radicación se busca un número llamado **raíz** que multiplicado las veces que indica el **índice,** da como resultado el **radicando.**

> **Raíz *n – ésima***
>
> Si n es cualquier entero positivo, entonces la raíz **n–ésima principal** de a se define: $\sqrt[n]{a} = b$ significa $b^n = a$. Si n es par, debe cumplirse $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

En la radicación se cumplen algunas propiedades que se detallan a continuación:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

1. **Raíz de un producto**

   La radicación es distributiva respecto a la multiplicación. La raíz de un producto es igual al producto de las raíces con el mismo índice.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

   Ejemplo: $\sqrt[3]{6 \cdot 8} = \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{8}$

2. **Raíz de un cociente**

   La radicación es distributiva respecto a la división. La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces con el mismo índice.

   Ejemplo: $\sqrt[3]{6 \div 8} = \sqrt[3]{6} \div \sqrt[3]{8}$

3. **Raíz de una raíz**

   La raíz de una potencia con índice y exponente un número impar es igual a la base de la potencia, si n es impar.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

   Ejemplo: $\sqrt[2]{\sqrt[3]{12}} = \sqrt[6]{12}$

4. **Raíz de una potencia con impar**

   La raíz de una potencia con índice y exponente un número impar es igual a la base de la potencia, si n es impar.

$\sqrt[n]{a^n}$ = a si n es impar

   Ejemplo: $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

5. Raíz de una potencia con *n* par

La raíz de una potencia con índice y exponente un número par es igual al valor absoluto de la base.

$\sqrt[n]{a^n}$ = |a| si *n* es par

Ejemplo: $\sqrt[2]{(-3)^2}$ = |−3|= 3

2.4. Exponentes racionales

Para interpretar los exponentes racionales o exponentes fraccionarios, relacionamos las operaciones de potenciación y radicación.

> **Definición de exponentes racionales**
>
> Para cualquier exponente racional *m/n* , donde *m* y *n* son enteros y *n* > 0 se tiene: $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$ o en forma equivalente $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. Si *n* es par, a ≥ 0.

A partir de esta definición, podemos demostrar que las leyes que se cumplen para los exponentes enteros, también se cumplen para los exponentes racionales.

Ejemplos: $16^{1/2} = \sqrt[2]{16} = 4$; $8^{-1/3} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{2}$

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera sobre los exponentes y radicales, los cuales son muy importantes para el cálculo operacional posterior, invito para que:

- Estudien la explicación detallada de la racionalización de denominadores con algunas ejemplificaciones, habilitando el hipervínculo Racionalización de denominadores.
- Revisen las páginas de la segunda unidad, estudiando primero las definiciones, luego interpretando las propiedades en los ejercicios y problemas de aplicación ilustrativos desarrollados que, sin lugar a dudas, orientarán su aprendizaje para resolver los que se encuentran propuestos al final de la unidad 2.

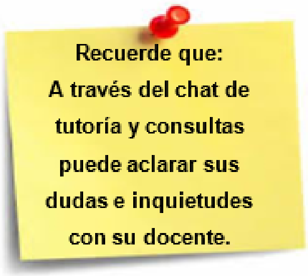
> **Retroalimentación:** En el video se explica con mucha claridad el proceso para racionalizar los monomios, los ejemplos son muy ilustrativos y se explica la forma de aplicar las propiedades. Mientras que, en el texto básico, se detallan todos los conceptos referidos a los exponentes enteros y las reglas para manejar los exponentes, la notación científica, los exponentes racionales y la racionalización del denominador. Al final, se ofrecen varios ejercicios de aplicación los mismos que constituyen un reto para su conocimiento.

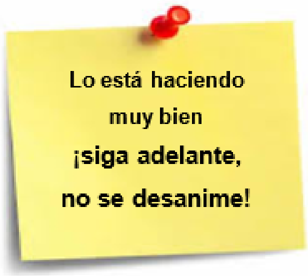
Actividades de aprendizaje recomendadas

Antes de pasar a la autoevaluación, le invito a resolver las cuestiones siguientes, consultando el texto siempre que sea necesario. Recuerde que, realizar estas actividades permiten alcanzar algunas ventajas como, por ejemplo, desarrollar sus capacidades intelectuales y entender mejor el tema.

- Desarrolle un ejemplo de cada una de las leyes de exponentes.
- Escriba un ejercicio desarrollado con la simplificación de expresiones con exponentes.

- Escriba en notación científica el número: 0, 0000000000000000015. Y, en notación decimal el número dado por 4,65 x 10^{14}.
- Escriba cinco elementos del conjunto de los números irracionales
- Utilice las leyes de los exponentes racionales y simplifique la expresión: $\left(\frac{2x^{3/4}}{y^{2/3}}\right)^3 \left(\frac{y^2}{x^{-2/3}}\right)^2 =$
- Racionalice la expresión: $\frac{2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{6}} =$





Autoevaluación 2

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de **Los exponentes y radicales** es conveniente que, realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

1. **La siguiente expresión $\left(\frac{4}{7}\right)^0$ es igual a:**

    a. 1

    b. 0

    c. $\frac{7}{4}$

2. **El expresión $(-2)^{-3}$ es igual a:**

    a. 8

    b. $-\frac{1}{8}$

    c. $\frac{1}{8}$

3. **Por la ley de exponentes, x^4x^7 es igual a:**

    a. x^{7-4}
    b. x^{4-7}
    c. x^{7x4}

4. **La expresión y^4y^{-7} es igual a:**

    a. y^{4+7}
    b. y^{7-4}
    c. y^{-3}

5. **La notación científica 6.97 x 10^9 es igual :**

   a. 6970000000
   b. 697000000000
   c. 6,9700000000

6. **La notación científica 4.6271 × 10^{-6} es igual a :**

   a. 0.0000046271
   b. 0.046271
   c. – 46271000000

7. **El resultado del siguiente radical $\sqrt[3]{x^4}$, es:**

   a. $\sqrt[3]{x^3}$
   b. $x\sqrt[3]{x}$
   c. $x\sqrt[2]{x}$

8. **Para el siguiente exponente racional$125^{-1/3}$ el resultado correcto es:**

   a. $\frac{1}{5}$
   b. $\frac{1}{25}$
   c. $\frac{1}{115}$

9. **Al racionalizar la expresión $\frac{2}{\sqrt{3}}$, nos da como resultado:**

   a. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
   b. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
   c. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. **La siguiente expresión fraccionaria, $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, al racionalizarla, es igual a:**

a. $\frac{\sqrt[3]{25}}{25}$

b. $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$

c. $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 4

En esta semana iniciamos con el estudio de la unidad 3 del texto básico, en donde se proponen temas introductorios al álgebra, lo cual es básico para entender luego los cursos de funciones y cálculo. Estudiaremos tres temas: suma y resta de polinomios, multiplicación de expresiones algebraicas y fórmulas de productos notables.

Unidad 3. Expresiones Algebraicas

Se conoce como Expresiones Algebraicas a la **combinación** de letras, signos y números en las operaciones matemáticas. Por lo general, las letras representan cantidades desconocidas y son llamadas variables o incógnitas. Las expresiones algebraicas nos permiten traducir el lenguaje habitual o común al lenguaje matemático.

Para iniciar el estudio de las expresiones algebraicas es prioritario que, partamos de la definición de polinomio.

Polinomio

Un polinomio en la variable *x* es una expresión de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y *n* es un entero no negativo.

3.1. Suma y resta de polinomios

La adición y sustracción de polinomios se la realiza aplicando las propiedades de los números reales, lo más importante en estas operaciones es identificar los términos semejantes, es decir aquellos términos con las mismas variables elevadas a los mismos exponentes, luego de la identificación se procede a reducir términos semejantes, aplicando la propiedad distributiva.

Ejemplo 1. Encontremos la suma de los siguientes polinomios:

$(3x^3 - 4x^2 + x + 3) + (-2x^3 + 4x^2 - 5x + 3) =$

$= (3x^3 - 2x^3) + (-4x^2 + 4x^2) + (x - 5x) + (3 + 3)$

$= x^3 + 0\ x2 - 4x + 6$

$= x^3 - 4x + 6$ **Solución**

Ejemplo 2. Encontremos la sustracción de los siguientes polinomios:

$(4x^3 - 2x^2 + 3x + 3) - (5x^3 + 4x^2 - 2x + 6) =$

$= 4x^3 - 2x^2 + 3x + 3 - 5x^3 - 4x^2 + 2x - 6$

$= (4x^3 - 5x^3) + (-2x^2 - 4x^2) + (3x + 2x) + (3 - 6)$

$= -1x^3 - 6\ x^2 + 5x - 3$

$= -x^3 - 6x^2 + 5x - 3$ **Solución**

3.2. Multiplicación de expresiones algebraicas

Para multiplicar polinomios se aplican las propiedades de los números reales, aplicando las leyes de los signos y la propiedad distributiva, multiplicando los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio.

Ejemplo 1. Multipliquemos los polinomios.

$(x^2 - 2x + 3)(x^3 - 2x^2 - x) = x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x^3 - 6x^2 - 3x$

$= x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 3x$ **Solución**

3.3. Fórmulas de productos notables

En la multiplicación de polinomios, algunas veces encontramos que los factores son iguales, otras veces, aparecen productos que se repiten con frecuencia, en estos casos decimos que aparecen productos notables. El estudio de estas fórmulas es muy importante porque nos permitirán mecanizar y agilitar los procesos de factorización que estudiaremos después.

Entre las fórmulas más conocidas tenemos las siguientes:

1. La suma por la diferencia de dos términos es igual a la diferencia de cuadrados.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

2. El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo y más el cuadrado del segundo.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

3. El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el doble producto del primero por el segundo y más el cuadrado del segundo.

$$(x-y)^2 = x^2-2xy + y^2$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

4. El cubo de una suma es igual al cubo del primer término más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo y más el cubo del segundo término

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

5. El cubo de una diferencia es igual al cubo del primer término menos el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo y menos el cubo del segundo término

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Antes de utilizar las fórmulas, se debe puntualizar que las letras que se utilizan pueden variar y usted debe mecanizar las definiciones y procesos, pero no las letras.

Ejemplo 1. Apliquemos la suma por la diferencia de cuadrados.

$(x^2 + 3y^3)(x^2 - 3y^3) \qquad = x^4 - 9y^6$ **Solución**

Ejemplo 2. Apliquemos el cubo de una suma

$(x^2 + 3y^3)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2 (3y^3) + 3(x^2) (3y^3)^2 + (3y^3)^3$

$= x^6 + 9x^4y^3 + 27x^2y^6 + 27y^9$ **Solución**

Recursos de aprendizaje

Sigamos adelante, continuemos con la consolidación de los temas estudiados en esta semana, referentes a la suma y resta de polinomios, multiplicación de polinomios y las fórmulas de los productos notables, entonces ahora la invitación es para que:

- Estudie un video que ayudará recordar los prerrequisitos y luego a profundizar el estudio y aplicación de las fórmulas de productos notables, para lo cual debe habilitar el hipervínculo Productos notables, conceptos previos.

- Revise las páginas del texto básico en la tercera unidad de Expresiones Algebraicas, recordando los conceptos básicos de las operaciones con polinomios y de los productos notables.

> **Retroalimentación:** En el video se explica con mucha claridad cómo aplicar las fórmulas de los productos notables en el desarrollo de ejercicios. Mientras que, en el texto básico se explican las operaciones entre polinomios, así como los principales productos notables, ilustrando con suficientes ejercicios desarrollados.

Semana 5

Estimados estudiantes, en esta semana continuamos desarrollando la unidad 3 de las Expresiones Algebraicas, estudiando los contenidos que corresponden a la Factorización de polinomios.

3.4. Factorización de factores comunes

En los productos notables partimos de una multiplicación y llegamos a obtener un producto, es decir un polinomio que normalmente es un binomio o trinomio. Ahora, en la factorización se realiza el proceso contrario, partimos de un polinomio y se llegan a determinar los factores. La factorización se refiere a conseguir factores a partir de un polinomio dado.

Factores comunes

Primero se identifica el factor común, considerando las potencias comunes con mayor exponente. Luego, procedemos a la aplicación de la propiedad distributiva.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Ejemplos 1. Factoricemos los polinomios dados.

$3x^2 - 6x = \overbrace{3x}^{f.c.}(-2)$

$2x^4y^5 - 6x^2y^2 + 8x^3y - 12x^2y = \overbrace{2x^2y}^{f.c.}(x^2y^4 - 3y + 4x - 6)$

Algunas veces los factores comunes pueden ser expresiones algebraicas, se extrae el factor común de manera similar, aplicando la propiedad distributiva.

Ejemplo 2. Realicemos la factorización de la expresión:

$(x+1)(x+2) + (3x+3)(x+1) = \overbrace{(x+1)}^{f.c.}(x + 2 + 3x + 3) = (x+1)(4x + 5)$

3.5. Factorización de trinomios

Un polinomio con tres términos se llama trinomio. Normalmente los trinomios tienen dos formas, la primera es: $x^2 + bx + c$.. En este caso, se trata de escribir dos factores binomios $(x + r)(x + s)$, buscando dos números que multiplicados den *c* y que sumados nos den *b*. En símbolos:

$$x^2 + bx + c = \overbrace{(x+r)(x+s)}^{dos\ factores\ binomios} = x^2 + \overbrace{(r + s)}^{b}x + \overbrace{r \cdot s}^{c}$$

Ejemplos 3. Factoricemos los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3) \text{ porque } x^2 + \overbrace{(4 + 3)}^{7}x + \overbrace{4 \cdot 3}^{12}$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3) \text{ porque } x^2 + \overbrace{(-4 + -3)}^{-7}x + \overbrace{(-4) \cdot (-3)}^{+12}$$

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4) \text{ porque } x^2 + \overbrace{(+5 - 4)}^{+1}x + \overbrace{5 \cdot (-4)}^{-20}$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Ahora, observemos el proceso para factorizar trinomios de la segunda forma: $ax^2 + bx + c$. En este caso, de manera similar al caso anterior, se trata de escribir dos factores binomios $(px + r)(qx + s)$, buscando cuatro números que cumplan las condiciones que se explican simbólicamente:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = \overbrace{pq}^{a}x^2 + \overbrace{(ps + qr)}^{b}x + \overbrace{rs}^{c}$$

En este proceso, es importante considerar que: ***p*** y ***q*** son factores de ***a***; mientras que ***r*** y ***s*** son factores de ***c***. Además, es importante que cumplan la otra condición: ***ps + qr = b***

Ejemplos 4. Factoricemos los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

$$4x^2 + 8x + 3 = (2x + 3)(2x + 1) \text{ porque } \overbrace{2 \cdot 2}^{4}x^2 + \overbrace{(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2)}^{8}x + \overbrace{3 \cdot 1}^{3}$$

$$12x^2 + 17x + 6 = (4x + 3)(3x + 2) \text{ porque } \overbrace{4 \cdot 3}^{12}x^2 + \overbrace{(4 \cdot 2 + 3 \cdot 3)}^{17}x + \overbrace{3 \cdot 2}^{6}$$

$$4x^2 + 13x + 3 = (4x + 1)(x + 3) \text{ porque } \overbrace{4 \cdot 1}^{4}x^2 + \overbrace{(4 \cdot 3 + 1 \cdot 1)}^{13}x + \overbrace{1 \cdot 3}^{3}$$

$$15x^2 + 22x - 5 = (5x - 1)(3x + 5) \text{ porque } \overbrace{5 \cdot 3}^{15}x^2 + \overbrace{(5 \cdot 5 - 1 \cdot 3)}^{22}x + \overbrace{-1 \cdot 5}^{-5}$$

$$6x^2 - 5xy - 4y^2 = (3x - 4y)(2x + y) \text{ porque } \overbrace{3 \cdot 2}^{6}x^2 + \overbrace{(3 \cdot 1 + -4 \cdot 2)}^{-5}xy + \overbrace{-4 \cdot 1}^{-4}y^2$$

3.6. Fórmulas especiales de factorización

Otros procesos para la factorización están relacionados con la diferencia de cuadrados, suma y diferencia de cubos, trinomios cuadrados perfectos, completar cuadrados perfectos y factorización por agrupación de términos. Algunos de estos casos se pueden escribir como simples fórmulas considerando que, corresponden al proceso contrario de los productos notables.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Fórmulas especiales de factorización

1. **Diferencia de cuadrados**

La diferencia de cuadrados es igual al producto de dos factores, suma por la diferencia de las raíces cuadradas.

$$\mathbf{x^2 - y^2 = (x + y)(x - y))}$$

2. **Trinomio cuadrado perfecto**

El trinomio cuadrado perfecto es igual al cuadrado de un binomio formado por la raíz cuadrada del primer término seguido del signo del segundo término del trinomio y más la raíz cuadrada del tercer término.

$$\mathbf{x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2}$$

3. **Suma y diferencia de cubos**

La suma de cubos es igual al producto de dos factores. El primer factor es un binomio formado con las raíces cúbicas del primero y segundo término. El segundo factor es un trinomio simétrico.

$$\mathbf{x^2 \pm y2 = (x \pm y)(x^2 \pm xy + y^2)}$$

Ejemplos 5. Factoricemos aplicando las fórmulas descritas anteriormente.

$$4x^2 - 25y^6 = (2x + 5y^3)(2x - 5y^3)$$

$$8x^3 + 27y^6 = (2x + 3y^2)(4x^2 + 6xy^2 + 9y^4)$$

$$64x^3 - \frac{1}{27}y^{12} = (4x - \frac{1}{3}y^4)(16x^2 - \frac{4}{3}xy^4 + \frac{1}{9}y^8)$$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Recursos de aprendizaje

Estamos llegando al final de la tercera unidad entonces, continuemos con la consolidación de los temas estudiados en esta semana, referentes la factorización de polinomios, ahora la invitación es para que:

- Estudie un video que ayudará a profundizar el estudio y aplicación de la factorización por agrupación, para lo cual debe habilitar el hipervínculo Factorización por agrupamiento.

- Revise las páginas del texto en la tercera unidad Expresiones Algebraicas, principalmente lo relacionado con la factorización de polinomios, considerando que son procesos contrarios a los productos notables.

> **Retroalimentación:** En el video se observa el proceso de resolución de ejercicios de factorización por agrupación, y algunas técnicas especiales de resolución de ejercicios por agrupación. Mientras que, en el texto básico se explican los fundamentos teóricos y se presentan muchos ejercicios y procesos desarrollados, teniendo al final de la unidad, suficientes ejercicios y problemas propuestos para que usted verifique sus aprendizajes.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Mejore su aprendizaje realizando los siguientes ejercicios.

- Aplique los procesos de factorización en la resolución de los siguientes polinomios.

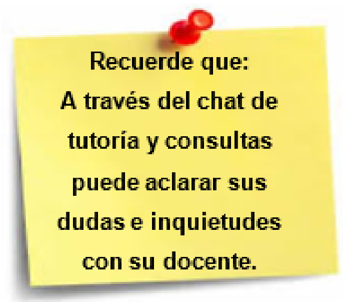
  $y^2 - 4y + 3 =$ ____________________________________

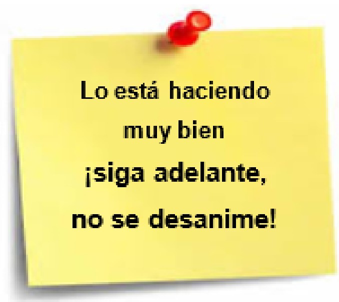
  $20 + a^2 - 21a$ ____________________________________

  $x^2 - 2x + cx - 2x$ ________________________________

  $2yz + 7y - 2z - 7$ _______________________________

- Refuerce sus destrezas realizando los problemas planteados en el texto básico al final de la unidad.





Autoevaluación 3

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad **Expresiones algebraicas**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

1. **La suma de polinomios $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$, es igual a:**

   a. $x^3 - x^2 - 5x - 3$
   b. $2x^3 + x^2 + 5x + 4$
   c. $2x^3 - x^2 - 5x + 4$

2. **La diferencia de polinomio $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$, es igual a:**

   a. $x^3 - x^2 - 5x - 3$
   b. $2x^3 + x^2 + 5x + 4$
   c. $-11x^2 + 9x + 4$

3. **La multiplicación algebraica $(2x + 1)(3x - 5)$, es igual a:**

   a. $6x^2 - 7x - 5$
   b. $x^2 - 7x - 5$
   c. $6x^2 + 7x + 5$

4. **El producto de la multiplicación $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$, es igual a:**

   a. $2x^3 - 7x + 12$
   b. $2x^3 - 7x^2 - 7x + 12$
   c. $7x^2 - 7x + 12$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

5. **El producto notable $(3x + 5)^2$, es igual a:**

   a. $9x^2 - 30x + 25$
   b. $9x^2 + 30x + 25$
   c. $9x^2 + x + 25$

6. **El producto notable $(x^2 - 2)^3$, es igual a:**

   a. $x^6 - x^4 + 2x^2 - 8$
   b. $2x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$
   c. $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$

7. **La factorización de $3x^2 - 6x$, es igual a:**

   a. $3x (x - 2)$
   b. $x (x - 2)$
   c. $3 (x^2 - 2)$

8. **La factorización de $2x^2 - 7x + 3$, es igual a:**

   a. $(2x - 1)(x - 3)$
   b. $(x - 1)(x - 3)$
   c. $(2x + 1)(x + 3)$

9. **La factorización del trinomio $x^2 + 7x + 12$,, es igual a:**

   a. $(x + 3)(x + 4)$
   b. $(x - 3)(x - 4)$
   c. $(x + 3)(x - 4)$

10. **La factorización de $x^3 + x^2 + 4x + 4$, es igual a:**

   a. $(x^2 - 4)(x - 1)$
   b. $(x^2 - 4)(x + 1)$
   c. $(x^2 + 4)(x + 1)$

Ir al solucionario

Semana 6

Estimados estudiantes, en la sexta semana estudiamos las expresiones racionales o fracciones algebraicas, en donde usted podrá aplicar los conceptos de exponentes y radicales, así como de las expresiones algebraicas.

Unidad 4. Expresiones Racionales

Las expresiones y ecuaciones racionales son muy útiles por su gran aplicación al momento de interpretar y resolver problemas cotidianos, por ejemplo, cuando se aplican ecuaciones de distancia–velocidad–tiempo, conceptos que se utilizan en física, química, entre otras ciencias. Con estos ascendentes, para el estudio de esta semana se proponen los temas: dominio de una expresión racional, simplificación, operaciones de multiplicación, suma y resta, finalizando con la racionalización de denominadores.

4.1. Dominio de una expresión algebraica racional

El dominio de la variable en una expresión algebraica racional es el conjunto de números reales que puede tomar dicha variable, con la excepción de aquellos números para los que la expresión no está definida: en el numerador puede darse cuando en una raíz de índice par se asignen valores negativos o en el denominador, cuando el número asignado dado ocasione un cero, considerando que la división entre cero o para cero, no está definida en matemática.

Por ejemplo, la expresión $\frac{\sqrt{x}-4}{x^2+3}$ no está definida para los números reales negativos, por cuanto en el numerador la raíz cuadrada de un número negativo no existe en los números reales. En el denominador no existe dificultad por cuanto, este siempre será positivo.

En otro ejemplo $\frac{x^2-3x+1}{x-4}$ no está definido para el número real 4, por cuanto en el denominador este valor ocasiona un cero y la división para cero o entre cero no está definida. En el numerado no existe problema, por cuanto se trata de un polinomio en donde no existen radicales.

4.2. Simplificación de expresiones racionales

Para la simplificación de expresiones racionales o fraccionarias se aplica la siguiente propiedad fundamental: Se puede multiplicar o dividir por una expresión distinta de cero, tanto al numerador como al denominador, y se obtiene una expresión racional o fracción equivalente. Propiedad que se puede simbolizar de la siguiente manera: $\frac{ax}{ay} = \frac{x}{y}$

Entonces, la propiedad comentada en el párrafo anterior nos permite simplificar una expresión racional, eliminando factores comunes del numerado y denominador.

Ejemplos 1: Factoricemos las siguientes expresiones racionales.

$$\frac{3x}{2x^2}=\frac{3}{2x}$$

$$\frac{2x+4}{6}=\frac{2(x+2)}{2\cdot 3}=\frac{x+2}{3}$$

$$\frac{2m^2-2}{4m^2+8m-12}=\frac{2(m^2-1)}{4(m^2+2m-3)}=\frac{2(m+1)(m-1)}{4(m+3)(m-1)}=\frac{m+1}{2(m+3)}$$

Tenga presente que, una expresión racional se considera simplificada si el numerador y el denominador no tienen factores en común y que, podemos *simplificar* expresiones racionales de manera similar a la simplificación de fracciones numéricas.

4.3. Multiplicación y división de expresiones racionales

Así como podemos multiplicar y dividir fracciones, también podemos multiplicar y dividir expresiones racionales, o fracciones que incluyen polinomios.

Para realizar la división, se deberá cambiar el símbolo de división por el símbolo de multiplicación, escribiendo el inverso de la expresión racional que está inmediatamente después del símbolo de división. Posteriormente, se factoriza el numerador y denominador de cada expresión racional y, por último, se cancela o eliminan los factores comunes al numerador y denominador.

Ejemplos 2. Hallemos el resultado de la multiplicación y división de las siguientes expresiones.

$$\frac{5x-5}{x^2-x-12}\cdot\frac{x^2-9}{3x-3}=\frac{5(x-1)}{(x-4)(x+3)}\cdot\frac{(x+3)(x-3)}{3(x-1)}=\frac{5(x-3)}{3(x-4)}$$

$$\frac{6m-9}{m^2-25}\div\frac{8m-12}{m^2+3m-10}=\frac{3(2m-3)}{(m+5(m-5)}\cdot\frac{(m+5)(m-2)}{4(2m-3)}=\frac{2(m-2)}{4(m-5)}$$

4.4. Suma y resta de expresiones racionales

Estimado estudiante, recuerde que cuando sumamos o restamos fracciones, debemos asegurarnos de que ellas posean el mismo denominador. Luego que todas las fracciones tengan igual denominador, procedemos a *combinar* las diferentes fracciones, es decir, efectuamos la suma algebraica de los numeradores, tomando en cuenta los signos de los diferentes términos y escribimos el resultado de dichas operaciones sobre el denominador común.

Ejemplos 3. Hallemos el resultado simplificado de la adición y sustracción de expresiones racionales.

$$\frac{x-1}{x^2+2x+1}+\frac{2}{2x+2}-\frac{2x-3}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)^2}+\frac{2}{2(x+1)}-\frac{2x-3}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x-1)}{2(x+1)^2(x-1)}+\frac{2(x+1)(x-1)}{2(x+1)^2(x-1)}-\frac{2(x+1)(2x-3)}{2(x+1)^2(x-1)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x-1)+2(x+1)(x-1)-2(x+1)(2x-3)}{2(x+1)^2(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2-4x+2+2x^2-2-4x^2+2x+6}{2(x+1)^2(x-1)}$$

$$=\frac{-2x+6}{2(x+1)^2(x-1)}=\frac{2(-x+3)}{2(x+1)^2(x-1)}=\frac{3-x}{(x+1)^2(x-1)}$$

Recursos de aprendizaje

Amplíe su conocimiento sobre la adición y sustracción de expresiones racionales y continúe con la consolidación de los temas estudiados esta semana, sobre las operaciones y simplificación de expresiones racionales, por esta razón, la invitación para que:

- Estudie un video que ayudará a profundizar el estudio y aplicación de la adición y sustracción de expresiones racionales, para lo cual debe habilitar el hipervínculo Suma y resta de expresiones racionales.

- Revise las páginas del texto en su cuarta unidad Expresiones Racionales, principalmente lo relacionado con las operaciones de expresiones racionales, considerando que son procesos similares a los estudiados en las fracciones aritméticas.

> **Retroalimentación:** En el vídeo se explica cómo sumar y restar expresiones racionales cuando tienen denominadores distintos. Mientras que, en el texto básico, se detallan todos los temas estudiados esta semana, mostrando algunos ejercicios ilustrativos completamente desarrollados.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Desarrolle sus destrezas resolviendo los ejercicios referentes a la suma y resta, multiplicación y división de expresiones racionales.

- Explique sobre la propiedad de las fracciones que nos permite proceder a la simplificación.
- Plantee y desarrolle la multiplicación de dos expresiones racionales.
- Halle el resultado simplificado de las siguientes operaciones con expresiones racionales.

$$\frac{x-1}{x^2+2x+1}+\frac{4}{2x-2}-\frac{2x-3}{x^2-1}=$$

$$\frac{3x-3}{x^2-x-12}\cdot\frac{x^2-9}{3x+3}=$$

$$\frac{6m-9}{m^2-25}\div\frac{8m-12}{m^2+3m-10}=$$

- Investigue sobre un error común que no se debe cometer al momento de la simplificación de expresiones racionales.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 7

4.5. Fracciones compuestas o complejas

Las fracciones complejas o compuestas son aquellas que contienen en el numerador o en el denominador otras fracciones. Para la simplificación de una fracción compleja, debemos considerar que una fracción, en realidad indica la división o partición de dos expresiones.

Antes de interpretar como una división de fracciones, se debe trabajar en el numerador y en el denominador hasta dejar simplificadas dichas expresiones racionales.

Ejemplos 1. Simplifiquemos las fracciones compuestas.

$$\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{5}}{2x-\frac{3x}{10}}=\frac{\frac{5x+2x}{10}}{\frac{20x-3x}{10}}=\frac{\frac{7x}{10}}{\frac{17x}{10}}=\frac{7x}{10}\div\frac{17x}{10}=\frac{7x}{10}\cdot\frac{10}{17x}=\frac{7}{17}$$

4.6. Racionalizar el denominador o el numerador

Racionalizar el denominador, es eliminar todos los radicales del denominador. De manera similar cuando hablamos de racionalizar el numerador. Para realizar estos procesos, se aplica la propiedad fundamental de las fracciones, multiplicando tanto al numerador y denominador por algún radical o expresión con radicales, de tal manera que se eliminen los radicales no deseados.

Ejemplo 2. Racionalicemos el denominador

$$\frac{2x}{\sqrt{3}-x}=\frac{2x}{\sqrt{3}-x}\cdot\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}+x}=\frac{2x(\sqrt{3}+x)}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}=\frac{2x(\sqrt{3}+x)}{(\sqrt{3})^2-x^2}=\frac{2x(\sqrt{3}+x)}{3-x^2}$$

Ejemplo 3. Racionalicemos el numerador

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\cdot\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\frac{(\sqrt{4+h})^2-2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$=\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

Recursos de aprendizaje

Estamos llegando al final de la cuarta unidad entonces, continuemos con la consolidación de los temas estudiados en esta semana, referentes a la simplificación de expresiones racionales, operaciones, fracciones complejas y la racionalización. Entonces, la invitación para que usted estimado estudiante:

- Estudie el video que le ayudará a profundizar el conocimiento y aplicación de la racionalización de expresiones racionales, habilitando el hipervínculo Racionalización.
- Revise las páginas del texto en la cuarta unidad Expresiones racionales, principalmente la simplificación de expresiones racionales, las operaciones y la racionalización del numerador y del denominador. Al final del texto cuenta con ejercicios propuestos para probar sus capacidades desarrolladas.

> **Retroalimentación:** En el video se observan ejercicios sobre la racionalización de expresiones racionales, debidamente explicados para que usted consolide los aprendizajes. Mientras que, en el texto básico, se explican los fundamentos teóricos y se presentan muchos ejercicios desarrollados sobre la simplificación y operaciones con expresiones racionales, así como ejercicios propuestos para que usted los realice previo a las pruebas parciales y presenciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Mejore su aprendizaje realizando los siguientes ejercicios:

- Desarrolle los ejercicios de operaciones con expresiones racionales.

  $$\frac{x-2}{x^2+4x+4}+\frac{1}{2x-2}-\frac{2x-3}{x^2-4}=$$

  $$\frac{3x-3}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2-1}{3x+3}$$

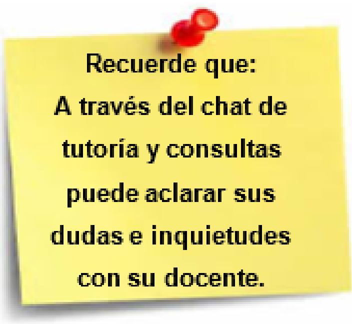
  $$\frac{8m-12}{m^2+3m-10}\div\frac{6m-9}{m^2-25}$$

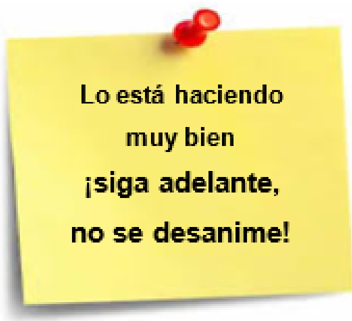
- Racionalice las siguientes expresiones.

  Racionalice el numerador: $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=$

  Racionalice el denominador: $\frac{2m-1}{\sqrt[3]{m-1}-1}=$

- Refuerce sus destrezas desarrollando los problemas planteados en el texto básico al final de la unidad.





Autoevaluación 4

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de **Las Expresiones racionales**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

1. El dominio de la expresión $\frac{x}{x^2-5x+6}$, es:

a. {x/x ≠ 5 y x ≠ 6}
b. {x/x ≠ 2 y x ≠) 3}
c. {x/x = 2 y x = 3}

2. El conjunto de valores correspondientes al dominio de la expresión $\frac{\sqrt{x}}{x-5}$, es:

a. {x/x ≤ 0 y x ≠ 5}
b. {x/x = 0 y x ≠ 5}
c. {x/x ≥ 0 y x ≠ 5}

3. La expresión simplificada correspondiente a $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$, es:

a. $\frac{x+1}{x+2}$

b. $\frac{x-1}{x-2}$

c. $\frac{x+1}{x\div 2}$

4. La simplificación de $\frac{x+9}{x^2+8x-9}$, es:

a. $\frac{1}{x-1}$

b. $\frac{1}{x+9}$

c. $\frac{x+7}{x-1}$

5. La expresión que corresponde a la multiplicación de $\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16} \times \frac{3x+12}{x-1}$, es :

a. $\frac{(x+3)}{x+4}$

b. $\frac{3(x+3)}{x+4}$

c. $\frac{3(x-3)}{x-4}$

6. El resultado de la división $\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-5x+6}$, es:

a. $\frac{x+3}{(x+1)}$

b. $\frac{x-3}{(x+2)(x+1)}$

c. $\frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$

7. La suma correspondiente a $\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2}$, es:

a. $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$

b. $\frac{x^2-2x-6}{(x+1)(x+2)}$

c. $\frac{x^2+6}{(x-1)(x+2)}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

8. **La diferencia correspondiente a $\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2}$, es:**

a. $\frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2}$

b. $\frac{3+x}{(x+1)(x-1)^3}$

c. $\frac{3-x}{(x-1)}$

9. **La fracción simplificada correspondiente a $\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}}$, es:**

a. $\frac{x(x+y)}{y(x-y)}$

b. $\frac{(x+y)}{(x-y)}$

c. $\frac{x(x-y)}{y(x+y)}$

10. **La racionalización del denominador de la expresión $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$,es:**

a. $\sqrt{2}-1$

b. $2-1$

c. $\sqrt{1}-2$

Ir al solucionario

Semana 8

Actividad 1. Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el primer bimestre y que no fueron entregadas.

Actividad 2. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 3. Suba el archivo del documento al EVA caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.

Actividad 4. Revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

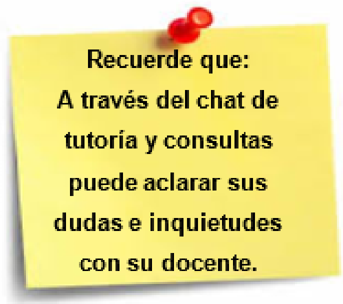
Para ello considere:

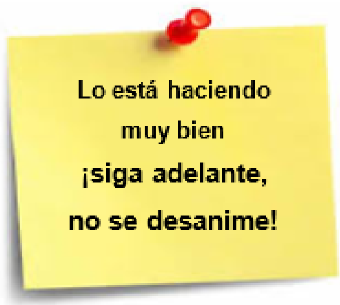
- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y,
- Evaluaciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del primer bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en las cuatro unidades planificadas y desarrolladas en este primer bimestre.
- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.
- Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.





Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

Emplea axiomas, principios y conceptos básicos de números complejos, ecuaciones, desigualdades, plano cartesiano, circunferencia y rectas, para modelar y resolver problemas del entorno natural y social.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Para alcanzar el resultado de aprendizaje que nos encamine al logro de competencias, lo primordial en cualquier concepto, es entender el significado, partir de la definición, conocer las leyes y propiedades que se cumplen y pueden ser aplicadas, solo después de esto realizar correctamente las aplicaciones con ecuaciones, desigualdades, circunferencia y rectas que nos permitirán utilizar los algoritmos adecuados para la modelización y resolución de problemas. En este camino resaltar la importancia de emplear con rigor un lenguaje matemático apropiado que se apoya en una terminología universal de la ciencia formal de los números y las formas. Sin descuidar que el modelaje estará referido a situaciones de la vida cotidiana y relacionadas con el entorno natural y social. Estudiando los siguientes contenidos:

- Ecuaciones
- Números complejos
- Desigualdades
- El plano coordenado, gráficas y circunferencia

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Al iniciar el segundo bimestre profundizaremos el aprendizaje de uno de los conceptos más importantes para el modelado de problemas cotidianos, las ecuaciones. Siendo importante el análisis de los conceptos de ecuaciones lineales, cuadráticas y otros tipos especiales.

Semana 9

Unidad 5. Ecuaciones

Ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen datos conocidos y otros elementos desconocidos llamados incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Por ejemplo, $x^2 + 2x - 8 = 0$ es una ecuación cuadrática.

La incógnita llamada también variable, es el valor que se quiere encontrar en una ecuación, el cual al ser reemplazado en la ecuación hace que se verifique la igualdad. En el ejemplo propuesto en el párrafo anterior, la ecuación se verifica o cumple para $x = -4$ y $x = 2$. Además, cuando dos ecuaciones tienen exactamente las mismas soluciones, decimos son ***ecuaciones equivalentes***.

En toda ecuación, al ser una igualdad, se cumplen dos propiedades fundamentales, las mismas que sirven de fundamento para realizar las operaciones que nos permiten encontrar las soluciones.

Propiedades de la igualdad

1. **De la adición:** Si sumamos la misma cantidad a los dos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.

$$x = y \Leftrightarrow x + a = x + b$$

2. **De la multiplicación:** Si multiplicamos por la misma cantidad diferente de cero, a los dos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.

$$x = y \Leftrightarrow ax = bx$$

Existen diferentes tipos de ecuaciones, en este curso se revisarán aquellos tipos más importantes, iniciamos con el estudio de las ecuaciones líneas, pasamos luego a las ecuaciones cuadráticas y al final con otros tipos especiales.

5.1. Solución de ecuaciones lineales

Definamos una ecuación lineal:

Ecuación lineal

La ecuación lineal en una variable es aquella que tiene la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales y x es la variable, siendo $a \neq 0$.

Ejemplo 1: Resolvamos la ecuación lineal explicando cada uno de los pasos.

$4x - 2 = 2x + 3$	Ecuación dada
$4x - 2 + 2 = (2x + 3) + 2$	Sumamos 2 a los dos lados
$4x = 2x + 5$	Simplificamos

$4x - 2x = (2x + 5) - 2x$	Restamos 2x a los dados
$2x = 5$	Simplificamos
$(2x)\frac{1}{2} = (5)\frac{1}{2}$	Multiplicamos por a los dos lados
$x = \frac{5}{2}$	**Solución**

Verifiquemos

$4x-2=2x+3$

$$4\left(\frac{5}{2}\right) - 2 = 2\left(\frac{5}{2}\right) + 3$$

$10-2=5+3$

$8=8$

5.2. Solución de ecuaciones cuadráticas

Definamos a la ecuación cuadrática:

> **Ecuación cuadrática**
>
> La ecuación cuadrática en una variable es aquella que tiene la forma $x^2 + bx + c = 0$, donde a,b y c son números reales, con $a \neq 0$.

La propiedad que permite fundamentar la resolución de una ecuación cuadrática por factorización es la siguiente:

> **Propiedad producto cero**
>
> Un **producto** de factores es **cero** si y solo si uno o más de los factores es **cero**.
>
> $$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor y = 0$$

Ejemplo 2. Resolvamos la ecuación cuadrática por factorización.

$x^2 - x - 6 = 0$	Ecuación dada
$(x - 3)(x + 2) = 0$	Factorizamos
$(x - 3) = 0$ o $(x+2)=0$	Cada factor igualamos a 0
$(x - 3) = 0$	En el primer factor
$x - 3 + 3 = 0 + 3$	Sumamos 3 a los dos lados y simplificamos
$x = 3$	Solución
$x + 2 = 0$	En el segundo factor
$x + 2 - 2 = 0 - 2$	Restamos 2 a los dos lados y simplificamos
$x = -2$	Solución

$x_1 = 3$

$x_2 = -2$

Las soluciones de la ecuación son 3 y −2.

Aplicando la fórmula cuadrática

Se conoce como fórmula general o fórmula cuadrática a la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde a,b y c son los coeficientes de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

Ejemplo 3. Dada la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 1 = 0$, halle las soluciones o raíces.

El trinomio cuadrado no es perfecto, y no hay dos números enteros que sumados den 2 y multiplicados den –1, por lo que vamos a utilizar la fórmula general y después realizamos los cálculos pertinentes.

x^2+2x–1=0	Ecuación dada
a=1; b=2; c=–1	Identificamos los coeficientes
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Fórmula general
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$	
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$	
$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$	
$x = -\frac{2}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{2}$	
$x = -1 \pm \sqrt{2}$	Solución
$x_1 = -1 + \sqrt{2}$	
$x_2 = -1 - \sqrt{2}$	

Las soluciones de la ecuación son $-1 + \sqrt{2}$ y $-1 - \sqrt{2}$

5.3. Otros tipos de ecuaciones

En este apartado, se explican algunos tipos especiales de ecuaciones, como son las que tienen expresiones fraccionarias, otras con radicales y otras como las de cuarto grado tipo cuadrático.

Ecuaciones que contienen expresiones fraccionarias

Cuando las ecuaciones tienen expresiones racionales, lo primero que se debe hacer es eliminar los denominadores y luego, proceder como en los casos anteriores.

Ejemplo 4. Resolvamos la ecuación con expresiones racionales.

$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3} = 0$ Ecuación dada

$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{(x-4)(x-3)} - \frac{x^2}{x-3} = 0$ Factorizamos los denominadores

Multiplicamos cada término por el denominador común

$$\frac{x^2}{x-4}(x-4)(x-3) - \frac{16}{(x-4)(x-3)}(x-4)(x-3) - \frac{x^2}{x-3}(x-4)(x-3) = 0$$

$x^2 (x-3) - 16 - x^2 (x-4) = 0$	Simplificamos
$x^3 - 3x^2 - 16 - x^3 + 4x^2 = 0$	Realizamos las operaciones
$x^2 - 16 = 0$	Reducimos términos semejantes
$(x-4)(x+4) = 0$	Factorizamos

$x_1 = 4$ y $x_2 = -4$

Verifiquemos para $x = 4$

$$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3} = 0$$

$$\frac{4^2}{4-4} - \frac{16}{4^2-7(4)+12} - \frac{4^2}{4-3} = 0$$

$\frac{16}{0} - \frac{16}{0} - \frac{16}{1} = 0$ La ecuación no está definida para $x = 4$, no es solución

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Verifiquemos para x = – 4

$$\frac{x^2}{x-4}-\frac{16}{x^2-7x+12}-\frac{x^2}{x-3}=0$$

$$\frac{(-4)^2}{-4-4}-\frac{16}{(-4)^2-7(-4)+12}-\frac{(-4)^2}{-4-3}=0$$

$$\frac{16}{-8}-\frac{16}{56}-\frac{16}{-7}=0$$

$$\frac{-112-16+128}{56}=0$$

$$\frac{0}{56}=0$$

0 = 0

La única **solución** es x = −4.

Ecuaciones que contienen radicales

Para resolver una ecuación con radicales o lo que es lo mismo con exponentes fraccionarios, se aísla un radical en uno de los lados de la igualdad y en el otro lado el resto de los términos, aunque tengan radicales. Luego, se eleva al exponente inverso y se resuelve la ecuación obtenida.

Ejemplo 4. Dada la ecuación $\sqrt{2x-3}-x=-1$, encontremos las soluciones.

$\sqrt{2x-3}-x=-1$ Ecuación dada

$\sqrt{2x-3}-x+x=-1+x$

$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(x-1)^2$ Aislamos y elevamos al cuadrado

2x – 3 = x^2 – 2x + 1

$x^2 - 2x - 2x + 1 + 3 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$ Ecuación simplificada

$a = 1$; $b = -4$; $c = 4$ Valores para reemplazar en la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$x = 2$

Verifiquemos para $x = 2$

$$\sqrt{2x - 3} - x = -1$$

$$\sqrt{2(2) - 3} - 2 = -1$$

$$\sqrt{1} - 2 = -1$$

$-1 = -1$

La **solución** de la ecuación es 2.

Semana 10

Estimado estudiante, en la semana diez estudiaremos un tema muy importante por cuanto nos permite aplicar el concepto de ecuación en la solución de problemas del entorno natural y social. Puntualmente, se inicia con el modelado matemático considerado como el proceso por el cual, en este caso, se representa un problema cotidiano a través de una ecuación.

5.4. Modelado con ecuaciones

Para formular las ecuaciones que modelen situaciones concretas del mundo cotidiano, relacionadas a nuestro entorno natural y social (Stewart et al., 2017) nos presentan una guía para modelar con ecuaciones.

Guía para modelar con ecuaciones

1. **Identifique la variable**. Luego de una lectura adecuada, se determina la cantidad que se quiere calcular, conocida como variable, la cual generalmente se representa con la letra .
2. **Grafique el problema.** La mayoría de los problemas se pueden modelar con facilidad si primero se traza un croquis o un gráfico que nos permita interpretar el problema.
3. **Lenguaje algebraico.** Luego de leer las veces necesarias hasta comprender el problema, se procede a transformar la información dada o

datos conocidos en lenguaje coloquial, a un lenguaje algebraico.

4. **Formule el modelo.** Una vez que se tienen los datos importantes del problema, se busca armar la relación con la variable, lo cual origina un modelo, en este caso la ecuación.

5. **Resolver la ecuación y verificar**. Una vez que se armó o construyó la ecuación, se procede a resolver, verificarla y escribir la solución como una oración que conteste la pregunta del problema.

Recursos de aprendizaje

Para comprender mejor sobre las ecuaciones, la resolución de diferentes tipos y el modelado con ecuaciones, invito para que:

- Estudien la explicación detallada sobre el modelado con ecuaciones, habilitando el hipervínculo Modelado con ecuaciones.

- Revisen las páginas de la quinta unidad y la unidad de modelado con ecuaciones que consta en el texto como unidad siete, estudiando primero lo referido a la resolución de ecuaciones, interpretando la resolución de problemas desarrollados muy bien ilustrados por los autores del texto básico en la página 65.

Retroalimentación: En el video se explica con mucha claridad el proceso para iniciar con el modelado de problemas aplicando las ecuaciones, los ejemplos son muy ilustrativos y se explican detalladamente, lo más importante es el paso del lenguaje coloquial o común, al lenguaje matemático. Mientras que, en el texto básico, se detallan todos los casos de resolución de las ecuaciones más típicas y utilizadas para el

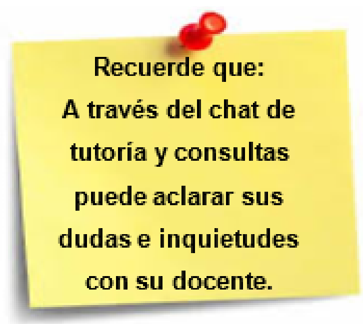
Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

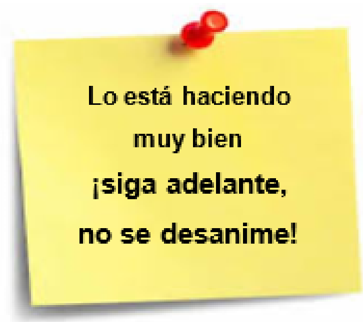
> modelaje, así como en la unidad de modelado con ecuaciones se cuenta con un importante grupo de problemas desarrollados que ilustran su aprendizaje.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Antes de pasar a la autoevaluación, invito a resolver algunas ecuaciones y modelar un problema a través de la aplicación de las ecuaciones.

- Resuelva la ecuación $x^4 - 64 = 0$
- Determine las soluciones de la ecuación: $\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} = 5$
- Halle las soluciones de $\frac{x^2}{x+4} - \frac{16}{x^2+7x+12} - \frac{x^2}{x+3} = 0$
- Resuelva la ecuación $\sqrt{x-3} = x - 1$
- Modele y resuelva el siguiente problema: Una pelota es lanzada hacia arriba a 48 pies/s desde una plataforma que está a 100 pies de altura. Encuentre la altura máxima que alcanza la pelota y qué tanto tiempo le tomará llegar ahí.





Autoevaluación 5

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de **Las ecuaciones y el modelado con ecuaciones**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

1. **La ecuación que tiene la característica de lineal es:**

   a. $\sqrt{x} - 6x = 0$
   b. $x^2 + 2x = 0$
   c. $4x - 5 = 3$

2. **La ecuación $7x - 4 = 3x + 8$, tiene como solución a :**

   a. $x = 3$
   b. $x = 4$
   c. $x = 8$

3. **Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente y se representa así:**

   a. $A = B \leftrightarrow A + C = B + C$
   b. $A = B \leftrightarrow AC = BC$
   c. $A = B \leftrightarrow A + C \neq B + C$

4. **Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma:**

   a. $ax^2 + bx + c = 0$
   b. $ax^3 + b + c = 0$
   c. $ax + bx + c = 0$

5. **Las raíces reales de la ecuación $x^2 + 5x = 24$, son**

    a. $x = 5$ y $x = 24$
    b. $x = -3$ y $x = 8$
    c. $x = 3$ y $x = -8$

6. **Las raíces que verifican la ecuación $(x-4)^2 = 5$, son:**

    a. $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$
    b. $x = 4 - \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$
    c. $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = +\sqrt{5}$

7. **Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, se suma:**

    a. $(\frac{b}{2})^2$
    b. $(\frac{b}{2})$
    c. $(-\frac{2}{2})^2$

8. **Las soluciones reales de la ecuación $x^2 - 8x + 13 = 0$ son:**

    a. $x = 4 \pm \sqrt{3}$
    b. $x = 4 \pm 3$
    c. $x = 3 \pm \sqrt{4}$

9. **La fórmula para resolver una ecuación cuadrática es:**

    a. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
    b. $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
    c. $x = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

10. **Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 5x - 1 = 0$, son:**

a. $x = \frac{\sqrt{37}}{6}$ y $x = \frac{\sqrt{37}}{6}$

b. $x = \frac{5+\sqrt{37}}{6}$ y $x = \frac{5-\sqrt{37}}{6}$

c. $x = \frac{5+\sqrt{15}}{2}$ y $x = \frac{5-\sqrt{15}}{2}$

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 11

En esta semana estudiaremos los números complejos, tema importante para entender la solución de algunas ecuaciones en donde se presentan raíces de números negativos.

Unidad 6. Números Complejos

Los números reales son incapaces de abarcar todas las raíces de números negativos, característica que sí la pueden realizar los números complejos. Esta particularidad permite que, los números complejos se utilicen en diferentes campos de las matemáticas, además en la ingeniería, en la física y en otras ciencias del conocimiento.

6.1. Operaciones aritméticas con números complejos

Los números complejos aparecen para interpretar raíces de índice par como por ejemplo $\sqrt[4]{-16}$, para lo cual, se parte definiendo la base imaginaria: $i = \sqrt{-1}$. La definición formal de número complejo es la siguiente:

Número complejo

Un número complejo es la expresión de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. La parte real del número complejo es a y la parte imaginaria es b.

Para operar números complejos se realizan procesos similares a los aplicados en las operaciones con binomios, es decir, se adicionan, sustraen y multiplican igual que con cualquier binomio , la diferencia es que en los números complejos se debe tener presente que .

Ejemplos 1. Realicemos la adición y sustracción propuestas de números complejos.

$(3 + 5i) + (2 - 3i) = (3 + 2) + (5i - 3i) = 5 + 2i$

$(1 - 4i) - (2 + 6i) = (1-2) + (-4i - 6i) = -1 - 10i$

$(-4 + 5i)-(-2 + 2i) = (-4 + 2) + (5i - 2i) = -2 + 3i$

Ejemplos 2. Realicemos la multiplicación de los siguientes números complejos

$(3 - 4i)(2 + i) = [(3)(2)-(-4)(1)] + [(3)(1) + (-4)(2)]i = (6 + 4) + (3 - 8)i = 10 - 5i$

$(2 + 3i)(4 -5i) = [(2)(4)-(3)(-5)] + [(2)(-5) + (3)(4)]i = 23 + 2i$

$(-2 + i)(4 + 3i) = [(-2)(4)-(1)(3)] + [(-2)(3) + (1)(4)]i = -11-2i$

Ejemplos 3. Aplicando las leyes de la multiplicación, escribamos el valor de las expresiones propuestas.

$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$

$i1^2 = (i^2)^6 = (-1)^6 = +1$

$i^21 = i^{20} + 1 = i^{20} . i = (i^2)^{10} . i= (-1)^{10} . i = +1 . i = i$

$i^{27} = i^{26} + 1 = i^{26} . i = (i^2)^{13} . i= (-1)^{13} . i = -1 . i = -i$

Para la división de números complejos se debe considerar un proceso similar a la racionalización de expresiones racionales. Vale aclarar que aquí aparece el concepto de conjugado complejo.

Conjugado de número complejo

Para un número complejo z = a + bi existe un conjugado complejo con la forma $\bar{z}$ = a − bi, tal que:

Ejemplo 4. Expresemos las siguientes divisiones en la forma .

$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

Ejemplo 4. Expresemos las siguientes divisiones en la forma a + bi.

$$\frac{2-3i}{3+i} = \frac{2-3i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{(2-3i)(3-i)}{(3)^2-(\sqrt{-1})^2} = \frac{3-11i}{9+1} = \frac{3-11i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{11i}{10}$$

6.2. Raíces cuadráticas de números negativos y soluciones complejas

El cuadrado de cualquier número real positivo o negativo es positivo, y el cuadrado de 0 es 0. Por lo tanto, ningún número negativo puede tener una raíz cuadrada en los números reales.

Si − r es negativo, entonces la raíz cuadrada principal de − r es $\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$. Las dos raíces cuadrados de -r son: $i\sqrt{r}$ y $-i\sqrt{r}$

Ejemplos 5. Hallemos las raíces de números negativos

$$\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$$

$$\sqrt[2]{-81} = i\sqrt[2]{81} = 9i$$

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera sobre los números complejos, las operaciones y las raíces cuadradas de números negativos, invito para que:

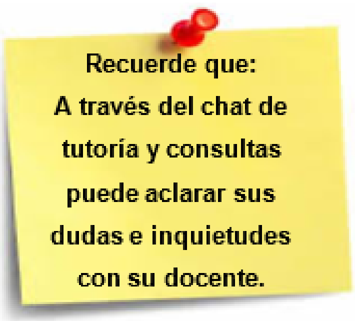
- Estudie la explicación detallada sobre las operaciones con números complejos, habilitando el hipervínculo Operaciones con números complejos.
- Revisen las páginas de la sexta unidad Números complejos, estudiando primero lo referido a la definición de números complejos y luego los procesos y fórmulas para desarrollar las operaciones con números complejos.

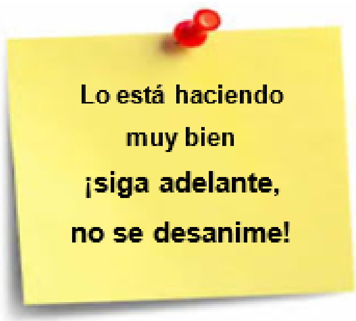
> **Retroalimentación:** En el video se explica con mucha claridad los procesos para realizar las operaciones con números complejos, considerando que se pueden aplicar procesos directos o fórmulas, mismas que nos permiten desarrollar los ejercicios de forma más directa. Mientras que, en el texto básico, se detallan todos los procedimientos a partir de las definiciones y se explican las fórmulas que se pueden aplicar, explicación especial se brinda al final de la unidad cuando se recomienda no cometer un error clásico al multiplicar raíces de números negativos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Antes de pasar a la autoevaluación, le invito a resolver algunas ecuaciones y modelar un problema con ecuaciones.

- Adicione los números: (3 + 2i) + (5– i) + (1 + 1)
- Determine el producto de: (5–2i)(3 + 4i)
- Escriba en la forma a + bi, la siguiente división: $\frac{2+3i}{3-2i}$
- Escriba las soluciones de la ecuación $\sqrt{-16} = x - 1$





Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 6

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad **Números complejos**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

1. **Un número complejo es una expresión de la forma:**

   a. $a + bi$
   b. $a \times bi$
   c. $a + i$

2. **Para sumar números complejos, sumamos las partes reales y las partes imaginarias, es decir:**

   a. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
   b. $(a + bi) + (c + di) = (a + c)i + (b + d)i$
   c. $(a + bi) + (c + di) = (a + c)i + (b + d)$

3. **Para restar números complejos, restamos las partes reales y las partes imaginarias, es decir:**

   a. $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
   b. $(a + bi) - (c + di) = (a - c) - (b - d)i$
   c. $(a + bi) - (c + di) = (a - c) - (b + d)i$

4. **Multiplicamos números complejos como binomios usando $i^2 = -1$, es decir:**

   a. $(a + bi) \times (c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$
   b. $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) - (ad - bc)i$
   c. $(a + bi) \times (c + di) = (ac \times bd) + (ad \times bc)i$

5. La expresión (3 + 5i) + (4 - 2i), en la forma a + bi, es :

a. 7 + 3*i*
b. 7 - 3*i*
c. 7*i* + 3*i*

6. La expresión (3 + 5*i*) - (4 - 2*i*), en la forma a + b*i*, es:

a. - 1 + 7*i*
b. 1 + 7*i*
c. 1 - 7*i*

7. La expresión (3 + 5*i*)(4 - 2*i*), en la forma a + b*i*, es:

a. - 22 - 14*i*
b. 22 + 14*i*
c. 22 - 14*i*

8. Si -r es negativo entonces la raíz cuadrada principal de -r, es:

a. $\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$
b. $\sqrt{-r} = \sqrt{r}$
c. $\sqrt{-r} = \sqrt{ri}$

9. La expresión $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4})$ en la forma a + b*i*, es:

a. $8\sqrt{3} + i\sqrt{3}$
b. $\sqrt{3} + i\sqrt{3}$
c. $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

10. Las soluciones de la ecuación cuadrática , son:

a. x = 2 - *i* y x = - 2 - *i*
b. x = - 2 + *i* y x = - 2 - *i*
c. x =-2+i y x=2+i

Ir al solucionario

Semana 12

Estimado estudiante, en esta unidad estudiaremos las desigualdades, tema importante y complementario a las ecuaciones, por cuanto permiten modelar diferentes situaciones problemáticas de la vida real. En esta guía aparece como la unidad siete, pero en el texto básico, es la unidad ocho.

Unidad 7. Desigualdades

En matemáticas, una desigualdad es una relación de orden que se da entre dos valores cuando éstos son distintos, en caso de ser iguales, lo que se tiene es una igualdad.

7.1. Resolución de desigualdades lineales

Para resolver una desigualdad se utilizan los mismos pasos que se usan para resolver una ecuación. Consideremos que dos desigualdades que tienen la misma solución se llaman desigualdades equivalentes.

Las propiedades respecto a las igualdades son similares. Sin embargo, al multiplicar una desigualdad por una expresión negativa debe cambiarse el signo de la desigualdad. Por esta razón vale que considere lo siguiente:

Propiedades de las desigualdades

1. **Adición**. Si sumamos a cada lado o miembro de una desigualdad, una misma cantidad, se obtiene una desigualdad equivalente.

$$\mathbf{x \leq y \Leftrightarrow x + a \leq y + a}$$

2. **Multiplicación positiva.** Si multiplicamos a los términos de una desigualdad por el mismo número positivo, se obtiene una desigualdad equivalente.

$$\mathbf{x \leq y \Leftrightarrow ax \geq ay} \text{ para } a < 0$$

3. **Multiplicación negativa.** La multiplicación a los términos de una desigualdad por el mismo número negativo invierte el sentido de la desigualdad.

$$\mathbf{x \leq y \Leftrightarrow ax \geq ay} \text{ para } a < 0$$

4. **Recíprocos.** Los recíprocos de cada miembro de una desigualdad que contenga cantidades positivas invierten el sentido de la desigualdad.

$$x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \Leftrightarrow \text{ para } x > 0 \wedge y > 0$$

5. **Transitividad.** La desigualdad es transitiva.

$$\mathbf{Si\ x \leq y \wedge\ y \leq z \Rightarrow x \leq z}$$

Al resolver una desigualdad, la solución se puede expresar de tres maneras a saber, como: un intervalo, conjunto descriptivo y gráficamente.

Ejemplo 1. Resolvamos la desigualdad lineal: $5x + 4 \leq 14$

$$5x + 4 \leq 14$$

$$5x \leq 10$$

$$x \leq 2$$

La **solución** la expresamos de tres formas:

Como un conjunto intervalo: $(-\infty, 2]$

Como un conjunto descriptivo o de comprensión: $\{x/x \in R \wedge x \leq 2\}$

Gráficamente: Recta numérica desde el dos hacia la izquierda, incluido el dos.

Ejemplo 2. La desigualdad doble: $-5 < 3x - 2 < 1$

$$-5 + 2 < 3x - 2 + 2 < 1 + 2$$

$-3 < 3x < 3$ Dividiendo todos los miembros para 3, se tiene:

$$-1 < x < 1$$

Expresamos la solución de tres maneras:

Como un conjunto intervalo: $(-1, 1)$

Como un conjunto descriptivo o de comprensión: $\{x/x \in R \wedge -1 < x < 1\}$

Gráficamente: Recta numérica desde -1 hasta el 1, sin incluir estos números.

7.2. Resolución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades cuadráticas o de grado superior si fuera el caso, se deben considerar los signos al momento de analizar los factores: si el producto o cociente tienen un número par de factores negativos, entonces su valor es positivo; si el producto o cociente tienen un número impar de factores negativos, entonces su valor es negativo.

Por ejemplo, para resolver la desigualdad $x^2 - 2x - 8 > 0$, factorizamos y obtenemos lo siguiente: $(x - 4)(x + 2) > 0$. Lo cual nos dice que el producto de los dos factores $(x - 4)(x + 2)$ debe ser positivo. Entonces, al momento del análisis estos factores pueden ser ambos positivos o negativos, esos serán los intervalos solución.

En cambio, si la desigualdad fuese < 0, los factores deben tener signos contrarios, siendo esos intervalos la solución.

Los autores del texto básico (Stewart et al., 2017) sugieren seguir una guía para resolver ecuaciones no lineales. A continuación, resumo lo más importante.

Guía para resolver desigualdades no lineales

1. **Términos a un lado.** Escriba la desigualdad de modo que, todos los términos diferentes de cero aparezcan en un solo lado de la desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.

2. **Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad, puede utilizar el proceso que más se le facilite.

3. **Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero, estos serán números críticos que dividen a la recta en intervalos, muy importantes para el análisis. Haga un listado con los intervalos formados.

4. **Construya una tabla**. Use valores de prueba para hallar los signos de cada factor, según los intervalos. En la última fila, escriba el signo de estos factores.

5. **Solución.** Determine la solución de la desigualdad a partir de la última fila de la tabla. Luego, verifique si la desigualdad queda satisfecha por todos los puntos extremos cuando hayan ≤ o ≥.

Ejemplo 3. Resuelva la desigualdad cuadrática:

$x^2 + x - 12 > 0$

$(x + 4)(x - 3) > 0$ Factorizamos

$x_1 = -4$; $x_2 = 3$ Números críticos.

$(-\infty,-4)$; $(-4,3)$; $(3,\infty)$ Intervalos en la recta

Construimos la tabla

Intervalo	$(-\infty,-4)$	$(-4,3)$	$(3,\infty)$
Signo de $(x + 4)$	–	+	+
Signo de $(x - 3)$	–	–	+
Signo de $(x + 4)(x - 3)$	+	–	+

Debido a que la desigualdad es mayor que (>) entonces los intervalos que satisfacen la desigualdad serán aquellos que corresponden al signo más de la tercera fila de la tabla: $(x + 4) \cup (3,\infty)$.

El conjunto **solución** está dado por los intervalos: $(x + 4) \cup (3,\infty)$

Semana 13

En esta semana concluiremos con el estudio de la resolución de desigualdades con valor absoluto y con el modelado de desigualdades.

7.3. Resolución de desigualdades con valor absoluto

Para resolver las desigualdades que contienen valor absoluto, considere las siguientes propiedades del valor absoluto en una desigualdad:

Propiedades de desigualdades con valor absoluto

1. Si $|x| < c$ entonces $-c < x < c$
2. Si $|x| \leq c$ entonces $-c \leq x \leq c$
3. Si $|x| > c$ entonces $-c > x > c$
4. Si $|x| \geq c$ entonces $-c \geq x \geq c$

Ejemplo 4. Resolvamos la desigualdad con valor absoluto: $|x - 2| < 1$

La desigual dada es equivalente a: $-1 < x - 2 < 1$

$$-1 + 2 < x - 2 + 2 < 1 + 2$$

$$1 < x < 3$$

La **solución** es el conjunto de los números menores a 3 y mayores a 1.

7.4. Resolución de desigualdades con valor absoluto

El modelado de algunos problemas prácticos nos conduce a desigualdades lineales o cuadráticas, porque con frecuencia estamos interesados en determinar cuándo una cantidad es mayor o menor que otra. El procedimiento que se debe emplear es similar al empleado en el modelado con ecuaciones.

Ejemplo 5. A un joven trabajador le dan para vender una cierta cantidad de periódicos, de los que logra vender 35, sobrándole más de la mitad. Luego, le devuelven 3, pero vende después 18 con lo que le restan menos de 22 periódicos. ¿Cuántos periódicos tuvo inicialmente?

- Sea x = número de periódicos que le asignan vender
- Vendió 35 y le quedaron más de la mitad, por lo que:

  $x - 35 > \frac{x}{2}$ de donde $x > 70$

- Le devuelven 3 periódicos, pero vende 18, con lo que le restan menos de 22.

  $(x - 35) + 3 - 18 < 22$ de donde $x < 72$

- Entonces, si consideramos: $x > 70$ y $x < 72$, lo que es lo mismo:

  $70 < x < 72$

  $x = 71$

Solución: Inicialmente el vendedor tuvo 71 periódicos.

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera sobre las propiedades y leyes de las desigualdades, la resolución de desigualdades lineales y cuadráticas y otros tipos de desigualdades, invito para que:

- Estudien la explicación detallada sobre la resolución de desigualdades cuadráticas, habilitando el hipervínculo Desigualdades Cuadráticas.

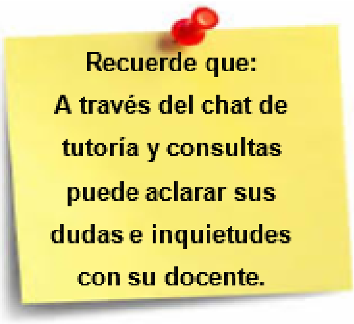
- Revisen las páginas de la octava unidad del texto básico Desigualdades, en donde los autores explican detalladamente las definiciones básicas, propiedades fundamentales y algoritmos idóneos para la resolución de los diferentes tipos de desigualdades. Especial consideración el modelado con desigualdades, existe un número suficiente de problemas desarrollados.

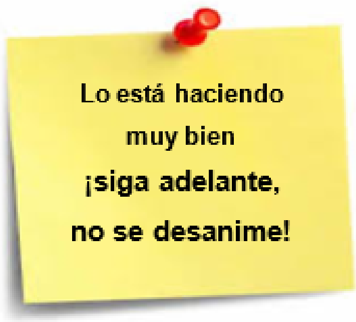
> **Retroalimentación:** En el video se explica con mucha claridad el proceso para la resolución de las desigualdades cuadráticas, presentando algunos ejercicios muy ilustrativos. Mientras que, en el texto básico, se detallan todos los casos de resolución de las desigualdades lineales y de otros tipos, para finalizar con una brillante explicación del modelado de problemas utilizando las desigualdades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Antes de pasar a la autoevaluación, le invito a resolver algunas desigualdades y modelar un problema a través de la aplicación de desigualdades.

- Resuelva la desigualdad: $4 - 2x > 3$
- Determine la solución de la desigualdad cuadrática: $x^2<10-3x$
- Halle las soluciones de $\frac{x^2}{x+4} \leq 2$
- Resuelva la ecuación $|x + 4| = x - 1$
- Modele y resuelva el siguiente problema: Una pelota es lanzada verticalmente con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La distancia **s** (en pies) de la pelota al suelo después de **t** segundos es: s = 80t – 16t2. ¿Cuál es el intervalo de tiempo en que la pelota está a más de 96 pies del suelo?





Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 7

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de **Las desigualdades**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

1. **El intervalo de la desigualdad , es 3x < 9x + 4:**

   a. El intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$
   b. El intervalo $\left(\frac{2}{3}, -\infty\right)$
   c. El intervalo $\left(-\frac{2}{3}, -\infty\right)$

2. **El conjunto solución de la desigualdad $4 \leq 3x - 2 < 13$, es:**

   a. El conjunto solución es [2,5)
   b. El conjunto solución es [2,-5)
   c. El conjunto solución es [-2,5)

3. **Sumar la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente, es decir:**

   a. $A \leq B \leftrightarrow A + C < B + C$
   b. $A \leq B \leftrightarrow A + C \leq B + C$
   c. $A \leq B \leftrightarrow A + C > B + C$

4. **Multiplicar a cada lado de una desigualdad por la misma cantidad positiva da una desigualdad equivalente, es decir:**

   a. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \leftrightarrow CA \leq CB$
   b. Si $C > 0$, entonces $A \geq B \leftrightarrow CA \leq CB$
   c. Si $C > 0$, entonces $A > B \leftrightarrow CA < CB$

5. **Tomar recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades positivas invierte la dirección de la desigualdad, es decir:**

   a. $Si\ A > 0\ y\ B > 0\ entonces\ A \leq B \leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$
   b. $Si\ A > 0\ y\ B > 0\ entonces\ A \geq B \leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$
   c. $Si\ A > 0\ y\ B > 0\ entonces\ A \leq B \leftrightarrow \frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}$

6. **La solución de la desigualdad $x^2 \leq 5x - 6$, es :**

   a. [-2,3]
   b. [2,-3]
   c. [2,3]

7. **La solución de la desigualdad , $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$ es:**

   a. [0,-1)
   b. [0,1)
   c. [1,0)

8. **La siguiente propiedad de las desigualdades $|x| < C$, es equivalente a:**

   a. $-C < x < C$
   b. $C < x < C$
   c. $-C > x > C$

9. **La desigualdad $|3x + 2| \geq 4$, es igual a:**

   a. $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$
   b. $(-\infty, -2] \cap \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$
   c. $(-\infty, -2] > \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$

10. **Las instrucciones en un frasco de medicamento indican que debe conservarse en una temperatura entre 5 y 30°C. Expresando el enunciado en t**érminos de desigualdad, tenemos:

a. $5 < C < 30$
b. $5 > C > 30$
c. $5 \pm C \pm 30$

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 14

Estimados estudiantes, en esta semana iniciamos con el estudio de algunos temas básicos pero importantes para continuar los cursos superiores, recordemos que el plano coordenado, las gráficas de ecuaciones y la circunferencia, fueron estudiados y aplicados en los últimos de la Educación General Básica.

Unidad 8. El plano coordenado. Gráficas de ecuaciones. Circunferencias

Iniciamos el estudio de la octava unidad, en donde revisaremos tres temas sencillos pero muy importantes: el plano coordenado, las fórmulas para distancia y punto medio y las gráficas de ecuaciones con dos variables.

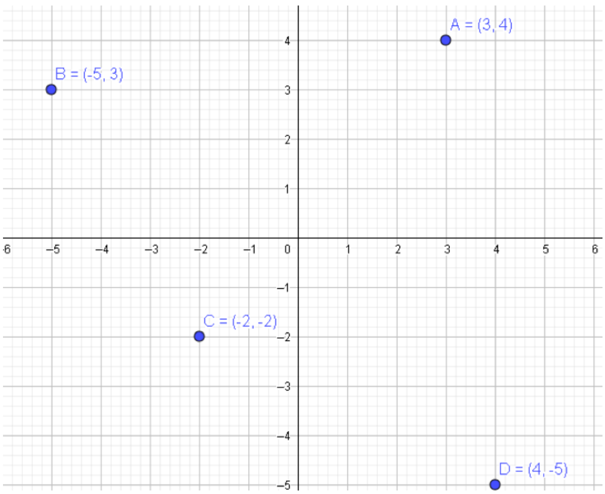
8.1. El plano coordenado

El plano coordenado consiste en un eje horizontal y un eje vertical, líneas numeradas que se intersectan en ángulos rectos y son perpendiculares una con la otra. Este sistema coordenado formado por cuatro cuadrantes constituye el vínculo entre el álgebra y la geometría, porque aquí se pueden trazar gráficas de ecuaciones algebraicas. Gráficas que nos permiten observar la relación entre las variables de la ecuación.

Conviene puntualizar que, cada punto del plano bidimensional puede identificarse con un par ordenado de números reales. Es decir, cualquier punto P del plano coordenado puede ser localizado o identificado por un par ordenado de números (a,b), el primer número se llama coordenada en x o abscisa de P y el segundo número ,b se llama coordenada y del punto P.

El plano coordenado consiste en un eje horizontal y un eje vertical, líneas numeradas que se intersectan en ángulos rectos y son perpendiculares una con la otra. Este sistema coordenado formado por cuatro cuadrantes constituye el vínculo entre el álgebra y la geometría, porque aquí se pueden trazar gráficas de ecuaciones algebraicas. Gráficas que nos permiten observar la relación entre las variables de la ecuación.

Conviene puntualizar que, cada punto del plano bidimensional puede identificarse con un par ordenado de números reales. Es decir, cualquier punto P del plano coordenado puede ser localizado o identificado por un par ordenado de números (), el primer número a se llama coordenada en x o abscisa de P y el segundo número b, se llama coordenada y del punto P.



Plano coordenado
Elaboración: Sánchez J. (2020)

8.2. Las fórmulas para distancia y punto medio

La fórmula de la distancia y del punto medio son importantes para consolidar algunos conceptos básicos de matemáticas introductorios a la licenciatura, es por esta razón que se proponen nuevamente.

Fórmula de la distancia

La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano es:

$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La fórmula de la distancia entre dos puntos del plano cartesiano o plano coordenado aparece demostrada en el texto básico. Para la demostración de la fórmula basta aplicar el teorema de Pitágoras considerando que la distancia es la hipotenusa en el triángulo rectángulo ABC.

La fórmula para calcular las coordenadas del punto medio es tremendamente útil cuando se tratan de construcciones geométricas y cálculos previos a la geometría analítica.

Fórmula del punto medio

El punto medio del segmento de recta $\overline{AB}$ comprendido entre el punto $A(x_1, y_1)$ y el punto $B(x_2, y_2)$ es:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 1. Calculemos la distancia entre los puntos P(2, 5) y Q(7, 4).

$$d(\overline{PQ}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7 - 2)^2 + (4 - 5)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

Ejemplo 2. Determinemos la distancia entre los puntos .

$$d(\overline{PQ}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-(-3))^2 + (-5-6)^2}$$
$$= \sqrt{(7)^2 + (-11)^2} = \sqrt{49 + 121} = \sqrt{170}$$

Ejemplo 3. Hallemos el punto medio del segmento formado entre los puntos M(3, 7) y N(−5, −8).

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{7+(-8)}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-1}{2}\right) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

8.3. Gráficas de ecuaciones con dos variables

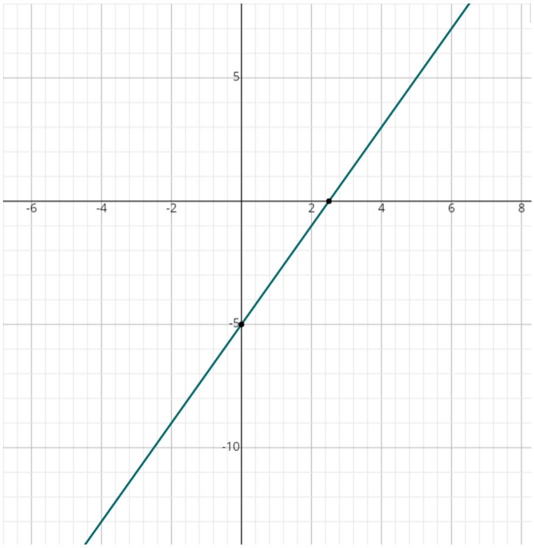
Graficar ecuaciones con dos variables es un tema importante para entender las relaciones que se dan entre las variables: dependiente e independiente. Anteriormente, hasta finales del milenio anterior, todos los cálculos se los realizaba manualmente o en el mejor de los casos, con una calculadora, y luego se procedía a representar en una tabla. Finalmente, se dibujaban los puntos en el plano de coordenadas, se unían dichos puntos y se obtenía la gráfica de la ecuación.

Actualmente, esos procesos todavía son útiles para entender alguna aritmética, principalmente en la Educación Básica, con menos frecuencia en bachillerato. En el curso introductorio a la licenciatura en Pedagogía de las Matemáticas y la Física, aunque se hace un repaso general, ya no es lo más importante.

Ahora, se aprovechan las aplicaciones y software libres o gratuitos, así como calculadoras gráficas para representar en el plano coordenado dichas ecuaciones lineales, cuadráticas o de orden superior. Lo más importante será analizar las características de las rectas o curvas que se obtienen.

Ejemplo 4. Tracemos la gráfica de la ecuación con dos variables: $2x - y = 5$

Primero, debemos despejar la variable dependiente: $y = 2x - 1$. Luego, a través de Geogebra representamos la gráfica en un sistema o plano coordenado.



Gráfica de $2x - y = 5$
Elaboración: Sánchez J. (2020)

Importante recalcar que, por ser un curso introductorio, en el texto básico se solicita todo el procedimiento para trazar las gráficas, en esos casos debemos hacerlo.

Semana 15

Está cerca de lograr el objetivo propuesto, siga adelante con entusiasmo. Ahora terminamos el estudio de la unidad, abordando los temas de los puntos de intersección y las circunferencias.

8.4. Puntos de intercepción

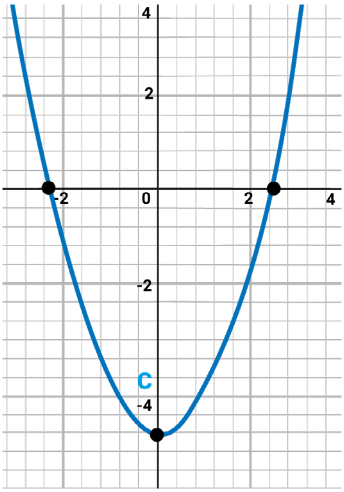
Los puntos de intersección son puntos donde la recta intersecta o cruza, los ejes horizontal y vertical. Para calcular dichos puntos, se aplica la siguiente definición:

> **Puntos de intersección**
>
> 1. Las coordenadas de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al **eje X**, se obtiene haciendo $y = 0$ y despejando x.
>
> 2. Las coordenadas de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al **eje Y**, se obtiene haciendo $x = 0$ y despejando y.

Ejemplo 1. Encontremos los puntos de intersección *x* y *y* de la ecuación:

$$y = x^2 - 4.$$

Primero grafiquemos la ecuación en el sistema de coordenadas:



Ecuación dada: $y = x^2 - 4$

Intersección con el eje X

Hacemos $y = 0$, entonces:

$0 = x^2 - 4$, de donde se obtiene $(x + 2)(x - 2) = 0$.

Los puntos de intersección con el eje X, son:

$\mathbf{x_1 = -2}$ **y** $\mathbf{x_2 = 2}$

Intersección con el eje Y

Hacemos $x = 0$, entonces:

$x = 0^2 - 4$, de donde se obtiene $y = 0 - 4$.

El único punto de intersección con el eje Y, es: $\mathbf{y = -4}$

Gráfica de $y = x^2 - 4$.
Elaboración: Sánchez J. (2020)

8.5. Circunferencias

No se trata de definir a la circunferencia, pero podemos decir que: circunferencia es la línea formada por todos los puntos que están a la misma distancia de otro punto llamado centro.

Hasta aquí, se ha estudiado cómo trazar la gráfica a partir de una ecuación dada, pero muchas ocasiones necesitamos realizar el proceso contrario y se trata de determinar la ecuación de la circunferencia a partir de ciertas condiciones dadas.

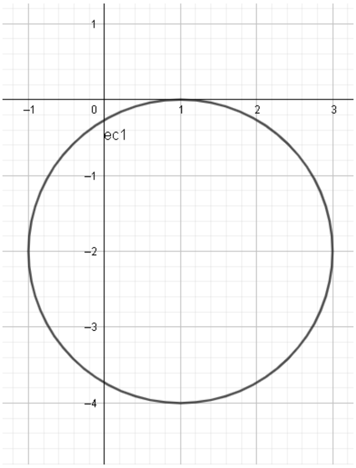
Antes de estudiar esto, primero debemos definir.

> **Ecuación de la circunferencia**
>
> Una ecuación de la circunferencia con centro (h,k) y un radio r se define como: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, siendo esta la **forma ordinaria**. Si el centro de la circunferencia está en el origen (0, 0), la ecuación es: $x^2+y^2=r^2$.

Ejemplo 2. Determinemos la ecuación de la circunferencia con radio 2 y centro en el punto (1, –2). Tracemos la gráfica.

Como el centro está fuera del origen, empleamos la forma ordinaria de la circunferencia: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas



Gráfica de$(x - 1)^2 + (y+2)^2 = 4$
Elaboración: Sánchez J. (2020)

Ecuación de la circunferencia

Empleamos la **forma ordinaria** porque el centro está fuera del origen.
Consideremos que:
$h = 1$; $k = -2$; $r = 2$
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
$(x - 1)^2 + (y - (-2))^2 = 2^2$
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

Solución
$\mathbf{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4}$

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera sobre las gráficas de ecuaciones, ecuación de la circunferencia y el plano de coordenadas, invito para que:

- Estudien la explicación detallada sobre la gráfica de una circunferencia, habilitando el hipervínculo Ecuación de una circunferencia.

- Revisen las páginas de la novena unidad del texto básico El plano coordenado, Gráficas de ecuaciones y Circunferencias, en donde los autores explican detalladamente las definiciones básicas, propiedades fundamentales y algoritmos idóneos para la gráfica de ecuaciones con dos variables.

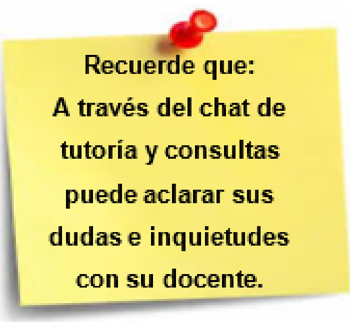
> **Retroalimentación:** En el video se explica con mucha claridad el proceso para obtener con el Geogebra la gráfica de ecuaciones con dos

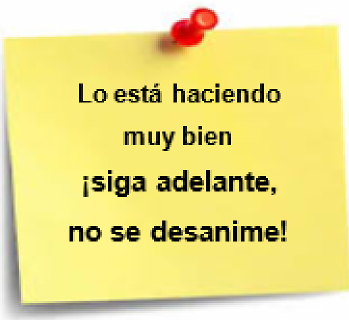
variables, en especial de las circunferencias. Mientras que, en el texto básico, se detallan los procesos para graficar muchos tipos de ecuaciones, especial consideración el proceso para determinar la ecuación de una circunferencia a partir de algunos datos y finalizar con una brillante explicación de la simetría en las curvas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Antes de pasar a la autoevaluación, le invito a graficar algunas ecuaciones y hallar la ecuación de una circunferencia a partir de ciertos datos dados.

- Grafique la ecuación $2x - y = 6$
- Trace el gráfico de la ecuación $2x^2 - y = 3$
- Construya el gráfico de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$
- Pruebe la simetría de la ecuación $y = 4x^2$
- Determine la ecuación de la circunferencia que tiene de radio 5 unidades y su centro está ubicado en el punto (4, 0). Trace la gráfica.





Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 8

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad **El plano coordenado, Gráficas y Circunferencias**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

1. **El plano coordenado es un vínculo entre el álgebra y la:**

   a. Química
   b. Lógica matemática
   c. Geometría

2. **La distancia entre los puntos $A(x_1,y^1)$ y $B(x_2,y_2)$ en el plano es:**

   a. $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
   b. $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}$
   c. $d(A,B)=\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$

3. **La distancia entre los puntos**: A(2, 1) y B(−3, 2) es

   a. $\sqrt{26}$
   b. 6
   c. $\sqrt{6}$

4. **El punto medio del segmento de recta de $A(x_1,y_1)$ al punto $B(x_2,y_2)$ es:**

   a. $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

   b. $\left(\frac{x_1-x_2}{2};\frac{y_1-y_2}{2}\right)$

   c. $\left(\frac{x_1+x_2}{4};\frac{y_1+y_2}{4}\right)$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

5. **El cuadrilátero con vértice P(1,2),Q(4,4),R(5,9)y S(2,7), es un paralelogramo porque sus diagonales se bisecan entre sí en el punto:**

   a. El punto medio de la diagonal QS es $(3,\frac{11}{4})$

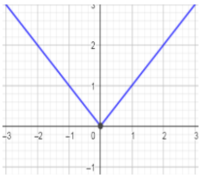
   b. El punto medio de la diagonal QS es $(3,\frac{11}{2})$

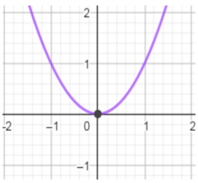
   c. El punto medio de la diagonal QS es $(\frac{11}{2},3)$

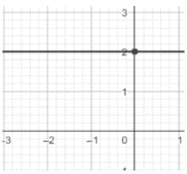
6. **La tabla de valores de la ecuación 2x -y = 3, es:**

a. (x, y)	b. (x, y)	c. (x, y)
(−1,−5)	(−1,5)	(−1,5)
(0,−3)	(0,3)	(0,3)
(1,−1)	(1,1)	(1,−1)
(2,1)	(2,−1)	(2,1)
(3,3)	(3,−3)	(3,6)
(4,5)	(4,−5)	(4,4)

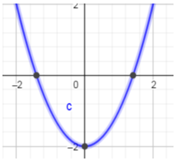
7. **La gráfica de la ecuación y=|x| es:**

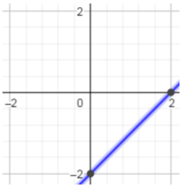
   a. 

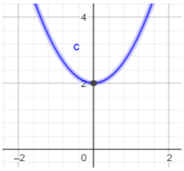
   b. 

   c. 

8. **La grafica de la ecuación $y=x^2-2$ es:**

a. 

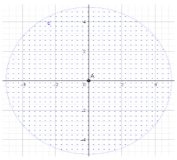
b. 

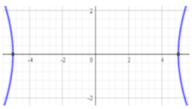
c. 

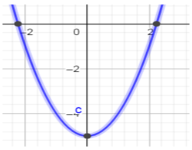
9. **Una ecuación de la circunferencia con centro (h,k) y radio es:**

a. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
b. $(x + h)^2 + (y + k)2 = r^2$
c. $(x - h)^2 - (y - k)^2 = r^2$

10. **La grafica de la ecuación $x^2+y^2 = 25$ es:**

a. 

b. 

c. 

Ir al solucionario

Semana 16

Actividad 1. Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el primer bimestre y que no fueron entregadas.

Actividad 2. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 3. Suba el archivo del documento al EVA caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.

Actividad 4. Revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

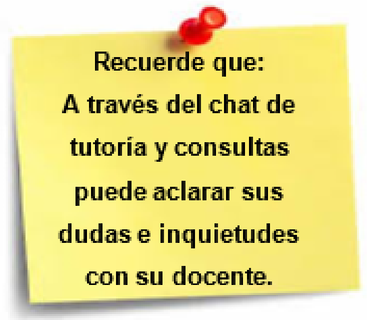
Para ello considere:

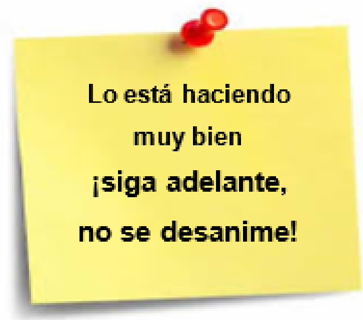
- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y,
- Evaluaciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del segundo bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en las cuatro unidades planificadas y desarrolladas en este primer bimestre.
- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.
- Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.





IMPORTANTE

La evaluación del segundo bimestre es acumulativa

4. Solucionario

Respuestas a Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b	**Propiedad Asociativa**. Como quiera que se asocien el resultado no cambia.
2	c	**Propiedad Distributiva.** El factor se distribuye con los sumando.
3	b	**4 x 3.** Se aplica la propiedad cuatro de los números negativos.
4	a	**8-5.** Se aplica la propiedad seis de los números negativos.
5	a	$\frac{10}{21}$. En la multiplicación de fracciones se multiplica numeradores entre sí y denominadores entre sí.
6	a	$\frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$ En las fracciones homogéneas se suman los numeradores y se escribe el mismo denominador.
7	b	Recta. Los puntos corresponden a la recta numérica.
8	a	**a** está a la izquierda de **b** en la recta numérica. El número de la izquierda es menor que un número de la derecha.
9	a	A={x/x es un entero y 0 < x < 7} : En este conjunto se contemplan los números del 1 al 6.
10	c	3 ≥ 0: El valor absoluto de un numero siempre es positivo o cero.

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Respuestas a Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	Todas expresión elevada a cero es igual a 1
2	b	$-\frac{1}{8}$. Para cambiar el signo del exponente se escribe el inverso multiplicativo.
3	b	x^{4+7} Al multiplicar dos potencias con la misma base se suman los exponentes.
4	c	y^{-3}. Al multiplicar dos potencias con la misma base se suman los exponentes.
5	a	6 970 000 000. Se mueve 9 lugares decimales hacia la derecha.
6	a	0.0000046271. Se mueve 6 lugares decimales hacia la izquierda.
7	b	$x\sqrt[3]{x}$. Aplique la propiedad 4 de las raíces n–ésimas
8	a	$\frac{1}{5}$. Aplique la propiedad 3 y 4 de las raíces n–ésimas
9	b	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Multiplique por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ toda la expresión.
10	b	$\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$. Multiplique por $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$ toda la expresión.

Ir a la autoevaluación

Respuestas a Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	c	$2x^3 - x^2 - 5x + 4$. Agrupe términos semejantes, combine términos semejantes.
2	c	$-11x^2 + 9x + 4$. Utilice la propiedad distributiva para el signo menos y agrupe términos semejantes.
3	a	$6x^2 - 7x - 5$. Aplique la propiedad distributiva y reduzca términos semejantes,
4	b	$2x^3 - 7x^2 - 7x + 12$. Aplique la propiedad distributiva y reduzca términos semejantes,
5	b	$9x^2 + 30x + 25$. Emplee la regla del cuadrado de una suma.
6	c	$x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$. Emplee la regla el cubo de la diferencia
7	a	$3x(x - 2)$. Encuentre el factor común 3x
8	a	$(2x - 1)(x - 3)$. Aplique el trinomio de la segunda forma.
9	a	$(x + 3)(x + 4)$. Encuentre dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7.
10	c	$(x^2 + 4)(x + 1)$. Por agrupación de términos.

Ir a la autoevaluación

Respuestas a Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b	{x/x ≠ 2 y x ≠ 3}. El denominador se hace cero si x=2 o x=3.
2	c	{x/x ≥ 0 y x ≠5}. El denominador será 0 si x=5.
3	a	$\frac{x+1}{x+2}$. Luego de factorizar se simplifica (x – 1).
4	a	$\frac{1}{x-1}$. Se factoriza y se elimina x + 9
5	b	$\frac{3(x+3)}{x+4}$. Primero factorice, luego se aplica la propiedad de fracciones y por último se elimina factores comunes
6	b	$\frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$. Invierta y multiplique, factorice, luego elimine factores comunes
7	a	$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$. Encuentre el MCD, forme fracciones homogéneas, sume las fracciones combinando los términos del numerador.
8	a	$\frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2}$. Encuentre el MCD, forme fracciones homogéneas, sume las fracciones combinando los términos del numerador.
9	a	$\frac{x(x+y)}{y(x-y)}$. Simplifique en el numerado y denominador luego haga la división.
10	a	√2-1. multiplique el numerador y denominador por el conjugado, aplicar la fórmula 1 de productos notables.

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Respuestas a Autoevaluación 5		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	c	4x - 5 = 3. Una ecuación lineal de una variable puede ser escrita de la forma ax = b, donde a y b son números reales y con a ≠ 0.
2	a	x = 3. El tres verifica la ecuación al igualar a cero
3	a	A = B ↔ A + C = B + C. En una igualdad si se suma la misma cantidad en ambos lados siempre tendremos una equivalencia.
4	a	$x^2 + bx + c = 0$. Esta es la forma general una ecuación cuadrática.
5	c	x = 3 y x = - 8. En la verificación los dos números dan como resultado una equivalencia.
6	a	x = 4 + √5 y x = 4 - √5. En la verificación las dos expresiones dan como resultado una equivalencia.
7	a	$(\frac{b}{2})^2$. El cuadrado de la mitad del cociente de x.
8	a	x=4±√3. Sume $(\frac{-8}{2})^2$ para completar el cuadrado perfecto
9	a	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Podemos utilizar esta técnica para resolver ecuaciones cuadráticas.
10	b	$x = \frac{5+\sqrt{37}}{6}$ y $x = \frac{5-\sqrt{37}}{6}$. Donde a=3 , b= −5 y c=−1 ; utilice la fórmula general

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

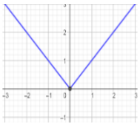
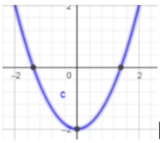
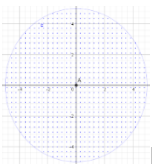
Respuestas a Autoevaluación 6		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	a + bi. Donde a y b son números reales $i^2=-1$
2	a	(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. Se suma por separado los reales e imaginarios.
3	a	(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i. Se resta por separado los reales e imaginarios.
4	a	(a + bi) × (c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i. Se realiza la multiplicación de una forma conjunta.
5	a	7 + 3i . Se suma por separado los reales e imaginarios.
6	a	-1 + 7i. Se resta por separado los reales e imaginarios.
7	b	22 + 14i. Se realiza la multiplicación y se reducen términos semejantes.
8	a	$\sqrt{(-r)} = i\sqrt{r}$. Por definición de raíz cuadrada principal.
9	a	$8\sqrt{3} + i\sqrt{3}$. Se aplica las reglas de la multiplicación y radicación de números complejos
10	b	x=-2+i y x=-2-i. Se aplica la formula general para su resolución

Ir a la autoevaluación

Respuestas a Autoevaluación 7		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	El intervalo $-\frac{2}{3},\infty$. La desigualdad es lineal si cada término es constante o múltiplo de la variable
2	a	El conjunto solución es [2,5). Para resolver una desigualdad lineal despejamos la variable en un lado del signo de desigualdad.
3	b	$A \leq B \leftrightarrow A + C \leq B + C$. Primera regla de las desigualdades.
4	a	Si $C > 0$, entonces $A \leq B \leftrightarrow CA \leq CB$.Tercera regla de las desigualdades
5	a	Si $A > 0$ y $B > 0$ entonces $A \leq B \leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$. Quinta regla de las desigualdades
6	c	[2,3]. El conjunto de números satisface la desigualdad.
7	b	[0,1). El intervalo [0,1) satisface la desigualdad
8	a	$-C < x < C$. La primera propiedad de desigualdades con valor absoluto
9	a	$(-\infty,-2] \cup \left[\frac{2}{3},\infty\right)$. Aplicamos la propiedad 4 de las desigualdades
10	a	$5 < C < 30$. Aplique las reglas de las desigualdades.

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Respuestas a Autoevaluación 8		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	c	Geometría. En el plano coordenado podemos trazar graficas de ecuaciones algebraicas
2	a	$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Fórmula general para hallar la distancia entre dos puntos.
3	a	$\sqrt{26}$. Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos.
4	a	$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Aplicar la fórmula del punto medio del segmento.
5	b	El punto medio de la diagonal QS es $(3, \frac{11}{2})$: Se aplica la fórmula del punto medio de un segmento
6	a	Se reemplaza los valores en x para calcular el valor de y
7	a	 Se asigna valores a x, para obtener los valores de y. Por definición.
8	a	 Para encontrar los puntos de intersección x hacemos que y=0 y despejamos x
9	a	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Esta es la forma ordinaria para la ecuación de la circunferencia.
10	a	 Es una ecuación con centro en el origen.

Ir a la autoevaluación

5. Referencias Bibliográficas

Álvarez, F., De la Lanza, C., Ortiz, J. (2002). *Precálculo.* Mc Graw–Hill

Andrade, E., Cuenca, L., y Larrea, P. (2019). *Texto fundamentos matemáticos*. Universidad Técnica Particular de Loja.

Bello, I. y Hopf, F. (2009). *Álgebra intermedia: un enfoque del mundo real*. McGraw–Hill Interamericana Editores.

Cuenca, L. (2019). *Introducción a las desigualdades*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=poFDfvI3KDQ

Cuenca, L. (2019). *Productos notables*. [Archivo de video] https://view.genial.ly/5cf066e1c506180f39cda4e0

Cuenca, L. (2019). *Representación de números racionales*. [Archivo de video]. https://view.genial.ly/5d4931c407c7190fa8cd969e

Demana, F., Waits, B., Foley, G. y Kennedy, D. (2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Goodman, A. y Hiersh, L. (2011). Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. Prentice Hall–Hispanoamericana S.A.

JulioProfe. (2014). *Desigualdades cuadráticas–Ejercicio 3.* [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=wzV2ZkKhB7A

Matemáticas Profe Alex. (2016). *Productos notables*. Conceptos previos. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=G–ym95yl3Es

Matemáticas Profe Alex. (2017). *Racionalización de denominadores*. Ejemplo1. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=PI2TVst7Ibs

Matemáticas Profe Alex. (2018). *Escribir un número en notación científica*. Parte 1. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=W4AwXQfn_o4&t=1s

Math2me. (2013). *Factorización por agrupación*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=vgG2l5V6HG4

Miller, Ch., Heeren, V. y Hornsby, J. (2017). *Matemática: razonamiento y aplicaciones.* Pearson. Prentice Hall.

Montoya, J. (2015). *Ecuación de una circunferencia*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=USbaTgd5gvs

Morales, E. (2014). *Intervalos.* [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=LnK47p17AtQ

Parra, L., Parra, G. *Matemáticas.* Kapelusk Mexicana. *Problema verbal de ecuaciones de dos pasos*. (2018). [Archivo de video]. http://bit.ly/FM_MODECLINEAL.

Peterson, J. (2006). *Matemáticas básicas. Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. Cecsa.

Sánchez, A. (2009). *Suma y resta de expresiones racionales. Parte 2*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=vgG2l5V6HG4

Sánchez, J. (2020). *Llegando a los números reales*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=fymQvBPQJks&feature=youtu.be

Stewar, J. Redlin, L. y Watson, S. (2017). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. México, D.F: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Swokowski, E., Cole, J. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Cengage Learning.

Swokowski, E. y Cole, J. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Cengage Learning Editores,S.A. de C.V.

TodoSobresaliente. (2016). *Operaciones con números complejos. Aprende Matemáticas.* [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=EWAR–6fDb7M

UtecContenidos. (2017). *M Modelado con ecuaciones A.* [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=TEddZghjFNs

Vitual. (2015). *Racionalización (el denominador es un binomio). Ejemplo 2*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=1TC–Ik48yxA

Zill, D. y Dewar, J. (2012). Álgebra y trigonometría. McGrawHill.