Modalidad Abierta y a Distancia

Prácticum 4.2 Trabajo de Integración Curricular / Examen Complexivo: opción Examen Complexivo

Guía didáctica

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Departamento de Ciencias de la Educación

Prácticum 4.2 Trabajo de Integración Curricular / Examen Complexivo: opción Examen Complexivo

Guía didáctica

Carrera	*PAO Nivel*
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagodía de las Matemáticas y la Física)*	VIII

Autor:

Armijos Ordoñez Jorge Washinton

EDUC_4156

Universidad Técnica Particular de Loja

Prácticum 4.2 Trabajo de Integración Curricular / Examen Complexivo: opción Examen Complexivo
Guía didáctica
Armijos Ordoñez Jorge Washinton

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital -978-9942-39-675-4

27 de diciembre, 2022

Índice

1. Datos de información **8**
1.1. Presentación de la asignatura 8
1.2. Competencias genéricas de la UTPL 8
1.3. Competencias específicas de la carrera 8
1.4. Problemática que aborda la asignatura en el marco del proyecto . 9
2. Metodología de aprendizaje **10**
3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje **12**

Primer bimestre **12**

Resultado de aprendizaje 1 .... **12**

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje **13**

Semana 1 .... **13**

Unidad 1. Ecuaciones y desigualdades **13**
1.1. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones? 14
1.2. ¿Cómo modelar con ecuaciones? 18
1.3. ¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones lineales? 19
1.4. ¿Cómo modelar con sistemas de ecuaciones lineales? 22
1.5. ¿Cómo se resuelven las desigualdades? 28
1.6. ¿Cómo modelar con desigualdades? 29
1.7. ¿Cómo se resuelve un sistema de desigualdades? 30
1.8. ¿Cómo modelar con sistemas de desigualdades lineales? 32

Actividades de aprendizaje recomendadas 34

Semana 2 .... **35**

Unidad 2. Funciones polinomiales y racionales **35**
2.1. ¿Cómo se resuelven funciones polinomiales? 36
2.2. ¿Cómo se modela con funciones polinomiales? 37
2.3. ¿Cómo se resuelven las funciones racionales? 38
2.4. ¿Cómo se modela con funciones racionales? 38

Actividades de aprendizaje recomendadas 40

Semana 3 .... **41**

Unidad 3. Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas **41**

3.1. ¿Cómo se resuelven las funciones exponenciales? 42
3.2. ¿Cómo se modela con funciones exponenciales? 43
3.3. ¿Cómo se resuelven las funciones logarítmicas? 47
3.4. ¿Cómo se modela con funciones logarítmicas? 48
3.5. ¿Cómo se resuelven las funciones trigonométricas? 51
3.6. ¿Cómo se modela con funciones trigonométricas? 52

Actividades de aprendizaje recomendadas 53

Autoevaluación 1 55

Semana 4 .... **58**

Unidad 4. Geometría Analítica **58**

4.1. La circunferencia y sus ecuaciones 59
4.2. La parábola y sus ecuaciones 60
4.3. ¿A qué llamamos elipse? 63
4.4. ¿A qué llamamos hipérbola? 65
4.5. ¿Cómo modelar aplicando geometría analítica? 68

Actividades de aprendizaje recomendadas 74

Semana 5 .... **75**

Unidad 5. Estadística inferencial **75**

5.1. ¿En qué se basa la inferencia estadística? 76
5.2. ¿En qué consiste el muestreo? 77
5.3. ¿Cómo se realizan las pruebas de hipótesis? 79
5.4. ¿En qué consisten las pruebas de hipótesis paramétricas? 80
5.5. ¿En qué consisten las pruebas de hipótesis no paramétricas? 87

Actividades de aprendizaje recomendadas 91

Semana 6 .... **92**

Unidad 6. Cálculo diferencial e integral **92**

6.1. ¿A qué llamamos diferenciación? 93
6.2. ¿Cómo se derivan las funciones? 95
6.3. ¿Cómo se calcula la pendiente de una curva en un punto dado? ... 96
6.4. ¿Cómo se determina puntos máximos y mínimos locales? 101
6.5. ¿Cómo se usan las derivadas en modelos matemáticos? 103
6.6. ¿Cómo se determinan las antiderivadas? 104
6.7. ¿Cómo se determina la integral indefinida? 105
6.8. ¿Cómo se determina la integral definida? 106
6.9. ¿Cuál es el teorema fundamental del cálculo? 109
6.10. ¿Cómo se utilizan las antiderivadas en el modelado matemático? 110

Índice

Actividades de aprendizaje recomendadas 111

Semana 7 112

Unidad 7. Álgebra lineal 112

7.1. ¿A qué llamamos matriz? 113
7.2. ¿Cuáles son las operaciones con matrices? 114
7.3. ¿A qué llamamos sistemas de ecuaciones lineales? 117

Actividades de aprendizaje recomendadas 120

Autoevaluación 2 122

Semana 8 127

Actividades finales del bimestre 127

Segundo bimestre 128

Resultado de aprendizaje 1 128

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje 128

Semana 9 128

Unidad 8. Selección de indicadores de evaluación para la planificación micro curricular 129

Actividades de aprendizaje recomendadas 130

Semana 10 131

Unidad 9. Planificación microcurricular para el aprendizaje y enseñanza de la física 131

Actividades de aprendizaje recomendadas 132

Semana 11 133

Unidad 10. Planificación micro curricular para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas 133

Actividades de aprendizaje recomendadas 134

Semana 12 134

Actividades de aprendizaje recomendadas 134

Semana 13 135

Actividades de aprendizaje recomendadas 135

Semana 14 136

Actividades de aprendizaje recomendadas 136

Semana 15 y 16 136

Actividades de aprendizaje recomendadas 137

Semana 17 137

Actividades de aprendizaje recomendadas 137

4. Solucionario **139**

5. Glosario **141**

6. Referencias bibliográficas **142**

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del Humanismo de Cristo.
- Comunicación oral y escrita.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Trabajo en equipo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Organización y planificación del tiempo.

1.3. Competencias específicas de la carrera

1. Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física,

basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.

2. Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad, y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado con relación a las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.

3. Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza- aprendizaje y evaluación que integren la práctica de investigación acción hacia producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

4. Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura en el marco del proyecto

La escasa capacitación y/o formación en temas de conocimiento científico, limitando la interacción en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

2. Metodología de aprendizaje

Para desarrollar habilidades, destrezas y competencias tendientes a la apropiación del conocimiento y al desempeño auténtico en la asignatura Prácticum 4.2: Trabajo de integración curricular/Examen complexivo, se incorporarán ambientes de aprendizaje informales, menos tradicionales en un contexto mundial y particular, utilizando como metodologías de aprendizaje:

Aprendizaje basado en talleres que supone un cambio organizativo del aula y parte de entender la importancia del trabajo en equipo y la organización flexible del proceso de aprendizaje, donde el maestro no transmite la información, sino que facilita al estudiante un aprendizaje significativo a su propio ritmo.

Aprendizaje por indagación, que promueve la construcción del conocimiento a través de preguntas, planteamiento de problemas, procesos de investigación, análisis de resultados, obtención de conclusiones y apertura de espacios de discusión para encontrar soluciones a los problemas planteados. De ahí que, cada temática regularmente parte con cuestionamientos, explica el contenido científico y presenta problemas para su resolución y respectiva generalización de leyes.

Aprendizaje basado en la resolución de problemas, a partir de la identificación del problema, su descripción, el análisis causal, las opciones de solución, la toma de decisiones y la delineación de un plan de acción se construye conocimientos, de ahí que, a lo largo de la guía se encontrará problemas del contexto para integrar la teoría y la práctica.

Aprendizaje colaborativo implementado en las actividades síncronas y asíncronas para la interacción entre estudiantes y docentes genera el intercambio experiencias, resolución de dudas e incertidumbres sobre comprensión de conceptos, retroalimentación de procesos y resolución de problemas, además, permite que el estudiante sea el protagonista de la construcción de su propio aprendizaje.

Para profundizar más sobre las metodologías de aprendizaje a utilizarse se invita a revisar los siguientes enlaces:

aprendizaje por indagación.

aprendizaje basado en la resolución de problemas y

aprendizaje colaborativo en la formación universitaria.

No existe un procedimiento único para el estudio, se proponen algunas orientaciones generales para este curso como la utilización del texto básico, micro videos, cuestionarios interactivos; anticipación del estudio de los aspectos teóricos, que serán consolidados a través de videoconferencias por parte del docente, el trabajo colaborativo en función de los distintos estilos de aprendizaje y enfocados a lograr resultados que orientan el desarrollo de las competencias, la comprensión de conceptos, se partirá de la vinculación con la vida cotidiana para luego conocer los procesos y llegar a la resolución de problemas en situaciones que posibilitan la interacción entre compañeros y el profesor, todo este procedimiento relacionado con el aprendizaje basado en la resolución de problemas ABP.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Aplica sistemas de conocimientos de matemática orientados a la construcción de experiencias de aprendizaje en escenarios, contextos y ambientes de su entorno natural y social, con metodologías activas orientadas al desarrollo de operaciones mentales e instrumentales para el bachillerato y la educación general básica superior.

Al finalizar el primer bimestre se espera como resultado la comprensión en la construcción de experiencias de aprendizaje considerando los escenarios, el entorno natural y social y el contexto, a través de la aplicación de metodologías activas y la tecnología para desarrollar el conocimiento de matemáticas en los estudiantes de educación general básica superior y el bachillerato.

El resultado de aprendizaje está directamente vinculado con las estrategias concretas de enseñanza y procesos específicos de evaluación, así como, los contenidos que se analizan como ecuaciones y desigualdades, funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, geometría analítica, estadística inferencial, cálculo diferencial e integral y álgebra lineal.

Se utilizarán como recursos de aprendizaje la guía didáctica del Practicum 4.2, guías didácticas y textos básicos de las asignaturas de matemáticas estudiadas, tutorías a través de Zoom, foro académico, video colaboración, cuestionarios en línea, actividades prácticas y evaluación presencial bimestral; y como actividades de aprendizaje se proponen actividades individuales y grupales, talleres e interacciones académicas con el docente.

Semana 1

Estimado estudiante:

En la presente semana se repasará los contenidos correspondientes a la resolución y modelado con ecuaciones y desigualdades, con el uso de dispositivos de graficación, para ello le invito a desarrollar el taller 1.

Unidad 1. Ecuaciones y desigualdades

Las ecuaciones y desigualdades tienen muchas aplicaciones en la vida cotidiana como en la comprensión en economía, medicina, psicología, química, entre otras áreas del conocimiento, ya que son simples de calcular y permiten expresar una mayor variedad de comportamientos.

Propósito

Aplicar el conocimiento de las ecuaciones y desigualdades para resolver problemas o situaciones de la vida cotidiana que pueden ser modeladas y poner en práctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Para recordar el proceso de modelado con ecuaciones, observe el video: Modelado con ecuaciones

En el video encontrará los pasos que se debe seguir como guía para el modelado con ecuaciones y la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Revise los contenidos estudiados sobre ecuaciones y desigualdades en el texto básico. Stewart, J. (2017).

En el texto básico encontrará información especialmente sobre:

1.1. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones?

Resolver una ecuación, es encontrar el valor o valores de las incógnitas que transforman la ecuación en una identidad. Las soluciones o raíces de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera.

Estimado/a estudiante, le invito a profundizar el tema sobre las ecuaciones:

Las ecuaciones lineales también conocidas como ecuaciones de primer grado, se resuelven encontrando el valor de la incógnita.

Para afianzar el conocimiento del proceso se resuelve la ecuación
$4x - 2 = 2x + 3$
$4x - 2 = 2x + 3$
$4x - 2 + 2 = (2x+3) +2$
$4x = 2x + 5$
$2x = 5$
$$x = \frac{5}{2}$$

Verifiquemos

$4x - 2 = 2x + 3$
$$4\left(\frac{5}{2}\right) - 2 = 2\left(\frac{5}{2}\right) + 3$$
$10 - 2 = 5 + 3$
$8 = 8$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven utilizando la descomposición en factores y se iguala a 0.

Como se muestra en el desarrollo de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$

$x^2-x-6 = 0$
$(x-3)(x+2) = 0$
$(x-3) = 0 \quad (x+2) = 0$
$(x-3) = 0$
$\mathbf{x = 3}$
$x+2 = 0$
$\mathbf{x = -2}$

Las soluciones de la ecuación son y $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$

Una ecuación cuadrática incompleta se resuelve completando el trinomio cuadrado, como se analiza en el desarrollo de la ecuación $x^2 - 12x = 0$

$x^2 - 12x = 0$

$$x^2 - 12x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 0 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$$

$x^2 - 12x + 36 = 36$

$(x-6)^2 = 36$

$$\sqrt{(x-6)^2} = \sqrt{36}$$

$x-6 = \pm 6$

$x-6 = 6$

x1 = 12

x2 = 0

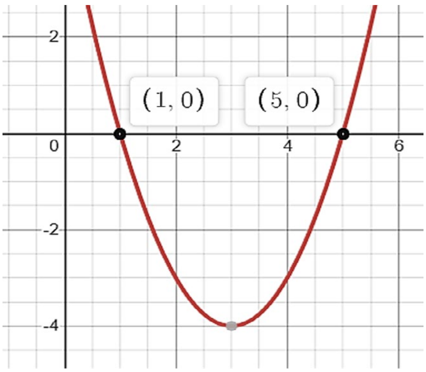
Las soluciones de la ecuación son $x_1= 1$ y $x_2= 0$

Otro método para resolver ecuaciones cuadráticas es el **método gráfico**

Se verifica la aplicación de este método resolviendo la ecuación $x^2-6x+5 = 0$ para ello se grafica la ecuación.

Figura 1.

Gráfica de la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 5 = 0$



Nota. En la gráfica se observa como la curva cruza el eje *x* en dos puntos $x_1=1$, y $x_2=5$ que son las dos soluciones que tienen un valor de y=0

Las ecuaciones que contienen expresiones fraccionarias se resuelven de la siguiente manera:

1 Bimestre

$$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3} = 0$$

$$\left(\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3}\right)(x^2-7x+12) = 0$$

$x^2 (x-3) - 16 - x^2 (x-4) = 0$

$x^3 - 3x^2 - 16 - x^3 + 4x^2 = 0$

$\mathbf{x^2 - 16 = 0}$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

$x = \pm 4$

$\mathbf{x_1 = -4}$

$\mathbf{x_2 = 4}$

Verifiquemos para x=4

$$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3} = 0$$

$$\frac{4^2}{4-4} - \frac{16}{4^2-7(4)+12} - \frac{4^2}{4-3} = 0$$

$$\frac{16}{0} - \frac{16}{0} - \frac{16}{1} = 0$$

$$-\frac{16}{1} = 0$$

La ecuación no está definida para x=4

Verifiquemos para x=-4

$$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3} = 0$$

$$\frac{(-4)^2}{-4-4} - \frac{16}{(-4)^2-7(-4)+12} - \frac{(-4)^2}{-4-3} = 0$$

$$\frac{16}{-8} - \frac{16}{56} - \frac{16}{-7} = 0$$

$$0 = 0$$

La ecuación está definida para x=-4.

Las ecuaciones que contienen radicales se resuelven aislando un radical en uno de los lados de la igualdad y en el otro lado el resto de términos, aunque tengan radicales, se eleva al exponente inverso y se resuelve la ecuación obtenida.

Se resuelve la ecuación $\sqrt{2x-3}-x=-1$

$$\sqrt{2x-3}-x=-1$$

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(x-1)^2$$

$2x - 3 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 2x - 2x + 1 + 3 = 0$

x2 - 4x + 4 = 0

a=1

b=-4

c=4

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{4}{2}$$

x=2

Verifiquemos para x=2

$$\sqrt{2x-3}-x=-1$$

$$\sqrt{2(2)-3}-2=-1$$

-1=-1

La solución de la ecuación es 2

Las ecuaciones con valor absoluto se resuelven aplicando el proceso que se muestra en la solución de la ecuación |3x+5|=1

$|3x+5| = 1$
$3x + 5 = 1$
$3x = -4$
$x = -\frac{4}{3}$

$3x + 5 = -1$
$3x = -6$
$\mathbf{x = -2}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -\frac{4}{3}$ y $x_2 = -2$

1.2. ¿Cómo modelar con ecuaciones?

Para aplicar los conocimientos adquiridos en el modelado de problemas de la vida cotidiana, se plantea y resuelve la siguiente situación:

Un lote de terreno rectangular de 116 metros de perímetro, que un lado tiene 18 metros más que el otro, Determine la ecuación para calcular el valor de cada lado y la longitud de los lados.

$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = P$
$x + x + 18 + x + x + 18 = 116m$
$4x + 36 = 116m$
$\mathbf{x = 20m}$

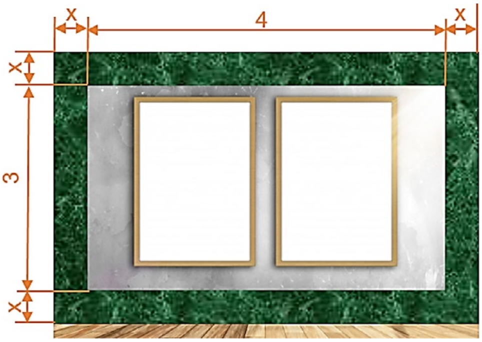
$l_1 = 20m$
$l_2 = x + 18m$
$l_2 = 20m + 18m$
$\mathbf{l_2 = 38m}$

Una pared sin pintar de 3 metros de alto por 4 metros de ancho y una franja de ancho uniforme pintada de verde alrededor de los cuatro lados. El perímetro de la pared es 1.5 veces el perímetro del área pintada. ¿Cuál es el ancho de la franja verde?

Identifique la variable.

Ancho de la franja verde.

Se transforma palabras en expresiones algebraicas.



En palabras	En expresiones algebraicas
Ancho de la franja verde	x
Perímetro de la pared sin pintar	2(4) + 2(3) = 14
Ancho de la pared	4 + 2x
Alto de la pared	3 + 2x
Perímetro de la pared	2(4 + 2x) + 2(3 + 2x)

Se formula el modelo

Perímetro de la pared = 1.5 Perímetro de la pared sin pintar

2(4 + 2x) + 2(3 +2x) = 1.5 (14)

Se resuelve la ecuación y verifica su respuesta.

2(4+2x) + 2(3+2x) = 1.5(14)
8 + 4x + 6 + 4x = 21
8x + 14 = 21
8x = 7

$$x = \frac{7}{8}$$

x = 0.875m esto es 87.5 centímetros de ancho tiene la franja verde.

1.3. ¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones lineales?

Una solución de un sistema de ecuaciones lineales es una asignación de valores para las incógnitas que cumple cada una de las ecuaciones, significa encontrar todas las soluciones del sistema y existen varios métodos, así:

Método gráfico

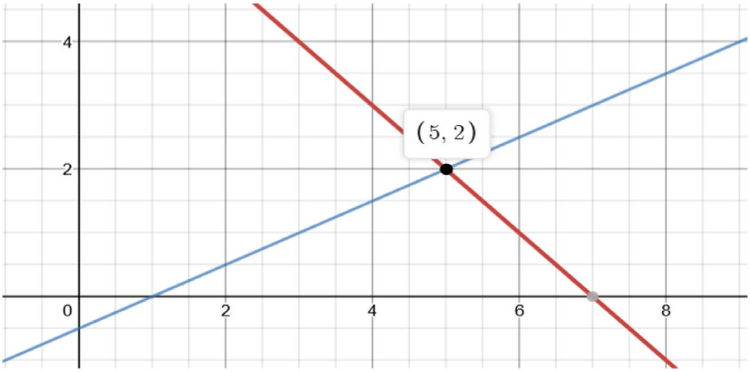
Para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones graficamos las ecuaciones y las coordenadas del punto de intersección son las soluciones.

Se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 7 & \textit{Ecuación 1} \\ x - 2y = 1 & \textit{Ecuación 2} \end{cases}$$

Figura 2.

Gráfica de la resolución de sistema de ecuaciones.



Nota. Observando la gráfica se verifica que la solución del sistema de ecuaciones es y x = 5 y y = 2.

Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones con este método seguimos tres pasos:

1. Despejamos una incógnita en términos de la otra incógnita en una ecuación del sistema.
2. Sustituimos la expresión despejada en la otra ecuación y despejamos la incógnita que queda.
3. Sustituimos en la expresión encontrada el valor de la incógnita encontrada.

Se verifica resolviendo el ejemplo anterior

Dado el sistema $\begin{cases} x + y = 7 & \langle 1 \rangle \\ x - 2y = 1 & \langle 2 \rangle \end{cases}$

1 Bimestre

De la ecuación 1 despejamos y

x + y = 7
y = 7 - x «3»

En la ecuación 2 sustituimos la ecuación despejada 3

x - 2y = 1
x - 2(7-x) = 1
x - 14 + 2x = 1
3x = 15
x = 5

El valor de *x* encontrado sustituimos en la ecuación 3

y = 7 - x
x = 7 - 5
x = **2**

La solución del sistema de ecuaciones es x = 5 y y = 2

Método por eliminación

Para resolver un sistema de ecuaciones con este método seguimos tres pasos:

1. **Ajustamos** los coeficientes multiplicamos una o más de las ecuaciones del sistema por números apropiados con el propósito de igualar el coeficiente de una incógnita y sea opuesta a la otra ecuación.
2. **Sumamos** las dos ecuaciones y eliminamos la incógnita que tiene los coeficientes iguales y despejamos la otra incógnita.
3. **Sustituimos** en una de las ecuaciones originales el valor encontrado y despejamos la incógnita que queda.

Se verifica las soluciones encontradas en el ejemplo anterior.

Dado el sistema $\begin{cases} x + y = 7(2) \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

2x - 2y = 14

$$\begin{array}{rl} x - 2y = & 1 \\ \hline 3x \qquad = & 15 \end{array}$$

x = 5

x + y = 7

5 + y = 7

y = 2

La solución del sistema de ecuaciones es x = 5 y y = 2

1.4. ¿Cómo modelar con sistemas de ecuaciones lineales?

Para modelizar con sistemas de ecuaciones lineales es importante cumplir con los siguientes pasos:

1. Identificar las incógnitas, indique las cantidades que el problema pide encontrar, estas en general se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación para las incógnitas llámelas *x* y *y*
2. Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de las incógnitas, lea otra vez el problema y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las incógnitas que haya definido en el paso 1.
3. Establecer un sistema de ecuaciones, encuentre los datos importantes del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
4. Resolver el sistema e interpretar los resultados, resuelva el sistema que haya encontrado en el paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Para comprender de mejor manera se modeliza el siguiente problema:

Un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, las cuales son de 10 y de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es $2,75, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?

1. Identificar las incógnitas

¿Cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?

Monedas de 10 centavos	x
Monedas de 25 centavos	y

2. Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de las incógnitas

Monedas de 10 centavos	0.10x
Monedas de 25 centavos	0.25y

3. Establecer un sistema de ecuaciones

Primera ecuación: La suma de las monedas es 14

x + y = 14

Segunda ecuación: Si el valor total de su cambio es $2,75.

0.10x + 0.25y = 2.75

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 0.10x + 0.25y = 2.75 \end{cases}$$

4. Resolver el sistema e interpretar los resultados

Aplicando el método de sustitución

$$\begin{cases} x + y = 14 & \langle \textit{Ecuación } 1 \rangle \\ 0.10x + 0.25y = 2.75 & \langle \textit{Ecuación } 2 \rangle \end{cases}$$

x + y = 14

y = 14-x ‹Ecuación 3›

Sustituimos la ecuación 2 en la ecuación 3

0.10x + 0.25y = 2.75 ‹Ecuación 2›

0.10x + 0.25(14-x) = 2.75

-0.15x = -0.75

x = 5

Sustituimos el valor de x en la ecuación 1

y = 14 - x ‹Ecuación 1›

y = 14 - 5

y = 9

El hombre tiene 5 monedas de 10 centavos y 9 monedas de 25 centavos.

Verifiquemos

0.10x + 0.25y = 2.75
0.10(5) + 0.25(9) = 2.75
2.75 = 2.75

El modelo del problema es correcto.

Le invito a profundizar sus conocimientos acerca de cómo resolver otros tipos de ecuaciones

Para resolver sistemas de ecuaciones con varias incógnitas se desarrolla el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 & \langle Ecuación\ 1 \rangle \\ 5x + 3y + 4z = 2 & \langle Ecuación\ 2 \rangle \\ x + y - z = 1 & \langle Ecuación\ 3 \rangle \end{cases}$$

Se aplica el método de eliminación

Para ello se toma las ecuaciones (3) y (1) y se elimina la variable *x*

$$\begin{cases} x + y - z = 1(-3) & \langle Ecuación\ 3 \rangle \\ 3x + 2y + z = 1 & \langle Ecuación\ 1 \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 3y + 3z = -3 \\ \underline{3x + 2y + z = 1} \end{cases}$$

$$-y + 4z = -2 \quad \langle Ecuación\ 4 \rangle$$

Con las ecuaciones (3) y (2) se elimina la misma variable *x*

$$\begin{cases} x + y - z = 1(-5) & \langle Ecuación\ 3 \rangle \\ 5x + 3y + 4z = 1 & \langle Ecuación\ 2 \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 5y + 5z = -5 \\ \underline{5x + 3y + 4z = 2} \end{cases}$$

$$-2y + 9z = -3 \quad \langle Ecuación\ 5 \rangle$$

Ahora se resuelve el sistema con las ecuaciones (4) y (5) se elimina la variable *y* y se encuentra el valor de *z*

$$\begin{cases} -y+4z=-2 & \langle Ecuación\ 4\rangle \\ -2y+9z=-3 & \langle Ecuación\ 5\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y+4z=-2(-2) \\ -2y+9z=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y-8z=4 \\ -2y+9z=-3 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{z=1}$$

Se sustituye el valor de *z* en la ecuación 4 y se encuentra el valor de *y*

-y + 4z = -2 ‹Ecuación 4›
- y + 4(1) = -2
y = 6

Los valores de *y* y *z* se sustituyen en la ecuación 1 y se encuentra el valor de *x*

x + y - z = 1 ‹Ecuación 1›
x + 6 - 1 = 1
x = -4

La solución del sistema de ecuaciones es x = -4,y = 6 y z = 1

Para resolver un sistema de ecuaciones triangular se aplica la sustitución hacia atrás.

Para comprender de mejor manera se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=3 & \langle 1\rangle \\ y+2z=-1 & \langle 2\rangle \\ z=-1 & \langle 3\rangle \end{cases}$$

Desde la ecuación ‹3› sustituimos hacia atrás en la ecuación ‹2›

y + 2z = -1 ‹2›
y + 2(-1) = -1
y = 1

Ahora sustituimos en la ecuación ‹1› los valores de y = 1,z = -1

$x + y + z = 3$ ‹1›
$x + 1 - 1 = 3$
$\mathbf{x = 3}$

La solución del sistema de ecuaciones es $x = 3$,$y = 1$ y $z = -1$.También podemos escribir la terna ordenada (3,1,-1).

¿Cómo modelar con un sistema de ecuaciones lineales con varias incógnitas?

Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para modelar situaciones que implican varias cantidades incógnitas.

Para comprender de mejor manera se plantea y resuelve la siguiente situación:

Un comerciante vende quesos de tres tipos de quesos: curado, semicurado y tierno. Los precios de cada uno de ellos son $12\frac{\$}{Kg}$, $10\frac{\$}{Kg}$ y $9\frac{\$}{Kg}$ respectivamente. Se sabe que el total de kilos vendidos son 44, que el importe total de la venta son 436 dólares y que el número de kilos vendidos del queso semicurado es el doble que del curado. ¿cuántos kilos de cada clase vendió el comerciante?

x= Kilos de queso curado vendido $= 12\frac{\$}{Kg}$

y= Kilos de queso semicurado vendido $= 10\frac{\$}{Kg}$

z= Kilos de queso tierno vendido $= 9\frac{\$}{Kg}$

Nota. RossHelen|shutterstock.com

Se transforma en ecuaciones cada una de las variables identificadas

La primera ecuación
$x + y + z = 44$

La segunda ecuación
$12x + 10y + 9z = 436$

La tercera ecuación
$y = 2x$

Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad z = 44 & \langle 1 \rangle \\ 12x + 10y + 9z = 436 & \langle 2 \rangle \\ \qquad\qquad y = 2x & \langle 3 \rangle \end{cases}$$

Se aplica el método de sustitución de la ecuación ‹3› en la ecuación ‹1›

$x + y + z = 44$
$x + 2x + z = 44$
$3x + z = 44$ ‹4›

Se aplica el método de sustitución de la ecuación ‹3› en la ecuación ‹2›

$12x + 10y + 9z = 436$
$12x + 10(2x) + 9z = 436$
$32x + 9z = 436$ ‹5›

Queda el sistema de ecuaciones de 2 x 2

$$\begin{cases} 3x + z = 44 & \langle 4 \rangle \\ 32x + 9z = 436 & \langle 5 \rangle \end{cases}$$

De la ecuación ‹4› despejamos *z*

$3x + z = 44$
$z = 44 - 3x$ ‹6›

Se sustituye la ecuación ‹6› en la ecuación ‹5›

$32x + 9z = 436$
$32x + 9(44-3x) = 436$
$32x + 396 - 27x = 436$
$5x = 40$
$x = 8$

Sustituyendo hacia atrás en la ecuación ‹6› el valor de $x = 8$

$z = 44 - 3x$ ‹6›
$z = 44 - 3\,(8)$
$z = 20$

Sustituyendo hacia atrás en la ecuación ‹1› el valor de x=8 y z=20

$x + y + z = 44$
$8 + y + 20 = 44$
$\mathbf{y = 16}$

El comerciante vende 8 kilogramos de queso curado, 16 kilogramos de queso semicurado y 20 kilogramos de queso tierno.

1.5. ¿Cómo se resuelven las desigualdades?

Una desigualdad es muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo de igual hay uno de los símbolos, ≥,≤,>o<.

Para resolver una desigualdad que contenga una variable significa encontrar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad.

A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinidad de soluciones que forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta real.

Para una mejor comprensión se resuelve la inecuación 5x+4≤14 y se coloca las respuestas en la recta real:

$5x + 4 \leq 14$
$5x \leq 10$
$x \leq 2$

Figura 3.
Solución gráfica de la inecuación en la recta real.

Nota. Las soluciones de la desigualdad son todos los valores menores e iguales a 2, es decir en el intervalo (-∞,2].

Modelar problemas prácticos conduce a desigualdades porque con frecuencia estamos interesados en determinar cuándo una cantidad es mayor (o menor) que otra.

1.6. ¿Cómo modelar con desigualdades?

Para comprender de mejor manera el modelado de situaciones de la vida cotidiana se plantea y resuelve la siguiente situación:

Las instrucciones en una bolsa de café indican que debe conservarse a una temperatura de 20 °C a 30 °C. ¿Qué intervalo de temperatura corresponde en una escala Fahrenheit?

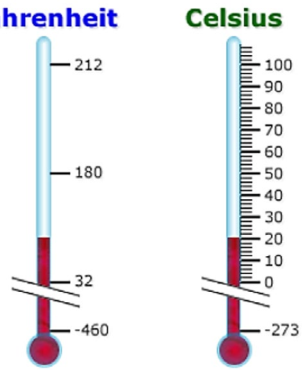
Se convierte en expresión algebraica

$20<C<30$

Sabemos que $C = \frac{5}{9}(F-32)$

Se aplica el método de sustitución

$20<C<30$



$$20 < \frac{5}{9}(F-32) < 30$$

$$20\left(\frac{9}{5}\right) < \frac{5}{9}(F-32)\left(\frac{9}{5}\right) < 30\left(\frac{9}{5}\right)$$

$36<(F-32)<54$

$36+32<F-32+32<54+32$

$68<F<86$

El café debe conservarse a una temperatura de 68 a 86 °F.

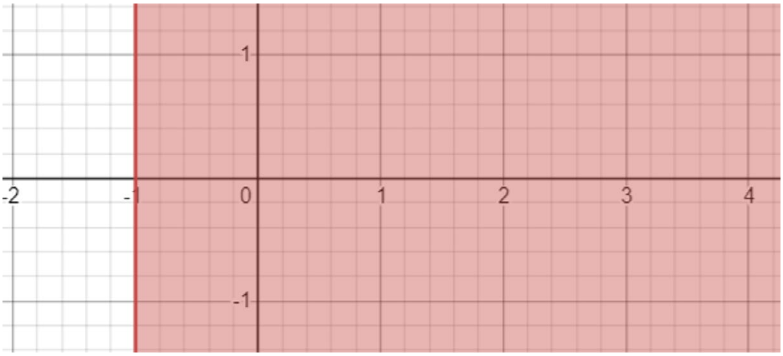
Para resolver una desigualdad se gráfica la desigualdad obteniendo el lado distinto de cero de la desigualdad igual a una variable *y*.

Las soluciones de la desigualdad dada son los valores de *x* para los cuales *y* es mayor o igual a 0. Es decir, las soluciones son los valores de *x* para los cuales la gráfica está arriba del eje *x*.

Para comprender de mejor manera se resuelve la desigualdad $x \geq -1$ utilizando el método gráfico.

Figura 4.

Solución gráfica de la inecuación.



Nota. Se observa en la gráfica que la solución de la desigualdad es [-1,∞).

1.7. ¿Cómo se resuelve un sistema de desigualdades?

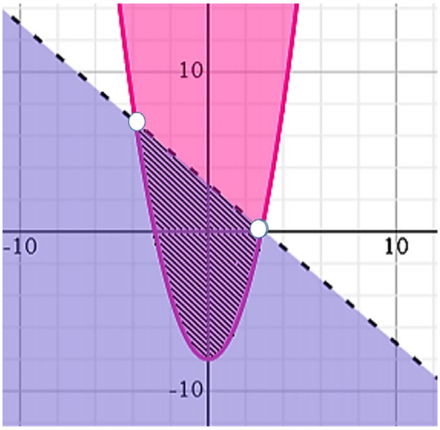
El conjunto solución de un sistema de desigualdades de dos incógnitas es el conjunto de todos los puntos del plano de coordenadas que satisface cada desigualdad del sistema. Gráficamente es la intersección de las soluciones de cada desigualdad del sistema.

Para una mayor comprensión se resuelve el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} -x^2 + y \geq -8 \\ x + y < 3 \end{cases}$$

Se grafica el sistema de desigualdades como se muestra en la siguiente figura.

Figura 5.
Solución gráfica del sistema de inecuaciones.



Nota. Observando la gráfica se verifica que los vértices no pertenecen al conjunto solución porque no satisfacen la desigualdad x + y = 3, por lo cual, están graficados como círculos abiertos.

Ahora se encuentra los vértices del sistema de ecuaciones, para ello

$$\begin{cases} -x^2 + y = -8 & \langle 1 \rangle \\ x + y = 3 & \langle 2 \rangle \end{cases}$$

Se despeja de la segunda ecuación ‹2›

y = 3 - x ‹3›

Se sustituye la ecuación ‹3› en la ecuación ‹1›

$-x^2 + y = -8$
$-x^2 + (3-x) = -8$
$x^2 + x - 11 = 0$
a = 1
b = 1
c = -11

$$x = \frac{(1) \mp \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-11)}}{2}$$

$$x = \frac{1 \mp \sqrt{45}}{2}$$

x_1 = -2.85
x_2 = 3.85

$y = 3 - x$
$y = 3 - (-2.85)$
$\mathbf{y = 5.85}$
(-2,85;5.85)

$y = 3 - x$
$y = 3 - 3.85$
$\mathbf{y = 0.85}$
(3,85;0.85)

Las esquinas del conjunto solución son (-2,85;5.85) y (3,85;0.85)

1.8. ¿Cómo modelar con sistemas de desigualdades lineales?

Para modelizar problemas con sistemas de desigualdades es importante tener en cuenta las restricciones de las variables, por lo general, nos referimos al conjunto solución de un sistema como una región factible, porque los puntos del conjunto solución representan valores factibles para las cantidades que están bajo estudio.

Para una mayor y mejor comprensión el modelado con sistemas de desigualdades se resuelve la siguiente situación:

Un comerciante vende dos mezclas diferentes de café. La mezcla estándar usa 4 onzas de granos de arábiga y 12 onzas de granos de robusta por paquete; la mezcla "De lujo" usa 10 onzas de arábigo y 6 onzas de robusta por paquete. El comerciante tiene disponible 80 lb de granos de arábiga y 90 libras de robusta. Encuentre un sistema de desigualdades que describa el posible número de paquetes estándar y "De lujo" que el comerciante pueda hacer. Trace la gráfica del conjunto solución.

Se expresa las restricciones como un sistema de desigualdades

En palabras	Expresiones algebraicas
Arábiga	x
Robusta	y
Estándar	$4x + 12y \leq 2720$
De lujo	$10x + 6y \leq 2720$

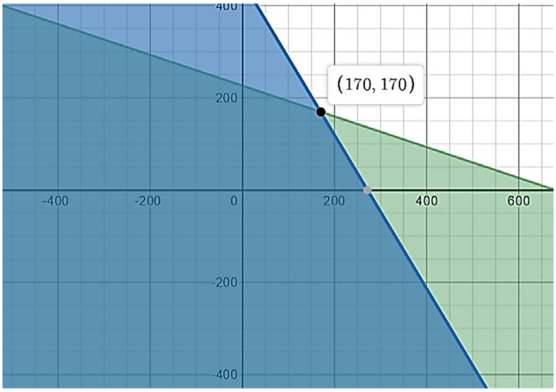
Se traza las gráficas del sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 4x + 12y \leq 2720 \\ 10x + 6y \leq 2720 \end{cases}$$

Se traza la gráfica de la solución del sistema como se muestra en la siguiente figura.

Figura 6.

Solución gráfica del sistema de inecuaciones.



Nota. En la gráfica se observa que la solución del sistema de desigualdades es el área de la intersección de las dos gráficas.

Luego, se encuentran los vértices aplicando el método de eliminación.

$$\begin{cases} 4x + 12y = 2720 \\ 10x + 6y = 2720 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad 4x + 12y = 2720 \\ \underline{10x + 6y = 2720(-2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad 4x + 12y = 2720 \\ \underline{-20x - 12y = -5440} \end{cases}$$

-16 x = -2720

x = 170

4x + 12y = 2720

4(170) + 12y = 2720

y = 170

El vértice en el punto (170,170).

1 Bimestre
MAD-UTPL

Se ha concluido la revisión de los contenidos de la solución y modelado de ecuaciones y desigualdades, para afianzar los conocimientos, le invito a desarrollar las actividades:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimados estudiantes

Con la finalidad de lograr que los estudiantes sean más participativos y activos, investigue estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje del modelado con sistemas de ecuaciones y desigualdades, con base en el ciclo del aprendizaje.

Revise las actividades calificadas en la guía didáctica de Sistemas de conocimiento de ecuaciones y desigualdades y su didáctica (2019).

Revise los contenidos de ecuaciones y desigualdades en el texto básico Stewart, (2017).

Resuelva los ejercicios 66 y 76, páginas 689-690 y los ejercicios 69 y 74, página 765 propuestos en el texto básico. Stewart, (2017).

Reflexión

Vincule las estrategias metodológicas investigadas con los ejercicios resueltos y proponga actividades para la enseñanza aprendizaje del modelado con sistemas de ecuaciones y desigualdades.

> Participe en las tutorías a través del zoom y comuníquese con su docente por la bandeja de entrada en el momento que requiera información, aclarar dudas e inquietudes.

Una vez revisado los conocimientos de ecuaciones y desigualdades, es momento de analizar las funciones polinomiales y exponenciales.

Semana 2

En la presente semana se revisará los contenidos sobre las funciones polinomiales y racionales, así como el modelado de situaciones reales, con el uso de la tecnología, para ello le invito a desarrollar el taller 2.

Unidad 2. Funciones polinomiales y racionales

Las funciones se clasifican de acuerdo con las reglas de correspondencia como funciones lineales, polinomiales y racionales las cuales tienen muchas aplicaciones en la vida cotidiana, la función lineal facilita la comprensión en economía, medicina, psicología, entre otras áreas del conocimiento; la función cuadrática ayuda a predecir ganancias y pérdidas en los negocios, graficar el curso de objetos en movimiento, y asistir en la determinación de valores mínimos y máximos. Las funciones racionales tienen diversas aplicaciones en el campo del análisis numérico para interpolar o aproximar los resultados de otras funciones más complejas, ya que son simples de calcular como los polinomios, pero permiten expresar una mayor variedad de comportamientos.

Propósito

Aplicar el conocimiento de las funciones polinomiales y racionales para resolver problemas en contextos de la vida cotidiana que pueden ser modelados y orientar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Para recordar el proceso de modelado con funciones polinomiales y racionales observe el video: Modelado con funciones

En el video encontrará los pasos que se debe seguir como guía para el modelado con funciones y la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Estudie los conocimientos adquiridos sobre funciones polinomiales y racionales en el texto básico. Stewart, (2017).

En la revisión del texto básico encontrará información esencialmente sobre:

2.1. ¿Cómo se resuelven funciones polinomiales?

El método más eficiente para resolver una función polinómica es el método gráfico.

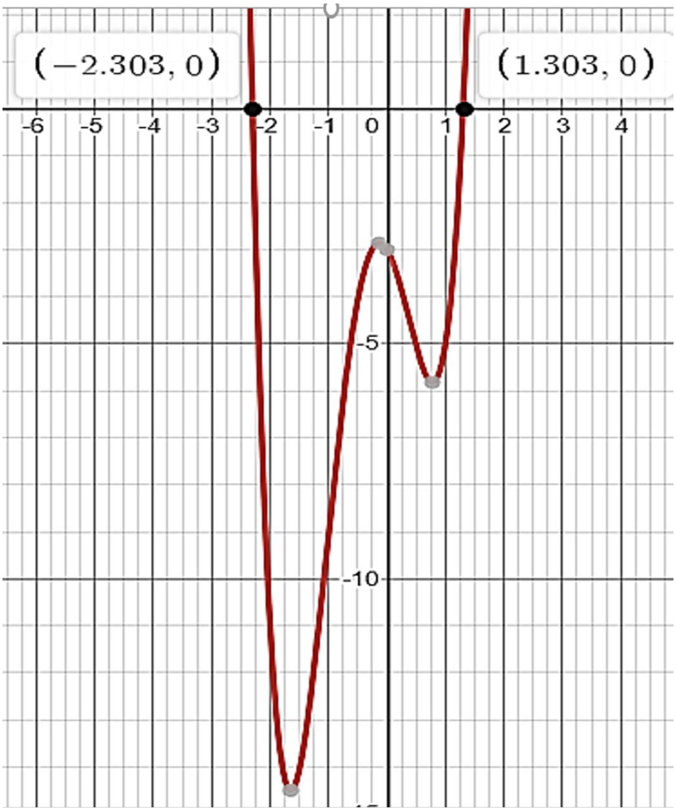
Para comprender de mejor manera se encuentra todas las soluciones reales de la ecuación $3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$

Se expresa la ecuación como función polinómica $P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$

Se grafica la función, cómo se muestra en la siguiente figura

Figura 7.

Solución gráfica de la función $P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$



Nota. Como se observa en la gráfica las intersecciones de la curva con el eje de las x, son las soluciones $x_1=-2.3$ y $x_2=1.3$

2.2. ¿Cómo se modela con funciones polinomiales?

Muchas situaciones de la vida cotidiana se pueden modelizar aplicando funciones, para ello se modela la siguiente situación:

"Un granjero desea cercar un terreno rectangular, de modo que su área sea máxima, tiene 150 metros de cerco. Uno de los lados del terreno está bordeado por un canal. Halle el área máxima del terreno".

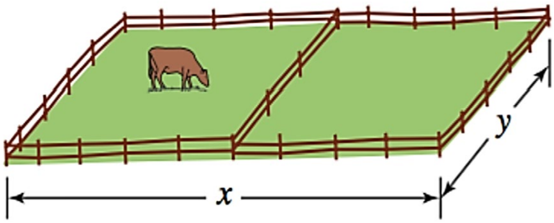
Datos

Longitud del rectángulo, *x*

Ancho del rectángulo, *y*

Área del rectángulo, *A*

Perímetro del rectángulo, *P*



P=x+y+x+y, en donde un lado es el largo del canal, por lo que P=x+2y, Sustituyendo P=150 tenemos:

$150 = x + 2y$

Despejando *x*

$x = 150 - 2y$

Área del rectángulo

$A = x \cdot y$

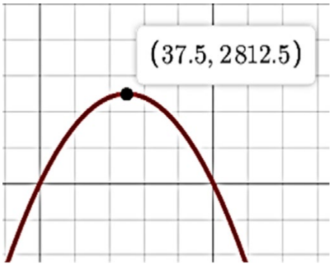
$A = (150-2y)\, y$

$A = 150y - 2\, y^2$

Para determinar el valor máximo, se utiliza el método gráfico, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 8.

Valor máximo



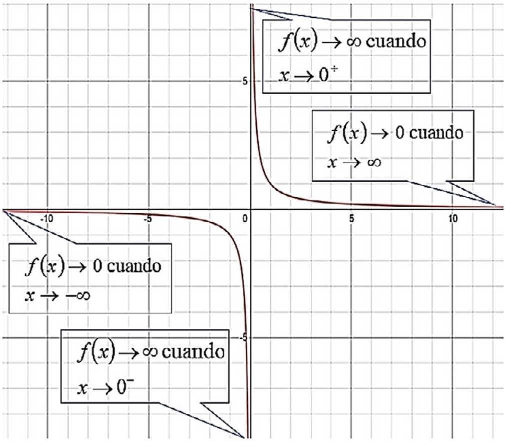
Nota. Se observa que el valor máximo del terreno es $f(37.5) = 2812.5m^2$. Es decir, el área máxima del terreno que se puede cercar es 2812.5 m^2.

2.3. ¿Cómo se resuelven las funciones racionales?

Para la resolución de las funciones racionales se utiliza el método gráfico, como se observa en la siguiente figura.

Figura 9.

Gráfica de la función racional $y = \frac{1}{x}$



Nota. La función *f* está definida para todos los valores de *x*, que no sean 0, de modo que el dominio es {x/x ≠ 0} y el rango es {y/y ≠ 0}

2.4. ¿Cómo se modela con funciones racionales?

Para fundamentar el modelado con funciones racionales se resuelve la siguiente situación de la vida cotidiana.

Cuando un tren se acerca a un observador el tono de su silbato le suena más alto al observador de lo que le sonaría si el tren estuviera en reposo porque las crestas de las ondas de sonido están comprimidas más cerca unas de otras. Este fenómeno se conoce como efecto Doppler.

El tono observado P es una función de la velocidad del tren y está dado por

$$P(v) = P_o\left(\frac{S_o}{S_o - v}\right)$$

Donde

P_o es el paso real del silbato en la fuente

$S_0 = 332$ m/s es la velocidad del sonido en el aire.

Suponga que un tren tiene un silbato con tono en $P_0 = 440$ Hz.

a. ¿Cuál es la función que modela este fenómeno?

$$P(v) = P_o\left(\frac{S_o}{S_o - v}\right)$$

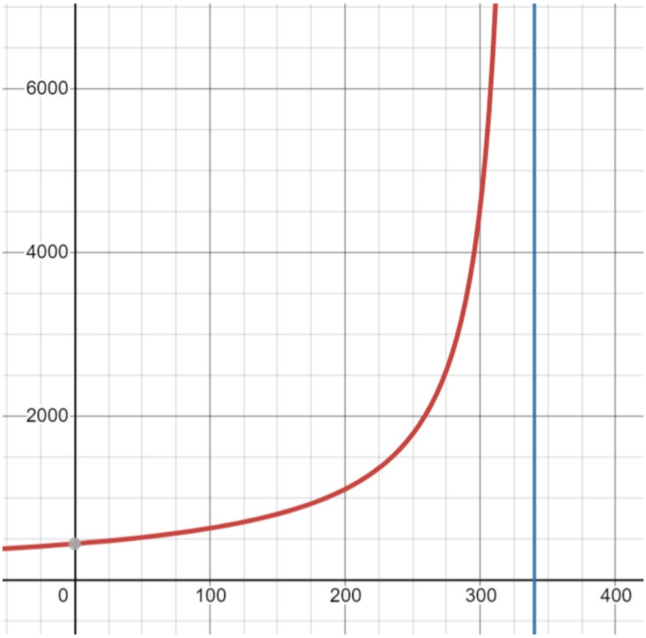
$$P(v) = 440H_z\left(\frac{332m/s}{332m/s - v}\right)$$

$$y = \frac{146080}{332 - x}$$

b. ¿Cuál es la gráfica de la función ? y = P_v?

Figura 10.

Gráfica de la función $y = P_v$



Nota. En la gráfica se observa que la asíntota vertical pasa por el punto x = 332

c. ¿Cómo se interpreta físicamente la asíntota vertical de esta función?

La asíntota indica si la velocidad del tren se acerca a la velocidad del sonido (332 m/s), se produce el estampido sónico.

Se ha revisado los contenidos sobre funciones polinomiales y racionales, para reforzar los conocimientos, le invito a desarrollar las actividades:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimados estudiantes

Con el propósito de vincular la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas investigue aplicaciones tecnológicas (Geogebra, Desmos, Genially, Kahoot) que faciliten la enseñanza y aprendizaje del modelado con funciones polinomiales y racionales.

Revise las actividades calificadas en la guía didáctica de Sistemas de conocimiento de funciones polinomiales y racionales y su didáctica (2019).

Revise los contenidos de funciones polinomiales y racionales en el texto básico Stewart, (2017).

Resuelva los ejercicios 56, 57, 67 y 68 página 253 propuestos en el texto básico. Stewart, (2017).

Reflexión

Vincule las aplicaciones tecnológicas investigadas con los ejercicios resueltos y proponga actividades para la enseñanza aprendizaje del modelado con funciones polinomiales y racionales.

> Recuerde participar de las tutorías a través del zoom y comuníquese con su docente en el momento que requiera información, aclarar dudas e inquietudes, por la bandeja de entrada.

Semana 3

En la presente semana se revisará los contenidos sobre las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y el modelado con dichas funciones, para ello le exhorto a desarrollar el taller 3.

Unidad 3. Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

Desde el punto de vista de la matemática de un hecho o fenómeno del mundo real, las ecuaciones exponenciales se usan para modelar desde el tamaño de la población hasta fenómenos físicos como la aceleración, velocidad y densidad.

Propósito

Aplicar el conocimiento de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para resolver problemas o situaciones de la vida cotidiana y poner en práctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Para recordar el proceso de modelado con funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas observe los videos:

1. Modelado con funciones exponenciales y logarítmicas
2. Modelamiento con funciones trigonométricas inversas

En el primer video encontrará el proceso de modelado con funciones exponenciales y logarítmicas principalmente los modelos de crecimiento exponencial, de decaimiento radiactivo y modelo logístico a través de la resolución de problemas de la vida cotidiana. En el segundo video se explica el modelado con funciones trigonométricas inversas a través de la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Explore los conocimientos adquiridos sobre funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas en el texto básico. Stewart, (2017)

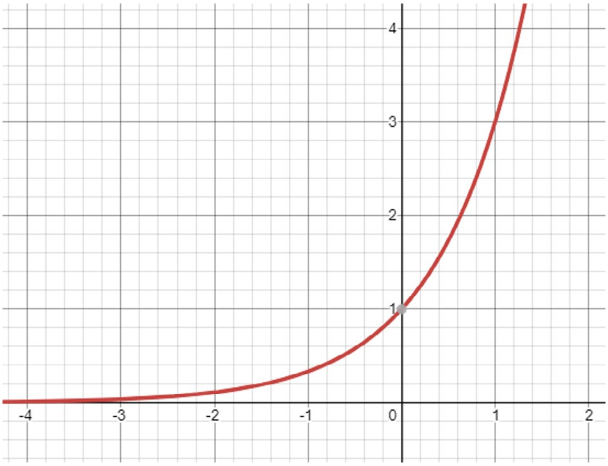
En la revisión del texto básico hallará información principalmente sobre:

3.1. ¿Cómo se resuelven las funciones exponenciales?

Para comprender de mejor manera la resolución de funciones exponenciales se aplica el método gráfico, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 11.

Gráfica de la función f(x) = 3ˣ



Nota. En la gráfica se observa la función exponencial $f(x) = 3^x$

3.2. ¿Cómo se modela con funciones exponenciales?

Las funciones exponenciales se presentan al calcular interés compuesto. Profundicemos acerca de este tema:

Interés compuesto

Si una cantidad de dinero P, llamada el principal (capital inicial), se invierte a una tasa de interés por periodo, entonces después de un periodo el interés es P, y la cantidad *A* de dinero es:

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Donde

A(t) = cantidad después de años

P = capital inicial

r = tasa de interés por año

n = número de veces que el interés se capitaliza por año

t = número de años

Para una mejor comprensión del cálculo del interés compuesto se resuelve la siguiente situación de la vida cotidiana.

Se invierten 1000 dólares a una tasa de interés del 12 % al año. Encuentre las cantidades en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza anual, semestral, trimestral, mensual y diariamente.

Datos

A(t) = ?
P = 1000
r = 12% = 0.12
n = anual = 1, semestral = 2, trimestral = 4, mensual = 12, diaria = 365
t = 3 años

$$A(t) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1+\frac{0.12}{1}\right)^{1(3)}$$

A(t)=$ 1404.93

$$A(t) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2(3)}$$

A(t)=$ 1418.52

$$A(t) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4(3)}$$

A(t)=$ 1425,76

1 Bimestre

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12(3)}$$

A(t)=$ 1430,77

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)}$$

A(t)=$ 1433.24

Para comprender de mejor manera el modelado matemático con funciones exponenciales se resuelve el siguiente problema.

La población de cierta especie de aves está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el siguiente modelo logístico de crecimiento.

$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5\,e^{-0.044t}}$$

Nota. vlenasa|shutterstock.com

donde t se mide en años.

a. Encuentre la población inicial de aves.

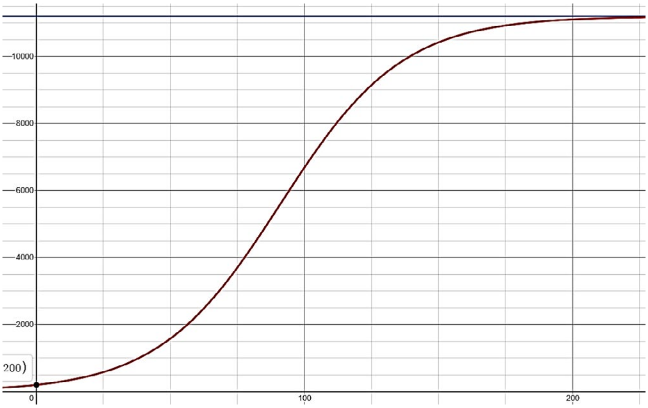
$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5\,e^{-0.044(t)}}$$

$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5\,e^{-0.044(0)}}$$

$$n(t) = 200\ aves$$

b. Para resolver aplicamos el método gráfico, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 12.
Gráfica de la función n(t).



Nota. En la gráfica se observa que la asíntota horizontal pasa por el punto y = 1200

c. ¿A qué tamaño se aproxima la población a medida que transcurre el tiempo?

Se aproxima a 11200 aves.

El interés capitalizado continuamente

Se calcula con la fórmula:

$A(t) = Pe^{r.t}$

Donde

A(*t*) = cantidad después de años

P = capital inicial

r = tasa de interés por año

t = número de años.

Para comprender esta teoría vinculemos con la práctica resolviendo el siguiente problema de la vida cotidiana.

Encuentre la cantidad después de 3 años si se invierten 2000 dólares a una tasa de interés de 12 % por año, capitalizado continuamente.

Datos
t = 3 años
P = $ 2000
r = 12 % = 0.12

$A(t) = Pe^{r.t}$
$A(t) = 2000e^{(0.12).(3)}$
$A(t) = \$\ 2866.65$

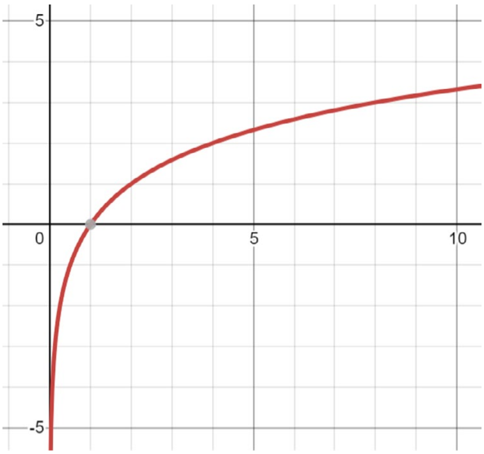
La cantidad después de 3 años es de $ 2866.65

3.3. ¿Cómo se resuelven las funciones logarítmicas?

> La función logarítmica con base a, denotada por $\log_a$ está definida por $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$. Sea un número positivo con $a \neq 1$. Por tanto, $\log_a x$ es el exponente al cual se debe elevar la base *a* para obtener *x*.

Para resolver las funciones logarítmicas se aplica el método gráfico, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 13.
Gráfica de la función $f(x) = \log_2 x$



Nota. En la gráfica se observa la función $f(x) = \log_2 x$

El logaritmo común con base 10 se llama logaritmo común y se denota omitiendo la base: $\log_{10} x = \log x$

3.4. ¿Cómo se modela con funciones logarítmicas?

Los científicos modelan la respuesta humana a estímulos (sonido, luz o presión) mediante funciones logarítmicas.

Para comprender de mejor manera se resuelve la siguiente situación de la vida cotidiana.

La intensidad de un sonido debe aumentarse muchas veces antes de que "sintamos" que la intensidad simplemente se ha duplicado. El psicólogo Gustav Fechner formuló la ley como

$$S = k.\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde S es la intensidad subjetiva del estímulo,

I es la intensidad física del estímulo,

I_0 representa el umbral de intensidad física y

k es una constante que es diferente para cada estímulo sensorial.

La percepción de la intensidad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física $I\left(\frac{W}{m^2}\right)$ está dada por

$$B = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible.

Para comprender el modelado con funciones logarítmicas se resuelve la siguiente situación.

Encuentre el nivel de decibeles (intensidad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0

$$B = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$B = 10.\log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right)$$

B = 10.log 100

B = 10(2)

B = 20 db

La intensidad del sonido es de 20 dB

¿A qué llamamos logaritmo natural?

> Al logaritmo con base e y se denota con *ln*: *ln ln x* = $\log_e x$
>
> La función de logaritmo natural *y = ln ln x* es la función inversa de la función exponencial natural y = e^x.

Para recordar este tema se analiza lo que se conoce como **la ley del olvido**.

Si una tarea se aprende a cierto nivel P_0 después de cierto tiempo *t* el nivel de desempeño *P* satisface la ecuación.

log P = log P_0- clog log (t+1)

Donde c es una constante que depende de la tarea y se mide en meses

Si su calificación en el examen de matemáticas es 9, ¿Qué calificación esperaría obtener en un examen similar después de dos meses? ¿Después de un año? Suponga que c = 0.2

log P = log P_0- clog log (t+1)

Se despeja *P*

$$P = \frac{P_0}{(t+1)^c}$$

Sustituyendo el tiempo de 2 meses

$$P = \frac{P_0}{(t+1)^c}$$

$$P = \frac{9}{(2+1)^{0.2}}$$

P≈7.2

Sustituyendo el tiempo de 1 año

$$P = \frac{P_0}{(t+1)^c}$$

$$P = \frac{9}{(12+1)^{0.2}}$$

P≈5.4

Sus calificaciones esperadas después de dos meses y un año son 7.2 y 5.4, respectivamente.

¿Cómo se resuelven ecuaciones exponenciales y logarítmicas?

- Una ecuación exponencial es aquella en que la variable aparece en el exponente.
- Una ecuación logarítmica es aquella en la que aparece un logaritmo de la variable.

Para comprender el proceso de resolución se resuelve la siguiente ecuación exponencial

$8e^{2x} = 20$

$$e^{2x} = \frac{20}{8}$$

$e^{2x} = 2.5$

$\ln e^{2x} = \ln 2.5$

$2x = \ln \ln 2.5$

$$x = \frac{\ln \ln 2.5}{2}$$

$x \approx 0.458$

La solución es $x \approx 0.458$

3.5. ¿Cómo se resuelven las funciones trigonométricas?

Para definir las funciones trigonométricas exploremos la circunferencia unitaria de radio 1 con centro en el origen en el plano *xy*.

Su ecuación es

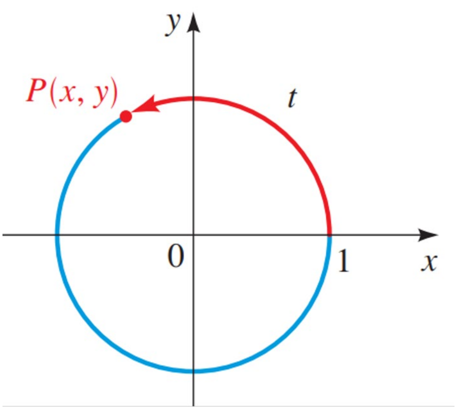
$x^2 + y^2 = 1$

Ahora, usamos las coordenadas *x* y *y* del punto *P(x,y)* para definir varias funciones.

La función seno al asignar a cada número real *t* la coordenada del punto terminal *P(x,y)* determinado por *t*.

Las funciones coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente también se definen si usamos las coordenadas de P(x,y). Observando la figura

Figura 14.
Coordenadas de P(x,y).



Nota. En la gráfica se observa las coordenadas del punto *P(x,y)* en la circunferencia unitaria.

Sea *t* cualquier número real y sea *P(x,y)* el punto terminal sobre la circunferencia unitaria determinado por *t*. Definimos

sen t = y

cos t = x

$$\tan t = \frac{y}{x} \; (x \neq 0)$$

$$\cot t = \frac{x}{y} \; (y \neq 0)$$

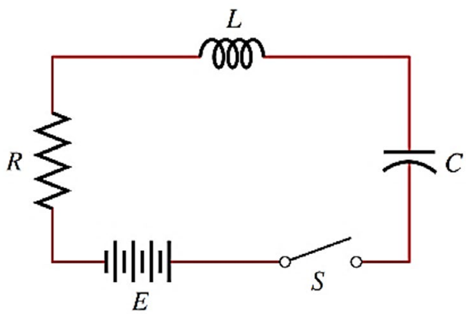
$$\sec t = \frac{1}{x} \; (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \; (y \neq 0)$$

3.6. ¿Cómo se modela con funciones trigonométricas?

Para recordar el modelado con funciones trigonométricas se resuelve la siguiente situación.

Después de cerrar el interruptor del circuito mostrado la corriente t segundos más tarde es $I_t = 0.8\, e^{-3t}$ sen 10t. Encuentre la corriente en los tiempos y a) t = 0.1 s y b) t = 0.5 s..

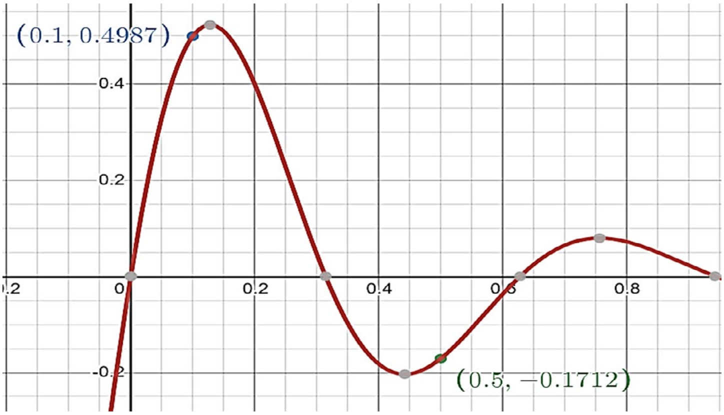


$L = 10^3$ h
$R = 6 \times 10^3\ \Omega$
$C = 9.17\ \mu\text{F}$
$E = 4.8 \times 10^3$ V

Se grafica la función, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 15.

Gráfica de la función $I_t = 0.8\, e^{-3t}$ sen $10t$



Nota. Al observar la gráfica en los puntos donde x = 0.1 se determina que la intensidad de corriente es 0.4987 Amperios y cuando x = 0.5 s la intensidad de corriente es -0.1712 Amperios.

Se ha revisado los contenidos sobre funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, para fortificar los conocimientos, le invito a ejecutar las actividades:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Investigue estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje del modelado con funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, con base en el ciclo del aprendizaje.

Revise las actividades calificadas en la guía didáctica de Sistemas de conocimiento de funciones exponenciales, logarítmicas y su didáctica (2020).

Revise las actividades calificadas en la guía didáctica de Sistemas de conocimiento de funciones trigonométricas y su didáctica (2020).

Revise los contenidos de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas en el texto básico Stewart, (2017).

Resuelva los ejercicios 10,13, 18 y 26 páginas 379-380 propuestos en el texto básico. Stewart, (2017).

Reflexión

Vincule las estrategias metodológicas investigadas con los ejercicios resueltos y proponga actividades para la enseñanza aprendizaje del modelado con funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Participe de las tutorías a través del zoom y comuníquese con su docente por la bandeja de entrada en el momento que requiera información.

Luego de haber desarrollado las actividades de aprendizaje, es hora de comprobar los conocimientos alcanzados a través de la autoevaluación.

Autoevaluación 1

Instrucciones: lea la pregunta, comprenda, razone, resuelva; y, seleccione la respuesta correcta de las siguientes preguntas:

1. **Debido a una fuerte tormenta anticipada el nivel del agua en un estanque debe descender 1 pie. Abrir el vertedero A hace que el nivel descienda en 4 horas, mientras que abrir el vertedero más pequeño B hace que el nivel del agua descienda en 6 horas. ¿Cuánto tardará en bajar 1 pie el nivel del agua con ambos vertederos abiertos?**

   a. 1 h 30 min
   b. 2 h 24 min
   c. 3 h 15 min
   d. 4 h 10 min

2. **Un carnaval tiene dos planes de venta de boletos. Plan A: Cuota de 5 dólares la entrada y 0.25 dólares cada juego mecánico. Plan B: Cuota de 2 dólares la entrada y 0.50 dólares cada juego mecánico ¿Cuántas veces tendría que subirse a un juego mecánico para que el plan A fuera menos costoso que el plan B?**

   a. Subir más de 3 veces a los juegos mecánicos, el plan A es menos costoso.
   b. Subir más de 6 veces a los juegos mecánicos, el plan A es menos costoso.
   c. Subir más de 12 veces a los juegos mecánicos, el plan A es menos costoso.
   d. Subir más de 15 veces a los juegos mecánicos, el plan A es menos costoso.

3. **Un fabricante hace una lata que contiene 1L (litro) de aceite. ¿Qué radio minimiza la cantidad de metal de la lata?**

   a. 8.4 cm
   b. 7.4 cm
   c. 6.4 cm
   d. 5.4 cm

4. **Un cohete está formado por un cilindro circular recto de 20 m de altura, rematado por un cono cuyos altura y diámetro son iguales y cuyo radio es igual que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser este radio (redondeado a dos lugares decimales) si el volumen total ha de ser de $\frac{500\pi}{3} m^3$?**

   a. 2.76 m
   a. 3.76 m
   b. 4.76 m
   c. 5.76 m

5. **El rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana interés a una tasa de 6% por año, capitalizado diariamente es:**

   a. 6.183
   b. 7.183
   c. 8.183
   d. 9.183

6. **La edad de un artefacto antiguo puede ser determinada por la cantidad de carbono 14 radiactivo restante en una muestra. Si D0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del artefacto (en años) está dada por $A = -8267 \ln \ln \left(\frac{D}{D_0}\right)$Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que queda en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.**

   a. 2602 años
   b. 3602 años
   c. 4602 años
   d. 5602 años

7. **Bajo condiciones ideales cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Inicialmente, hay 1000 en una colonia, está determinado por $n_t = 1000\left(2^{\frac{t}{3}}\right)$. ¿Cuántas bacterias hay en la colonia después de 15 horas?**

   a. 22000
   b. 32000
   c. 42000
   d. 52000

1 Bimestre

8. Una taza de café tiene una temperatura de 200 °F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70 °F. Después de 10 minutos la temperatura del café es 150 °F. La función que modela la temperatura del café en el tiempo t es:

a. $T_t = 70 + 130e^{-kt}$
b. $T_t = 200 + 130e^{-kt}$
c. $T_t = 10 + 200e^{-kt}$
d. $T_t = 330 + 70e^{-kt}$

9. Las concentraciones de iones de hidrógeno en quesos van de $4.0x10^{-7}$ M a $1.6x10^{-5}$ M. La variación correspondiente de lecturas de pH es:

a. $4.8 \le PH \le 6.4$
b. $5.8 \le PH \le 7.4$
c. $6.8 \le PH \le 8.4$
d. $7.8 \le PH \le 9.4$

10. Cuando pasa una ola por un rompeolas de pilotes, la altura del agua está modelada por la función donde $h(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$ es la altura en pies sobre el nivel medio del mar en el tiempo t segundos. El periodo de la ola es:

a. 20 s
b. 30 s
c. 40 s
d. 50 s

Ir al solucionario

1 Bimestre

Semana 4

Estimado estudiante:

En la presente semana se analizará los contenidos sobre geometría analítica y el modelado con ecuaciones de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, con el uso de dispositivos de graficación automática, para ello es necesario que desarrolle el taller 4.

Unidad 4. Geometría Analítica

La geometría analítica tiene muchas aplicaciones en la vida diaria, nos ayuda a modelar matemáticamente la mayoría de las formas que se muestran a nuestro alrededor, definir las trayectorias de los objetos, en la construcción, topología, astrología, en el diseño de planos arquitectónicos, además, es el principal soporte para otras ciencias como la Física.

Propósito

Aplicar el conocimiento de la geometría analítica para resolver problemas en contextos de la vida cotidiana que pueden ser modelados y poner en práctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Para recordar el proceso de construcción de las secciones cónicas observe el video: Secciones cónicas. Hipérbola, Parábola, Elipse, Circunferencia.

En este video se explica con claridad la construcción de las secciones cónicas que con la intersección de un plano con un cono circular y dependiendo del ángulo entre el plano y el eje se forman las secciones cónicas, así cuando el ángulo es de 90° se tiene una circunferencia, si el ángulo entre el plano y el eje es mayor que el ángulo entre el plano y la generatriz se forma una elipse, si el ángulo entre el plano y el eje es igual al ángulo entre el plano y la generatriz se forma una parábola, si el ángulo entre el plano y el eje es menor que el ángulo entre el plano y la generatriz se forma una hipérbola.

Analice los conocimientos adquiridos sobre geometría analítica en el texto básico. Carpinteyro, (2018).

En la exploración del texto básico encontrará información primordialmente sobre:

4.1. La circunferencia y sus ecuaciones

La circunferencia es un elemento geométrico de considerable importancia que desde la antigüedad está presente a diario en todas partes, gracias a ella se pueden elaborar productos como molinos, relojes, generadores eólicos, drones, entre otros.

Se debe prestar atención al sentido etimológico de la palabra circunferencia para definirla, que en latín significa “llevar alrededor de”. Se puede confundir con el círculo, que es la superficie interna de la circunferencia, mientras esta es su perímetro.

¿A qué llamamos circunferencia?

Recordemos que la circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

4.1.1. ¿Cuáles son las ecuaciones de la circunferencia?

Las ecuaciones de la circunferencia se muestran a continuación:

Tabla 1.

Ecuaciones de la circunferencia.

La ecuación de la circunferencia en forma ordinaria	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$
La ecuación de la circunferencia en forma ordinaria, con centro en el origen	$R^2 = x^2 + y^2$
La ecuación de la circunferencia en forma general	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
Las coordenadas del centro	$C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$
La ecuación del radio	$R = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

Nota. En la tabla se muestra el resumen de las ecuaciones de la circunferencia.

Para comprender de mejor manera se determina la ecuación de la circunferencia de centro *C*(-3,-5) y radio 7,

Los valores de *C*(-3,-5) y *R* = 7

Sustituimos en la ecuación, y obtenemos:

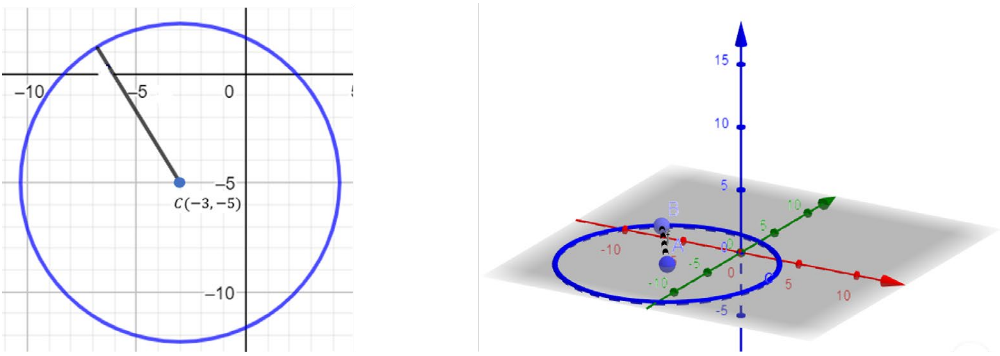
$R^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

$7^2 = (x-(-3))^2 + (y-(-5))^2$

(x+3)2 + (y+5)2 = 49

Para comprobar se grafica la ecuación y se verifica que cumple con los elementos dados, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 16.
Circunferencia de centro C(-3,-5) radio 7.



Nota. En la gráfica se observa la circunferencia de centro en el punto *C*(-3,-5) y radio 7.

4.2. La parábola y sus ecuaciones

Las aplicaciones de la parábola en la vida cotidiana son múltiples. Desde el uso que le dan las antenas satelitales y radiotelescopios para concentrar las señales hasta el uso en los faros de los automóviles al enviar haces de luz paralelos

Profundicemos el aprendizaje de la parábola:

¿A qué llamamos parábola?

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

4.2.1. ¿Cuáles son las ecuaciones de la parábola?

El resumen de las ecuaciones de la parábola se expone a continuación:

Tabla 2.
Ecuaciones de la parábola.

Con vértice en el origen y eje de simetría *x*	$y^2 = 4px$
Con vértice en el origen y eje de simetría *y*	$x^2 = 4py$
Con vértice (h, k) y eje focal de simetría paralelo al eje *x*	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
Con vértice (h, k) y eje de simetría paralelo al eje **y**	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Nota. En la tabla se encuentran las ecuaciones de la parábola.

Para comprender de mejor manera se determina la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto (3,0).

Donde:

$p = 3$

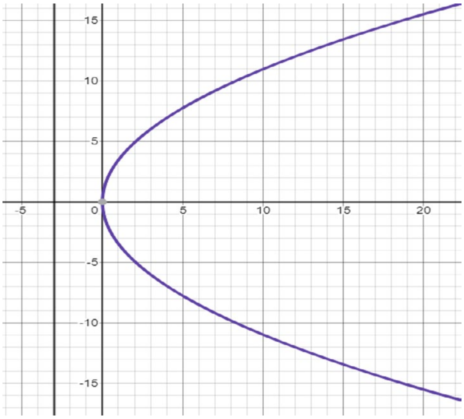
El eje coincide en el eje *x*

La parábola se abre a la derecha

$y^2 = 4px$
$y^2 = 4(3)x$
$\mathbf{y^2 = 12x}$

Para comprobar se grafica la ecuación, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 17.
Parábola de vértice en el origen y foco en el punto (3,0).



Nota. En la gráfica se observa la parábola de vértice en el origen y foco en el punto (3,0).

Ecuación de la directriz

$x = -p$
$\mathbf{x = -3}$

Longitud del lado recto

$lr = 4p$
$lr = 4(3)$
$\mathbf{lr = 12}$

Discusión de la ecuación

Simetría:

Cuando $x = 0$
$y^2 = 12x$
$y^2 = 12(0)$
$\mathbf{y = 0}$

Cuando $y = 0$
$y^2 = 12x$
$0 = 12x$
$\mathbf{x = 0}$

Hay simetría al eje *x*

Asíntotas

$y^2 = 12x$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{12x}$$

$$y = \pm 2\sqrt{3x}$$

No hay asíntotas

4.3. ¿A qué llamamos elipse?

Llamamos elipse al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a los puntos fijos denominados focos (F_1 y F_2) no cambia.

4.3.1. ¿Cuáles son las ecuaciones de la elipse?

Las ecuaciones de la elipse se presentan a continuación:

Tabla 3.
Ecuaciones de la elipse.

Con centro (0,0) y eje focal *x*	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Con centro (0,0) y eje focal *y*	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
Con centro (h,k) y eje de simetría paralelo al eje *x*	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Con centro (h,k) y eje de simetría paralelo al eje *y*	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Nota. En la tabla se muestra las ecuaciones de la elipse.

Para comprender de mejor manera se determina la ecuación de la elipse de centro (-2,2), cuyos vértices son (-2,8) y (-2,- 4) y además el eje menor es 10.

El eje principal es paralelo al eje la ecuación es

x = 2

A partir de los vértices determinemos los valores de *h* y *k*

V_1 = (h,k + a)
(-2,8) = (h,k + a)
h = -2

k + a = 8

V_2 = (h,k + a)
(- 2,8) = (h,k - a)
h = -2

k - a = -4

$$\begin{array}{l} k + \cancel{a} = 8 \\ \underline{k - \cancel{a} = -4} \end{array}$$

2k = 4
k = 2

k + a = 8
2 + a = 8
a = 6

El eje menor es 10

2b = 10

b = 5

Se sustituye los valores encontrados en la ecuación canónica con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje Y.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

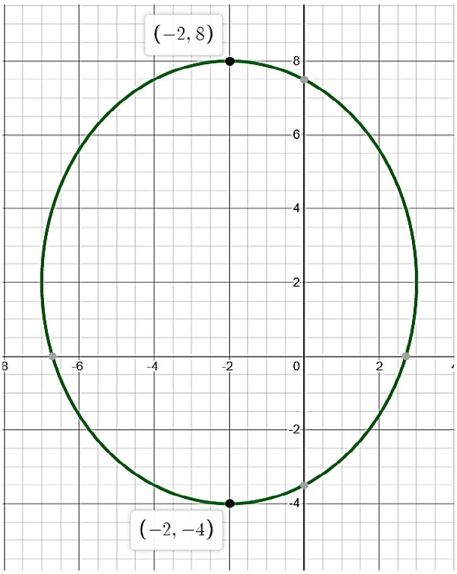
$$\frac{(x-(-2))^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{6^2}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

Se verifica graficando la elipse, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 18.

Elipse de centro (-2,2), cuyos vértices son (-2,8) y (-2,- 4), además el eje menor es 10



Nota. En la gráfica se muestra la elipse de centro *(-2,2)*, cuyos vértices son (-2,8) y (-2,- 4).

4.4. ¿A qué llamamos hipérbola?

Llamamos hipérbola al lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a los puntos fijos denominados F_1 y F_2 y no cambia.

4.4.1. ¿Cuáles son las ecuaciones de la hipérbola?

En la siguiente tabla se encuentra el resumen de las ecuaciones de la hipérbola.

Tabla 4.
Ecuaciones de la hipérbola.

Con vértice en el origen y eje focal en el eje *x*	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Con vértice en el origen y eje focal en el eje *y*	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
Con centro *(h,k)* y el eje focal paralelo al eje *x*	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
Con centro *(h,k)* y el eje focal paralelo al eje *y*	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Nota. En la tabla se encuentra un resumen de las ecuaciones de la hipérbola.

Para recordar, encuentre el centro, los vértices, los focos y grafique la ecuación de la hipérbola $49(y-3)^2 - 25(x+4)^2 = 1225$.

Primero, se debe transformar la ecuación a la forma estándar.

Para que el lado derecho de la ecuación sea 1, se divide todo por 1225.

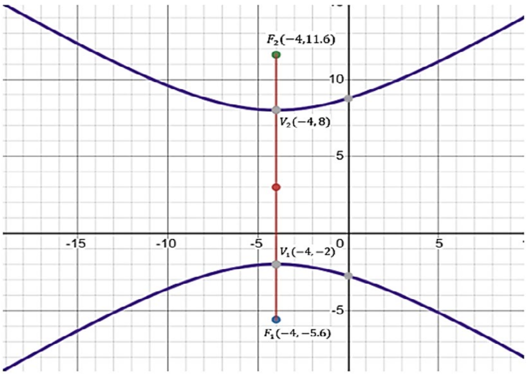
$$\frac{49(y-3)^2}{1225}-\frac{25(x+4)^2}{1225}=\frac{1225}{1225}$$

$$\frac{(y-3)^2}{25}-\frac{(x+4)^2}{49}=1$$

Para comprobar se grafica la ecuación como se muestra en la siguiente figura.

Figura 19.

Hipérbola $49(y - 3)^2 - 25(x + 4)^2 = 1225$



Nota. En la gráfica se observa la hipérbola $49(y - 3)^2 - 25(x + 4)^2 = 1225$

Ahora, se sabe que la hipérbola será vertical ya que el término *y* está primero

a = 5

b = 7

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{5^2 + 7^2}$$

$$c = \sqrt{5^2 + 7^2}$$

c = 8.6

El centro es *C*(-4,3)

Los vértices

V_1 (h,k - a)

V_1 (-4,3 - 5)

V1 (-4, -2)

V_2 (h,k + a)

V_2 (-4, 3 + 5)

V_2 (-4,8)

Los focos son F_1 (-4, 3)

F_1 (h,k - c)

F_1 (-4, 3 - 8.6)

F_1 (-4, -5.6)

F_2 (h,k + c)
F_2 (-4,3 + 8.6)
F_2 (-4,11.6)

4.5. ¿Cómo modelar aplicando geometría analítica?

Para reforzar el conocimiento sobre el modelado con aplicación de geometría analítica, se desarrollan los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1.

Un arco semicircular que su base mide 9 m. El origen del sistema de referencia coincide con un extremo de la base del arco, determinar la ecuación que representa dicha forma.

De donde

Ø = 9 m

R = 4.5 m

$x^2 + y^2 = R^2$

$x^2 + y^2 = (4.5)^2$

$\mathbf{x^2 + y^2 = (4.5)^2}$

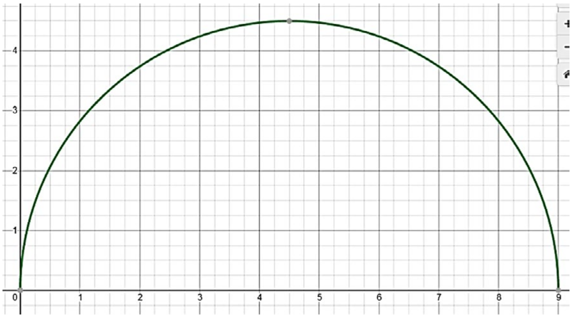
El sistema de referencia debe estar en un extremo de la base del arco.

$(x - 4.5)^2 + y^2 = (4.5)^2$

Ecuación que representa la forma de un arco semicircular
$y = \sqrt{(4.5)^2 - (x - 4.5)^2}$ Se comprueba graficando la ecuación como se muestra en la siguiente figura.

Figura 20.

Arco semicircular de la ecuación $y = \sqrt{(4.5)^2 - (x - 4.5)^2}$



Nota. En la gráfica se observa el arco semicircular de la ecuación
$y = \sqrt{(4.5)^2 - (x - 4.5)^2}$

Ejercicio 2

Calcular la altura del cable a 8 m del centro del arco parabólico formado por un cable sostenido por dos postes, los postes que lo sostienen están separados 40 m y tienen una altura de 10 m. Si el cable toca el piso a la mitad de la distancia entre los postes.

De donde:
y = 10 m
x = 20 m

$y = ax^2$
$10 = a(20)^2$

$$a = \frac{10}{400}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{40}}$$

$$y = \frac{x^2}{40}$$

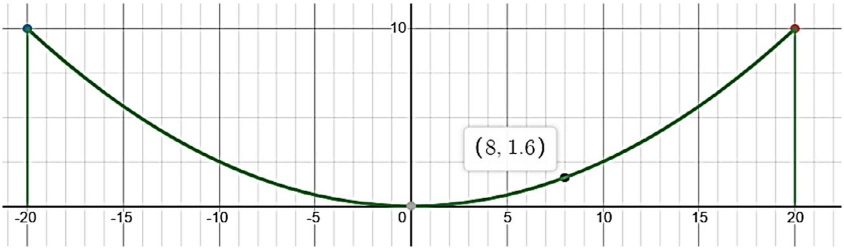
$$y = \frac{(8)^2}{40}$$

y = 1.6 m

La altura del cable ubicado a 8 m desde el centro es de 1.6 m. como se muestra en la siguiente figura.

Figura 21.

Parábola formada por un cable sostenido por dos postes.



Nota. En la gráfica se observa la parábola formada por un cable sostenido por dos postes.

Ejercicio 3

Se conoce que la distancia de la Tierra desde el Sol es 147. 000 000 km en el perihelio y 153 000 000 km en el afelio. (*Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. El punto en la órbita en la cual el planeta está más próximo al Sol se llama perihelio y el punto en el que está más alejado se llama afelio.)* Coloque el origen en el centro de la órbita con el Sol en el eje x y encuentre una ecuación apropiada para la órbita de la Tierra.

De donde

f_1 = 153 000 000

f_2 = 147 000 000

2a = *eje mayor*

2a = 300 000 000

$$a = \frac{300\,000\,000}{2}$$

a=150 000 000

a-c=147 000 000

150 000 000-c=147 000 000

c=3 000 000

$c^2=a^2+b^2$

$3000\,000^2=150\,000\,000^2+b^2$

$b^2=150000000^2-3000000^2$

$b^2=2.2491x10^{16}$

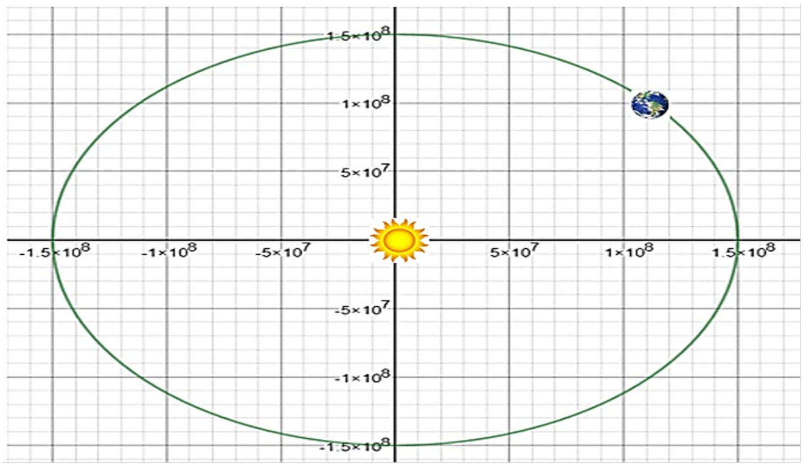
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{2.25x10^{16}} + \frac{y^2}{2.2491\ x10^{16}} = 1$$

Para comprobar se gráfica la ecuación como se muestra en la siguiente figura.

Figura 22.

Gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{2.25x10^{16}} + \frac{y^2}{2.2491\ x10^{16}} = 1$



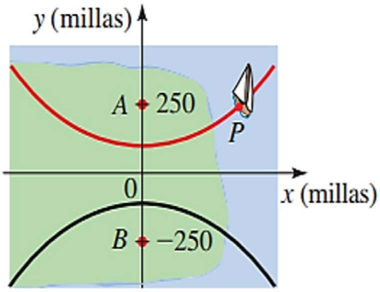
Nota. En la gráfica se observa la elipse que modela el movimiento de la tierra alrededor del sol.

Ejercicio 4

Las estaciones LORAN en A y B están apartadas 500 millas y la nave en P recibe la señal de la estación A 2640 (µs) antes de que reciba la señal de B. Si se supone que las señales de radio viajan a *980 pies/*µs. Como se muestra en la figura.

Figura 23.

Las estaciones de largo alcance.



Nota. En la gráfica se observa las estaciones de largo alcance en los puntos A y B.

Se determina:

a. La distancia de d(P,A)-d(P,B)

$$d(P,A) - d(P,B) = 2640\mu s$$

$$d(P,A) - d(P,B) = 2640\mu s \left(\frac{980 \; pies}{\mu s}\right)\left(\frac{1 \; milla}{5280 \; pies}\right)$$

$$d(P,A) - d(P,B) = 490 \; millas$$

b. Encuentre una ecuación para la rama de la hipérbola indicada en rojo en la figura.

c = 250 *millas*
2a = 490 *millas*
a = 245 *millas*

$c^2 = a^2 + b^2$
$250^2 = 245^2 + b^2$
b = 49.75

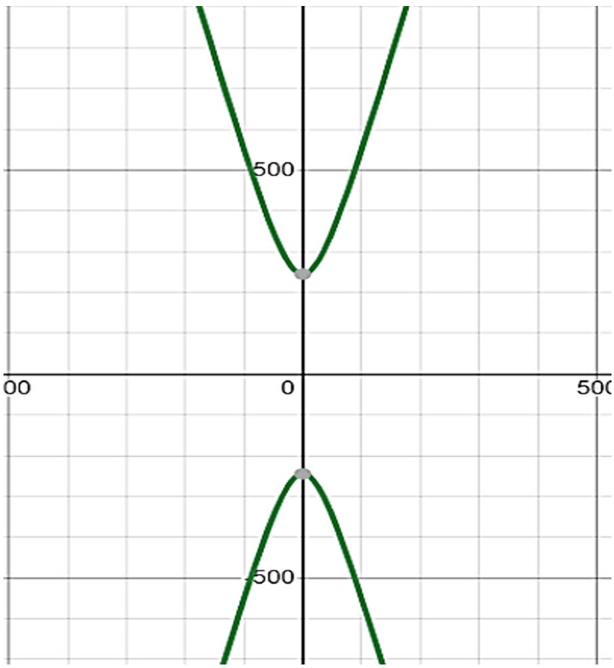
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{245^2} - \frac{x^2}{40.75^2} = 1$$

Se comprueba graficando la ecuación como se muestra en la siguiente figura.

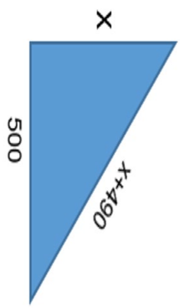
Figura 24.

Hipérbola formada por la ecuación $\frac{y^2}{245^2} - \frac{x^2}{40.75^2} = 1$



Nota. En la gráfica se observa hipérbola que modela el movimiento de la nave.

c. Si A está al norte de B y si P está al este de A, ¿Qué tan lejos está P de A?



$c^2 = a^2 + b^2$

$(x + 490)^2 = x^2 + 500^2$

$x^2 + 980x + 490^2 = x^2 + 500^2$

$$x = \frac{500^2 - 490^2}{980}$$

x = 10.10 *millas.*

Estimado/a estudiante, le invito a revisar el siguiente recurso interactivo que contiene un repaso de las temáticas abordadas esta semana.

Geometría analítica

Se ha revisado los contenidos sobre geometría analítica, para fortalecer los conocimientos, le invito a ejecutar las siguientes:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Investigue aplicaciones tecnológicas (Geogebra, Desmos, Genially, Kahoot) que faciliten la enseñanza y aprendizaje del modelado con ecuaciones de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

Revise las actividades calificadas en la guía didáctica de Sistemas de conocimiento de geometría analítica y su didáctica (2020).

Revise los contenidos sobre circunferencia, parábola, elipse e hipérbola en el texto básico. Carpinteyro, (2018)

Resuelva el ejercicio 7 página 133, sobre el modelado con la circunferencia, ejercicio 4 página 152 sobre el modelado con la parábola, ejercicio 10 página 160 sobre el modelado con la elipse y el ejercicio 2 página 172 sobre el modelado con la hipérbola, propuestos en el texto básico. Carpinteyro, (2016).

Reflexión

Vincule las aplicaciones tecnológicas investigadas con los ejercicios resueltos y proponga actividades para la enseñanza aprendizaje del modelado con ecuaciones de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

Comuníquese con su docente por la bandeja de entrada en el momento que requiera información, aclarar dudas e inquietudes y participe de las tutorías a través del zoom.

Una vez revisados los conocimientos de geometría analítica es momento de profundizar el análisis de la estadística inferencial.

Lo está haciendo muy bien. ¡Siga adelante!

Semana 5

En la presente semana se revisarán los contenidos sobre Estadística inferencial principalmente las pruebas de hipótesis paramétricas y no paramétricas, con el uso de Excel o SPSS para ello le invito a desarrollar el taller 5.

Unidad 5. Estadística inferencial

Las aplicaciones de la estadística en la vida diaria se reflejan en decisiones cotidianas como abordar el transporte público fuera de horas pico, o no acudir al supermercado los días de cobro de salario.

Se trata de decisiones que resultan del análisis realizado con base en la experiencia y en la información recabada en situaciones parecidas. Estas aplicaciones de la estadística se reflejan en buena parte en las decisiones que se toman cotidianamente, en la mayoría de los casos de manera inconsciente.

La estadística es una ciencia referida a datos que se recopilan, se organizan y se analizan en un marco referencial temporal, con el propósito de conocer promedios, tendencias y posibilidades.

> En este contexto la estadística se refiere a un sistema o método usado en la recolección, organización, análisis y descripción numérica de la información. También se puede decir que la estadística estudia el comportamiento de hechos o fenómenos de grupo (Martínez, 2018).

Se consideran dos etapas, primero la estadística descriptiva que se limita a la descripción de un conjunto de datos sin llegar a conclusiones o a generalizar con respecto a un grupo mayor y en segundo la estadística inferencial que implica el análisis mediante el cual trata de llegar a conclusiones acerca de un grupo más grande o población, basado en la información de un grupo menor o muestra.

Propósito

Sistematizar el conocimiento de la estadística inferencial para resolver problemas o situaciones de la vida cotidiana que pueden ser modeladas y poner en práctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Para recordar el proceso de construcción de las secciones cónicas observe el video: Conceptos básicos de estadística inferencial

En este video se explica de manera didáctica los conceptos básicos de estadística inferencial como estimación, modelos estadísticos, hipótesis, región de aceptación, región de rechazo, tipos de error, pruebas paramétricas y pruebas no paramétricas.

Considere los conocimientos adquiridos sobre estadística inferencial en el texto básico. Haeussler, Ernest, Paul, Richard y Wood, Richard. (2014).

En la revisión del texto básico encontrará información principalmente sobre:

5.1. ¿En qué se basa la inferencia estadística?

La inferencia estadística está basada en el supuesto de tomar muchas muestras, todas con igual probabilidad de ser seleccionadas y a través de una de ellas sabremos algo acerca de la población, mediante el cálculo de estimadores, que nos permitan hacer aseveraciones, incorrectas algunas veces, estableciéndose la probabilidad de error.

Este método se basa en la aplicación de técnicas de muestreo, para lo cual se requiere de un buen diseño, además de la aplicación de métodos aleatorios de selección, cuando las probabilidades son iguales para cada elemento de una población. En algunos casos no requieren ser iguales, siempre que se conozcan y sean diferente de cero. (Martínez, 2018, p. 324)

La tarea más importante de la estadística es la realización de inferencias acerca de una población, con base en los resultados obtenidos a través de una muestra.

Recuerde algunos términos y conceptos como:

Población es un conjunto de elementos, medidas o el recuento de todas las unidades que presentan una característica común.

Elemento puede ser una persona, familia, empresa, zona, animal u objeto.

A la estadística no le interesa el elemento en sí, sino sus características

Características, corresponden a ciertos rasgos, cualidades o propiedades que poseen los elementos que constituyen la población o la muestra, estas se constituyen en variables. Continuemos con el aprendizaje mediante la revisión del siguiente recurso acerca de la clasificación de las variables

Variables

5.2. ¿En qué consiste el muestreo?

Cuando se investiga las características de todas las unidades que constituyen la población nos referimos a investigación exhaustiva.

Por factores como costo, tiempo, recursos humanos, poblaciones muy grandes, destrucción de la unidad sometida a observación, homogeneidad en las características impiden desarrollar una investigación exhaustiva, por lo cual se requiere desarrollar una investigación parcial, para lo cual se requiere determinar una muestra.

> La muestra debe ser representativa de la población, requiere que todas las unidades de la población tengan la misma probabilidad de ser seleccionadas, es decir debe ser aleatoria al azar o probabilística. (Martínez, 2018, p. 275)

Profundicemos el aprendizaje acerca del muestreo:

¿Cómo se realiza el muestreo aleatorio?

Se realiza bajo condiciones y requisitos y se constituye en un procedimiento práctico, económico y rápido para generalizar conclusiones obtenidas a través de una muestra, aplicables a toda la población dentro de este muestreo, se tienen los siguientes métodos: Muestreo aleatorio simple, muestreo aleatorio estratificado, muestreo por conglomerado, muestreo por fases, muestreo sistemático.

En el muestreo no aleatorio existen algunos métodos como muestreo intencional, por conveniencia, voluntario y por cuotas.

¿Cómo se determina el tamaño de la muestra?

Para determinar el tamaño de la muestra es necesario identificar los siguientes elementos técnicos.

> **La varianza** (σ^2). Corresponde al grado de variabilidad que presentan las unidades de la población. Mientras más grande sea σ^2 mayor será el tamaño de la muestra. El valor de σ^2 supuestamente conocido, de lo contrario se debe estimar a través de una investigación preliminar. En el caso de $\sigma_P^2 = PQ$, sucede algo similar, pero se tiene la costumbre de tomar P = 0,50 con lo cual se obtiene el máximo valor posible de n.
>
> **Nivel de confianza**. Tiene relación directa con el tamaño de la muestra, por lo tanto, se dirá que a mayor nivel de confianza más grande debe ser el tamaño de la muestra. El nivel de significación es fijado por el investigador, de acuerdo con su experiencia.
>
> **Precisión de la estimación.** Corresponde al margen de error que el investigador fija de acuerdo con el conocimiento que tenga acerca del parámetro que piensa estimar. Se le conoce como error de muestreo (E). (Martínez, 2018, p. 304).

$$E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Cálculo de la muestra *n* en poblaciones infinitas

En la variable

$$n = \frac{z^2\sigma^2}{E^2}$$

En la proporción

$$n = \frac{Z^2PQ}{E^2}$$

Para una mejor explicación se desarrolla el siguiente ejemplo

Una firma constructora desea estimar la resistencia promedio de las barras de acero utilizadas en la construcción de edificios de apartamentos. ¿Qué tamaño de muestra se requiere para garantizar que habrá un riesgo de solo 0.001 de sobrepasar un error de 5 kg o más en la estimación? La desviación estándar de la resistencia de este tipo de barras se estima en 50 libras.

E = %kg = 10 *libras*
σ = S = 50 *libras*
$\sigma^2 = S^2 = 2500$ *libras*^{2}

P = 1 - 0.001 = 0.999

$$P = \frac{0.999}{2}$$

P = 0.995 → Z = 3.27

$$n = \frac{z^2\sigma^2}{E^2}$$

$$n = \frac{3.27^2 50^2}{10^2}$$

$$n = 267{,}32$$

n = 268 barras de acero

5.3. ¿Cómo se realizan las pruebas de hipótesis?

Denominadas también pruebas de significación tienen como objetivo principal evaluar suposiciones o afirmaciones acerca de los valores estadísticos de la población, denominados parámetros.

Cuando se hace indispensable tomar una decisión sobre la validez de la representación en una población, con base en los resultados obtenidos a través de una muestra, se dice que se toman decisiones estadísticas.

Para tomar una decisión, es necesario, ante todo, plantear posibilidades acerca de la característica o características a estudiar en una población determinada.

La suposición puede ser cierta o falsa. Estas suposiciones se llaman hipótesis estadísticas.

Hipótesis estadística: son supuestos acerca de un parámetro o de algún valor estadístico de una población. Se debe tomar con referencia a un parámetro, ya sea una media aritmética, una proporción (porcentaje), varianza, etc., para que sea hipótesis estadística.

> La hipótesis puede ser formulada con el fin de rechazarla de acuerdo con el análisis estadístico, esta hipótesis se denomina hipótesis nula y se representa por $H_{o.}$ Se tiene también la hipótesis alternativa por H_1. (Martínez, 2018, p. 324)

H_0: Hace referencia al valor del parámetro que se quiere probar como verdadero

H_1: Establece que el parámetro puede ser mayor, menor o igual, de acuerdo con la propuesta hecha en la hipótesis nula.

Ejemplos

- Que el promedio de calificación que tendrán los estudiantes de estadística, sea superior a 7,0.
- El 95 % de estudiantes se graduarán con el examen complexivo.
- 10 % de las unidades producidas por una máquina, serán defectuosas.

5.4. ¿En qué consisten las pruebas de hipótesis paramétricas?

En la siguiente tabla se muestran las ecuaciones de las pruebas paramétricas.

Tabla 5.

Ecuaciones de las pruebas paramétricas.

Distribución de medias muestrales ($\overline{X}$) Prueba cuando se conoce la varianza poblacional	$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
Distribución de proporciones muestrales p	$S_p = \sqrt{PQ}$ $Z = \frac{\overline{p}-P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}}$
Distribución de diferencias entre dos medias muestrales $\overline{x}-\overline{y}$	$\sigma_{\overline{x}-\overline{y}} = \sqrt{\frac{(\sigma_{\overline{x}})^2}{n_1} + \frac{(\sigma_{\overline{y}})^2}{n_2}}$
Distribución de diferencias entre dos proporciones muestrales $P_1 - P_2$	$S_{\overline{P}_1-\overline{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_1Q_1}{n_2}}$

Nota. En la tabla se observan las ecuaciones de las pruebas paramétricas.

Para una mejor explicación de las pruebas paramétricas se resuelven las siguientes situaciones:

Distribución de medias muestrales ($\overline{X}$)

Prueba cuando se conoce la varianza poblacional

Un proceso está programado para empacar la cantidad media, de una libra (16 onzas) de café. Se toma una muestra aleatoria de 36 paquetes; resulta una media de 14,2 onzas y desviación típica de 5,3 onzas. Al nivel del 5 %, ¿se podrá afirmar que no se está cumpliendo con lo indicado en el empaque?

Prueba bilateral

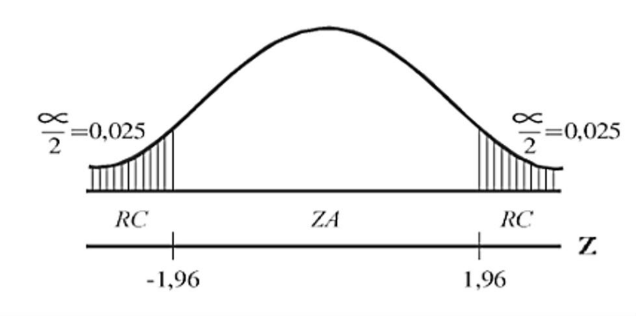
$\mu = 16$
$n = 36$
$S = 5.3$

$$H_0: \mu = 16$$
$$H_1: \mu \neq 16$$
$$\alpha = 0.05$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{14.2 - 16}{\frac{5.3}{\sqrt{36}}}$$

Z=-2.04



Al nivel del 5 %, se podrá afirmar que no se está cumpliendo con lo indicado por la fábrica. Se puede ver que -2.04 se ubica en la región crítica, por lo tanto, se estará rechazando la hipótesis nula y aceptando la hipótesis alternativa.

Distribución de proporciones muestrales p

Un gerente de una compañía afirma, que el porcentaje de atrasos en las horas de llegada al trabajo cobija al 25 % de sus empleados. Solicita al jefe de personal la revisión de 40 tarjetas marcadas, con las horas de llegada, en la quincena y encuentra que 8 han llegado tarde. Al nivel del 5%, ¿hay razón para concluir que el gerente de la compañía está exagerando?

n=40

$$p = \frac{8}{40} = 0.20$$

H_0: P=0.25
H_1: P<0.25
α=0.05

$$S_P = \sqrt{PQ}$$

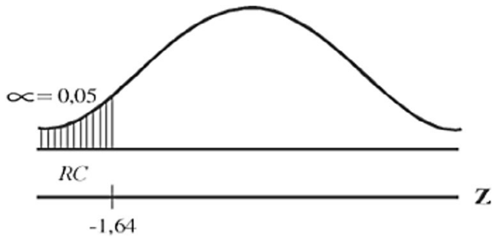
$$S_P = \sqrt{0.2(0.8)}$$

$S_P = 0.4$

$$Z = \frac{\overline{p} - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}}$$

$$Z = \frac{0.20 - 0.25}{\sqrt{\frac{0.2(0.8)}{40}}}$$

Z = -0.79



Se ubica Z = -0,79 en la zona de aceptación; por lo tanto, podemos concluir, que al nivel del 5 % el gerente no está exagerando.

Distribución de diferencias entre dos medias muestrales $\bar{x} - \bar{y}$

Una prueba de resistencia al esfuerzo de dos tipos diferentes de cables, que presentan desviaciones típicas de 35 y 45 respectivamente, se llevó a cabo, seleccionando dos muestras de tamaño 32 y 40, con medias de 905 y 925. ¿Proporcionan estos resultados, al nivel del 10 %, suficiente evidencia de que la resistencia de B es superior a la de A?

$\sigma_x = 35$
$\sigma_y = 45$
$\bar{x} = 905$

$\bar{y} = 925$

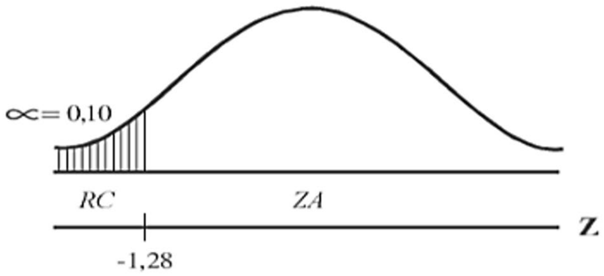
$n_1 = 32$
$n_2 = 40$
$H_0: \mu_x = \mu_y$
$H_1: \mu_x < \mu_y$

α = 0.10

$$\sigma_{\overline{x}-\overline{y}} = \sqrt{\frac{(\sigma_{\overline{x}})^2}{n_1} + \frac{(\sigma_{\overline{y}})^2}{n_2}}$$

$$Z = \frac{(905 - 925) - 0}{\sqrt{\frac{35^2}{32} + \frac{45^2}{40}}}$$

Z = -2.12



Al nivel del 10 %, si nos permite llegar a la conclusión de que la resistencia al esfuerzo del cable B es superior a la del cable A.

Distribución de diferencias entre dos proporciones muestrales $P_1 - P_2$

En una encuesta se preguntó sobre los hábitos de lectura, utilizando una muestra aleatoria de 350 señoras que trabajan y otra muestra independiente de 325 que no lo hacen. En el primer caso, 105 manifestaron que estaban suscritas a cierto tipo de revista. En el segundo, la respuesta fue de 130 que no estaban suscritas ni mostraban interés por ninguna revista, argumentando la falta de tiempo. ¿Al nivel del 1 %, se podrá afirmar que las señoras que trabajan leen menos que las señoras que no trabajan?

$n_1 = 350$
$n_2 = 325$

$$P_1 = \frac{105}{350} = 0.30$$

$$P_2 = \frac{130}{325} = 0.40$$

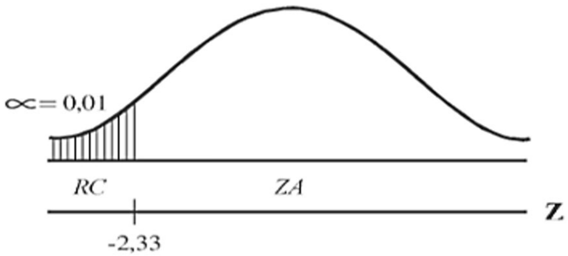
H_0: $P_1 = P_2$
H_1: $P_1 < P_2$

α = 0.01

$$S_{\overline{P}_1-\overline{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1Q_1}{n_1} + \frac{P_1Q_1}{n_2}}$$

$$Z = \frac{0.30 - 0.40}{\sqrt{\frac{0.3(0.7)}{350} + \frac{0.4(0.6)}{325}}}$$

Z=-2.73



Al nivel del 1 %, se puede afirmar que las señoras que trabajan leen menos, que las que no trabajan.

Teoría de las muestras pequeñas

Se dice que una muestra es grande, si el número de unidades es mayor a treinta y es pequeña si es menor o igual a treinta.

En el caso de que se desconozca la desviación típica poblacional, se le podrá reemplazar por la desviación típica muestral, siempre que la muestra sea grande.

Si $n \leq 30$ (muestra pequeña), la desviación típica se simboliza por ŝ cuando no se ha efectuado ninguna corrección.

Esta distribución se expresa en forma de campana y simétrica, pero más achatada y con más área en los extremos, es decir, las áreas que corresponden a las regiones críticas o de rechazo.

Distribución "t" de Student

Se puede considerar que no hay una distribución "t", sino más bien una familia de distribuciones "t", dado que las desviaciones estándar se modifican a medida que se va aumentando el tamaño de la muestra, acercándose a la normal. (Martínez, 2018, p. 351).

La función de la distribución "t" es

$$Y = c\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

Para recordar de mejor manera se resuelve la siguiente situación:

Una muestra de 25 observaciones tiene una media de 42.0 y una desviación de 8. Trabajando con un nivel de significación del 1%. ¿Existe razón para rechazar que la media de la población es 46?

n = 25

$\overline{x} = 42$

μ = 46

ŝ = 8

H_0: $\mu_1 = 46$

H_1: $\mu_1 \neq 46$

α = 0.01

$$s = \hat{s}\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$s = 8\sqrt{\frac{25}{24}}$$

$$s = 8.17$$

$$t = \frac{\overline{x} - u}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n-1}}}$$

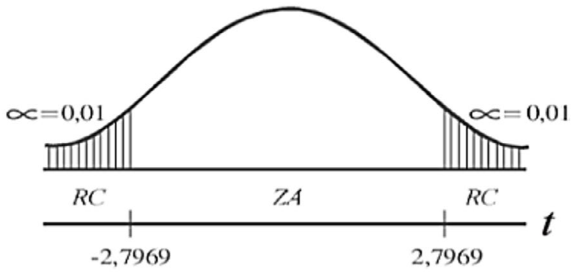
$$t = \frac{42 - 46}{\frac{8}{\sqrt{25-1}}}$$

t = -2.45

v = 25-1

v = 24

α = 0.01 corresponde una t=2.7969



Se acepta la hipótesis de que μ=46, es decir, no existe razón para rechazar, que la media de la población es 46, al nivel del 1%

5.5. ¿En qué consisten las pruebas de hipótesis no paramétricas?

Los métodos no paramétricos, son de gran utilidad para el análisis de los datos, cuando las observaciones se pueden ordenar, ya que son imposibles de medir, también cuando se carece del conocimiento acerca del comportamiento de los parámetros de la población.

> Se puede concluir que, en todos aquellos casos, donde sea imposible establecer la forma de la distribución poblacional o cuando los datos están dados a escala ordinal, es decir, que pueden ordenarse por rangos, se hace indispensable la aplicación de métodos, denominados de diferentes maneras: no paramétricos, de distribución libre, de rango o de orden, técnicas que surgieron a mediados del siglo XIX. (Martínez, 2018, 427)

Métodos no paramétricos

En el siguiente recurso se encuentran las ecuaciones de las pruebas no paramétricas.

Ecuaciones de las pruebas no paramétricas

Para recordar de mejor manera se desarrolla una verificación de una hipótesis aplicando la prueba de Chi cuadrado.

Prueba del Chi cuadrado

Dos grupos A y B cada uno de 100 individuos, padecen una enfermedad. Se administra un suero solo al grupo A; en todo lo demás, los dos grupos fueron tratados idénticamente. Se encuentra que en los grupos A y B, 75 y 65 individuos, respectivamente, se han recuperado de la enfermedad. Probar la hipótesis de que el suero ayuda a curar la enfermedad. (α = 0,05).

Tratamiento	Durmieron	No durmieron	Total
Grupo A (con suero)	75	25	100
Grupo B (sin suero)	65	35	100
Total	140	60	200

Solución

FO_i	Fe_i	$FO_i - Fe_i$	$\lvert F0_i - Fe_i \rvert - 0.5$	$(\lvert F0_i - Fe_i \rvert - 0.5)^2$	$\frac{(\lvert F0_i - Fe_i \rvert - 0.5)^2}{Fe_i}$
35	32	3	2.5	6.25	0.1953
45	48	-3	2.5	6.25	0.1953
5	8	-3	2.5	6.25	0.1953
15	12	3	2.5	6.25	0.1953
100	100	0			

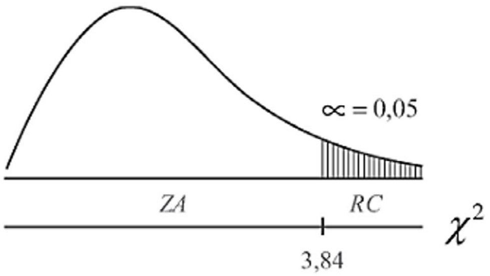
H_0: $n_1 = n_2$
H_1: $n_1 \neq n_2$
$\alpha = 0.05$

$$x^2 = \sum \frac{(\lvert Fo_i - Fe_i \rvert - 0.5)^2}{Fe_i}$$

$x^2 = 1.6275$

GL = (c-1)(f-1)
GL = (2-1)(2-1)
GL = 1

$$x^2_{0.05} = 3.84$$



Como el valor de chi cuadrado calculado es menor que el valor de chi cuadrado tabulado se acepta la hipótesis nula es decir no hay diferencia significativa, al nivel del 5 %.

Prueba del signo

La prueba del signo se debe aplicar en todos aquellos casos, en los cuales no nos interesa la mensurabilidad de los datos, sino su comparabilidad, cuando las observaciones están dadas en condiciones diferentes, por lo tanto, se tienen distribuciones diferentes.

Se detallan a continuación los rendimientos de dos tipos de maíz, germinados sin mezclas, obtenidos en diferentes experimentos. ¿Existe alguna diferencia significativa entre ambos tipos de maíz? (Nivel del 5 %)

EXPERIMENTO	RENDIMIENTO A	RENDIMIENTO B	$D=x_i-y_i$
1	48,6	42,3	+
2	43,0	45,1	-
3	41,0	41,0	0
4	39,1	36,4	+
5	36,8	32,8	+
6	40,8	42,6	-
7	28,9	30,3	-
8	35,9	33,2	+
9	39,2	39,2	0
10	47,8	45,4	+
11	42,1	40,6	+
12	47,6	48,5	-
13	26,4	26,4	0
14	30,6	28,6	+
15	39,8	36,4	+
16	37,5	35,0	+

EXPERIMENTO	RENDIMIENTO A	RENDIMIENTO B	$D=x_i-y_i$
17	28,1	29,1	-
18	33,3	31,0	+
19	43,0	43,0	0
20	29,0	27,0	+

Solución

n=16

$$p = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

X=11 (Número de+)

μ=np

$$\mu = 16\left(\frac{1}{2}\right)$$

μ=8

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$$\sigma = \sqrt{16\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

σ=2

Mediante la Distribución normal, como aproximación a la Binomial, tenemos que

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

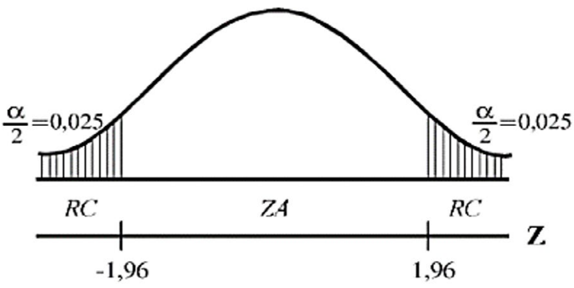
$$Z = \frac{10.5-8}{2}$$

Z=1.25

$$H_0:\ P = \frac{1}{2}$$

$$H_1: P \neq \frac{1}{2}$$

α = 0.05



Se acepta la hipótesis nula, ya que 1,25 se ubica en la zona de aceptación, se dice entonces, que la diferencia entre ambos tipos de maíz no es significativa, al nivel del 5 %.

Se ha examinado los contenidos sobre estadística inferencial, para fortificar los conocimientos, le invito a ejecutar las siguientes:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Investigue estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de la estadística inferencial y la utilización de aplicaciones tecnológicas para el cálculo de las pruebas de hipótesis paramétricas y no paramétricas.

Revise las actividades calificadas en la guía didáctica de Sistemas de Conocimiento de Estadística y su Didáctica (2021).

Revise los contenidos sobre estadística inferencial en el texto básico. Martínez Bencardino, C. (2019)

Resuelva los ejercicios de aplicación propuestos en el texto básico. Martínez, C. (2018).

- Prueba de hipótesis de una varianza
  Página 407: Ejercicio 7.
- Comparación entre varianzas de dos poblaciones. Distribución F
  Página 414: Ejercicio 15.
- Prueba del coeficiente de correlación de Pearson
  Página 418: Ejercicio 19.

- Pruebas con observaciones apareadas
  Página 425: Ejercicios 36.

- Prueba de chi-cuadrado x^2
  Página 449: Ejercicio 82

- Prueba del signo
  Página 458: Ejercicios 98

Reflexión

Responda con argumentos y ejemplos las preguntas sobre estrategias metodológicas para el aprendizaje y enseñanza de las pruebas de hipótesis paramétricas y no paramétricas.

- ¿En qué se basa la inferencia estadística?
- ¿En qué consiste el muestreo?
- ¿Cómo se realizan las pruebas de hipótesis?
- ¿En qué consisten las pruebas de hipótesis paramétricas?
- ¿En qué consisten las pruebas de hipótesis no paramétricas?

Recuerde participar de las tutorías a través del zoom y comuníquese con su docente por la bandeja de entrada en el momento que requiera información, aclarar dudas e inquietudes.

Semana 6

Estimado estudiante

En esta semana se revisarán los contenidos sobre derivadas e integrales, así como el modelado de situaciones de la vida real, para ello le invito a desarrollar el taller 6.

Unidad 6. Cálculo diferencial e integral

Una pregunta muy antigua en la clase de matemáticas es: ¿cuándo voy a usar esto en la vida real? A diferencia de la aritmética, la geometría o el álgebra, el cálculo puede no tener aplicaciones obvias para la vida cotidiana. Sin embargo, las personas se benefician de las aplicaciones de cálculo todos los días, desde algoritmos informáticos hasta modelar la propagación de enfermedades. Si bien es posible que no se resuelva una ecuación diferencial a diario, el cálculo está en nuestro alrededor.

Propósito

Aplicar el conocimiento del cálculo integral y diferencial para resolver problemas o situaciones de la vida cotidiana que pueden ser modeladas y poner en práctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Para recordar el proceso el de cálculo con derivadas e integrales observe los videos:

- Resolución de problemas. optimización
- Área entre curvas

En el primer video explica de manera sencilla y fácil de comprender los conceptos básicos de función, pendiente y derivadas, las reglas para derivar y la aplicación en la solución de problemas de la vida cotidiana. Por otro lado, con seguridad luego de observar el segundo video recordará los conceptos básicos de integral definida, indefinida, las reglas para integrar y la aplicación en la solución de problemas de la vida cotidiana.

Revise los conocimientos adquiridos sobre cálculo integral y diferencial en el texto básico. Haeussler, Ernest, Paul, Richard y Wood, Richard. (2014).

En la revisión del texto básico encontrará información principalmente sobre:

6.1. ¿A qué llamamos diferenciación?

El cálculo de derivadas forma parte de las matemáticas que aborda funciones que permiten calcular la pendiente de curvas en determinados puntos.

La pendiente mide cuán rápido crece "y" comparado con la razón de crecimiento de "x"

Cuando la pendiente de una recta es constante significa que su dirección no cambia, los valores de "y crecen a razón constante.

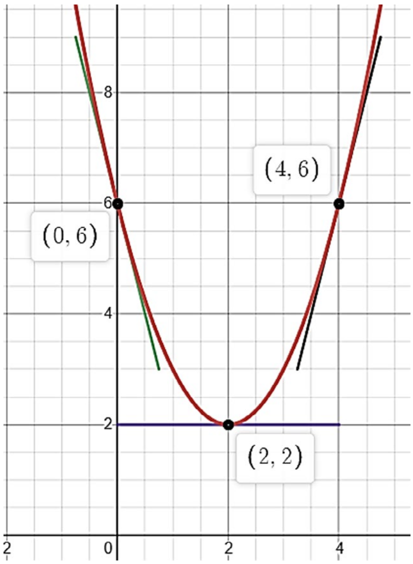
> Si *P* es el punto de coordenadas (x_1, y_1) y de coordenadas (x_2, y_2) entonces la pendiente *m*, de la recta *PQ* es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, Oxford. (2019)

Es necesario dibujar la tangente en el punto determinado para calcular la pendiente de una curva en ese punto.

Para una mejor comprensión se analiza la pendiente en los puntos (0,6), (2,2) y (4,6) de la curva $x^2 - 4x + 6$

Figura 25.

Rectas tangentes con respecto a la curva $x^2 - 4x + 6$



Nota. En la gráfica se observa rectas tangentes con respecto a la curva $x^2 - 4x + 6$

Analizando la gráfica

- En el punto (0,6), se observa que la curva es decreciente, la pendiente de la curva es negativa y la recta tangente a la curva tiene pendiente negativa.

- En el punto (2,2), se determina que la pendiente de la curva es 0 y la recta tangente a la curva es horizontal.
- En el punto (4,6), se verifica que la curva es creciente, la pendiente de la curva es positiva y la recta tangente a la curva tiene pendiente positiva.

La dirección de la recta tangente a la curva cambia a medida que cambia la coordenada *x*. Por lo tanto, la pendiente de la curva no es constante.

Así, para cualquier curva *y = f(x)* que no sea una recta, la pendiente cambia por distintos valores de *x*. La pendiente puede expresarse como una función de *x*, denominada la función derivada.

La derivación es un método que se usa para hallar la ecuación de la función derivada de una función dada *y = f(x)*

6.2. ¿Cómo se derivan las funciones?

Las funciones derivadas se pueden escribir de varias maneras

$\frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}$ o $f'(x)$

Dada la función y = ax^n su derivada es $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$

Dada la función f(x) = ax^n su derivada es f´(x) = nax^{n-1}

El proceso es válido para todos los valores de *n*, positivos y negativos. (Oxford, 2019, p. 258)

¿Cuáles son las reglas para derivar?

En la siguiente tabla se encuentra el resumen de las derivadas de una función.

Derivadas de funciones

Para recordar de mejor manera se desarrollan los siguientes ejercicios.

Dada la función y = 4x^2 hallar $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 2(4)x^{2-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x$$

Dada la función hallar f(x)=9x-11x^3 hallar f´

f´(x) = 9x^{1-1} - 3(11)x^{3-1}

f´(x) = 9 - 33x^2

Se puede derivar funciones en las que hay potencias de "x" en el denominador de una fracción. Primero se tiene que escribir estos términos usando exponentes negativos.

Para una mejor compresión se halla $\frac{dy}{dx}$ dada la función $y = \frac{4}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -2(4)x^{-2-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -8x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{x^3}$$

Ahora se utilizará el cálculo de la derivada para determinar la pendiente.

6.3. ¿Cómo se calcula la pendiente de una curva en un punto dado?

Se puede usar la función derivada para determinar el valor exacto de la pendiente de una curva en un punto particular de la misma.

En un punto máximo o mínimo local

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Para comprender de mejor manera se determina la pendiente en el punto x=4 dada la función $y = x^2 - 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(4) - 3$$

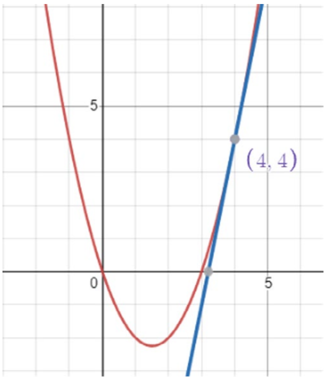
$$\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\boldsymbol{m = 5}$$

Como se muestra en la siguiente figura.

Figura 26.

Pendiente en el punto x = 4 dada la función $y = x^2 - 3x$



Nota. Se observa en la gráfica que la pendiente de la curva en el punto x=4 es 5

Le invito a profundizar sus conocimientos acerca de la tangente y la normal

La tangente y la normal a una curva

La tangente a una curva en un punto *P* es la recta que pasa por *P* y tiene la misma pendiente que la curva en el punto *P*.

Para hallar la ecuación de la tangente a una curva en *P (x,y)*

1. Calcular la coordenada "y" de *P* (y_1) usando la ecuación de la curva.
2. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$
3. Reemplazar la coordenada "x" de *P*(x_1) en $\frac{dy}{dx}$ para calcular el valor de la pendiente de *P*, *m* .
4. Usar la ecuación de la recta $(y-y_1) = m(x-x_1)$

La normal es perpendicular a la tangente, así que su pendiente, *m´*, se halla usando la ecuación $m' = \frac{1}{m'}$, donde *m* es la pendiente de la tangente. (Oxford, 2019, p. 267)

Para comprender de mejor manera se determina la ecuación de la tangente a la curva $y = 6x - x^2$ en el punto *P* (2,8).

$$\frac{dy}{dx} = 6 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 - 2(2)$$

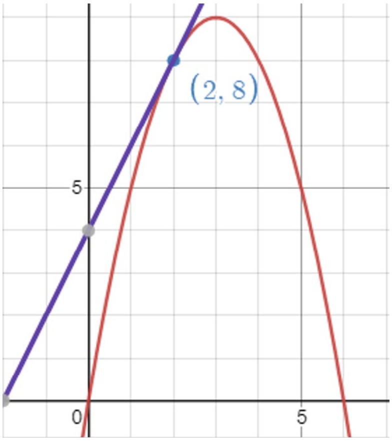
$$\frac{dy}{dx} = 2$$

m=2

$(y - y_1) = m(x - x_1)$
$(y - 8) = 2(x - 2)$
$y - 8 = 2x - 4$
$\mathbf{y = 2x + 4}$

Figura 27.

Ecuación de la tangente a la curva $y = 6x - x^2$ en el punto P (2,8).



Nota. En la gráfica se observa la recta tangente en el punto *P(2,8)*

Razón de cambio

Para la función y = f(x), la función derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ es la razón de cambio de "y" con respecto a "x".

Para aplicar este concepto se desarrolla el siguiente problema

El área, *A*, de un charco de agua debajo de un caño que gotea $A = 4t + t^2$ cm^2 es después *t* de segundos

a. ¿Cuál es el área del charco, inicialmente?

b. ¿Cuál es el área del charco cuando t = 5?

c. ¿Qué representa $\frac{dA}{dt}$?

d. ¿Cuál es el valor de $\frac{dA}{dt}$ cuando t = 5 ?

e. Utilice las respuestas de los apartados b y d para explicar qué está sucediendo en el área del charco.

a. Área del charco inicialmente

$A = 4t + t^2$ cm^2

$A = 4(0) + (0)^2 \ cm^2$
$A = 0$

Inicialmente no había charco

b. El área del charco cuando t=5

$A = 4t + t^2 \ cm^2$
$A = 4(5) + (5)^2 \ cm^2$
$A = 45 \ cm^2$

c. $\frac{dA}{dt}$ representa la razón de cambio del área del charco de agua con respecto al tiempo.

d. El valor de $\frac{dA}{dt}$ cuando $t = 5$

$$\frac{dA}{dt} = 4 + 2t$$

$$\frac{dA}{dt} = 4 + 2(5)$$

$$\frac{dA}{dt} = 14\frac{cm^2}{s}$$

e. El área del charco es de 45 cm^2 y en este momento, el área está aumentando $14\frac{cm^2}{s}$

1 Bimestre

6.4. ¿Cómo se determina puntos máximos y mínimos locales?

En un máximo local, la curva deja de crecer y cambia de dirección, es decir, que "gira" y comienza a decrecer. Por lo tanto, a medida que "*x*" crece, ocurren tres tipos de pendiente, en este orden, positivo, cero, negativo. El punto dónde la pendiente es cero es el punto máximo.

En un mínimo local, la curva deja de decrecer y cambia de dirección, es decir, que "gira" y comienza a crecer. Por lo tanto, a medida que "*x*" crece, ocurren tres tipos de pendiente, en este orden, negativo, cero, positivo. El punto dónde la pendiente es cero es el punto mínimo.

En un punto estacionario, ya sea un máximo o un mínimo local, f´(x) es igual a cero.

Dada la curva $y = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 5$ y determine la naturaleza de estos puntos.

$y = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 24x^2 - 60x + 72$$

$12x^3 - 24x^2 - 60x + 72 = 0$

$12(x^3-2x^2-5x+6) = 0$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-1)(x+2)(x-3) = 0$

$\mathbf{x = 1}$

$\mathbf{x = -2}$

$\mathbf{x = 3}$

Se determina los puntos estacionarios

$y = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 5$

$y = 3(1)^4 - 8(1)^3 - 30(1)^2 + 72(1) + 5$

$y = 42$

Así que el punto (1,42) es un punto estacionario

$y = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 5$

$y = 3(-2)^4 - 8(-2)^3 - 30(-2)^2 + 72(-2) + 5$

$y = -147$

Así que el punto (-2,147) es un punto estacionario

$y = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 5$

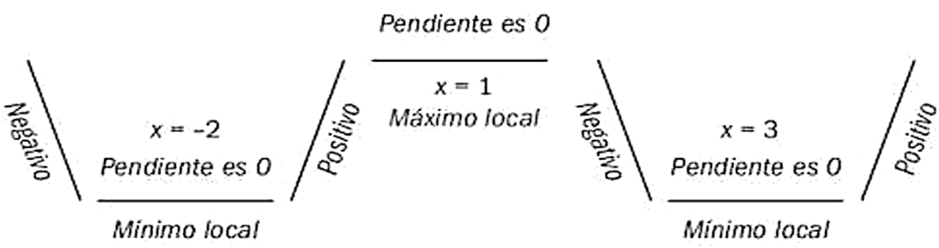
$y = 3(3)^4 - 8(3)^3 - 30(3)^2 + 72(3) + 5$

$\mathbf{y = -22}$

Así que el punto (-2,147) es un punto estacionario

Para decidir si los puntos son máximos o mínimos se elabora una tabla con las pendientes de los puntos que estén cerca de los puntos estacionarios.

Coordenada x	-10	-2	0	1	2	3	5
Pendiente	-13728	0	72	0	-48	0	672



Analizando la gráfica se determina que:

El punto (-2,147) es un mínimo local

El punto (1,42) es un máximo local

El punto (3,-22) es un mínimo local

6.5. ¿Cómo se usan las derivadas en modelos matemáticos?

Optimización

En problemas de optimización, usar derivadas para hallar el valor óptimo (o bien el máximo o bien el mínimo) de una función en la que interactúan dos variables.

Para recordar de mejorar el uso de derivadas se determine el área mínima de un cilindro cuyo volumen es igual a 330 cm^3

Sean:

- *A* el área total del cilindro.
- *r* el radio de la base del cilindro.
- *a* la altura del cilindro.

Entonces

$A = 2\pi r^2 + 2\pi ra$

$\pi r^2 a = 330$

$$a = \frac{330}{\pi r^2}$$

$A = 2\pi r^2 + 2\pi ra$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{330}{\pi r^2}\right)$$

$$A = 2\pi r^2 + \left(\frac{660}{r}\right)$$

$A = 2\pi r^2 + 660r^{-1}$

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - 660r^{-2}$$

$$4\pi r - \frac{660}{r^2} = 0$$

$$4\pi r = \frac{660}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{660}{4\pi}$$

r = 3.74 cm

Así que el área mínima es:

$$A = 2\pi(3.74)^2 + \left(\frac{660}{3.74}\right)$$

A = 264cm^2

Una vez que se ha revisado las derivadas es momento de recordar el cálculo integral, siendo el proceso de integración o antiderivación muy utilizado en la ingeniería y en la matemática en general principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución. Muy bien, continuemos con el aprendizaje:

6.6. ¿Cómo se determinan las antiderivadas?

Una función *f* se llama antiderivada de *f* si F´(x) = *f*(x)

Las antiderivadas de f(x) = x^n son dadas por

$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ dónde n ≠ -1 y C es una constante arbitraria.

Para comprender de mejor manera se encuentra la antiderivada de la función

f(x) = x^{10}

$$F(x) = \frac{1}{10+1} x^{10+1} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{11} x^{11} + C$$

6.7. ¿Cómo se determina la integral indefinida?

> La anti diferenciación también se conoce como integral indefinida y es denotado con el símbolo integral $\int dx$
>
> Si F(x)=f(x) se escribe $\int f\,(x)dx = F(x) + C$
>
> La expresión $\int f\,(x)dx$ se conoce como integral indefinida
>
> $\int f\,(x)dx$ se lee como "la antiderivada de *f* con respecto a *x*" o "la integral de *f* con respecto a *x*".

Cada regla básica de la diferenciación tiene una regla de integración correspondiente, como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 6.

Reglas para integrar.

	Reglas para derivar	Reglas para integrar
Potencia	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$
		$\int \frac{1}{x}dx = ln\;ln\;\lvert x \rvert\; + C$
Multiplicación por una constante	$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf\,(x)dx = k\int f\,(x)dx$
Suma o diferencia	$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f\,(x)dx \pm \int g\,(x)dx$
Función constante	$\frac{d}{dx}(k) = 0$	$\int kdx = kx + C$
Función exponencial	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x\,e^x dx = e^x + C$

Nota. En la tabla se encuentra el resumen de las reglas para derivar e integrar.

Para una mejor compresión se determina la integral indefinida de $\int 2x^3\,dx$

$$\int 2x^3dx = 2\int x^3dx$$

$$\int 2x^3dx = 2\left(\frac{1}{3+1}x^{3+1} + C_1\right)$$

$$\int 2x^3dx = 2\left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right)$$

$$\int 2x^3dx = \frac{1}{2}x^4 + C$$

6.8. ¿Cómo se determina la integral definida?

Se sabe que una integral indefinida $\int f(x)dx$, da una familia de funciones que se diferencian por una constante.

Ahora se revisa la integral definida $\int_a^b f(x)dx.$.

Aunque estas integrales comparten un símbolo común, la integral definida le da un número en lugar de una función.

$$\int_a^b f(x)dx.$$

se lee como "la integral de "*a*" a "*b*" de *f* con respecto a *x*", donde "*a*" a "*b*" son los límites de la integración.

Aquí se tiene algunas propiedades de las integrales definidas

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

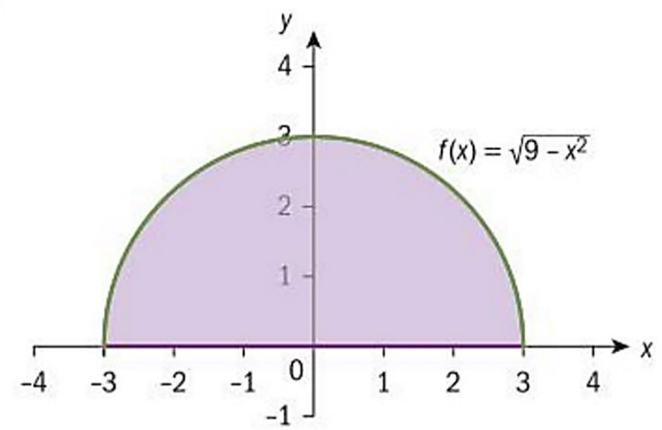
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ Cuando } a < c < b$$

Considere la región sombreada de la siguiente figura.

Figura 28.

Región sombreada $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$



Nota. En la gráfica se observa la región sombreada de $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Encuentre una integral definida que dé el área de la región sombreada y compare la respuesta usando fórmulas geométricas.

$$\int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9 - x^2}\right) dx$$

$$\int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9 - x^2}\right) dx = \int_{\pi}^{0} \left(\sqrt{9 - 9cos^2 u}\right)(-3 \text{ sen } u)du$$

$$\int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9 - x^2}\right) dx = \int_{\pi}^{0} \left(\sqrt{9sen^2 u}\right)(-3 \text{ sen } u)du$$

$$\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx=\int_{\pi}^{0}\left(\sqrt{9sen^2u}\right)(-3\ sen\ u)du$$

$$\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx=\int_{\pi}^{0}(3\ sen\ u)(-3\ sen\ u)du$$

$$\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx=-9\int_{\pi}^{0}sen^2\ du$$

$$\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx=-9\int_{\pi}^{0}\frac{1-cos2u}{2}\,du$$

$$\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx=-\frac{9}{2}\left[\int_{\pi}^{0}1du-\int_{\pi}^{0}cos\,cos\ 2u\ \ du\right]$$

$$\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx=-\frac{9}{2}[(0-\pi)]$$

$$\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx=\frac{9}{2}\pi$$

$$\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)dx=14.13$$

Aplicando la fórmula geométrica se tiene

$$A=\frac{\pi r^2}{2}$$

$$A=\frac{(\pi)3^2}{2}$$

A=14.13 u^2

Comparando las soluciones alcanzadas con ambos procesos se verifica que es el mismo.

6.9. ¿Cuál es el teorema fundamental del cálculo?

Si *f* es una función continua en el intervalo *a≤x≤b* y *F* es una antiderivada de *f* en *a≤x≤b* entonces

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]b\ a = F(b) - F(a)$$

Este teorema proporciona un método para evaluar integrales definidas y se considera uno de los principales avances de las matemáticas modernas.

Para comprender de mejor manera se evalúa la integral definida

$$\int_0^3 (x-2)\,dx$$

$$\int_0^3 (x-2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]3\ 0$$

$$\int_0^3 (x-2)\,dx = \left[\frac{1}{2}(3)^2 - 2(3)\right] - \left(\frac{1}{2}(0)^2 - 2(0)\right)$$

$$\int_0^3 (x-2)\,dx = \left[\frac{9}{2} - 6\right] - (0-0)$$

$$\int_0^3 (x-2)\,dx = -\frac{3}{2}$$

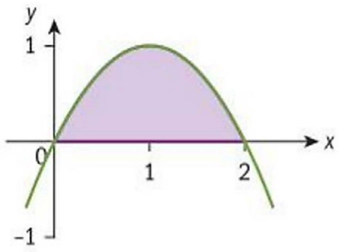
Escribe una integral definida que representa el área de la región sombreada y luego encuentra el área

$f(x) = -x^2 + 2x$

1 Bimestre

Figura 29.

Región sombreada $f(x) = -x^2 + 2x$



Nota. En la gráfica se observa la región sombreada de $f(x)=-x^2+2x$

$$\int_0^2 (-x^2+2x)dx$$

$$\int_0^2 (-x^2+2x)dx - \int_0^2 x^2\,dx + \int_0^2 2x\,dx$$

$$\int_0^2 (-x^2+2x)dx - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + [x^2]_0^2$$

$$\int_0^2 (-x^2+2x)dx - \left[\frac{8}{3} - 0\right] - [4-0]$$

$$\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx = \frac{4}{3}\Big|$$

6.10. ¿Cómo se utilizan las antiderivadas en el modelado matemático?

Área entre dos curvas

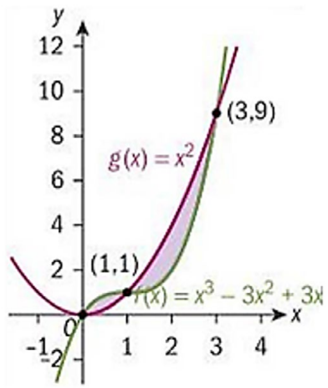
Para recordar el proceso de encontrar el área de la región entre las curvas se resuelve el siguiente ejercicio

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ y $g(x) = x^2$

Se grafica las funciones y se determina los puntos de intersección.

Figura 30.

Región sombreada de las funciones f(x) = x^3 - $3x^2$ + 3x y g(x) = x^2



Nota. En la gráfica se observa la región sombreada entre las funciones *f(x) = x^3-$3x^2$ + 3x y g(x) = x^2*

Se calcula el área

$$Área = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^3 (g(x) - f(x))$$

$$Área = \int_0^1 [(x^3 - 3x^2 + 3x) - x^2]\,dx + \int_1^3 [x^2 - (x^3 - 3x^2 + 3x)]$$

$$Área = \frac{37}{12}$$

Área≈3.083

Se ha estudiado los contenidos sobre el cálculo diferencial e integral, para fortalecer los conocimientos, le invito a ejecutar las siguientes:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Investigue estrategias metodológicas para el aprendizaje y enseñanza del modelado con derivadas e integrales con base en los pasos del ciclo del aprendizaje.

Revise las actividades calificadas en la guía didáctica de cálculo (2017).

Revise los contenidos sobre derivadas e integrales en el texto básico. Haeussler, Ernest, Paul, Richard y Wood, Richard. (2014).

Resuelva los ejercicios de modelado con derivadas, página 536, ejercicios 60, modelado con integrales página 679 ejercicio 35 propuestos en el texto básico Haeussler, Ernest, Paul, Richard y Wood, Richard. (2014).

Reflexión

Explique las estrategias metodológicas en la enseñanza aprendizaje del modelado con derivadas e integrales con base en los pasos del ciclo del aprendizaje, considerando los ejercicios resueltos.

Participe de las tutorías a través del zoom y por la bandeja de entrada comuníquese con su docente en el momento que requiera aclarar dudas e inquietudes.

Una vez revisados los contenidos del cálculo integral y diferencial es momento de analizar el álgebra lineal.

Semana 7

En la presente semana se discutirá los contenidos sobre el álgebra lineal, principalmente la aplicación de matrices en la solución de sistemas de ecuaciones lineales y el modelado de situaciones de la vida real, para ello le invito a desarrollar el taller 7.

Unidad 7. Álgebra lineal

Con frecuencia los alumnos, se cuestionan la importancia concreta del Álgebra lineal en la vida cotidiana, debido a la definición general que contiene como una representación en la geometría analítica; y el hecho de abarcar diversos campos de estudio como las ciencias naturales y sociales (la explicación de los fenómenos físicos). En este contexto el Álgebra Lineal es la rama de las matemáticas que concierne al estudio de vectores, espacios vectoriales, transformaciones lineales, y sistemas de ecuaciones lineales.

Propósito

Aplicar el conocimiento del álgebra lineal para resolver situaciones de la vida cotidiana que pueden ser modeladas y poner en práctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

> Para recordar los conocimientos del álgebra lineal observe con atención los videos:
>
> Modelamiento de un problema usando matrices

En el video encontrará la explicación del modelamiento usando matrices, suma de matrices, e interpretar los elementos de las matrices.

> Recuerde los conocimientos adquiridos sobre matrices y resolución de sistemas de ecuaciones lineales en el texto básico. Haeussler, Ernest, Paul, Richard y Wood, Richard. (2014).

En la revisión del texto básico encontrará información principalmente sobre:

7.1. ¿A qué llamamos matriz?

> Una matriz *A* de *m x n* es un arreglo rectangular *mn* de números reales (o complejos) ordenados en *m* filas horizontales y *n* columnas verticales.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ldots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \square & \square & \vdots & \square & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Diremos que *A* es m por n (que se escribe m × n).

Si *m* = *n*, decimos que *A* es una matriz cuadrada de orden *n*, y que los números $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forman la diagonal principal de A.

Tipos de matrices

Una matriz cuadrada A = [a_{ij}], en donde cada término fuera de la diagonal principal es igual a cero, es decir, a_{ij}=0 para i≠j, es una matriz diagonal.

En los siguientes ejemplos se muestran que son matrices cuadradas

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \; y \; H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Una matriz diagonal A = [a_{ij}], en donde todos los términos de la diagonal principal son iguales, es decir, a_{ij} = c para i = j, y a_{ij} = 0 para i ≠ j es una **matriz escalar.**

En los siguientes ejemplos se muestran que son matrices diagonales

$$I = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \; y \; J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices iguales, dos matrices de *m x n*, A = [a_{ij}] y B = [b_{ij}], y , son iguales si a_{ij} = b_{ij} 1≤ i ≤ m,1≤ j ≤ n, es decir, si los elementos correspondientes son iguales.

En los siguientes ejemplos se muestran que son matrices iguales

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \; y \; N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}$$

7.2. ¿Cuáles son las operaciones con matrices?

Suma de matrices

Si A=[a_{ij}] y B=[b_{ij}] , son matrices de *m x n*, la suma de *A* y *B* da por resultado la matriz C=[c_{ij}] de *m x n* de , definida por C_{ij}=a_{ij}+b_{ij} 1≤i≤m,1≤j≤n), C se obtiene sumando los elementos correspondientes de A y B.

En el siguiente ejemplo se muestra la suma de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

C = A + B

$$C = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4+(-4) \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Recuerde que la suma de las matrices A y B solo se define cuando A y B tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas; es decir, solo cuando A y B son del mismo tamaño.

Multiplicación por un escalar

Si A = $[a_{ij}]$ es una matriz de *m x n* y *r* es un número real, el múltiplo escalar de *A* por *r* , *rA* , es la matriz B = $[b_{ij}]$ de *m x n*, donde $b_{ij} = ra_{ij}$ $(1\leq i\leq m, 1\leq j \leq n)$

Es decir, *B* se obtiene multiplicando cada elemento de *A* por *r*.

Diferencias de matrices

Si *A* y *B* son matrices de *m x n*, escribimos A + (-1)B como *A* - *B*, y denominamos a esto diferencia de A y B.

En el siguiente ejemplo se muestra la diferencia de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

C = A - B

$$C = \begin{bmatrix} 2-2 & 3+1 & -5-3 \\ 4-3 & 2-5 & 1+2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

La transpuesta de una matriz

Si A = [a_{ij}] es una matriz de *m x n*, la matriz A^T = [a_{ij}^T] de *m x n*, donde a_{ij}^T = a_{ji} (1 ≤ i ≤ m,1 ≤ j ≤ n) es la transpuesta de *A*. En consecuencia, las entradas en cada fila de A^T son las entradas correspondientes en la columna de A.

En el siguiente ejemplo se muestra la matriz transpuesta

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Si A = [a_{ij}] es una matriz de *m x p*, y B = [b_{ij}] es una matriz de *p x n*, el producto de *A* y *B*, que se denota mediante *AB*, es la matriz C = [c_{ij}], de *m x n* definida como

$C_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj}$

$$= \sum a_{ik} b_{kj} \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

En el siguiente ejemplo se muestra la multiplicación de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2(4) + (-1)(2) & 1(5) + 2(-3) + (-1)1 \\ 3(-2) + 1(4) + 4(2) & 3(5) + 1(-3) + 4(1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

Una gran cantidad de los problemas que se presentan en las ciencias naturales y sociales, así como en ingeniería y en ciencias físicas, tienen que ver con ecuaciones que relacionan a dos conjuntos de variables.

7.3. ¿A qué llamamos sistemas de ecuaciones lineales?

Es un conjunto de ecuaciones lineales cada uno con *n* incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ puede denotarse

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

7.3.1. ¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones, método de eliminación Gaussiana?

"Para resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante su matriz aumentada, utilizamos operaciones elementales de filas para llegar a una matriz de cierta forma. Stewart, J. (2017)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x + 3y + z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$

Obtenemos la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 3 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Realizamos las operaciones

La segunda fila restamos la primera fila por -3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 3 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \underset{\xrightarrow{f_3 - f_1}}{\xrightarrow{f_2 - 3f_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & -4 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

Intercambiamos la segunda fila por la tercera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & -4 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \underset{\xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_2}}{\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz tenemos un sistema de ecuaciones equivalente

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -y + 2z = -2 \\ 4z = -4 \end{cases}$$

Aplicamos la sustitución hacia atrás despejando *z* la ecuación 3

4z = -4

z = -1

En la segunda ecuación sustituimos el valor encontrado z = -1

-y + 2z = -2

-y + 2(-1) = -2

y = 0

En la segunda ecuación sustituimos los valores encontrados y = 0 y z =-1

x + y - z = 2

x + 0 -(-1) = 2

x = 1

La solución del sistema de ecuaciones es x = 1,y = 0 y z = -1

7.3.2. ¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones lineales, método Gauss-Jordan?

Para una mejor comprensión resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Obtenemos la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 3 & 3 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Realizamos las operaciones

Multiplicamos la primera fila por 1/5:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}f_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Sumamos a la segunda y tercera fila la primera multiplicada por -2:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{2f_1+f_2} \\ \xrightarrow{2f_1+f_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & -1 & 0 \\ 0 & 11/5 & -1 & 11/5 \end{array}\right]$$

Multiplicamos las filas segunda y tercera por 5:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & -1 & 0 \\ 0 & 11/5 & -1 & 11/5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{5f_2} \\ \xrightarrow{5f_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 11 & -5 & 11 \end{array}\right]$$

Sumamos a la segunda fila la tercera multiplicada por -1:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 11 & -5 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2+(-1)f_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & -10 & 0 & -15 \\ 0 & 11 & -5 & 11 \end{array}\right]$$

Multiplicamos la segunda fila por -1/10 y la tercera por 1/11:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & -10 & 0 & -15 \\ 0 & 11 & -5 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{(-1/10)f_2} \\ \xrightarrow{1/11 f_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/11 & 1 \end{array}\right]$$

Sumamos a la primera fila la segunda multiplicada por -2/5 y a la tercera, la segunda por -1:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & {}^{2}/_{5} & 0 & {}^{2}/_{5} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{3}/_{2} \\ 0 & 1 & -{}^{5}/_{11} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3+(-1)f_2]{f_1+(-{}^{2}/_{5})f_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -{}^{1}/_{5} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{3}/_{2} \\ 0 & 0 & -{}^{5}/_{11} & -{}^{1}/_{2} \end{array}\right]$$

Multiplicamos la tercera fila por -11/5:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -{}^{1}/_{5} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{3}/_{2} \\ 0 & 0 & -{}^{5}/_{11} & -{}^{1}/_{2} \end{array}\right] \xrightarrow{(-{}^{11}/_{5})f_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -{}^{1}/_{5} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{3}/_{2} \\ 0 & 0 & 0 & {}^{11}/_{10} \end{array}\right]$$

Esta última matriz tiene forma escalonada reducida (es la matriz identidad). Realmente, ya tenemos la solución del sistema, así que es un sistema compatible determinado.

La solución del sistema de ecuaciones es $x = -\frac{1}{5}, y = \frac{3}{2}$ y $z = \frac{11}{10}$

Se ha revisado los contenidos sobre el álgebra lineal, para fortalecer los conocimientos, le invito a cumplir con las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Investigue aplicaciones tecnológicas (Symbolab) que faciliten la enseñanza y aprendizaje de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Revise las actividades calificadas en la guía didáctica de Sistemas de conocimiento de álgebra lineal y su didáctica (2020).

Revise los contenidos sobre matrices y sistemas de ecuaciones lineales en el texto básico. Haeussler, Ernest, Paul, Richard y Wood, Richard. (2014)

Resuelva el ejercicio 32 página 272, ejercicio 44 página 284 sobre solución de sistemas de ecuaciones lineales, propuestos en el texto básico. Haeussler, Ernest, Paul, Richard y Wood, Richard. (2014)

Reflexión

Explique la importancia de la utilización de las aplicaciones tecnológicas en la enseñanza aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, considerando los ejercicios resueltos.

Participe de las tutorías a través del zoom y por la bandeja de entrada comuníquese con su docente en el momento que requiera aclarar dudas e inquietudes.

Luego de haber desarrollado las actividades de aprendizaje, le invito a verificar los conocimientos alcanzados a través de la autoevaluación

Autoevaluación 2

Instrucciones: lea la pregunta, comprenda, razone, resuelva; y, seleccione la respuesta correcta de las siguientes preguntas:

1. **La ecuación que representa la trayectoria de un avión que se mantiene sobrevolando el aeropuerto de la ciudad de Toluca a una distancia constante de 7 km de la torre de control, esperando las instrucciones para aterrizar es:**

   a. $x^2 + y^2 = 49$
   b. $x^2 - y^2 = 7$
   c. $x^2 - y^2 = 49$
   d. $x^2 + y^2 = 7$

2. **A la altura de donde está su receptor una antena parabólica tendría 1.4 m de ancho. ¿A qué distancia del fondo de la antena está colocado el receptor?**

   a. 25 cm
   b. 35 cm
   c. 45 cm
   d. 55 cm

3. **La ecuación de la elipse horizontal con centro en C(-2,-1), longitud de lado recto de 8 y eje mayor de 10 es:**

   a. $4x^2 + 5y^2 + 16x + 10y = 59$
   b. $4x^2 + 5y^2 + 16x + 10y = 69$
   c. $4x^2 + 5y^2 + 16x + 10y = 79$
   d. $4x^2 + 5y^2 + 16x + 10y = 89$

4. En una escuela pública se seleccionaron 10 pares de niños de primer año para comparar similitud de inteligencia y preparación. Un niño de cada par fue enseñado a leer con un método y el otro niño con otro método. Después del periodo de aprendizaje, los niños fueron sometidos a una prueba de lectura con los siguientes resultados (el puntaje utilizado fue de 0 a 100).

Niño N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Método I: (x)	65	68	70	63	64	62	74	72	70	66
Método II: (y)	63	68	68	60	68	66	70	78	70	70

¿A un nivel de significación del 5%, existe alguna diferencia significativa en la mayor efectividad de alguno de los métodos aplicados?

a. t = -0.63 se ubica en la zona de aceptación, por lo tanto, aceptamos la hipótesis nula ($a_d = 0$) Se puede concluir que ninguno de los métodos es superior al otro, al nivel del 5%.

b. t = -0.63 se ubica en la zona de rechazo, por lo tanto, rechazamos la hipótesis nula ($a_d = 0$) Se puede concluir que ninguno de los métodos es superior al otro, al nivel del 5%.

c. t = -0.53 se ubica en la zona de aceptación, por lo tanto, aceptamos la hipótesis nula ($a_d = 0$) Se puede concluir que ninguno de los métodos es superior al otro, al nivel del 5%.

d. t = -0.53 se ubica en la zona de rechazo, por lo tanto, rechazamos la hipótesis nula ($a_d = 0$) Se puede concluir que ninguno de los métodos es superior al otro, al nivel del 5%.

5. En un consultorio se trató a un grupo de personas que se quejaban de insomnio, dándole a unas pastillas para dormir y a otras pastillas de azúcar. Después de someterlos a observación, se obtuvo los siguientes resultados.

TRATAMIENTO	DURMIERON	NO DURMIERON	TOTAL
Pastillas para dormir	35	5	40
Pastillas de azúcar	45	15	60
TOTAL	80	20	100

Se acepta la hipótesis nula porque la diferencia es significativa al nivel del 5 %

a. Como el valor de Chi cuadrado calculado es 1.6275 es menor que el valor de Chi cuadrado tabulado 3.84, por lo tanto, se ubica en la zona de aceptación, en conclusión, se acepta la hipótesis nula porque la diferencia no es significativa. Al nivel del 5%.

b. Como el valor de Chi cuadrado calculado es 4.6275 es mayor que el valor de Chi cuadrado tabulado 3.84, por lo tanto, se ubica en la zona de rechazo, en conclusión, se rechaza la hipótesis nula porque la diferencia es significativa. Al nivel del 5%.

c. Como el valor de Chi cuadrado calculado es 2.6275 es menor que el valor de Chi cuadrado tabulado 3.84, por lo tanto, se ubica en la zona de aceptación, en conclusión, se acepta la hipótesis nula porque la diferencia no es significativa. Al nivel del 5%.

d. Como el valor de Chi cuadrado calculado es 5.6275 es mayor que el valor de Chi cuadrado tabulado 3.84, por lo tanto, se ubica en la zona de rechazo, en conclusión, se rechaza la hipótesis nula porque la diferencia es significativa. Al nivel del 5%.

6. La función de costo total de una fábrica de calcetas es estimada por Dean como c = -10484.69 + 6.750q - 0.000328q^2 dónde es la producción de docenas de pares y c el costo total. La función de costo marginal es:

a. $\frac{dc}{dq} = 6.750 - 0.000656q$

b. $\frac{dc}{dq} = 6.750q - 0.000656q^2$

c. $\frac{dc}{dq} = 6.750q^2 - 0.000656q^3$

d. $\frac{dc}{dq} = 6.750q^3 - 0.000656q^4$

7. **El peso de la rama de un árbol está dado por w = $2t^{0.432}$, donde t es el tiempo. La razón de cambio relativa de W con respecto a t es:**

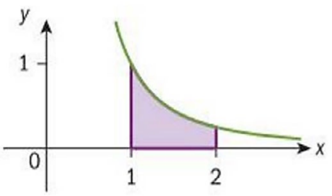
a. $\frac{0.432}{t}$

b. $\frac{t}{0.432}$

c. $\frac{0.864}{t}$

d. $\frac{t}{0.864}$

8. **El área de la región sombreada de la función $y = \frac{1}{x^2}$ es:**



a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{4}$

c. 2

d. 4

9. **Un fabricante produce tres artículos: A, B y C. La utilidad por cada unidad vendida de A, B y C es \$1, \$2 y \$3, respectivamente. Los costos fijos son de \$17 000 por año y los costos de producción por cada unidad son \$4, \$5 y \$7, respectivamente. El año siguiente se producirán y venderán un total de 11 000 unidades entre los tres productos y se obtendrá una utilidad total de \$25 000. Si el costo total es de \$80 000, ¿cuántas unidades de cada producto deberán producirse el año siguiente?**

a. 2000, 4000, 5000
b. 3000, 5000, 7000
c. 4000, 6000, 8000
d. 5000, 7000, 9000

10. **Un grupo de inversionistas decide invertir $500 000 en las acciones de tres compañías. La compañía D vende en $60 una acción y tiene un rendimiento esperado de 16% anual. La compañía E vende en $80 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 12% anual. La compañía F vende cada acción en $30 y tiene un rendimiento esperado de 9% anual. El grupo planea comprar cuatro veces más acciones de la compañía F que de la compañía E. Si la meta del grupo es obtener 13.68% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?**

a. 5000, 1000, 4000
b. 4000, 2000, 3000
c. 6000, 3000, 2000
d. 2000, 4000, 6000

Ir al solucionario

Semana 8

Estimado estudiante

En la presente semana se revisará los contenidos estudiados en el primer bimestre, para ello le invito a desarrollar las actividades del fin de bimestre.

Actividades finales del bimestre

Al término del primer bimestre debe consolidar los conocimientos adquiridos y para ello realice las siguientes actividades:

Actividad 1. Revise las actividades desarrolladas, recomendadas y calificadas, autoevaluaciones y estudie todos los contenidos del primer bimestre y prepárese para participar de la evaluación presencial.

La evaluación presencial comprende los conocimientos revisados en el primer bimestre.

¡Éxitos!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Aplica sistemas de conocimientos de matemática orientados a la construcción de experiencias de aprendizaje en escenarios, contextos y ambientes de su entorno natural y social, con metodologías activas orientadas al desarrollo de operaciones mentales e instrumentales para el bachillerato y la educación general básica superior.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

En el segundo bimestre, se desarrollarán actividades tendientes a rendir el examen complexivo oral y el examen complexivo escrito, se utilizarán como recursos de aprendizaje la guía didáctica del Prácticum 4.2, tutorías a través de Zoom, foro académico, video colaboración, talleres e interacciones académicas con el docente.

En la semana 9 seleccionará los indicadores de evaluación para elaborar la planificación micro curricular de física y matemáticas, en la semana 10 elaborará la planificación micro curricular de física, en las semanas 11 y 12 desarrollará dos planificaciones micro curriculares de matemáticas, en la semana 14 debe rendir el examen complexivo oral que se sustenta en la exposición explicativa, fundamentada, con argumentos y ejemplos y en la semana 17 debe rendir el examen complexivo escrito.

Semana 9

Estimado estudiante

En la presente semana se inicia el desarrollo de actividades previas a la presentación del examen complexivo oral, para ello le invito a desarrollar el taller 9.

Unidad 8. Selección de indicadores de evaluación para la planificación micro curricular

El proceso de planificación micro curricular constituye todo un desafío como herramienta para innovar las prácticas educativas, se trata de definir el desarrollo de un plan que involucre el objetivo de la clase, las actividades, estrategias metodológicas, recursos y evaluación basados en el contenido específico de la física y la matemática.

Propósito

Con la finalidad de exponer en el examen complexivo oral la planificación microcurricular para el aprendizaje y enseñanza de la física y las matemáticas en el bachillerato, seleccione un indicador de evaluación de física y dos indicadores de evaluación de matemáticas.

Criterios de evaluación de física

- **CE.CN.F.5.8.** Argumenta, experimentalmente, las magnitudes que intervienen en él MAS cuando un resorte se comprime o estira (sin considerar las fuerzas de fricción), a partir de las fuerzas involucradas en MCU (la fuerza centrífuga es una fuerza ficticia) y la conservación de la energía mecánica cuando el resorte está en posición horizontal o suspendido verticalmente, mediante la identificación de las energías que intervienen en cada caso.

- **CE.CN.F.5.12.** Establece la relación existente entre magnetismo y electricidad, mediante la comprensión del funcionamiento de un motor eléctrico, el campo magnético próximo a un conductor rectilíneo largo y la ley de Ampere.

- **CE.CN.F.5.15.** Explica los elementos de una onda, sus propiedades, tipos y fenómenos relacionados con la reflexión, refracción, la formación de imágenes en lentes y espejos, el efecto Doppler y la descomposición de la luz, reconociendo la dualidad onda partícula de la luz y sus aplicaciones en la transmisión de energía e información en los equipos de uso diario. Currículo de los niveles de educación obligatoria (2016).

Criterios de evaluación de matemáticas

- CE.M.5.1. Emplea conceptos básicos de las propiedades algebraicas de los números reales para optimizar procesos, realizar simplificaciones y resolver ejercicios de ecuaciones e inecuaciones, aplicados en contextos reales e hipotéticos.
- CE.M.5.2. Emplea sistemas de ecuaciones 3x3 aplicando diferentes métodos, incluida la eliminación gaussiana; opera con matrices cuadradas y de orden mxn.
- CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- CE.M.5.5. Aplica el álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral, interpreta las derivadas de forma geométrica y física, y resuelve ejercicios de áreas y problemas de optimización.
- CE.M.5.9. Emplea la estadística descriptiva para resumir, organizar, graficar e interpretar datos agrupados y no agrupados.
- CE.M.5.11. Efectúa procedimientos estadísticos para realizar inferencias, analizar la distribución binomial y calcular probabilidades, en diferentes contextos y con ayuda de las TIC. Currículo de los niveles de educación obligatoria (2017).

Estimado estudiante

Una vez que seleccionó los indicadores de evaluación le invito a cumplir con las siguientes actividades

Actividades de aprendizaje recomendadas

Actividad 1. Lea el Instructivo para planificaciones curriculares para el sistema nacional de educación

En el instructivo encontrará los elementos de la planificación microcurricular como los criterios de evaluación, destrezas con criterio de desempeño, estrategias metodológicas, recursos, indicadores de evaluación de la unidad, técnicas e instrumentos de evaluación y las adaptaciones curriculares, para ello debe revisar y utilizar el Anexo Nº 3. Ejemplo de formato de planificación microcurricular de unidad didáctica que se encuentra en las páginas 28-29.

Actividad 2. Revise Currículo de los niveles de educación obligatoria (2017)

En este documento encuentra la información necesaria sobre los elementos del currículo nacional, principalmente sobre el bachillerato general unificado, por ello le invito a leer la matriz de criterios de evaluación de física para el nivel de Bachillerato General Unificado páginas 1031-1062, así como también, la matriz de criterios de evaluación de matemáticas para el nivel de Bachillerato General Unificado páginas 1267-1283.

Comuníquese con su docente en el momento que demande aclarar dudas e inquietudes y participe de las tutorías a través del zoom.

Semana 10

Estimado estudiante

En la presente semana elabore la planificación microcurricular para el aprendizaje y enseñanza de la física, para ello le invito a desarrollar el taller 10.

Unidad 9. Planificación microcurricular para el aprendizaje y enseñanza de la física

Las aplicaciones de la Física en la vida cotidiana son numerosas de las cuales podemos citar equipos médicos, como los rayos X o las operaciones con láser, está presente en los objetos más cotidianos como los teléfonos, televisores y casi todos los aparatos electrónicos, aviones, auto, edificios. La Física tiene muchos campos de estudio como astrofísica, biofísica, física molecular, electrónica, física de partículas, la relatividad, entre otros.

En este contexto el aprendizaje y enseñanza de la física requiere de un proceso de planificación microcurricular como un desafío y herramienta para innovar las prácticas educativas, definiendo un plan que involucre objetivos, actividades, estrategias metodológicas, utilización de la tecnología, recursos y evaluación basados en el contenido específico de la física.

Propósito

Elaborar la planificación microcurricular para el aprendizaje y enseñanza de la física en el bachillerato con base en el criterio de evaluación seleccionado, identificando los contenidos, destrezas con criterio de desempeño, estrategias metodológicas, recursos, indicadores de evaluación, técnicas e instrumentos de evaluación y las adaptaciones curriculares.

Estimado/a estudiante, le invito a cumplir con las siguientes actividades

Actividades de aprendizaje recomendadas

Actividad 1. Elabore la planificación microcurricular sobre la base del criterio de evaluación seleccionado, considerando los pasos del método científico: observación del problema, formulación de hipótesis, experimentación y conclusiones.

Actividad 2. Elabore material de apoyo utilizando Genially, Kahoot, Power Point, Nearpod, etc.

Actividad 3. Desarrolle experimentaciones utilizando material casero y/o, simuladores que promuevan la interactividad de los estudiantes.

Actividad 4. Utilice herramientas tecnológicas como GeoGebra, Desmos, entre otras que faciliten el aprendizaje autónomo.

Actividad 5. Prepare su exposición de la planificación micro curricular para el examen complexivo oral con una duración máxima de 25 minutos.

Participe de las tutorías a través del zoom y por la bandeja de entrada comuníquese con su docente en el momento que demande aclarar dudas e inquietudes.

Semana 11

Estimado estudiante:

En la presente semana se continúa desarrollando las actividades previas a la presentación del examen complexivo oral, elaborando la primera planificación micro curricular para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para ello le invito a desarrollar el taller 11.

Unidad 10. Planificación micro curricular para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas

Por mucho que se diga que las matemáticas ayudan a desarrollar un razonamiento lógico y un pensamiento crítico y que nos preparan para resolver los problemas que encontremos a lo largo de la vida, se sigue sin ver claro. Pues resulta que las matemáticas están más presentes de lo que se cree, en nuestra vida cotidiana. Quizás no sean visibles de una manera obvia, pero las utilizamos sin darnos cuenta en muchas actividades del día a día.

En este contexto el aprendizaje y enseñanza de la matemática requiere de un proceso de planificación micro curricular como un desafío e instrumento para innovar las prácticas educativas, definiendo un plan que involucre objetivos, actividades, estrategias metodológicas, recursos y evaluación basados en el contenido específico de la matemática.

Propósito

Elaborar la planificación micro curricular para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en el bachillerato, en relación con el primer criterio de evaluación seleccionado, identificando las destrezas con criterio de desempeño, estrategias metodológicas, recursos, indicadores de evaluación de la unidad, técnicas e instrumentos de evaluación y las adaptaciones curriculares.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Actividad 1. Elabore la planificación micro curricular con base en el criterio de evaluación seleccionado y considerando los cuatro pasos del ciclo del aprendizaje: experiencia concreta, observación reflexiva, conceptualización abstracta, experimentación activa.

Actividad 2. Plantee estrategias metodológicas que involucren el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, Desmos, symbolab. Etc.

Actividad 3. Construya material concreto y/o utilice simuladores que promuevan la interactividad de los estudiantes.

Actividad 4. Elabore material de apoyo utilizando Genially, Kahoot, Power Point, nearpod o el que sea de su preferencia.

Actividad 5. Prepare su exposición de la planificación microcurricular para el examen complexivo oral con una duración máxima de 25 minutos.

Participe de las tutorías a través del zoom y comuníquese con su docente en el momento que requiera aclarar dudas e inquietudes.

Semana 12

En la presente semana elabore la segunda planificación microcurricular para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, por ello le invito a cumplir con las:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Actividad 1. Elabore la planificación microcurricular en relación con el segundo criterio de evaluación seleccionado y considerando los cuatro pasos del ciclo del aprendizaje: experiencia concreta, observación reflexiva, conceptualización abstracta, experimentación activa.

Actividad 2. Proponga estrategias metodológicas que impliquen el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, Desmos, Symbolab, etc.

Actividad 3. Confeccione material concreto y /o utilice simuladores que promuevan la interactividad con los estudiantes.

Actividad 4. Elabore material de apoyo para su exposición oral utilizando Genially, Kahoot, Power Point, Nearpod o el que sea de su preferencia.

Actividad 5. Prepare su exposición de la planificación microcurricular para el examen complexivo oral con una duración máxima de 25 minutos.

> Comuníquese con su docente por la bandeja de entrada en el momento que requiera información, aclarar dudas e inquietudes y participe de las tutorías a través del zoom.

Semana 13

Estimado estudiante

En la presente semana prepare su exposición para el examen complexivo oral, para ello le invito a que desarrolle las siguientes:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Actividad 1.Organice su presentación considerando las planificaciones microcurriculares.

Actividad 2. Revise la secuencia lógica de sus planificaciones microcurriculares.

Actividad 3. Verifique que el material de apoyo esté listo para su exposición.

Actividad 4. Practique su exposición controlando los tiempos.

> Participe de las tutorías a través del zoom y comuníquese con su docente en el momento que requiera aclarar dudas e inquietudes por la bandeja de entrada.

Semana 14

Estimado estudiante

En la presente semana participe del examen complexivo oral, para ello, le invito a cumplir con las siguientes:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Actividad 1. Revise los anuncios y comunicados que la universidad le proporcionará sobre el día y hora para el examen.

Actividad 2. Lea la normativa sobre el examen complexivo oral.

Actividad 3. Considere que la nota mínima de calificación entre el examen complexivo oral y escrito es 7/10.

Actividad 4. Comuníquese con su docente o directivos de la Universidad en caso de dudas o dificultades para presentarse al examen complexivo oral.

Actividad 5. Mantenga la serenidad al momento de exponer su examen.

¡Éxitos!

Semana 15 y 16

Estimado estudiante

En las dos semanas siguientes prepare su participación en el examen complexivo escrito, para ello, desarrolle las siguientes:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Actividad 1. Revise las actividades recomendadas y calificadas del segundo bimestre del prácticum 4.1 sobre física y del primer bimestre del prácticum 4.2 sobre matemáticas.

Actividad 2. Revise los anuncios y comunicados que la universidad le proporcionará sobre el día y hora para el examen.

Actividad 3. Lea la normativa sobre el examen complexivo escrito.

Actividad 4. Comuníquese con su docente o directivos de la Universidad en caso de dudas o dificultades para presentarse al examen complexivo escrito.

Actividad 5. Mantenga la serenidad al momento del examen escrito.

> Comuníquese con su docente por la bandeja de entrada en el momento que requiera información, aclarar dudas e inquietudes.

Semana 17

Estimado estudiante

En la presente semana participe del examen complexivo escrito, para ello, le invito a cumplir con las siguientes:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Actividad 1. Revise los anuncios y comunicados que la universidad le proporcionará sobre el día y hora para el examen.

Actividad 2. Lea la normativa sobre el examen complexivo escrito.

Actividad 3. Considere que la nota mínima de calificación entre el examen complexivo oral y escrito es 7/10.

Actividad 4. Comuníquese con su docente o directivos de la Universidad en caso de dudas o dificultades para presentarse al examen complexivo escrito.

Actividad 5. Mantenga la serenidad al momento de su examen.

¡Éxitos!

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b	Se sustituyen los valores en la ecuación de la circunferencia, se realizan operaciones y determina el valor.
2	c	Se sustituyen los valores en la ecuación de la parábola, se realizan operaciones y determina el valor.
3	d	Se sustituyen los valores en la ecuación de la elipse, se realizan operaciones y determina el valor.
4	a	Se determina la ecuación total del volumen sumando la del cilindro más el cono y se sustituyen los valores y se despeja r.
5	a	Se sustituyen los valores en la ecuación del interés compuesto, se realizan operaciones y determina el valor.
6	a	Se sustituyen los valores en el modelo matemático dado, se realizan operaciones y determina el valor.
7	b	Se sustituyen los valores en el modelo matemático dado, se realizan operaciones y determina el valor.
8	a	Se sustituyen la Ley del enfriamiento de Newton se encuentra la diferencia de temperatura, se sustituyen los valores y se encuentra el modelo.
9	a	Se calcula el PH con cada valor dado y se escribe el intervalo de variación.
10	a	Se sustituyen los valores en el modelo matemático dado, se realizan operaciones y determina el valor.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	Se sustituyen los valores en la ecuación de la circunferencia, se realizan operaciones y determina la ecuación.
2	b	Se sustituyen los valores en la ecuación de la parábola, se realizan operaciones y determina el valor.
3	c	Se sustituyen los valores en la ecuación de la elipse, se realizan operaciones y determina la ecuación.
4	a	Se aplica la prueba t con observaciones apareadas, se plantea la hipótesis nula y alterna se determina los valores de t crítico y calculado, se identifica si el valor calculado se ubica en la zona de aceptación y se acepta la hipótesis nula.
5	a	Se aplica la prueba chi cuadrado, se plantea la hipótesis nula y alterna se determina los valores de chi cuadrado crítico y calculado, se identifica si el valor de chi calculado se ubica en la zona de aceptación y se acepta la hipótesis nula.
6	a	Se deriva la función de costo y se encuentra la función de costo marginal.
7	a	Se deriva la función del peso y se encuentra la razón de cambio.
8	a	Se aplica la integral definida y se encuentra el área bajo la curva.
9	a	El sistema de ecuaciones lineales se resuelve aplicando los métodos revisados en álgebra lineal.
10	a	El sistema de ecuaciones lineales se resuelve aplicando los métodos revisados en álgebra lineal.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

5. Glosario

Desigualdad. Condición o circunstancia de no tener una misma naturaleza, cantidad, calidad, valor o forma que otro, o de diferenciarse de él en uno o más aspectos.

Ecuación. Es un enunciado que dos expresiones matemáticas sean iguales.

Fórmula. Es una secuencia o cadena de caracteres cuyos símbolos pertenecen a un lenguaje formal, de tal manera que la expresión cumple ciertas reglas de buena formación y que admite una interpretación consistente en alguna área de la matemática y en otros sistemas formales.

Identidad trigonométrica. Es una igualdad que vincula dos funciones trigonométricas y es válida en el dominio común o descartando los puntos que anulan alguna función en caso de ser divisor.

Inferencia. Es la acción y efecto de inferir (deducir algo, sacar una consecuencia de otra cosa, conducir a un resultado).

Intervalo. Es un conjunto de números reales que se encuentra comprendido entre dos extremos, a y b.

Secciones cónicas. Son todas las curvas resultantes de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano, cuando ese plano no pasa por el vértice del cono.

Modelo matemático. Es un modelo que utiliza fórmulas matemáticas para representar la relación entre distintas variables, parámetros y restricciones.

Muestreo. Podremos estudiar el comportamiento y las opiniones de toda una población analizando únicamente una parte de esta, teniendo en cuenta que siempre existirá un margen de error a la hora de realizar dichos cálculos.

Verificar. Es comprobar o ratificar que es verdadera una cosa.

Vértice. Punto en el que coinciden los dos lados de un ángulo o de un polígono.

6. Referencias bibliográficas

AFS Intercultural Programs. (2014). *Ciclo de Aprendizaje Experiencial de Kolb*. Intercultural. https://d22dvihj4pfop3.cloudfront.net/wp-content/uploads/sites/27/2019/02/13111417/Kolb_sExperientialLearningCycleforAFS_Friends_ESP.pdf

Armijos, J. (2019). Guía didáctica. Sistemas de conocimiento de ecuaciones y desigualdades y su didáctica. Universidad Técnica Particular de Loja. Ediloja.

Armijos, J. (2019). Guía didáctica. Sistemas de conocimiento de funciones polinomiales y racionales y su didáctica. Universidad Técnica Particular de Loja. Ediloja.

Armijos, J. (2020). Guía didáctica. Sistemas de conocimiento de geometría analítica y su didáctica. Universidad Técnica Particular de Loja. Ediloja.

Carlos José. (2018). ¿Cómo prepararnos para el estudio del cálculo? // Matemáticas previas al cálculo. Steemit. https://steemit.com/stem-espanol/@carlos84/como-prepararnos-para-el-estudio-del-calculo-matematicas-previas-al-calculo

Carpinteyro, E. (2018). Geometría analítica. Segunda edición. Grupo Editorial Patria, S.A. de C.V. México.

El Traductor de Ingeniería. (2019, 3 noviembre). OPTIMIZACIÓN: Fundamentos que Debes Saber | El Traductor [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=rvW0ZrRDyd0

Fernández, J. y Puchaicela P. (2018). Guía didáctica Algebra lineal. Loja: Editorial Universidad Técnica Particular de Loja.

Granda, S. (2021). Sistemas de Conocimiento de Estadística y su Didáctica.

Haeussler, Ernest, Paul, Richard y Wood, Richard. (2014). Matemáticas para Administración y Economía. 13 era. Edición. México. 888 p.

Martínez Bencardino, C. (2018). Estadística y muestreo (13a. ed.). Bogotá, Ecoe Ediciones. Recuperado de https://elibro.net/es/ereader/bibliotecautpl/131880?page=300.

Matemáticas profe Alex. (2021, 3 abril). Área entre curvas | Ejemplo 1 [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=hZ1n4-Cpn74

Ministerio de Educación. (2017). Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria. Recuperado de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/03/Curriculo1.pdf

Ministerio de Educación. (2017b). Instructivo para planificaciones curriculares para el Sistema Nacional de Educación.

OXFORD. (2019). Mathematics: analysis and approaches. Oxford University Press.

Profe Abejita. (2020, 16 septiembre). Conceptos básicos de estadística inferencial [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=6dTlu7DpiOs

Profe Cervantes. (2020, 11 marzo). MODELADO DE FUNCIONES [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=u5imbgZXeWs

Programa Matemática DuocUC. (2020, 5 octubre). Modelamiento de un problema usando matrices [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=G-f-VBTi-4A

Sanchez, J. (2020). Guía didáctica. Sistemas de conocimiento de funciones exponenciales y logaritmicas y su didáctica. Universidad Técnica Particular de Loja. Ediloja.

Stewart, J. Redlin, L. Watson, S. (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Séptima edición. Cengage Learning. México. D.F.

UNALMedellin. (2018, 21 febrero). 9.3 Ejemplo: Modelamiento con funciones trigonométricas inversas [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=OBzvW4eZtws

Universidad Continental - Modalidad a Distancia. (2017, 9 agosto). Modelado de funciones exponenciales y logarítmicas [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=APPupFIMlEc

UTEC Contenidos. (2016, 12 enero). Modelado con ecuaciones - Parte I [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=g06dkRTqvMw

Willington Profe. (2014, 14 julio). Secciones cónicas. Hipérbola, Parábola, Elipse, Circunferencia. [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=cUN7Io8OGxs

Yépez, César. (2017). Cálculo. UTPL.