UTPL
La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Itinerario 1- Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana. Integral Definida y Técnicas de Integración

Guía didáctica

UTPL

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Departamento de Ciencias de la Educación

Itinerario 1- Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana. Integral Definida y Técnicas de Integración

Guía didáctica

Carrera	*PAO Nivel*
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)*	VIII

Autor:

Quishpe Solano Rolando

EDUC_1128

Universidad Técnica Particular de Loja

Itinerario 1- Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana.
Integral Definida y Técnicas de Integración
Guía didáctica
Quishpe Solano Rolando

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-423-1

28 de marzo, 2022

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Fomentar procesos comunicacionales dialógicos en la gestión institucional y de vinculación con la comunidad orientados al desarrollo integral de la persona desde su trascendencia y el ejercicio de un liderazgo con principios de honestidad, responsabilidad, creatividad, trabajo en equipo y humildad intelectual.

- Desarrollar sistemas de conocimientos en matemática especialmente Números y Funciones, Álgebra y Geometría, Estadística, Probabilidad, Matemática discreta, Geometría Analítica y Cálculo Integral apoyado en la investigación y reflexión crítica sobre las experiencias en el aula, administrando procesos de aprendizaje, fomentando cambios y provocando innovaciones para el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y creativo de los educandos.

- Aplicar sistemas de conocimientos en física fundamentalmente Mecánica, Trabajo, Potencia, Energía, Electricidad, Magnetismo, Ondas, Acústica, Óptica y Físico-Química diseñando y construyendo escenarios, contextos y ambientes de aprendizaje, con metodologías orientadas al desarrollo de operaciones mentales e instrumentales en el sistema de conocimientos para el bachillerato desde la formación humanística.
- Utilizar herramientas tecnológicas educativas para la interacción y la construcción del conocimiento como docente en pedagogía de las matemáticas y la física.
- Evaluar recursos y estrategias educativas en experiencias de aprendizaje en el bachillerato, el desarrollo de habilidades del pensamiento crítico, reflexivo y motivacional como base de la construcción y reconstrucción de las conexiones mentales limitando integrar fe, razón y vida.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

Aplicación de los conocimientos matemáticos en la vida cotidiana. Integral definida y técnicas de integración, es una asignatura de 144 horas que oferta la carrera de Pedagogía de las Matemáticas y la Física en la Modalidad Abierta y a Distancia en la Universidad Técnica Particular de Loja.

El estudio de la Matemática aporta gran valor en los diferentes ámbitos de la ciencia, al ser un lenguaje universal utiliza la simbología para representar y modelar un evento de la realidad; además que potencia el cálculo mental, el análisis y el razonamiento, competencias mínimas que se deben desarrollar con el fin de conseguir el desarrollo correcto de los problemas y principalmente a mejorar la toma de decisiones.

La poca utilización de simuladores matemáticos ocasiona una barrera para experimentar de forma intuitiva la manipulación y construcción de los objetos matemáticos, lo que ocasiona que el aprendizaje no sea significativo.

La asignatura contribuye a enlazar el algoritmo científico con las aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento como en la ingeniería, Economía, Biología, en la vida diaria, beneficiando el conocimiento científico, partiendo de la manipulación de materiales concretos conseguido con la utilización de simuladores matemáticos y reafianzando el conocimiento a través de verbalizar los procedimientos matemáticos.

2. Metodología de aprendizaje

En la asignatura se trabaja de manera colaborativa y cooperativa entre los diferentes actores el proceso enseñanza - aprendizaje con el objetivo claro que se convierta en una experiencia de aprendizaje permanente, se diseñan actividades y estrategias fundamentadas en una metodología activa, con este antecedente se toma como principal eje el método Enseñanza Libre de Improvisación (ELI) diseñado por el profesor Ramón Ferreiro en su libro "Cómo ser mejor maestro".

Para Ferreiro, son siete las funciones didácticas imprescindibles que los alumnos necesitan para construir su conocimiento y colaboren en la construcción del conocimiento de sus compañeros y se resumen:

1. Momento (A) Creación de ambientes favorables para aprender y de activación
2. Momento (PI) Procesamiento de la información
3. Momento (R) La recapitulación de lo que se ha aprendido
4. Momento (E) La evaluación de los aprendizajes
5. Momento (I) La interdependencia social positiva
6. Momento (M). La reflexión sobre procesos y resultados de la actividad de aprendizaje
7. Momento (O) Orientación de la atención

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Utiliza leyes y teoremas fundamentales de funciones y del cálculo integral para resolver problemas de aplicación.

El éxito en el estudio en los cursos universitarios requiere algo más que dominar el contenido, necesitamos desarrollar habilidades de estudio fuertes y hábitos de estudio disciplinados, tomar buenos apuntes, escuchar, construir equipos y las habilidades de la administración del tiempo.

Es de suma importancia dominar el algoritmo matemático, empezando por las definiciones, teoremas, propiedades reflejadas en el desarrollo de los ejercicios ilustrativos en el texto básico y guía didáctica, para luego resolver de manera autónoma la mayor cantidad de ejercicios que le brinden la experticia necesaria para abordar problemas de aplicación a la vida diaria.

Al iniciar nuestro estudio es necesario recordar los conceptos ya abordados en ciclos anteriores desde fundamentos matemáticos, álgebra lineal, cálculo, etc., por tanto, estamos preparados para estudiar el presente ciclo.

¡Bienvenido, ánimo y adelante!

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 1

La derivada tuvo su origen en un problema de tipo geométrico. El problema de encontrar la tangente en un punto a una curva. Más tarde se encontró que era un método poderoso para el cálculo de velocidades, aceleraciones y a manera general el estudio de todos aquellos problemas que involucran el estudio de magnitudes que varían de una manera continua (Lara & Arroba, 2007).

Y la integral de una función real de variable real tuvo su origen en el problema de encontrar el área bajo una curva.

Las funciones trascendentes son muy importantes porque nos permiten modelar situaciones de la vida diaria entre ellas constan:

- Las funciones exponenciales
- Las funciones logarítmicas
- Las funciones trigonométricas

Estimado estudiante, le invito a continuar investigando más sobre este tema tan apasionante y a cuestionarse constantemente en cada tema abordado. ¡Adelante, empecemos con el estudio!

1.1. Función exponencial

El término **vida mitad** o **semivida** ha resultado ser un parámetro fundamental para el estudio de magnitudes que van disminuyendo de acuerdo a lo que se conoce como eliminaciones **de primer orden**. Esto es, cantidades que se eliminan en una proporción constante por unidad de tiempo.

Tal es el caso de los **isótopos radiactivos**, donde la vida mitad representa el periodo de tiempo necesario para que el material radiactivo se reduzca a la mitad. Esta información permite referirse a la velocidad con la que ocurren las desintegraciones nucleares, además, es una forma de describir la radiactividad de un elemento.

También, **en Medicina y Farmacología**, la vida mitad de un medicamento en la sangre es el tiempo que tarda en eliminarse el 50 % de la concentración plasmática alcanzada por una dosis del mismo, esto es, el lapso de tiempo necesario para que la cantidad del agente presente en el cuerpo o la sangre se reduzca a la mitad mediante diversos procesos de eliminación. Este es un parámetro útil para la determinación de intervalos de aplicación del fármaco.

La vida mitad es un parámetro que puede ser asociado al comportamiento de estas magnitudes porque es un dato que no depende de la cantidad inicial de la magnitud bajo estudio, es decir tarda lo mismo la desintegración de la mitad de átomos de carbono 14 de una muestra de 1 gramo que de una muestra de 100 gramos... ¡5730 años!

Nota: *El término vida mitad en ocasiones es confundido con el término vida media.*

Las funciones exponenciales son aquellas que se pueden escribir en la forma general: $y = a^t$

donde *a* representa un valor constante que se determina por el contexto particular de la situación de donde surge este modelo y *t* representa el valor variable. Un ejemplo particular es $f(x) = 2^x$, que puede modelar alguna situación de la vida real como por ejemplo el comportamiento de crecimiento de bacterias como se puede observar en la siguiente tabla f(x) se refiere a la cantidad de bacterias (en onzas) al transcurrir el tiempo x (medido en días).

Tabla 1.
$f(x) = 2^x$

x (días)	f(x) (onzas)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Otra forma de escribir en forma general una función exponencial es:

$$y = e^{kt}$$

Donde *k* es una constante, por lo tanto, podemos escribir como:

$$y = (e^k)^t$$

Y tomar la constante *a* como $a = e^k$, y así obtener:

$$y = (e^k)^t = a^t$$

La función exponencial natural es la función inversa de la función logaritmo natural.

$$y = e^x \text{ sí solo si } x = \ln y$$

Derivada de una función exponencial

La derivada de la función exponencial es:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Es decir, la derivada de la función exponencial con base e, es igual a la función misma.

Para demostrar la validez de esta regla derivamos la función por la definición: cómo se puede ver en el recurso.

Derivada de una función exponencial

Ejemplo 1: Determine la derivada de $f(x) = 2x^2e^x$

Solución:

$f'(x) = 2\frac{d}{dx}(x^2e^x)$ Aplicamos la regla del factor constante para derivar.

$f'(x) = 2[x^2\frac{d}{dx}e^x + e^x\frac{d}{dx}x^2]$ Aplicamos regla del producto

$$f'(x) = 2[x^2e^x + e^x(2x)]$$
$$f'(x) = 2[xe^x(x+2)]$$

Regla de la cadena para funciones exponenciales.- La regla de la cadena nos permite derivar funciones compuestas de la forma *g(x)* = $e^{f(x)}$.

Si *f(x)* es una función derivable, entonces:

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f(x)} f'(x)$$

Una estrategia para recordar esta regla de derivación, observe que esta regla tiene la forma:

$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)}$. derivada del exponente.

Ejemplo 2: Encuentre la derivada de $y = \frac{1}{2} x e^{-3x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}\left(x e^{-3x}\right)$ Aplicamos la regla del factor constante

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[x \frac{d}{dx}(e^{-3x}) + e^{-3x} \frac{d}{dx}(x)\right]$ Aplicamos regla del producto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[x(e^{-3x}) \cdot (-3) + e^{-3x}(1)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[-3x(e^{-3x}) + e^{-3x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[e^{-3x}(1 - 3x)\right]$$

Reglas de derivación e integración de la función exponencial

$$D_x a^x = a^x \ln a$$

$$\int a^x dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + C, a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Demostración:

Para demostrar la derivada de la función exponencial se parte de la siguiente ecuación:

$f(x) = a^x = e^{\ln(ax)}$, aplicando leyes de logaritmo se escribe

$= e^{x\ln(a)}$ ordenando

$= e^{(\ln a)x}$ por tanto,

$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \frac{d}{dx}\left[e^{(\ln a)x}\right]$, para derivar utilizar la regla $\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$\frac{d}{dx}\left[e^{(\ln a)x}\right] = e^{(\ln a)x} \cdot \frac{d}{dx}[(\ln a)x]$, aplicamos la regla para derivar un factor constante.

$$\frac{d}{dx}\left[e^{(\ln a)x}\right] = e^{(\ln a)x} \cdot (\ln a)\frac{d}{dx}[x]$$

$\frac{d}{dx}\left[e^{(\ln a)x}\right] = e^{(\ln a)x} \cdot (\ln a)$, cambiar $e^{(\ln a)x} = a^x$

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = a^x \cdot (\ln a)$$

Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(a^{u(x)}\right) = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$$

Ejemplo 3: Encuentre $D_x\left(2^{\sqrt{x}}\right)$

Solución:

Aplicamos la regla de la cadena

$D_x\left(2^{\sqrt{x}}\right) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln(2) \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$, reescribiendo la raíz en términos de la potencia

$D_x\left(2^{\sqrt{x}}\right) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln(2) \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$, aplicamos la regla para derivar una potencia

$D_x\left(2^{\sqrt{x}}\right)=2^{\sqrt{x}}\cdot\ln(2)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, reescribiendo en términos de exponentes positivos

$D_x\left(2^{\sqrt{x}}\right)=2^{\sqrt{x}}\cdot\ln(2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$, acomodando la respuesta

$$D_x\left(2^{\sqrt{x}}\right)=\frac{2^{\sqrt{x}}\ln(2)}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 4: Encuentre $\int 4^x\,dx$

Solución:

Aplicamos la regla para integrar una función exponencial

$$\int 4^x\,dx=\left(\frac{1}{\ln 4}\right)4^x+C$$

Aplicación:

Algunos fenómenos que encontramos en la naturaleza se pueden modelar mediante funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y combinaciones de ellas llamadas también funciones trascendentes.

Ya se estudió en contenidos anteriores a esta asignatura las aplicaciones de la función exponencial:

$$Q(t)=Q_0e^{kt}$$

Donde,

Q_0 y *k* son constantes positivas si $Q(t)$ crece de acuerdo a esta ley entonces experimenta un crecimiento exponencial. A continuación se demuestra que si una cantidad crece de manera exponencial, su factor de crecimiento es proporcional a su tamaño.

La razón de cambio instantáneo de Q respecto a *t* es:

$Q'(t)=Q_0e^{kt}\cdot(kt)'$,se aplica regla de la cadena para derivar

$$Q'(t)=Q_0e^{kt}\cdot(k)$$

$Q'(t) = kQ_0e^{kt}$, ordenamos

$Q'(t) = kQ(t)$, se utiliza la equivalencia $Q(t) = Q_0e^{kt}$

Ejemplo 5: Un activo industrial se amortiza a una tasa determinada de modo que su valor en libros *t* años a partir de ahora será de: *V(t)* = $50000e^{-0,4t}$ dólares. ¿Cuál es la razón de cambio del valor en libros del activo después de 3 años a partir de ahora?

Solución: Calculamos la derivada de la función

$V'(t) = 50000(e^{-0,4t})'$

$V'(t) = 50000(-0,4)e^{-04.t}$

$V'(t) = -20000e^{-0,4t}$

Es decir, que dentro de 3 años a partir de ahora, el valor del activo en libros cambiará a razón de:

$V'(t) = -20000e^{-0,4t}$

$V'(3) \approx -6023,88$

1.2. Funciones logarítmicas

Si u es una función derivable de x se tiene:

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u}\log_a e \cdot \frac{du}{dx}, (a > 0, a \neq 1)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Ejemplo 5: determine la función derivada si *f(x)* = ln(x² + 1)

Solución:

$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$, aplicamos la regla para derivar una función logarítmica

$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot(2x)$, derivamos la función compuesta

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, ordenamos multiplicando numeradores y denominadores entre sí.

Ejemplo 6: Determine D_x (log(x² -1))

Solución:

$$D_x\left(\log\left(x^2+1\right)\right)=\frac{1}{x^2+1}\cdot\log e\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$$

$$D_x\left(\log\left(x^2+1\right)\right)=\frac{1}{x^2+1}\cdot\log e\cdot(2x)$$

$D_x\left(\log\left(x^2+1\right)\right)=\frac{2x\log e}{x^2+1}$ o $=\frac{2x}{(x^2+1)\ln 10}$, recuerda que $\log e=\frac{\ln e}{\ln 10}$

Es conveniente que estudie el video Derivada de funciones exponenciales, en donde se explica de forma didáctica cómo encontrar la derivada de una función exponencial.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, luego de revisar los temas en la primera semana respecto a la derivación e integración de funciones trascendentes, (funciones exponenciales y logarítmicas), con el objetivo de reforzar los aprendizajes teóricos conviene experimentarlos con el simulador de GeoGebra, desarrollando y resolviendo lo siguiente:

- Derive la función *y* = 5*2^x - 5x+4, utilice GeoGebra para realizar la gráfica de la función y su derivada, compruebe el resultado analítico con el de su cuaderno.

- Algunos muebles antiguos aumentaron de precio rápidamente en las décadas de 1970 y 1980. Por ejemplo, el valor de una mecedora se puede calcular muy bien con $V= 75(1,35)^t$, donde V es en dólares y t es el número de años desde 1975. Encuentre la razón, en dólares, a la que aumenta el precio.

- La producción mundial de energía solar, en megavatios, puede modelarse por $f(x) = 50(1,19)^t$, donde t son los años desde 1990. Encuentre f(0), f´(0), f(10) y f´(10). Indique las unidades e interprete sus respuestas en términos de energía solar.

- Experimente con GeoGebra, encuentre la integral de $\int \frac{-1}{x(\ln x)^2}dx$

Excelente trabajo, en esta primera semana hemos experimentado con el recurso GeoGebra y revisar la derivada e integral de funciones exponenciales. Vamos a continuar con nuestro estudio de las funciones trascendentes.

Semana 2

1.3. Funciones trigonométricas

Se recomienda que consulte el uso de identidades trigonométricas y considere la posibilidad de simplificar la expresión antes de empezar a derivar a fin de evitar pasos innecesarios y operaciones muy complejas. De la misma manera, se recomienda revisar las identidades al momento de reducir términos con el objetivo de presentar términos más sencillos.

Continuemos con el aprendizaje mediante la revisión de las Derivadas de las funciones trigonométricas:

Derivadas de funciones trigonométricas

Para integrar funciones trigonométricas vamos a empezar escribiendo las reglas que se obtienen al aplicar la regla de la cadena.

Tabla 2.

Fórmulas de integración

Fórmulas de integración de funciones trigonométricas.	
$\int sen(u)du = -\cos(u)+C$	$\int \csc^2(u)du = -\cot(u)+C$
$\int \cos(u)du = sen(u)+C$	$\int \csc(u)\cot(u)du = -\csc(u)+C$
$\int \tan(u)du = -\ln\|\cos x\|+C$	$\int \sec(u)\tan(u)du = \sec(u)+C$
$\int \cot(u)du = \ln\|sen(u)\|+C$	$\int \sec^2(u)du = \tan(u)+C$
$\int \sec(u)du = \ln\|\sec(u)+\tan(u)\|+C$	$\int s\,cs(u)du = \ln\|\csc(u)-\cot(u)\|+C$

Ejemplo 7: Evaluar $\int \sec^2(1-4x)dx$

Solución:

Se puede reconocer el patrón en la tabla 2, por lo tanto, aplicamos sustitución:

$$u = 1-4x$$

$$du = -4dx$$ Despejamos dx

$$dx = \frac{du}{-4}$$

Entonces realizando el cambio de variable tenemos:

$$\int \sec^2(1-4x)dx = \int \sec^2(u)\cdot\frac{du}{-4}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \sec^2(u)du$$, aplicando la fórmula de la tabla 2

$$= -\frac{1}{4}\tan(u)+C$$, devolviendo los valores de u

$$= -\frac{1}{4}\tan(1-4x)+C$$, respuesta

Integrales de potencias de funciones trigonométricas

En este apartado estudiaremos como integrar potencias superiores de sen x y cos x, determinados productos de potencias de sen x y cos x, y productos de potencias de sec x y tan x. Las técnicas utilizadas dependen de las identidades trigonométricas.

Integrales de la forma $\int sen^m x \cos^n x dx$

Se distinguen dos casos.

Caso 1. m ó n es un número entero impar

Debemos garantizar que m sea un número entero positivo impar, para ello empleamos *m* = 2*k* + *1*. Se tiene:

- Se empieza por separar el factor sen x de $sen^{2k+1}(x)$, es decir, se escribe $sen^{2k+1}(x) = sen^{2k}(x) sen(x)$, donde se puede notar que *2k* es par.

- Se usa la identidad pitagórica básica $sen^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, para volver a escribir

$$sen^2(x) = (sen^2 x)^k = (1 - \cos^2(x))^k$$

- Se desarrolla el binomio $(1 - \cos^2(x))^k$

Por lo tanto, es posible expresar el integrando como una suma de potencias de cos x multiplicadas por sen x. la integral original puede expresarse como una suma de integrales, cada una se puede identificar como:

$$\int \cos^r(x) sen(x) dx = -\int (\cos(x))^r (-sen(x) dx) = -\int u^r du$$

Si *n* = 2*k* + 1 es un número entero positivo impar entonces el procedimiento es el mismo, excepto que escribimos $\cos^{2k+1}(x) = \cos^{2k}\cos(x)$, usamos $\cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$, y escribimos la integral como la suma de integrales de la forma:

$$\int sen^r(x) \cos(x) dx = \int (sen(x))^r (\cos(x) dx) = \int u^r du$$

Se puede observar que el exponente r no necesariamente debe ser un número entero.

Ejemplo 8: Resuelva $\int sen^3 dx$

Solución:

Descomponemos la potencia del seno

$$\int sen^3 dx = \int sen^2(x) sen(x) dx$$

Caso 2. m y n son ambos enteros no negativos pares.

Cuando *m* y *n* son enteros no negativos pares, evaluar la integral depende de las identidades trigonométricas:

$$sen(x) = \frac{1}{2} sen 2x, \quad sen^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Ejemplo 9: Evaluar $\int sen^2 x \cos^2 x dx$

Solución: Utilizar las identidades trigonométricas

$$\int sen^2 x \cos^2 x dx = \int sen^2 x \cdot (1 - sen^2 x) dx$$

Escribir, como

$$= \int \left(sen^2 x - sen^4 x \right) dx$$

Expandir el integrando obtienes

Integrar término a término

$$= \int sen^4 x dx + \int sen^2 x dx$$

Use la fórmula
Cuando

$$= \frac{1}{4} sen^3 x \cos x + \frac{1}{4} \int sen^2 x dx$$

$$= \frac{1}{4} sen^3 x \cos x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx$$

Escriba como

$$= \frac{1}{4} sen^3 x \cos x - \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx$$

Integre término a término

$=\frac{1}{4}sen^3x\cos x-\frac{1}{16}\int\cos(u)dx+\frac{1}{8}\int\ dx$	Para el integrando, sustituya y
$=-\frac{sen(u)}{16}+\frac{1}{4}sen^3x\cos x+\frac{1}{8}\int dx$	La integral de sen (u) es cos (u)
$=-\frac{sen(u)}{16}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}sen^3x\cos x+C$	La integral de 1 es x
$=\frac{x}{8}+\frac{1}{4}sen^3x\cos x-\frac{1}{8}senx\cos x+C$	Devolvemos el valor de u = 2x
$=\frac{1}{32}(4x-sen(4x))+C$	Respuesta

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en la segunda semana se ha estudiado la derivación e integración de funciones trigonométricas, le invito a que desarrolle los ejercicios y problemas que se proponen a continuación, y verifique sus respuestas con el simulador matemático GeoGebra:

Evalúe la derivada o la integral indefinida

- Encuentre $D_x y$, si $y=2sen(x)+3\cos(x)$
- Encuentre $D_x y$, si $y=\frac{sen(x)}{x}$
- Encuentre $D_x y$, si $y=x^2\cos(x)$
- $\int\left(\tan^2 2x\sec^2 2x\right)dx$
- $\int x^2 sen\left(x^2\right)dx$
- $\int sen4xdx$

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su dedicación y aprendizaje!

Luego de la segunda semana hemos concluido con el estudio de las derivadas e integrales de las funciones trascendentes, conceptualizando los principales conceptos, ya estamos en capacidad para desarrollar la siguiente autoevaluación.

Autoevaluación 1

Resuelva cada problema según corresponda

1. La derivada de g(x) = tan(cos(x)), es:

   a. $g'(x) = -sec^2(cos(x))\ sen(cos(x)$
   b. $g'(x) = -csc^2(cos(x))\ sen(cos(x)$
   c. $g'(x) = -sec^2(cos(x))\ sen(x)$
   d. $g'(x) = -sec^2(cos(x))$

2. Encuentre $\frac{dy}{dx}$, si $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

   a. $\frac{dy}{dx} = -e^{-\frac{x^2}{2}}x$
   b. $\frac{dy}{dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}x$
   c. $\frac{dy}{dx} = x - e^{-\frac{x^2}{2}}$
   d. $\frac{dy}{dx} = e^{-\frac{x^2}{2}} - x$

3. Encuentre la derivada $y = ln(x^2 + 1)$

   a. $y' = \frac{2x}{x^2+1}$
   b. $y' = -\frac{2x}{x^2+1}$
   c. $y' = \frac{x^2+1}{2x}$
   d. $y' = -\frac{x^2+1}{2x}$

4. Un modelo de crecimiento de cierto país está dado por $P(t)=25(1.03)^t$ millones de habitantes a partir de 1999. ¿A qué razón cambiará la población con respecto al tiempo después de *t* años?

a. $\frac{dP}{dt} = 25\ln(1,03)(1,03)^t$

b. $\frac{dP}{dt} = 30\ln(1,03)(1,03)^t$

c. $\frac{dP}{dt} = 20\ln(1,03)(1,03)^t$

d. $\frac{dP}{dt} = 35\ln(1,03)(1,03)^t$

5. Un modelo de crecimiento de un país está dado por $P(t)=30e^{0.025t}$ millones de habitantes de 1999. ¿A qué razón cambiará la población respecto al tiempo 2009?

a. 0,96 millones por año.
b. 0,85 millones por año
c. 0,95 millones por año
d. 0,90 millones por año

6. $\int \frac{6^x}{2^x}dx$, es igual a:

a. $\ln 3 + C$

b. $\left(\frac{\ln 2}{\ln 6}\right)3^x + C$

c. $\frac{3^x}{\ln 3} + C$

d. $3^x\left(\ln\frac{1}{3}\right) + C$

7. $\int 2^x \sec^2\left(e^{x\ln 2}\right)dx$, es igual a:

a. $\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\tan 2^x + C$

b. $\tan\left(e^{x\ln 2}\right)+C$

c. $\tan\left(2^x\right)+C$

d. $\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\ln\left(\sec 2^x + \tan 2^x\right)+C$

8. Encuentre el valor presente de un flujo de ingresos continuo de $ 1 000 por año durante un periodo de 20 años, suponiendo una tasa de interés de 6 % compuesta continuamente.

a. $ 11 647
b. $ 12 500
c. $ 10 000
d. $ 13 246

9. Encuentre el valor futuro de un flujo de ingresos continuo de $ 1 000 por año durante un periodo de 20 años, suponiendo una tasa de interés de 6 % compuesta continuamente.

a. $ 38 669
b. $ 30 500
c. $ 40 123
d. $ 35 669

10. Suponga que desea tener $ 50 000 al cabo de 8 años en una cuenta bancaria que genera un interés de 2% capitalizado continuamente. Si usted hace un único depósito en este momento, ¿cuánto debe depositar?

a. $ 42 607
b. $ 40 100
c. $ 41 809
d. $ 43 189

Ir al solucionario

Unidad 2. Aplicaciones de la integral

2.1. Área de una región entre dos curvas

Estimado estudiante, el área entre dos curvas es un caso especial del problema más general de encontrar el área de una región acotada.

De los problemas típicos que pueden expresarse en forma directa mediante integrales y que se complementan al problema básico de área bajo la curva, destacan:

- Área entre curvas
- Sólidos de revolución
- Longitud de curvas
- Momentos de inercia de cuerpos planos
- Aplicaciones diversas

El objetivo de esta unidad es estudiar cada una de esas aplicaciones, para ello vamos a comenzar con la más común, que por cierto es la que inspiró los conceptos básicos de la integral: el área bajo la curva.

Área entre la curva y el eje x

Determinar el área bajo la curva, o dicho de mejor manera entre la curva y un eje, es seguramente el problema que originó el desarrollo del concepto de la integral definida.

Cuando se calcula el área se debe considerar lo siguiente:

a. Las curvas delimitantes del área en realidad deben ser funciones de la variable de integración.

b. El área entre la función y el eje x debe estar delimitada entre dos rectas verticales que indican el intervalo (a,b), a esta área se llama área bajo la curva, por otra parte, si el área se delimita entre la función y el eje y, se llama área sobre la curva y debe estar delimitada por dos rectas horizontales que indican el intervalo de integración.

c. Integral y área son conceptos diferentes, y se hace necesario recordar que una integral en realidad se puede interpretar como un área con signo.

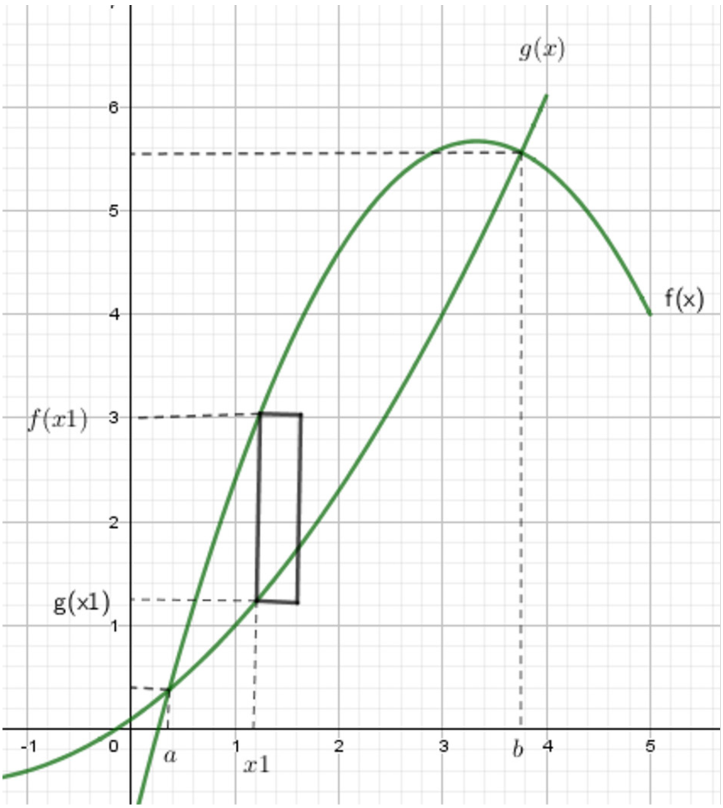
En el cálculo de área entre curvas, la superficie plana se delimita por una curva cerrada, es decir genera un área en su interior.

Si se considera las curvas *y = f(x)* y *y = g(x)* siempre que *g(x)≤f(x)* en el intervalo [a,b] como se puede observar en la figura 1. Se determina la región que muestra la figura 1. La superficie que se forma se encuentra al hacer *f(x) - g(x)* , es decir que el área cuando una curva se encuentra arriba de la otra se calcula.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Figura 1.

Área entre dos curvas



Nota: Construcción propia en GeoGebra

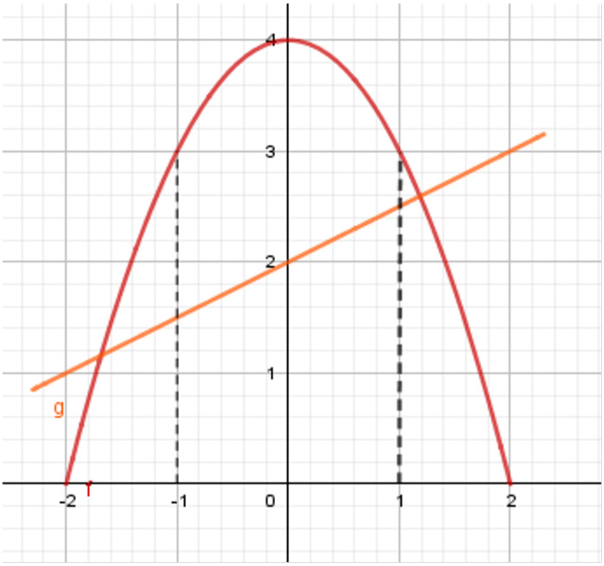
Ejemplo 10: Encuentre el área de la región comprendida entre $y = 4-x^2$, la recta $y=\frac{1}{2}x+2$ y las rectas verticales x = -1 y x = 1.

Solución:

Como primer paso se procede a realizar el bosquejo de la gráfica.

Figura 2.

Bosquejo área entre dos curvas.



Nota: construcción en GeoGebra.

Se puede distinguir que la función cuadrática se encuentra sobre la ecuación lineal, por tanto, podemos calcular el área debajo de la parábola en el intervalo [-1,1] y restar el área de la recta en el mismo intervalo.

$$A=\int_{-1}^{1}\left(4-x^2\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$$

Ahora determinamos las integrales y las restamos.

$$\int_{-1}^{1}\left(4-x^2\right)dx=4x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1}=\frac{22}{3}$$

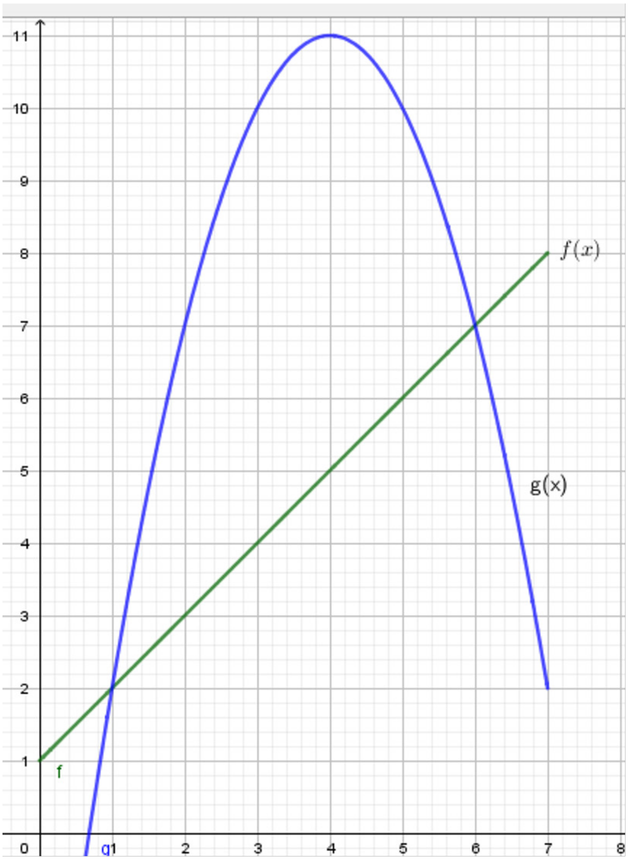
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=\frac{1}{4}x^2+2x\Big]_{-1}^{1}=4$$

$$A=\frac{22}{3}-4=\frac{10}{3}$$

Ejemplo 11: Encuentre el área de la región comprendida entre las gráficas *f(x)* = x+1 y *g(x)* = -x² +8x -5.

Solución: Bosquejamos las funciones y determinamos la región del área.

Figura 3.



Nota: construcción propia en GeoGebra

En este caso se necesita encontrar los puntos donde se intersecan las dos funciones, es decir tenemos que igualar las ecuaciones y resolver:

$x+1 = -x^2 + 8x - 5$

$x^2 + 8x + 5 + x + 1 = 0$ transponiendo términos

$x^2 - 7x + 6 = 0$, simplificando términos semejantes (x-6)(x-1) = 0, aplicamos el teorema del factor cero

x-6 = 0 x - 1 = 0
x = 6 x = 1

Estos valores en el eje horizontal reemplazamos en cualesquiera de las ecuaciones originales para obtener la coordenada vertical, por tanto, los puntos de intersección tienen coordenadas *A*(6,7) y *B*(1,2) como se muestra en la figura 3.

En este caso como g(x) se encuentra arriba de f(x) se puede calcular el área utilizando la integral definida:

$$A=\int_{1}^{6}(-x^2+8x-5)-(x+1)dx$$

$$A=\int_{-1}^{6}(-x^2+7x-6)dx$$

$$A=-\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}x^2-6x\Big]_{-1}^{6}$$

$$A=\left(-\frac{(6)^3}{3}+\frac{7}{2}(6)^2-6(6)\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{7}{2}(-1)^2-6(-1)\right)$$

$$A=-72+126-36+\frac{1}{3}-\frac{7}{2}+6$$

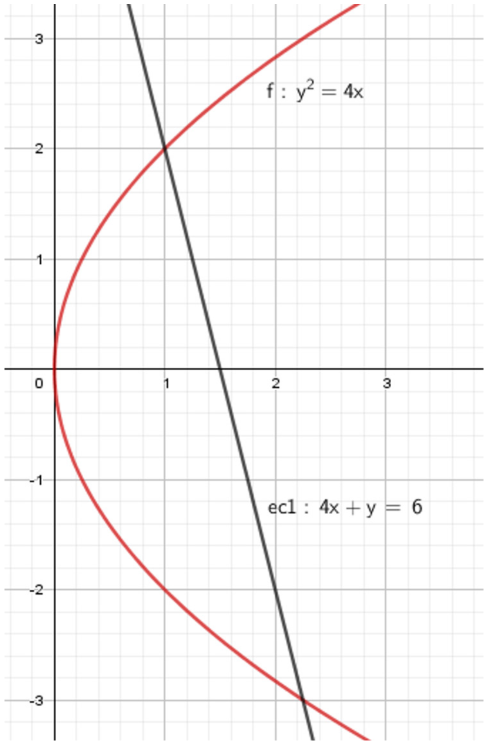
$$A=\frac{144+2-21}{6}$$

$$A=\frac{125}{6}u^2$$

Ejemplo 12: Determinar el área de la región comprendida entre las gráficas $y^2 = 4x$ y la recta $4x + y - 6 = 0$

Solución: Procedemos a realizar el bosquejo de la región

Figura 4.



Nota: Construcción propia en GeoGebr

En este caso podemos observar que la gráfica de la recta se encuentra a la derecha de la gráfica de la parábola, por tanto, es necesario restar la ecuación de la recta a la ecuación de la parábola, pero antes debemos encontrar los límites de integración en los puntos de intersección de las dos gráficas.

$$\frac{y^2}{4} = \frac{6-y}{4}$$

$y^2 + y - 6 = 0$

$(y+3)(y-2) - 0$

$y -3y; y = 2$

Por lo tanto, el área se calcula:

$$A = \int_{-3}^{2} \left(\frac{6-y}{4} - \frac{y^2}{4} \right) dy$$

$$A = \frac{1}{4} \int_{-3}^{2} \left(6 - y - y^2 \right) dy$$

$$A = \frac{1}{4} \left[6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-3}^{2}$$

$$A = \frac{1}{4} \left[\left(6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} \right) - \left(6(-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3} \right) \right]$$

$$A = \frac{1}{4} \left[12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3} \right]$$

$$A = \frac{1}{4}\left(\frac{125}{6}\right)$$

$$A = \frac{125}{24}u^2$$

Recursos didácticos:

- Estimado estudiante, con el fin de profundizar su experticia en calcular el área entre dos curvas, se sugiere revise y analice los ejemplos que se proponen en el texto básico Larson R. y Edwards B. (2016). Cálculo, a partir de la página 435 en adelante donde se explica paso a paso los conceptos, teoremas y algoritmos relacionados con el tema en estudio, además se recomienda resuelva la mayor cantidad de ejercicios propuestos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta tercera semana hemos revisado cómo calcular el área entre dos curvas, usted debe reforzar sus aprendizajes, desarrollando actividades que le preparen para luego desarrollar las diferentes actividades calificadas y prepararse para afrontar las evaluaciones parciales:

- Dibuje la región acotada por las gráficas de las ecuaciones que se dan, formule una integral y calcule el área de la región.

  $y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 7\right), y = 0,$ entre x = 0 y x = 2

- Haga el bosquejo de la región R acotada por y = x + 6, y = x^3 y 2y + x=0 Después encuentre su área. Sugerencia divida R en dos partes.

- Por medio de integración encuentre el área del triángulo con vértices en (-1,4), (2, -2) y (5,1)

- Calcular el área de la región acotada por las gráficas de y+x^2 = 6 y y+2x-3 = 0

Con el desarrollo de estas actividades, usted refuerza el contenido del cálculo de área entre curvas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

2.2. Volumen: método de los discos

Estimado estudiante, en esta cuarta semana iniciamos con el estudio del volumen de un sólido tridimensional, por lo general se usan sólidos de revolución en ingeniería y manufactura, y lo vamos a trabajar utilizando el método de los discos. Los teoremas que respaldan este método se encuentran explicados en el texto básico además encontrará una gama de ejemplos desarrollados.

Al utilizar el método de los discos, debes considerar el siguiente análisis: ¿Cuál es su radio?, y ¿Cuál es su espesor?

Para contestar estas interrogantes se debe considerar que el radio $r = x = f(y)$ y el espesor es dy, es decir que por geometría se sabe que el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2$ y el volumen diferencial del pequeño disco que se forma y el volumen total generado son:

$dV = \pi\left[f(y)\right]^2 dy \Rightarrow V = \pi\int_a^b \left[f(y)\right]^2 dy$ cuando el eje del sólido de revolución es y. De otra manera:

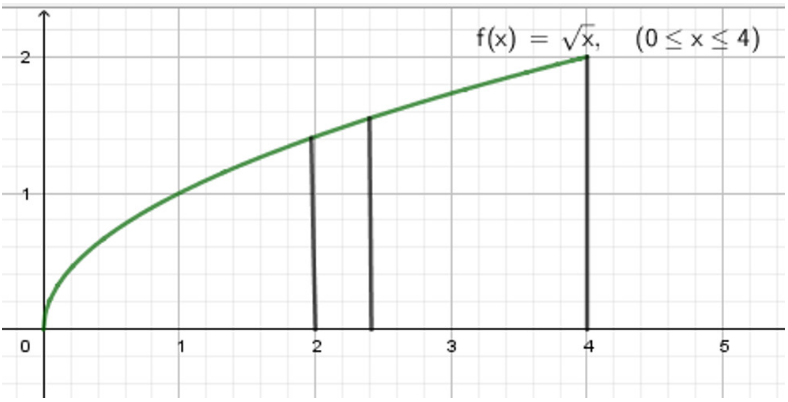
$dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx \Rightarrow V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$ cuando el eje del sólido de revolución es x

Ejemplo 13: Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región plana R, acotada por $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta x = 4.

Solución: La región R, con una rebanada representativa se muestra en la figura 5

Figura 5.

Rebanada representativa de la región R



Nota: Construcción propia en GeoGebra.

En este caso como el eje de revolución es el eje horizontal se utiliza

$$dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx \Rightarrow V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

$V = \pi\int_0^4 \left[\sqrt{x}\right]^2 dx$	Aplicar la fórmula para encontrar el volumen
$V = \pi\int_0^4 (x)dx$	Simplificar el índice de la raíz con el exponente
$V = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$	Aplicar la regla para integrar una potencia
$V = \pi\left[\left(\frac{4^2}{2}\right)-\left(\frac{0^2}{2}\right)\right]$	Aplicar el teorema fundamental del cálculo
$V = \pi\frac{16}{2}$	Respuesta exacta
$V = 8\pi \approx 25{,}13$	Respuesta aproximada

Recursos didácticos:

1. Estimado estudiante, a fin de que profundice el conocimiento y la práctica de encontrar el volumen utilizando el método de los discos sugiero analizar los ejemplos presentados y desarrollados en el texto básico Larson R. y Edwars B. (2016) Cálculo, desde la página 446.

2. Es conveniente que estudie el video: Volumen: método de los discos alrededor del eje x, : Volumen: método de los discos alrededor del eje y donde encontrará la explicación de forma didáctica y concreta.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una vez que se ha estudiado los contenidos para la semana cuatro, donde se analizó el cálculo del volumen de un sólido de revolución aplicando el método de los discos, es de suma importancia que refuerce los contenidos desarrollando diversas actividades para que se prepare de manera adecuada para afrontar las evaluaciones parciales, a continuación, se presentan algunos problemas para que desarrolle:

- Establezca y calcule la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región formada por $y = x^2$, $y = x^5$ alrededor del eje x.
- Establezca y calcule la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región formada por $y = x^{2/3}$ alrededor del eje y.
- Un recipiente de vidrio puede ser modelado mediante la revolución de la gráfica de $y = \begin{cases} \sqrt{0,1x^3 - 2,2x^2 + 10,9x + 22,2} \\ 2,95 \end{cases}$

Respecto al eje x, donde x e y se miden en centímetros. Use un programa de graficación para trazar la función y encontrar el volumen del recipiente.

Semana 5

2.3. Longitud de arco y superficies de revolución

Estimado estudiante, en la quinta semana corresponde el estudio de la longitud de arco y superficies de revolución, por lo tanto, es necesario recordar que un arco es un segmento de una curva y se aproxima por segmentos de rectas determinadas por la fórmula de la distancia

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Es hora de pensar si tienes una curva, ¿cómo la mides?, saber ¿cuánto mide?, ¿qué significan las pequeñas variaciones en este caso?

Una curva por sí sola carece de área, tiene longitud y se puede calcular como una integral, vamos a realizar el siguiente razonamiento.

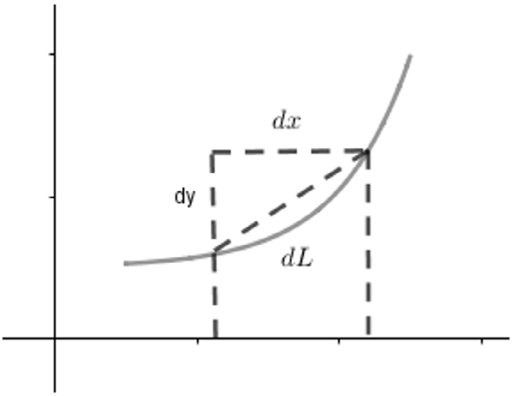
- Dibuja una curva en tu cuaderno, es necesario considerar una curva que corresponda a una función de x.
- Traza dos rectas verticales que delimiten la longitud de la curva que pretendes encontrar, llamada también longitud de arco.
- Traza una recta secante entre los dos puntos extremos del intervalo de interés.

La secante que dibujaste que une los extremos del intervalo de intersección ¿es una aproximación a la longitud de arco?, ¿qué debes hacer para mejorar la aproximación?

¡Excelente! Bien pensado la situación del límite que acabas de plantear te lleva a la figura 6 ¿estás de acuerdo?

Figura 6.

Diferencial de la longitud de arco dL



Nota: construcción propia en GeoGebra

Notar que *dL* corresponde a la hipotenusa del triángulo infinitesimal puedes calcular *dL*en términos de *dx* y *dy*.

Lo resolvemos utilizando el teorema de Pitágoras, es decir se tiene:

$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, si se divide la expresión entre *dx*, se tiene

$\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ cambiando $\frac{dy}{dx}$ por *f′(x)*, se tiene

$$dL=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Por lo tanto, se concluye, la suma de todos esos diferenciales es:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

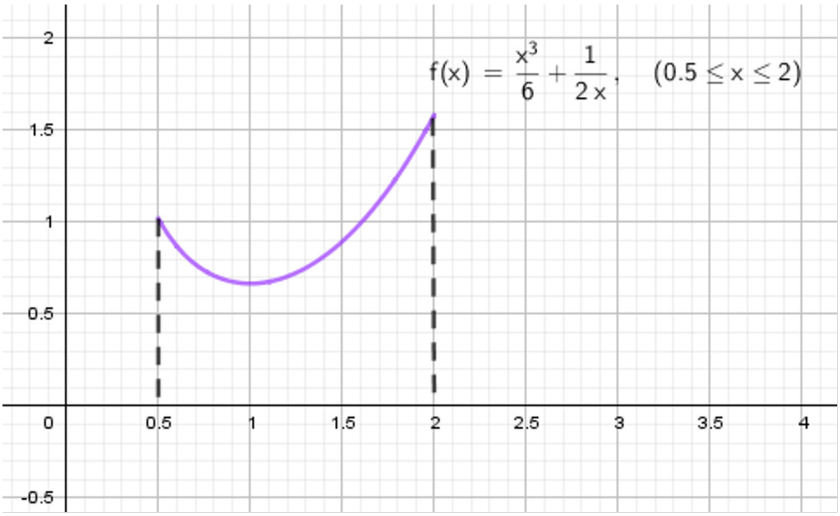
Es necesario extiendas tus conocimientos, si el arco no es una función de x sino de y, ¿cómo resuelves ese caso?, ¿es posible que la integral resultante sea negativa?, explica ¿por qué?, ¿en qué situaciones o para qué crees que se pueda aplicar el cálculo de la longitud de arco?

Ejemplo 14: Determina la longitud de arco de $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ en $I=\left[\dfrac{1}{2},2\right]$

Solución: Realizar la gráfica del arco.

Figura 7.

Longitud de arco



Nota: Construcción propia en GeoGebra

Para determinar la longitud de arco derivamos la función, se tiene:

$y'=\dfrac{3x^2}{6}-\dfrac{1}{2x^2}$, factorizar

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Se aplica la definición de longitud de arco

$L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2}\, dx$, elevando al cuadrado, se tiene

$L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{4}\left(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}\right)\right]}\, dx$, destruimos signos de agrupación

$L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}}\, dx$, reducimos términos semejantes

$L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}}\, dx$, factorizando.

$L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx$, extremos la raíz cuadrada de la expresión

$L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, sacamos el factor constante de la integral

$L = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, aplicamos la integral a cada término

$L = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} x^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2} x^{-2} dx$, integrando tenemos

$L = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$, aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$L = \left(\frac{8}{6} - \frac{1}{4}\right) - \left[\frac{\frac{1}{8}}{6} - \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{48} + 1 = \frac{33}{16}$$

Te invito a que verifiques la respuesta en GeoGebra.

Área de una superficie de revolución

Una superficie de revolución se genera cuando una curva se hace que gire alrededor de un eje.

Las superficies de los sólidos de revolución tales como el cono circular recto, la esfera el toroide, etc., se llaman superficies de revolución. Por ejemplo una esfera, una copa, una dona, algunas lámparas, las piezas mecánicas hechas en torno, entre otros son sólidos de revolución.

Recursos didácticos:

1. Con el objetivo de profundizar su aprendizaje en el cálculo de la longitud de arco, le recomiendo que revise los teoremas, ejemplos ilustrativos y explicados que se proponen en el texto básico Larson R. y Edwars B. (2016) Cálculo, desde la página 466. Así mismo desarrolle la mayor cantidad de ejercicios y problemas que se encuentran propuestos al final del tema.

2. Es conveniente que estudie el video: Introducción a la longitud de arco. Ejemplo resuelto longitud de arco. donde encontrará la explicación de forma didáctica y concreta.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Después de estudiar los contenidos correspondientes a la semana cinco es necesario que refuerce los aprendizajes conseguidos, desarrollando actividades para que se prepare de manera adecuada para afrontar las evaluaciones parciales, a continuación, se presentan algunos problemas para que desarrolle:

- Calcula la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^3}{4} + \frac{1}{3x}$ desde $x = \frac{1}{3}$ hasta $x = 3$, comprueba tu respuesta utilizando algún simulador matemático.

- Calcula la longitud de arco de la curva $x = \frac{2}{3} y \frac{3}{2}$ desde $y = 0$ hasta $y = 8$, verifica tu respuesta utilizando algún simulador matemático.

- Sea $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 10$. Calcula la longitud de arco de x = 8 hasta x = 27

Con el desarrollo de estas actividades pudo reforzar los contenidos de calcular la longitud de un arco.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su dedicación y aprendizaje!

Semana 6

2.4. Aplicaciones de la integral a la física e ingeniería

Trabajo y fuerza de un fluido. En física se aprende que si un objeto se mueve a una distancia d, a lo largo de una línea mientras se encuentra sujeto a una fuerza constante F, en la dirección del movimiento el trabajo realizado por la fuerza es

Trabajo = (Fuerza)(Distancia), es decir

W = F • D

F, la fuerza se mide en newtons (fuerza que se requiere para darle a una masa de 1 kilogramo una aceleración de 1 metro por segundo).

W, el trabajo está en newtons - metros, también llamados Joules.

También se debe recordar que si la fuerza se mide en libras y la distancia en metros, entonces el trabajo está en libras-metros.

Recuerde el trabajo realizado por una fuerza variable se determina por

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

Con el fin de resolver problemas aplicados a la física y a la ingeniería es necesario tener en cuenta las siguientes leyes:

- Ley de Hooke
- Ley de Newton de la gravitación universal
- Ley de Coulomb

Ejemplo 15: Si la longitud natural de un resorte es 0,1 metros y si es necesaria una fuerza de 16 newtons para mantenerlo estirado 0,02 metros. Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural a una longitud de 0,2 metros.

Solución: De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza que se necesita para mantener el resorte estirado x está dado por $F(x)$ - kx, al evaluar la constante del resorte k, para este ejemplo en particular es:

$F(0{,}02) = 16$, es decir $k \cdot 0{,}02 = 16$, si despejamos k se tiene

$k = 800$, por lo que

$F(x) = 800x$

Cuando el resorte tiene su longitud natural de 0,1 metros, $x = 0$y cuando tiene la longitud de 0,2 metros $x = 0{,}1$, es decir el trabajo realizado al estirar el resorte es

$$W = \int_0^{0{,}1} 800x\,dx$$

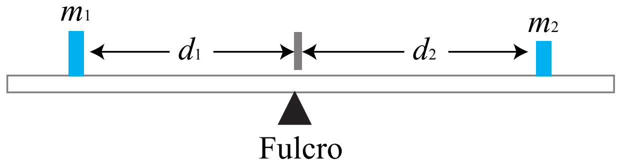
$$W = \left[400x^2\right]_0^{0{,}1}$$

$$W = 400(0{,}1)^2 - 0$$

$$W = 4 \text{ Joules}$$

Momentos y centro de masa, si se tienen dos masas cuyos tamaños son m_1 y m_2 y si se colocan en un sube y baja a distancias respectivas d_1 y d_2, del punto de apoyo (fulcro) en sentido opuesto, el sube y baja se equilibra cuando $d_1m_1 = d_2m_2$, como se muestra en la figura 8

Figura 8.



Nota: Purcell, 2007

Para calcular el momento de una partícula respecto a un punto se multiplica la masa de una partícula por la distancia dirigida desde un punto.

Recursos didácticos:

1. Estimado estudiante, a fin de profundizar en estos temas lo invito a revisar ¿qué es el centro de masa? Y ¿cómo calcularlo? Revise la presión y fuerza de un fluido, aplicaciones sumamente importantes en la física e ingeniería. En Larson R. Edwars B. (2016). Cálculo, a partir de la página 477 en adelante. Es hora de reforzar su conocimiento con el desarrollo de una cantidad de ejercicios suficientes que se encuentran al final de cada tema.

2. Es recomendable que estudie los videos Introducción al trabajo y la energía, Trabajo y energía parte 2, : El trabajo como el área bajo la curva, donde se explica de forma didáctica y concreta, estos temas sobre las aplicaciones a la ingeniería.

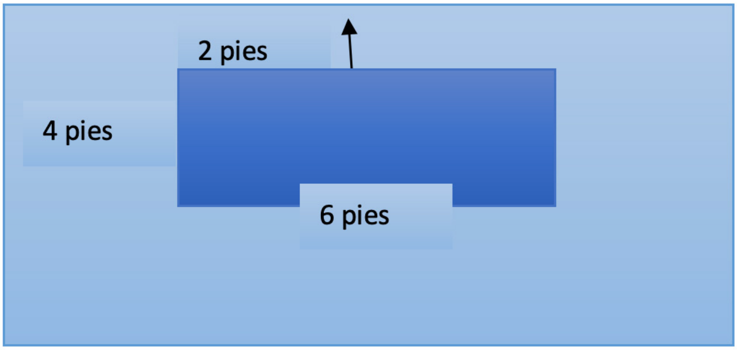
Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta sexta semana hemos estudiado las algunas aplicaciones de la integral a la física y a la ingeniería, entonces usted debe reforzar los aprendizajes, desarrollando la mayor cantidad de ejercicios y problemas con el fin que se prepare de la mejor manera para afrontar con éxito las evaluaciones parciales y presenciales, por lo tanto, le invito a resolver:

- Un acuario de 7 metros de largo, 4 metros de ancho y 5 metros de profundidad se llena de agua. Determinar:

  a. La presión hidrostática en el fondo del acuario.
  b. La fuerza hidrostática en el fondo
  c. La fuerza hidrostática en un extremo del acuario.

- Una placa vertical se sumerge en agua (o parcialmente sumergida) y tiene la forma que se indica. Explique cómo aproximar la fuerza hidrostática contra un extremo de la placa mediante una suma de Riemann. Luego exprese la fuerza como una integral, y evaluarla.



- Utilice la ley de Hooke para determinar la fuerza variable en el problema del resorte

Una fuerza de 20 libras estira un resorte de 9 pulgadas en una máquina de ejercicios. Calcule el trabajo realizado al estirar el resorte 1 pie desde su proposición natural.

- Encuentre el centro de masa de las masas puntuales situadas en el eje x.

$$m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 2, m_4 = 9, m_5 = 5$$
$$x_1 = 6, x_2 = 10, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 4$$

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas, usted reforzó los aprendizajes de la semana seis aplicaciones de la integral a la física e ingeniería.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su dedicación!

Ahora es necesario revisar las aplicaciones de la integral a la Economía y Biología

Semana 7

2.5. Aplicaciones de la integral a la Economía y Biología

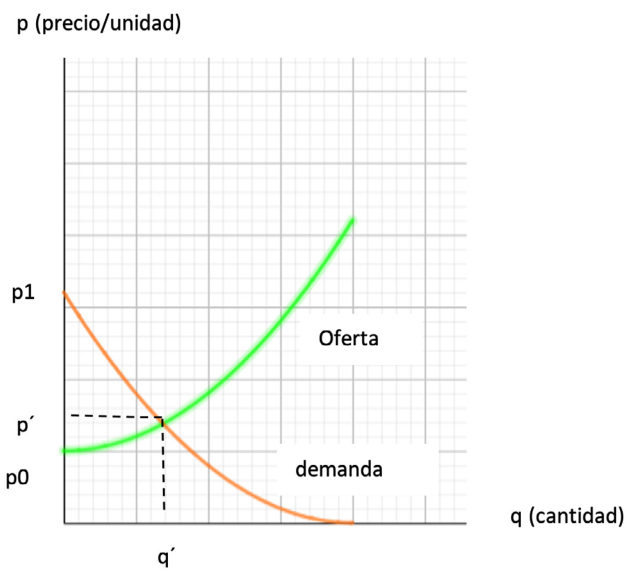
En el presente apartado se presenta el excedente del consumidor como aplicación de la integral definida a la Economía y en Biología se estudia el flujo sanguíneo.

Curvas de oferta y demanda

La cantidad de cierto artículo producido y vendido se puede representar con las curvas de oferta y demanda de dicho artículo. La curva de oferta muestra qué cantidad q, del artículo venden los productores a diferentes precios p, mientras que el comportamiento del consumidor se puede analizar en la curva de demanda, la misma muestra la cantidad de artículos comprados a precios diferentes, como se evidencia en la figura 9.

Figura 9.

Curvas de oferta y demanda.



Nota: Construcción propia en GeoGebra.

El mercado se estabiliza en el punto donde se intersecan las curvas de oferta y demanda es decir en el punto de equilibrio a un precio de equilibrio p´ y la cantidad de equilibrio q´.

Excedente del consumidor

Haciendo referencia a la figura 9 se observa que existe un cierto número de consumidores han comprado a un precio menor del que estarían dispuestos a pagar, algunos compradores estarían dispuestos a pagar precios hasta p1, por otro lado existen algunos proveedores que estarían dispuestos a producir artículos a un precio menor hasta p0, por lo tanto, a continuación se define:

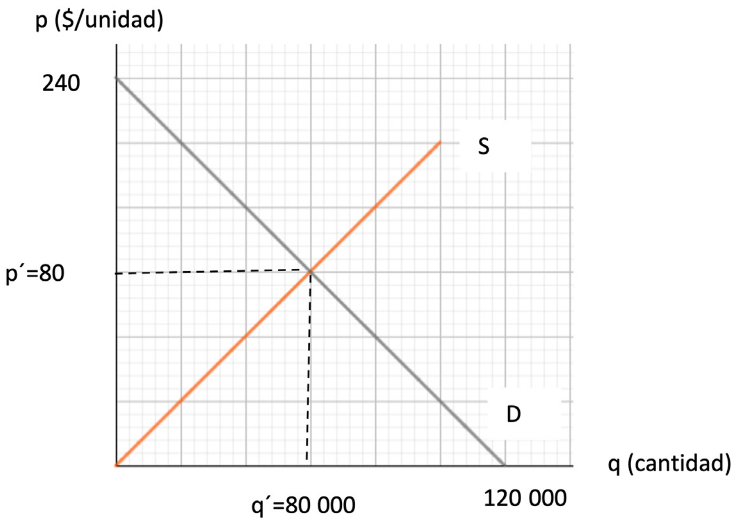
Excedente del consumidor. - Mide la ganancia de los consumidores por la compra de un artículo, en otras palabras es la cantidad total de ganancia de los consumidores al adquirir un artículo a precio actual, en lugar de haberlo comprado al precio que hubieran estado dispuestos a pagar.

Excedente del productor. - Mide la ganancia de los proveedores por la venta, es decir es la cantidad total que ganan los productores por vender al precio actual en lugar de al precio que hubieren estado dispuestos a aceptar.

El proceso de compraventa enriquece tanto al consumidor como al productor. El excedente del consumidor y del productor mide la riqueza de ambos.

Ejemplo 16. Con base en las curvas de oferta y demanda que se muestran a continuación responda cada pregunta.

Figura 10.
Punto de equilibrio



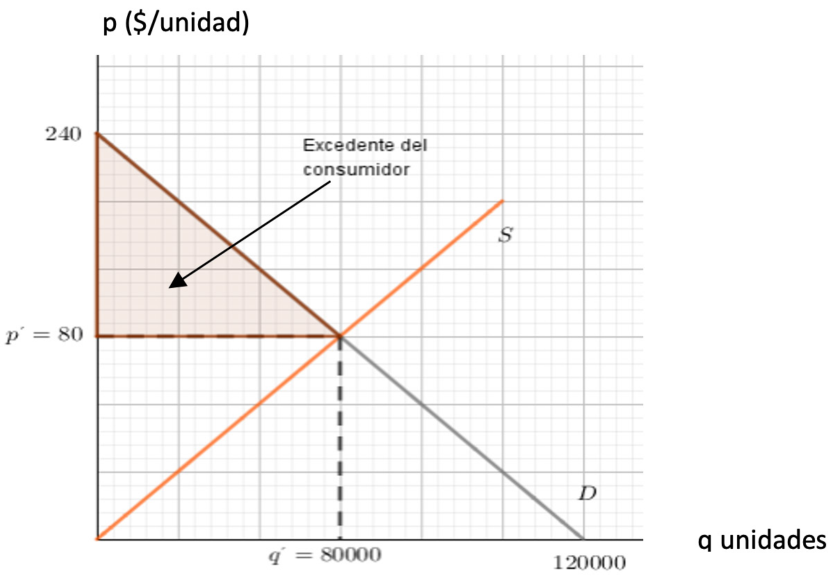
Nota: Construcción propia en GeoGebra

a. ¿Cuál es el precio y la cantidad de equilibrio?
b. Al precio de equilibrio, calcule e interprete los excedentes del consumidor y del productor.

Solución:

a. El precio de equilibrio es p´= 80 y la cantidad de equilibrio es q´= 80 000 unidades.
b. El excedente del consumidor es el área bajo la curva de demanda y arriba de la recta p = 80, es decir;

Figura 11.
Excedente del consumidor



Nota. Construcción propia en GeoGebra.

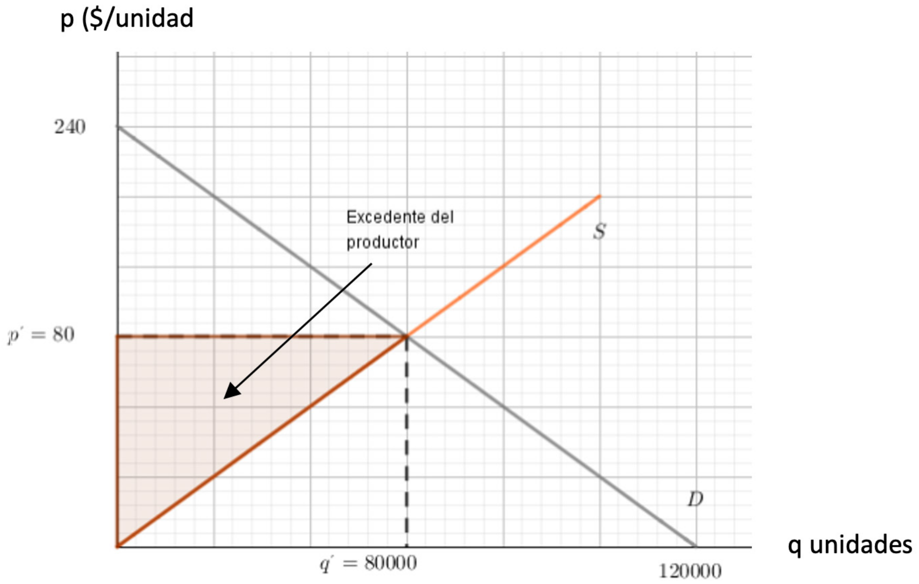
El excedente del consumidor = área del triángulo

$$= \frac{1}{2}\text{Base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{2}80000 \cdot 160 = 6400000$$

Se interpreta que los consumidores ganan $ 6 400 000 cuando compran artículos al precio de equilibrio en lugar del precio que estarían dispuestos a pagar.

El excedente del productor, en cambio, es el área arriba de la curva de oferta y debajo de la recta p = 80, como se muestra en la figura 12.

Figura 12.
Excedente del productor



Nota: Construcción propia en GeoGebra.

Excedente del productor = área del triángulo

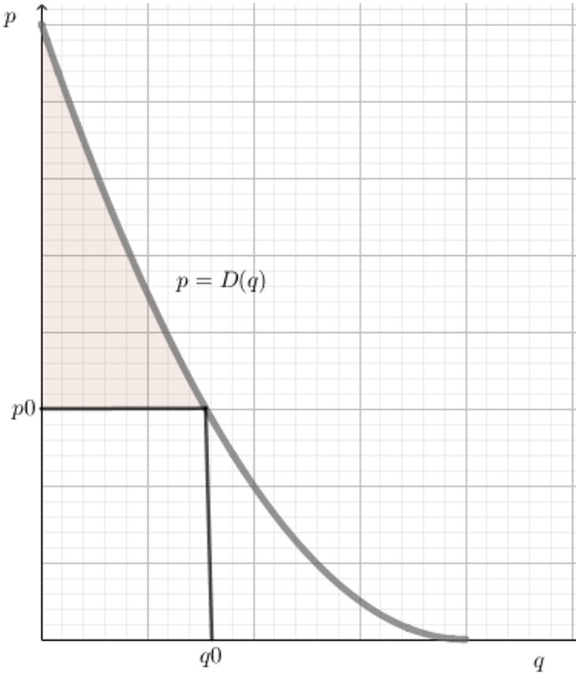
$$= \frac{1}{2} Base \cdot Altura = \frac{1}{2} 80000 \cdot 80 = \$3200000$$

Por lo que se interpreta que los productores ganan $ 3 200 000 al vender los productos al precio de equilibrio en lugar del precio al que estarían dispuestos a venderlos.

Cuando aplicamos la integral definida para calcular el excedente del consumidor se debe tener en cuenta que si a la disponibilidad total se resta el gasto real obtendremos el excedente del consumidor.

Figura 13.

Curva excedente del consumidor



Nota: Construcción propia en GeoGebra.

Si se venden q_0 unidades de un artículo a p_0 la unidad y p = D(q) es la función de demanda de los artículos por parte de los consumidores, se tiene el excedente del consumidor que lo podemos calcular de la siguiente manera:

$$\text{Excedente del consumidor} = \overbrace{\int_0^{q_0} D(q)dq}^{\text{Cantidad que los consumidores están dispuestos a pagar por q0 unidades}} - \underbrace{p_0 q_0}_{\text{Menos el gasto real del consumidor en q0 unidades}} = \int_0^{q_0} \left(D(q) - p_0\right) dq$$

En el caso del excedente del productor si se venden q_0 unidades a p_0 dólares y si *p - S(p)*, se tiene:

$$\text{Excedente del productor} = \overbrace{p_0 q_0}^{\boxed{\begin{array}{l}\text{Ingreso del productor =}\\ \text{gasto real del consumidor}\\ \text{en unidades}\end{array}}} - \underbrace{\int_0^{q_0} S(q)dq}_{\boxed{\begin{array}{l}\text{Menos la cantidad que los}\\ \text{productores están dispuestos a recibir}\\ \text{cuando se ofrecen unidades}\end{array}}}$$

Recursos didácticos:

1. Estimado estudiante para completar el estudio de las aplicaciones de la integral definida a la Economía sugiero que analice los ejemplos ilustrativos y las explicaciones que se proponen en Stewart J. (2018) Cálculo trascendentes tempranas, a partir de la página 569 donde se explican con claridad definiciones, teoremas y algoritmos relacionados al tema en estudio. Debe reforzar su aprendizaje desarrollando un número suficiente de ejercicios y problemas propuestos al final de cada tema.

2. Adicional al trabajo anterior, se recomienda que usted estudie el video Problema que involucra la integral definida, donde se explica de forma didáctica y concreta el procedimiento para resolver problemas con integral definida.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una vez que acabamos de estudiar los contenidos previstos para la séptima semana, en donde pudo aplicar la integral definida a problemas reales en la economía, es sumamente importante el refuerzo de los aprendizajes logrados, a través de desarrollar actividades que le sirvan de preparación para las evaluaciones parciales y presenciales:

- Si la función de demanda es $p = 85 - 4q - q^2$, halle el excedente del consumidor: a) si $q_0 = 5$, b) si $P_0 = 64$.
- La cantidad demandada y el precio correspondiente, en situación de competencia pura se determinan a través de la función de demanda $p = 16 - q^2$ y la función de oferta $P = 4 + q$. Determine el excedente del productor.
- Si la función de oferta es $f(x) = (x+2)^2$ y el precio se fija en $y_0 = 25$. Encuentre el excedente del productor.

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas propuestas usted reforzó los contenidos abordados.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y dedicación!

Estimado estudiante, hemos llegado a culminar la unidad dos, aplicaciones de la integral, por lo que le invito a prepararse para cerrar con éxito el primer bimestre.

Autoevaluación 2

En las siguientes preguntas identifique la respuesta correcta

1. Sea *S* la región acotada por las curvas x-e^y y $x=5-y^2$. ¿Cuál de estas integrales representa el área de la región *S*?

   a. $\int_{-2{,}21}^{1{,}24}\left(5-y^2-e^y\right)dy$

   b. $\int_{0{,}11}^{5}\left(\sqrt{5-x}-\ln x\right)dx$

   c. $\int_{-2{,}21}^{1{,}24}\left(e^y-5+y^2\right)dy$

   d. $\int_{0{,}11}^{5}\left(\ln x-\sqrt{5-x}\right)dx$

2. Definimos dos funciones como $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ y $g(x)=\dfrac{2x}{5}$, sea *N* la región acotada por las gráficas de f y g. Cuáles integrales representan el área de la región *N* . Elige todas las respuestas posibles.

   a. $\int_{0}^{21/4}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{2x}{5}\right)dx$

   b. $\int_{21/4}^{0}\left(\dfrac{2x}{5}-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)dx$

   c. $\int_{21/4}^{0}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{2x}{5}\right)dx$

   d. $\int_{0}^{21/4}\left(\dfrac{2x}{5}-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)dx$

3. Dadas dos funciones $f(x)$-e^x y g(x) = x^3+2x^2. ¿Cuál de las expresiones representa el área de la región?

a. $\int_{-1,96}^{-0,62} \left(e^x - x^3 - 2x^2\right) dx + \int_{-0,62}^{0,93} (x^3 + 2x^2 - e^x) dx$

b. $\int_{-1,96}^{0,93} (e^x - x^3 - 2x^2) dx$

c. $\int_{-1,96}^{-0,62} \left(x^3 + 2x^2 - e^x\right) dx + \int_{-0,62}^{0,93} (e^x - x^3 - 2x^2) dx$

d. $\int_{-1,96}^{0,93} (x^3 + 2x^2 - e^x) dx$

4. Si R es la región delimitada por el eje y, la recta y=2, la recta y=3 y la curva $y = \sqrt{x}$, y se rota alrededor del eje y. ¿Cuál es el volumen del sólido?

a. $\frac{121\pi}{5}$

b. $\frac{5\pi}{211}$

c. $\frac{211\pi}{5}$

d. $\frac{5\pi}{121}$

5. Si *P* es la región delimitada por el eje *y*, la recta y = 2, la recta y = 5 y la curva y = e^x, que gira alrededor del eje y. ¿Cuál de las integrales definidas da el volumen del sólido?

a. $\pi\int_{2}^{5}\left[\ln(y)\right]^{2} dy$

b. $\pi\int_{2}^{5} e^{2y} dy$

c. $\pi\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^{2y} dy$

d. $\pi\int_{e^2}^{e^5}\left[\ln(y)\right]^{2} dy$

6. Si *M* es la región delimitada por el eje x, la recta *x* = 1, la recta *x* = 3 y la curva $y = \frac{1}{x}$. ¿Cuál es el volumen del sólido?

a. $\frac{3\pi}{2}$

b. $\frac{2\pi}{3}$

c. $\frac{\pi}{2}$

d. $\frac{2}{\pi}$

7. Si R es la región delimitada por el eje x, la recta x=1, la recta x=3 y la curva y=e^x. ¿Cuál de las integrales definidas da el volumen del sólido?

a. $2\pi\int_1^3 e^x dx$

b. $2\pi\int_1^3 e^{2x} dx$

c. $\pi\int_1^3 e^{2x} dx$

d. $\pi\int_1^3 e^x dx$

8. ¿Cuál integral nos da la longitud de arco de la ecuación $y=\frac{1}{x}$ del punto $\left(\frac{1}{2},2\right)$ al punto $\left(2,\frac{1}{2}\right)$?

a. $\int_{1/2}^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

b. $\int_{1/2}^2 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}dx$

c. $\int_{1/2}^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$

d. $\int_{1/2}^2 \sqrt{1+\frac{1}{x}}dx$

9. ¿Cuál integral representa la longitud de arco de la gráfica de *y*=*x*ln*x* del punto (1,0) al punto (e,e)?

a. $\int_1^e \sqrt{\ln x + 2}dx$

b. $\int_1^e \sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 2}dx$

c. $\int_1^e \sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 3}dx$

d. $\int_1^e \sqrt{1+\ln^2 x}dx$

10. ¿Cuál integral representa la longitud de la gráfica de $y=e^{2x}$ entre x=2 y x=0?

a. $\int_{-2}^0 \sqrt{1+4e^{4x}}dx$

b. $\int_{-2}^0 \sqrt{1+2e^{2x}}dx$

c. $\int_{-2}^0 \sqrt{1+e^{4x}}dx$

d. $\int_{-2}^0 \sqrt{1+e^{2x}}dx$

Ir al solucionario

Actividades finales del bimestre

Semana 8

Estimado estudiante está en la última semana de estudio, se recomienda que revise todos los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Debe tener en cuenta:

- Sus apuntes de clase
- Las actividades de aprendizaje recomendadas
- Las actividades de aprendizaje calificadas
- Evaluaciones parciales

Recuerde:

La evaluación presencial comprende los contenidos estudiados en las dos unidades en el primer bimestre Derivadas e integrales de funciones trascendentes, aplicaciones de la integral.

Actividades de aprendizaje recomendadas

A más de las actividades anteriores con el objetivo de consolidar el aprendizaje, se recomienda:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en las dos unidades desarrolladas en este primer bimestre.

- Resuelva los ejercicios que usted considere necesarios para reafianzar el conocimiento, desarrollando los problemas propuestos al final de cada tema.

- Realice resúmenes, cuadros sinópticos u otra herramienta que le permita sistematizar los contenidos de cada unidad estudiada.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Emplea leyes y teoremas fundamentales de las técnicas de integración para resolver problemas de aplicación.

Estimado estudiante, en el inicio del segundo bimestre y para lograr el resultado de aprendizaje propuesto, continuamos analizando las técnicas de integración y sus aplicaciones.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 9

Unidad 3. Técnicas de integración

3.1. Reglas básicas de integración

En este tema nos centraremos en la obtención de antiderivadas, por tal razón no se incluyen las aplicaciones. Una manera práctica de resolver integrales indefinidas es trabajar como la operación inversa a la derivada.

Encontrar la antiderivada es un proceso sistemático donde se deben evidenciar que los elementos de la estructura estén presentes, para lo cual se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Verifica si es posible reescribir el integrando.
2. Si se trata de un integrando con sumas y diferencias, separa cada término con una integral, si tienes algún factor constante recuerda que debes sacarla de la integral.
3. Observa el integrando y busca una estructura que se aparezca a algún teorema conocido en las tablas para integrar.

4. No te sorprendas por alguna complejidad que puedas observas, se puede reescribir el integrando haciendo un cambio importante, seleccionando de manera adecuada u o con cualquier otra letra de tu preferencia.

5. Cuando se realiza el cambio de variable lo más delicado es probar que ***du*** está completa, en muchos casos se puede deducir, sin embargo, sé cuidadoso.

6. Sustituye la función interna por ***u*** y ***dx*** por la expresión obtenida al derivar ***u***.

7. Recuerda que la respuesta debe quedar expresada en términos de la variable original.

Ejemplo 17. Resuelve $\int \frac{3x\cos x^2}{(5+senx^2)^2}dx$

Solución:

$\int \frac{3x\cos x^2}{(5+senx^2)^2}dx$ Aparentemente no se observan simplificaciones que se puedan realizar, sin embargo se puede sacar la constante 3 del integrando

$3\int \frac{x\cos x^2}{\left(5+senx^2\right)^2}dx$ Reescribimos el denominador aplicando el recíproco

$3\int \left(5+senx^2\right)^{-2} x\cos x^2 dx$ Se deriva u respecto de x

$u = 5+senx^2$ Establecer

$du = 2x\cos x^2 dx$ Se despeja dx

$dx = \frac{du}{2x\cos x^2}$ Se cambia la variable y se simplifica

Sacamos el factor constante

Se integra, aplicar la regla de la potencia.

$$3\int \left(5+senx^2\right)^{-2} x\cos x^2 dx = 3\int u^{-2} x\cos x^2 \left(\frac{du}{2x\cos x^2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\int u^{-2}du$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)+C$$

$$=-\frac{3}{2u}+C$$ Se aplica ley de signos, y recíproco al numerador

Se escribe la respuesta en términos de la variable original.

$$=-\frac{3}{2(5+\cos x^2)}+C$$

Ejemplo 18.

Resuelva

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$$ No se puede simplificar el integrando, buscamos un cambio de variable.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$$

Es la única posibilidad para eliminar la raíz cuadrada.

$$u^2=x+1$$

Se deriva u respecto de x

$$2udu=dx$$

Realizamos el cambio de variable

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\int\frac{2udu}{1+u}$$

Extraemos el factor constante

$$=2\int 1-\frac{1}{1+u}du$$

$$=2\left[\int du-\int\frac{1}{1+u}du\right]$$

Integramos término a término (cuando se tiene una resta)

$$=2\left[u-\ln(1+u)\right]+C$$

Aplicamos las reglas básicas para integrar

$$=2\left[\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right]+C$$

Se expresa la respuesta en términos de la variable original.

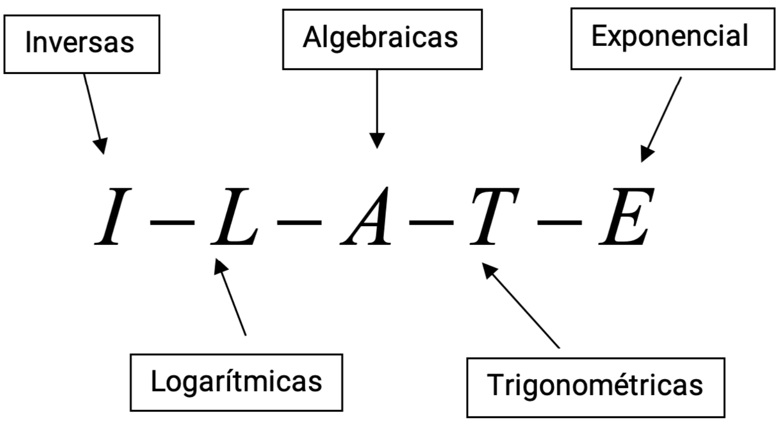
3.2. Integración por partes

Este tipo de integrales toma este nombre porque este método separa a la integral en dos nuevas integrales, las que deben tener determinadas características.

Es importante recordar la fórmula de integración por partes.

$$\int udv=uv-\int vdu$$

Una estrategia para determinar qué función es ***u*** y qué función es ***dv***, utilizamos la técnica ***I – L – A – T – E***.



La técnica I - L A - T - E, son las iniciales de las funciones Inversas, Logarítmicas, Algebraicas, Trigonométricas y Exponenciales, para elegir a la función ***u*** clasificamos cada función del integrando en la palabra I - L - A -T - E, la primera función que aparezca de izquierda a derecha es ***u*** y lo que sobre es ***dv***.

Ejemplo 19. $\int xe^x dx$

Solución:

Para resolver la integral observamos que el integrando no se puede resolver con alguna fórmula directa, aplicando la técnica I - L - A - T - E, para integrar por partes.

$$\begin{array}{ccccccccc} I & - & L & - & A & - & T & - & E \\ & & & & \uparrow & & & & \uparrow \\ & & & & x & & & & e^{x} \end{array}$$

Al aplicar la técnica I – L – A – T – E para establecer u

u = x *Aplicar la técnica I – L – A – T – E*

dv = e^x dx

du = dx *Derivar u respecto a x*

$$\int dv = \int e^x dx$$
$$v = e^x$$

Integrar ambos lados de la ecuación para determinar v

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

Aplicar la fórmula de la integración por partes
Integrar

Ejemplo 20. Calcule $\int \ln x dx$

Solución:

$$u = \ln x$$
$$dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x} dx$$
$$\int dv = \int dx$$
$$v = x$$

Al tener una sola función la elegimos como u
Lo que queda en el integrando es dx
Se deriva u respecto de x
Se integra ambos lados de la ecuación

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx$$ Aplicar la fórmula de integración por partes

Se simplifica x

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$ Se integra.

Recursos didácticos:

1. Con el fin de profundizar los contenidos se recomienda leer del texto Larson R. y Edwars B. (2016). Cálculo, a partir de la página 508 donde va a encontrar ejemplos y conceptos del tema en mención, desarrolle los ejercicios necesarios que se encuentran al final del tema.

2. Recomiendo que estudie el video Integración por cambio de variable donde se explica de forma didáctica y concreta cómo integrar aplicando el cambio de variable.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, al término de la novena semana para profundizar los aprendizajes y reforzar el aprendizaje se recomienda que resuelva los siguientes ejercicios y verifique los resultados con un simulador matemático.

- Resuelve $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx$
- Resuelve $\int \frac{5}{e^{2x}+8} dx$
- Resuelve $\int \frac{2p^2 - p + 3}{\sqrt{p}} dp$
- Resuelve $\int \frac{m^3 - 1}{m - 1} dm$
- Resuelve $\int e^{-x} senx dx$
- Resuelve $\int x^2 \cos x dx$

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas usted reafianzó sus conocimientos y verificó el resultado a través de simuladores matemáticos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y dedicación!

Una vez que hemos culminado la novena semana en donde pudo resolver de manera manual y con simuladores matemáticos, le invito a seguir estudiando los siguientes temas.

Semana 10

3.3. Integrales trigonométricas

Con frecuencia se encuentran este tipo de integrales, el método consiste en transformar el integrando a través de identidades o reducciones trigonométricas más sencillas, para lo cual se hace necesario tener presente las siguientes identidades:

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - sen^2 x)$$
$$= \cos^2 x + \cos^2 x - 1$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

También:

$$\cos 2x = (1 - sen^2 x) - sen^2 x$$
$$= 1 - 2sen^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad sen^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{2}$$

Ejemplo 21. Obtenga $\int sen^2 x \cos^3 x dx$

Solución:

$$sen^2 x \cos^3 x = sen^2 x \cos^2 x \cos x$$
$$sen^2 x \cos^3 x = sen^2 x(1 - sen^2 x) \cos x$$
$$sen^2 x \cos^3 x = sen^2 x \cos x - sen^4 x \cos x$$

Previo a integrar se reescribe el integrando, utilizando identidades trigonométricas.

Se integra término a término

$$= \int sen^2 x \cos x dx - \int sen^4 x \cos x dx$$

Para ambos casos se establece u

$$u = senx$$
$$du = \cos x dx$$
$$dx = \frac{du}{\cos x}$$

Se deriva u en términos de x
Despejamos dx

$$\int sen^2 x \cos x dx = \int u^2 \cancel{\cos x} \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

Integramos el primer término

$$\int sen^2 x \cos x dx = \int u^2 du$$
$$= \frac{u^3}{3} + C$$
$$= \frac{sen^3 x}{3} + C$$

Reescribimos con el cambio de variable, e integramos.
La respuesta queda en términos de la variable original.

$$\int sen^4 x \cos x dx = \int u^4 \cos x \frac{du}{\cos x}$$
$$= \frac{u^5}{5} + C$$
$$= \frac{sen^5 x}{5} + C$$

Integrar el otro término, con cambio de variable.
Integrar, y escribir la respuesta en términos de la variable original.

$$\int sen^2 x \cos^3 x dx = \frac{sen^3 x}{3} + \frac{sen^5 x}{5} + C$$

3.4. Sustitución trigonométrica

En este apartado vamos a revisar los tres casos de sustitución trigonométrica a través de ejercicios resueltos.

Caso I.

Para integrando que contienen la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, con a>0, se utiliza u = *asen β*, por lo tanto:

$$\sqrt{a^2-u^2}=\sqrt{a^2-a^2sen^2\beta}=a\cos\beta \text{ y } dx=a\cos\beta d\beta$$

Ejemplo 22. Resuelva $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$

x = *asen β;* dx = *acos βdβ*

Previo a integrar se reescribe el integrando, utilizando identidades trigonométricas.

x = *2sen β;* dx = *2cos βdβ*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}=\int\frac{2\cos\beta d\beta}{\sqrt{\left(4-4sen^2\beta\right)^3}}$$

Se sustituyen los valores en el integrando.

$$=\int\frac{2\cos\beta d\beta}{\sqrt{\left(4\left(1-sen^2\beta\right)\right)^3}}$$

En el denominador se extrae factor común 4

$$=\int\frac{2\cos\beta}{\sqrt{\left(4\cos^2\beta\right)^3}}d\beta$$

Se reescribe por

$$=\int\frac{2\cos\beta}{\left(2\cos\beta\right)^3}d\beta$$

Extraer raíz cuadrada en el denominador

$$=\int\frac{2\cos\beta}{8\cos^3\beta}d\beta=\frac{1}{4}\int\frac{d\beta}{\cos^2\beta}$$

Desarrollar el denominador y extraer el factor constante del integrando.

$$=\frac{1}{4}\int\sec^2\beta d\beta$$

Aplicar las identidades recíprocas

$$= \frac{1}{4} \tan \beta + C$$

Aplicar la regla para integrar secante al cuadrado de beta.

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + C$$

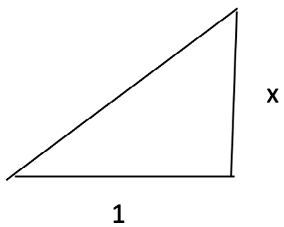
Respuesta.

Caso II.

Para integrales de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$, con *a>0* , tenemos

$$x = a \tan \beta \, ; \; dx = a \sec^2 \beta d\beta \, ; \; \sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \beta$$

Ejemplo 23. Resuelva $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}$



$$x = 1 \tan \beta \, ; \; dx = \sec^2 \beta d\beta \, ; \; \sqrt{x^2 + 1} = \sec \beta$$

Previo a integrar se reescribe el integrando, utilizando identidades trigonométricas.

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\sec^2 \beta}{\tan^2 \beta \cdot \sec \beta} d\beta$$

Se sustituyen los valores en el integrando.

$$= \int \frac{\sec \beta}{\tan^2 \beta} d\beta$$

Se simplifica un factor secante del denominador y numerador

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos \beta}}{\frac{sen^2 \beta}{\cos^2 \beta}} d\beta$$

Utilizar las identidades recíprocas para reescribir el numerador y denominador del integrando.

$$= \int \frac{\cos\beta}{sen^2\beta} d\beta = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du$$

Aplicar el método de sustitución y

$$= \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C$$

Aplicar la regla para integrar una potencia.

$$= -\frac{1}{sen\beta} + C$$

Devolver los valores de u.

$$= -\frac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}} + C$$

Utilizar el triángulo rectángulo original para reescribir el denominador.

$$= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$$

Respuesta

Caso III.

Para integrales de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$, con a>0, tenemos

$$x = a\sec\beta \,;\; dx = a\sec\beta\tan\beta \,;\; \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\beta$$

Ejemplo 24. Resuelve $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 49}}$

Solución:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \dfrac{49}{4}}}$$

$$\int \frac{\frac{7}{2}\sec\beta\tan\beta}{7\tan\beta} d\beta = \frac{1}{2}\int \sec\beta\, d\beta$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\beta + \tan\beta| + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la secante y la tangente

$$\sec\beta = \frac{2x}{7}; \tan\beta = \frac{\sqrt{4x^2-49}}{7}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{7} + \frac{\sqrt{4x^2-49}}{7}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{4x^2-49}}{7}\right| + C$$

Recursos didácticos:

1. Con el fin de profundizar los contenidos se recomienda leer del texto Larson R. y Edwars B. (2016). Cálculo, a partir de la página 533 donde va a encontrar ejemplos y conceptos del tema en mención, desarrolle los ejercicios necesarios que se encuentran al final del tema.

2. Recomiendo que estudie el video Introducción a la sustitución trigonométrica donde se explica de forma didáctica y concreta cómo integrar aplicando sustitución trigonométrica.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, al término de la décima semana para profundizar los aprendizajes y reforzar el aprendizaje se recomienda que resuelva los siguientes ejercicios.

- Calcule la integral indefinida usando la sustitución $x = 4sen\theta$,

$$\int \frac{1}{\left(16-x^2\right)^{3/2}}dx$$

- Calcule la integral indefinida usando la sustitución $x = 4\sec\theta$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}dx$$

- Calcule la integral indefinida usando la sustitución $x = \tan\theta$,

  $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

- Calcule la integral indefinida $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas usted reafianzó sus conocimientos y verificó el resultado a través de simuladores matemáticos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y dedicación!

Una vez que hemos culminado la décima semana en donde pudo resolver de manera manual y con simuladores matemáticos, le invito a seguir estudiando los siguientes temas.

Semana 11

3.5. Fracciones parciales

Este método se aplica cuando tenemos funciones racionales, es decir cuando tanto el numerador como el denominador son funciones racionales enteras.

Cuando se trata de funciones racionales impropias se realiza la división algebraica para expresar como la suma de fracciones más simples es decir la suma de fracciones parciales.

Ejemplo 25. Exprese como la suma de fracciones parciales (3x2 +2x-8) entre (x+2)

Solución:

La división se puede escribir como una fracción $\frac{3x^2+2x-8}{x+2}$, donde se observa que tanto el numerador como denominador son funciones racionales enteras, y el resultado es:

$$\frac{3x^2+2x-8}{x+2}=3x-4$$

El problema radica cuando se trata de fracciones propias, en este caso se pueden presentar cuatro casos:

Caso I: El Denominador puede expresarse como un producto de factores de primer grado no repetidos.

Caso II: Los factores del denominador son todos de primer grado, se repiten algunos.

Caso III: El denominador contiene factores de grado 2 sin repetición.

Caso IV: El denominador contiene factores de grado 2 pero repetidos.

Recursos didácticos:

1. Con el fin de profundizar los contenidos se recomienda leer del texto Larson R. y Edwars B. (2016). Cálculo, a partir de la página 542 donde va a encontrar ejemplos y conceptos del tema en mención, desarrolle los ejercicios necesarios que se encuentran al final del tema.

2. Recomiendo que estudie el video Integración por fracciones parciales donde se explica de forma didáctica y concreta cómo integrar aplicando fracciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, al término de la décimo primera semana para profundizar los aprendizajes y reforzar el aprendizaje se recomienda que resuelva los siguientes ejercicios.

- Compruebe que $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\ln\left|\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right|+C$

- Obtenga $\int \frac{x^5+4x^3}{(x^2+2)^3}dx$

- Obtenga $\int \frac{\cos y}{sen^2 y + seny - 6} dy$

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas usted reafianzó sus conocimientos y verificó el resultado a través de simuladores matemáticos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y dedicación!

Una vez que hemos culminado la décimo primera semana en donde pudo resolver de manera manual y con simuladores matemáticos, le invito a seguir estudiando los siguientes temas.

Autoevaluación 3

En las siguientes preguntas identifique la respuesta correcta

1. El costo marginal de producir gorras de béisbol a un nivel de producción de x gorras es 3,20-0,001x dólares cada una y el costo de producir 50 gorras es $200. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a la función costo?

   a. $3{,}20x-0{,}001x^2+C$
   b. $3{,}20x-0{,}00005x^2+0$
   c. $3{,}20x-0{,}0005x^2+41{,}25$
   d. $3{,}20x-0{,}0001x^2+C$

2. Dada $\int\left(-e^x+x^{-2}-\frac{1}{8}\right)dx$, elije la opción correcta

   a. $e^x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{8}x+C$
   b. $-e^x+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{8}x+C$
   c. $-e^x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{8}x-C$
   d. $e^x+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{8}x-C$

3. Evalúa $\int \ln x dx$, elije la opción correcta.

   a. $x\ln(x)-\frac{1}{x}+C$
   b. $x\ln(x)-x+C$
   c. $\ln(x)-x+C$
   d. $\ln(x)-\frac{1}{x}+C$

4. Evalúa $\int xe^{-x}dx$, elije la opción correcta.

a. $-e^{x}(x-1)+C$
b. $e^{x}(x+1)+C$
c. $e^{x}(x-1)+C$
d. $-e^{x}(x+1)+C$

5. Evalúa $\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x dx$

a. $\frac{\pi}{4}$

b. $\frac{\pi}{2}$

c. π

d. 2π

6. Evalúa $\int \frac{\cos^2 x}{1-senx}dx$, seleccione la opción correcta.

a. $x+cosx+C$
b. $x-cosx+C$
c. $x-senx+C$
d. $x+senx\ x+C$

7. Evalúa $\int \frac{1}{\sqrt{36-x^2}}dx$. Selecciona la opción correcta.

a. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{6}\right)+C$

b. $sen^{-1}\left(\frac{x}{6}\right)+C$

c. $\sec^{-1}\left(\frac{x}{6}\right)+C$

d. $\cot^{-1}\left(\frac{x}{6}\right)+C$

8. Cuando usas la sustitución trigonométrica estándar para evaluar $\int_0^2 \left(4-x^2\right) dx$. ¿Cuál es la nueva integral resultante?

a. $\int_0^2 8\cos^3\theta d\theta$

b. $\int_0^{\pi/2} 16\cos^4\theta d\theta$

c. $\int_0^2 16\cos^4\theta d\theta$

d. $\int_0^{\pi/2} 8\cos^3\theta d\theta$

9. Encuentra los valores de P y Q que hacen verdadera la siguiente igualdad $\int \frac{18-12x}{(4x-1)(x-4)} dx = P\cdot\ln|4x-1| + Q\cdot\ln|x-4| + C$

a. *P* = -1*yQ* = -2
b. *P* =1*yQ* = 2
c. *P* = -3*yQ* = -4
d. *P* = 3*yQ* = 4

10. Evalúa $\int \frac{2x+3}{(x-3)(x+3)} dx$, selecciona una opción correcta.

a. $\frac{2}{3}\ln|x-3| - \frac{4}{3}\ln|x+3| + C$

b. $\frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + C$

c. $\frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln|x+3| + C$

d. $\frac{2}{3}\ln|x-3| - 2\ln|x+3| + C$

Ir al solucionario

Unidad 4. Ecuaciones diferenciales

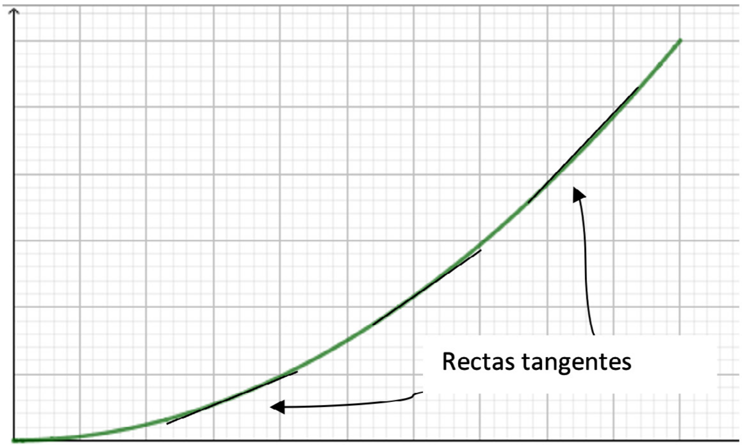
4.1. Campos direccionales y método de Euler

Campo direccional

Los valores de y´, evaluados en los puntos (x,y) determinan la dirección de rectas tangentes en los puntos de coordenadas (x,y), ya que el valor de y´ en ese punto es el valor de la pendiente de la recta tangente como se muestra en la figura 14.

Figura 14.

Rectas tangentes a una curva



Nota: Construcción propia con GeoGebra.

El conjunto de segmentos de estas rectas tangentes se denomina campo direccional o campo de pendientes.

Para construir el campo direccional de una ecuación diferencial se recomienda seguir los siguientes pasos:

- Construir una malla en el plano *xy* donde nos interesa conocer el campo direccional.

- Evaluar y´ en cada punto de esa malla, el valor de y´ es el valor de la pendiente de la recta tangente a la función que pasa por ese punto.
- Construir segmentos de rectas con las pendientes dadas en cada uno de los puntos de la malla.

Ejemplo 26. Campo de direcciones

Para visualizar estos conceptos le recomiendo que tome una hoja de papel cuadriculada y representemos gráficamente algunos segmentos locales para la ecuación de primer orden $y'-y = x$, que podemos escribir como $y' = f(x,y) = x+y$, construyamos la tabla 3.

Tabla 3.
Pendientes en los puntos (x,y) para $y' = x+y$

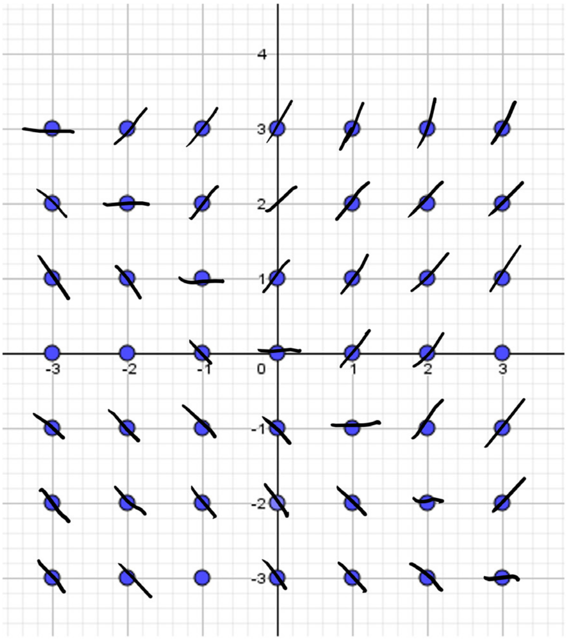
x	y	**Punto (x,y)**	$y' = x+y$ **Pendiente en (x,y)**
-3	3	(-3,3)	0
1	-1	(1,-1)	0
0	0	(0,0)	0
0	1	(0,1)	1
1	0	(1,0)	1
2	-1	(2,-1)	1
-1	2	(-1,2)	1
0	-1	(0,-1)	-1
-1	0	(-1,0)	-1
2	-3	(2,-3)	-1

El valor de las pendientes son 0, 1 y -1

Ahora podemos dibujar algunos elementos lineales que correspondan a estas pendientes como se muestra en la figura 15.

Figura 15.

Algunos elementos lineales para y'= x+y



Nota: Construcción propia con GeoGebra

En este caso se ha dibujado unos pequeños segmentos locales de manera que el punto central de cada uno sea el punto (x,y), se ha utilizado elementos lineales del campo de direcciones dado por *f(x,y)* = 0 y f(x,y) =±1.

Método de Euler

La idea básica detrás de los campos de direcciones se puede usar para encontrar aproximaciones numéricas a soluciones de ecuaciones diferenciales.

De manera general el método de Euler propone empezar en el punto dado por el valor inicial y avanzar en la dirección indicada por el campo direccional. Deténgase después de un corto tiempo, examine la pendiente en la nueva ubicación y avance en esa dirección, así continúe deteniéndose y cambiando de dirección de acuerdo al campo direccional.

Recursos didácticos:

1. Con el fin de profundizar los contenidos se recomienda leer del texto Larson R. y Edwars B. (2016). Cálculo, a partir de la página 398 donde va a encontrar ejemplos y conceptos del tema en mención, desarrolle los ejercicios necesarios que se encuentran al final del tema.

2. Recomiendo que estudie el video Introducción a los campos de pendientes donde se explica de forma didáctica y concreta trazar el campo direccional de una ecuación diferencial.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, al término de la décimo segunda semana para profundizar los aprendizajes y reforzar el aprendizaje se recomienda que resuelva los siguientes ejercicios.

- Trace el campo direccional de la ecuación diferencial. Después utilícelo para trazar una curva solución que pasa por el punto dado.

  $y' = y-2x,(1,0)$

- Trace el campo direccional de la ecuación diferencial. Después utilícelo para trazar una curva solución que pasa por el punto dado.

  $y' = y+xy,(0,1)$

- Use el método de Euler con tamaño de paso 0,2 para estimar y(1), donde y(x) es la solución del problema con valores iniciales $y'-1-xy, y(0) = 1$

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas usted reafianzó sus conocimientos y verificó el resultado a través de simuladores matemáticos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y dedicación!

Una vez que hemos culminado la décimo segunda semana en donde pudo resolver de manera manual y con simuladores matemáticos, le invito a seguir estudiando los siguientes temas.

4.2. Ecuaciones diferenciales: crecimiento y decrecimiento

Ley de crecimiento natural

Podemos suponer que el crecimiento de una población se realiza a una tasa proporcional al tamaño de la población, es decir si *P*(*t*) es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la rapidez de cambio de *P* con respecto a *t* es proporcional a su tamaño *P*(*t*) en cualquier momento entonces:

$\frac{dP}{dt} = kP$, donde *k* es una constante, si *k* es positiva crece y si es negativa entonces decrece, es así que si tiene una población (por ejemplo de bacterias) con un tamaño de P = 1000 y en un momento determinado crece con una rapidez de P' = 300 bacterias por hora. Si se toman otras 1000 bacterias del mismo tipo y se colocan en la primera población. Cada mitad de la otra población creció en una proporción de 300 bacterias por hora, por lo que es razonable esperar que una población de 2000 se incrementara a una tasa de 600 bacterias por hora inicialmente.

$\frac{dP}{dt} = kP$, esta ecuación diferencial es separable se puede resolver así:

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^{C}e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

$A(=\pm e^{C} o0)$ es una c0onstante arbitraria, para observar el significado de la constante A, podemos observar que:

$$P(0) = Ae^{k\cdot 0} = A$$

Es decir, A es el valor inicial de la función.

La solución

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad P(0) = P_0$$

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Recursos didácticos:

1. Con el fin de profundizar los contenidos se recomienda leer del texto Larson R. y Edwars B. (2016). Cálculo, a partir de la página 407 donde va a encontrar ejemplos y conceptos del tema en mención, desarrolle los ejercicios necesarios que se encuentran al final del tema.

2. Recomiendo que estudie el video : Introducción a los modelos de crecimiento donde se explica de forma didáctica y concreta al estudio de modelos de crecimiento.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, al término de la décimo tercera semana para profundizar los aprendizajes y reforzar el aprendizaje se recomienda que resuelva los siguientes ejercicios.

- Esboce a mano el campo de direcciones para la ecuación dada; después intente generar dicho campo utilizando un ordenador o una calculadora gráfica. Bosqueje varias posibles curvas de solución para la ecuación $y' = x$

- Esboce a mano el campo de direcciones para la ecuación dada; después intente generar dicho campo utilizando un ordenador o una calculadora gráfica. Bosqueje varias posibles curvas de solución para la ecuación $\frac{dx}{dt} = t$
- Esboce a mano el campo de direcciones para la ecuación dada; después intente generar dicho campo utilizando un ordenador o una calculadora gráfica. Bosqueje varias posibles curvas de solución para la ecuación $\frac{dy}{dx} = x^2$

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas usted reafianzó sus conocimientos y verificó el resultado a través de simuladores matemáticos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y dedicación!

Una vez que hemos culminado la décimo tercera semana en donde pudo resolver de manera manual y con simuladores matemáticos, le invito a seguir estudiando los siguientes temas.

Semana 14

4.3. Separación de variables y la ecuación logística

Una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$, adopta la forma de variables separables si se puede escribir como:

$$g(x) = h(y)y' = h(y)\frac{dy}{dx}$$

Para resolver esta ecuación diferencial, en primer lugar, se separa en la forma $g(x)dx = h(y)dy$, y luego se integra.

Ejemplo 27. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $y' = 4x-6$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6 \Rightarrow dy = (4x-6)dx$$ Separamos las variables

$$\int dy = \int (4x-6)dx$$ Integramos

$$y = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 6x + C$$

$y = 2x^2 - 6x + C$ Es la solución general.

Ejemplo 28. Encuentre la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas de la ecuación diferencial *y'* = $e^x \cos^2 y$, con la condición inicial $y(0) = \frac{\pi}{4}$

Solución:

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = e^x dx \Rightarrow \sec^2 y dy = e^x dx$$

Separamos las variables

$$\int \sec^2 y dy = \int e^x dx$$

Integramos la ecuación

$$\tan y = e^x + C$$

Solución general

Para obtener la solución particular, tomamos la condición inicial $y(0) = \frac{\pi}{4}$

$$\tan \frac{\pi}{4} = e^0 + C \Rightarrow 1 = 1 + C$$

$$C = 0$$

La solución particular es:

$\tan y = e^x$

Recursos didácticos:

1. Con el fin de profundizar los contenidos se recomienda leer del texto Larson R. y Edwars B. (2016). Cálculo, a partir de la página 415 donde va a encontrar ejemplos y conceptos del tema en mención, desarrolle los ejercicios necesarios que se encuentran al final del tema.

2. Recomiendo que estudie el video Ecuaciones diferenciales variables separables donde se explica de forma didáctica y concreta cómo integrar aplicando fracciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, al término de la décimo cuarta semana para profundizar los aprendizajes y reforzar el aprendizaje se recomienda que resuelva los siguientes ejercicios.

- Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $y' = 3x+5y$
- Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $y' = \frac{y-x+8}{y-x+1}$
- Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y+\cos y}$

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas usted reafianzó sus conocimientos y verificó el resultado a través de simuladores matemáticos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y dedicación!

Una vez que hemos culminado la décimo cuarta semana en donde pudo resolver de manera manual y con simuladores matemáticos, le invito a seguir estudiando los siguientes temas.

Semana 15

4.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Se debe considerar que una ecuación diferencial es aquella que contiene derivadas. Si y es una función de x, entonces una ecuación que tiene solo *y* y *x* es una ecuación ordinaria, sin embargo, una ecuación que contiene una o más derivadas como $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, o derivadas de orden superior es una ecuación diferencial.

Existe un sistema de clasificación de los posibles tipos de ecuaciones diferenciales, para nuestro curso solamente consideramos el orden. Es decir, el orden de una ecuación diferencial es el mayor orden de las derivadas de la ecuación.

Una ecuación lineal de primer orden en forma general o canónica es una ecuación que tiene la forma:

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, ecuación lineal en y

$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$, ecuación lineal en x

Para resolver $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ se multiplica en ambos lados por un factor *u* = *u*(*x*), de tal modo que en el lado izquierdo se transforme en una expresión que sea la derivada de un producto así:

$$\frac{d}{dx}(uy)=u\frac{dy}{dx}+y\frac{du}{dx}$$

Por tanto, se tiene

$$u(x)\frac{dy}{dx}+u(x)p(x)y=u(x)q(x)$$

Se iguala las ecuaciones anteriores se tiene:

$$u(x)\frac{dy}{dx}+u(x)p(x)y=u(x)\frac{dy}{dx}+y\frac{du}{dx}$$

De donde se obtiene:

$$\frac{du}{dx}=u(x)p(x)$$

Al separar las variables e integrar se obtiene:

$$u=u(x)=e^{\int p(x)dx}$$

Es así que se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\big(u(x)y(x)\big)=u(x)q(x)$$

Cuya solución es:

$y=y(x)=[u(x)]^{-1}\left[\int u(x)q(x)dx+C\right]$, es la solución general.

Ejemplo 29. Resuelva la ecuación diferencial $senx\frac{dy}{dx}+2y\cos x=4xsenx$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2\cos x}{senx}y=4x$$

Reescribir la ecuación en la forma general

$$u(x)=e^{\int p(x)dx}=sen^2x$$

Identificar

$$sen^2x\frac{dy}{dx}+2ysenx\cos x=4xsen^2x=2x-2x\cos 2x$$

$$\frac{d}{dx}(ysen^2x)=2x-2x\cos 2x$$

Multiplicar la ecuación por el factor integrante.

$$y=y(x)=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\csc^2 x-2x\cot x+1+C\csc^2 x$$

Integrando y despejando

Ejemplo 30. Un tanque con capacidad de 400 litros contiene inicialmente 200 litros de una mezcla de sal y agua (salmuera) con 30 gramos de sal disuelta. Se agrega una solución con 1 gramo de sal por litro a una tasa de 4 litros por minuto; la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación y de él sale a una tasa de 2 litros por minuto. Calcular la cantidad de gramos de sal en el tanque al momento del desborde.

Solución:

Si *A(t)* es la cantidad de sal (en gramos) en el tanque en cualquier momento *t* antes del desborde. La rapidez con que cambia *A(t)* es:

$\frac{dA}{dt}=R_1-R_2$,. Donde

$$R_1=(4l/\min)(1gr/l)=4gr/\min$$
$$R_2=(2l/\min)(Agr/\min)=2A/Vgr/\min$$

Aquí *V* es el volumen del tanque en el instante *t*. Como al tanque ingresar 4l/min y le salen 2l/ min, existe una ganancia neta de 2l/ min . Luego el tiempo que tarda en llenarse el tanque es:

$$t_f=\frac{Diferencia\ de\ volumen}{Ganancia\ neta\ en\ el\ flujo}=\frac{200}{2}min=100min$$

Pero $V = V(t) = 200+2t = 2(100-t)$, *y*;

$$R_2 = \frac{A}{t+100}$$

Al sustituir R_1 y R_2 se obtiene el siguiente PVI

$$\frac{dA}{dt} = 4 - \frac{A}{t+100}; A(0) = 30$$

Al resolver por ecuaciones lineales se obtiene:

$$A(t) = 2(t+100) + \frac{C}{t+100}, 0 < t < 100$$

La condición inicial da C = -17000, por lo tanto, l solución al PVI es

$$A(t) = 2(t+100) - \frac{17000}{t+100}$$

La cantidad de sal al momento de desbordarse en *A*(100) = 315 *gramos*

Recursos didácticos:

1. Con el fin de profundizar los contenidos se recomienda leer del texto Larson R. y Edwars B. (2016). Cálculo, a partir de la página 424 donde va a encontrar ejemplos y conceptos del tema en mención, desarrolle los ejercicios necesarios que se encuentran al final del tema.

2. Recomiendo que estudie el video Ecuación diferencial lineal donde se explica de forma didáctica y concreta cómo resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, al término de la décimo quinta semana para profundizar los aprendizajes y reforzar el aprendizaje se recomienda que resuelva los siguientes ejercicios.

- Aplique la técnica del factor integrante a la ecuación lineal

$$d\frac{dy}{dx}-2y=x^3e^{-2x}$$

- Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2 y}{1+x^2}$
- Resuelva la ecuación diferencial $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-4v^2}{3v}$

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas usted reafianzó sus conocimientos y verificó el resultado a través de simuladores matemáticos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y dedicación!

Una vez que hemos culminado la décimo quinta semana en donde pudo resolver de manera manual y con simuladores matemáticos, le invito a seguir estudiando los siguientes temas.

Actividades finales del bimestre

Semana 16

Estimado estudiante, en la última semana del bimestre, le invito a revisar todos los contenidos abordados y participe de la evaluación presencial.

Se recomienda:

- Revisar sus apuntes
- Revisar las actividades de aprendizaje recomendadas
- Las actividades de aprendizaje calificadas
- Evaluaciones parciales

Recuerde:

La evaluación presencial comprende todos los conocimientos adquiridos en todas las unidades en el primer y segundo bimestre.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Adicional a las actividades anteriores, se hace necesario consolidar los aprendizajes del bimestre dos y prepararse para afrontar la evaluación presencial en físico o virtual, dicho esto se sugiere:

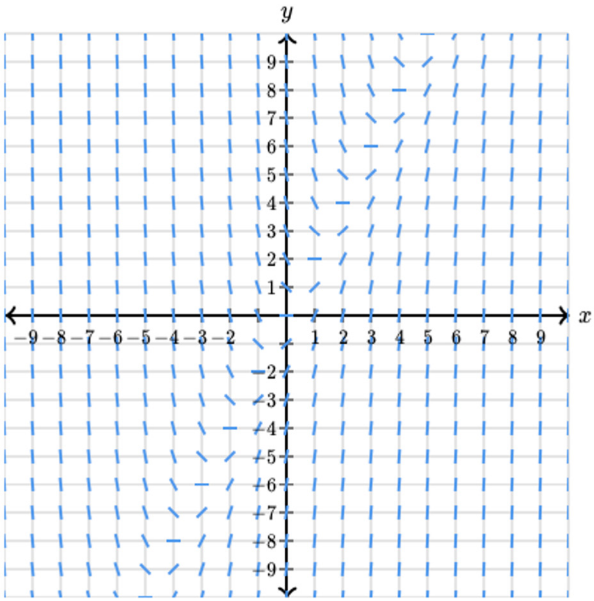
- Revisar cada concepto estudiado en las cuatro unidades analizadas en el primer y segundo bimestre.
- Resuelva la mayor cantidad de ejercicios, incluyendo el desarrollo de problemas que constan al final de cada tema tratado en su texto básico.
- Por cada unidad, se recomienda sistematizar el conocimiento, a través de realizar mapas conceptuales, infografías, resúmenes, organizadores gráficos.

Le invito a reforzar sus conocimientos, participando en la siguiente autoevaluación:

Autoevaluación 4

En las siguientes preguntas identifique la respuesta correcta

1. ¿Cuál ecuación diferencial genera este campo direccional?



a. $\dfrac{dy}{dx} = x + 2y$

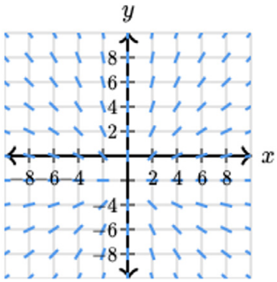
b. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + y$

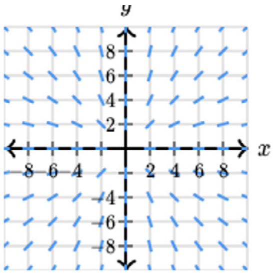
c. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - y$

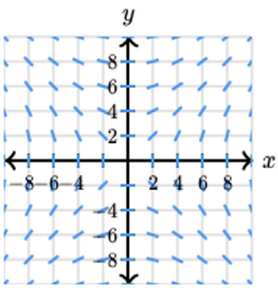
d. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$

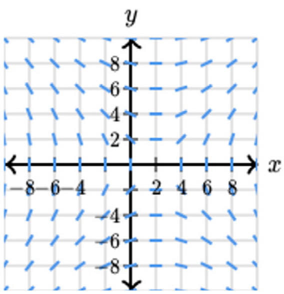
e. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{y}$

2. ¿Cuál campo direccional se genera por la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2}{y}$?

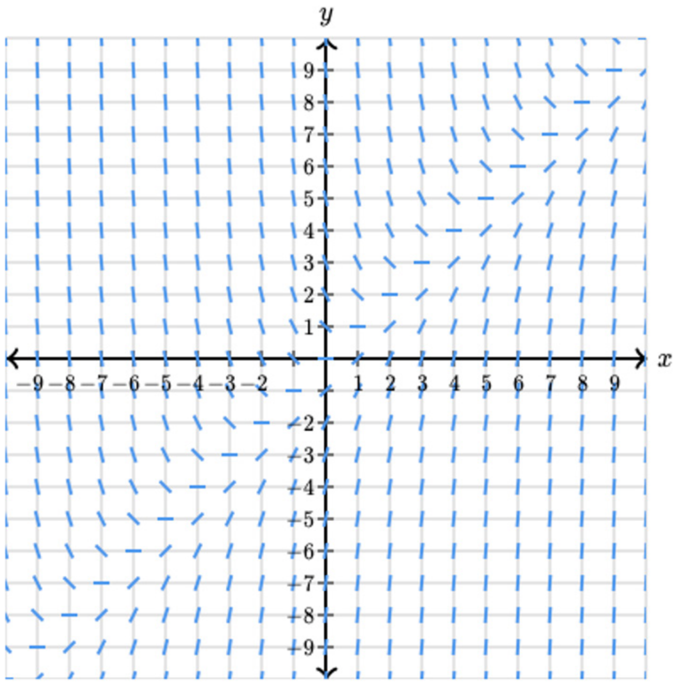
a. 

b. 

c. 

d. 

3. ¿Cuál ecuación diferencial genera este campo direccional?



a. $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

b. $\dfrac{dy}{dx} = x - y$

c. $\dfrac{dy}{dx} = y - x$

d. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

e. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

4. Resuelva la ecuación $\frac{dy}{dx} = 4x^3y - 6x^2y$. Seleccione la respuesta correcta.

a. $y = e^{x^4 - 2x^3} + C$

b. $y = \pm\sqrt{x^4 - 2x^3 + C}$

c. $y = Ce^{x^4 - 2x^3}$

d. $y = C\sqrt{x^4 - 2x^3}$

5. Resuelva la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{6e^y}$, selecciones la respuesta correcta.

a. $y = \pm\sqrt{-2e^{-x} + C} + 10$

b. $y = \pm\sqrt{-2e^{-x}} + C$

c. $y = \ln\left(\frac{x^3}{18} + C\right)$

d. $y = \ln\left(\frac{x^3}{18}\right) + C$

6. Resuelve la ecuación $\frac{dy}{dx} = y^{-1}x^{-3}$. Selecciona la respuesta correcta

a. $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + C}$

b. $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2}} + C$

c. $y = \pm\sqrt{-\frac{1}{x^2}} + C$

d. $y = \pm\sqrt{-\frac{1}{x^2} + C}$

7. Dada $y'=5y$ ¿la función $y=3x^5$ es una solución de la ecuación anterior?

a. Si.
b. No.

8. $\frac{dy}{dx}=y(2x-5)$. ¿La función $y=-e^{x^2-5x}$ es una solución de la ecuación diferencial dada?

a. Si.
b. No.

9. Si $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. ¿La función $y=\sqrt{10-x}$ es una solución de la ecuación diferencial dada?

a. Si.
b. No.

10. Si $f'(x)=\frac{3f(x)}{x\ln x}$. ¿La función $f(x) = 2(\ln x)^3$ es una solución de la ecuación diferencial dada?

a. Si.
b. No.

Ir al solucionario

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	Se revisan en las tablas par derivar y se aplica la regla de la cadena.
2	a	Se deriva aplicando la regla de la cadena para una función exponencial natural.
3	a	Se deriva aplicando la regla para derivar una función logarítmica compuesta.
4	a	Recuerda que la razón de cambio es la función derivada de la función dada, para este caso considera que estás trabajando con una función exponencial.
5	a	Al tratarse de una función exponencial la razón de cambio es la derivada de la función.
6	c	Recuerda que previo a la integración debes simplificar el integrando $\frac{6^x}{2^x} = \frac{2^x \cdot 3^x}{2^2} = 3^x$, y luego integras con la fórmula $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
7	a	Integrar por sustitución haciendo u=2^x
8	a	Para calcular el valor presente P, si utilizamos a *S*(*t*)= 1000 y r = 0,06 se tiene: Valor presente $= \int_0^{20} 1000e^{-0,06t} dt = \$11647$
9	a	Podemos obtener el valor futuro B a partir del valor presente P, mediante *B*=*P*e^{rt} Valor futuro = 11647e$^{0,06(20)}$ = \$38669

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
10	a	Si usted deposita una sola suma de $\$P$, entonces $\$P$ es el valor presente de $ 50 000. Por lo tanto utilizando $B = Pe^{rt}$ con B = 50 000 y r = 0,02 y t = 8 tenemos: $50000 = Pe^{0,02(8)}$ $P = \frac{50000}{e^{0,02(8)}} = 42607$ Si usted deposita ahora $ 42 607 en la cuenta, dentro de ocho años tendrá 50 000

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	Realice la gráfica de las funciones lo que significa que $5-y^2 \geq e^y$ para toda *y* entre -2,21 y 1,24 como consecuencia, el integrando es $p(y)=5-y^2-e^y$ así la integral es $\int_{-2{,}21}^{1{,}24}\left(5-y^2-e^y\right)dy$
2	a,b	Debemos encontrar los puntos de intersección de las dos gráficas eso se logra cuando las igualamos así $\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{2x}{5}$, al resolver la ecuación tenemos *x*=0 y $x=\frac{21}{4}$, como la función f se encuentra sobre la función g, la integral es $\int_0^{21/4}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{2x}{5}\right)dx$, hay otras maneras de representar al área como una integral. Por ejemplo si restamos en el orden opuesto, el signo de la integral cambia, para compensar ponemos un signo negativo frente a la integral $\int_0^{21/4}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{2x}{5}\right)dx=-\int_0^{21/4}\left(\frac{2x}{5}-\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)dx$, y al intercambiar los límites de integración también cambia el signo de la integral así $-\int_0^{21/4}\left(\frac{2x}{5}-\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\int_{21/4}^{0}\left(\frac{2x}{5}-\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)dx$
3	c	Realiza el gráfico de las regiones *g(x)* ≥ *f(x)* en el intervalo -1,96 y -0,62, mientras que *f(x)* ≥ *g(x)* en el intervalo -0,62 y 0.93, en consecuencia la integral de la región es $\int_{-1{,}96}^{-0{,}62}\left(x^3+2x^2-e^x\right)dx+\int_{-0{,}62}^{0{,}93}(e^x-x^3-2x^2)dx$
4	c	El volumen está dado por $\int_a^b \pi\left[r(y)\right]^2 dy$, por lo tanto nos queda $\int_2^3\left(\pi y^4\right)dy=\pi\int_2^3\left(y^4\right)dy$, desarrollando la integral tenemos $\pi\int_2^3\left(y^4\right)dy=\frac{211\pi}{5}$
5	a	El volumen está dado por $\int_a^b \pi\left[r(y)\right]^2 dy$, por lo tanto nos queda $\int_2^5 \pi\left[\ln(y)\right]^2 dy=\pi\int_2^5\left[\ln(y)\right]^2 dy$

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
6	b	El volumen está dado por $\int_a^b \pi\left[r(x)\right]^2 dx$, por lo tanto la integral es $\int_1^3 \left(\frac{\pi}{x^2}\right)dx = \pi\int_1^3 x^{-2}dx$, evaluando la integral se tiene $\pi\int_1^3 x^{-2}dx = \frac{2\pi}{3}$
7	c	El volumen está dado por $\int_a^b \pi\left[r(x)\right]^2 dx$, por lo tanto la integral es $\int_1^3 \left(\pi e^{2x}\right)dx = \pi\int_1^3 e^{2x}dx$
8	c	La longitud de arco L de la curva y = f(x) sobre el intervalo [a,b] es: $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, para lo cual se recomienda primero calcular $\frac{dy}{dx}$ es decir $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$, y finalmente se aplica la fórmula de la longitud de arco sobre el intervalo $\left[\frac{1}{2},2\right]$ y simplificamos $L=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$
9	b	La longitud de arco de una función sobre un intervalo es $L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$, primero hay que calcular f´(x), si f(x) = x ln(x) entonces la derivada es *f*'(*x*) = ln*x*+1, después integra y simplifica $L=\int_1^e\sqrt{1+\left[\ln x+1\right]^2}\,dx=\int_1^e\sqrt{\ln^2 x+2\ln x+2}$
10	a	Recuerda la fórmula de la longitud de arco $L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$, en esta ocasión determina *f*'(*x*) = $2e^{2x}$, luego integra y simplifica $L=\int_{-2}^{0}\sqrt{1+\left(2e^{2x}\right)^2}\,dx=\int_{-2}^{0}\sqrt{1+4e^{4x}}\,dx$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	c	Recuerde que la función costo marginal es la derivada de la función costo por lo que se tiene $C(x)=\int(3,20-0,0001x)dx=3,20x-0,0005x^2+K$, en este caso hemos utilizado K en lugar de C por conveniencia, hay un valor que no hemos tomado en cuenta, el costo de producir 50 gorras de béisbol es \$200. Es decir C(50)=200 por lo tanto K = 41,25 por lo que la función de costo es $C(x)=3,20x-0,0005x^2+41,25$
2	b	Integrar aplicando la regla de la suma, luego integrar término a término
3	b	Integrar por partes entonces $u=\ln x$ $dv=dx$ $du=\frac{1}{x}dx$ $v=x$ Aplicando la integración por partes se tiene $\int \ln x dx = x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$
4	d	Integramos por partes, $u=x$ $dv=e^{-x}$
5	a	Utilizamos la identidad $\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$, y luego integramos término a término
6	b	Utiliza la identidad $\cos^2 x=1-sen^2 x$ y factoriza como diferencia de cuadrados y simplifica. $\int\frac{1-sen^2x}{1-senx}dx=\int\frac{(1-senx)(1+senx)}{1-senx}dx$ $=\int(1+senx)dx=x-\cos x+C$
7	b	Se trata de una integral de la forma $\sqrt{a-x^2}$, por lo tanto utilizamos $x=asen\theta$ y $dx=a\cos\theta d\theta$
8	b	Como el integrando tiene la forma $\sqrt{4-x^2}$ se usa la sustitución $x=2sen\theta$ y $dx=2\cos\theta d\theta$, también considera cambiar los límites de integración.

Autoevaluación 3		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	a	Como el integrando es una función racional donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador y tiene factores lineales no repetidos tenemos $\int \frac{18-12x}{(4x-1)(x-4)}dx = \int\left(\frac{A}{4x-1}+\frac{B}{x-4}\right)dx$, y resuelves para encontrar los valores de A y B
10	b	Como el integrando es una función racional donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador y tiene factores lineales no repetidos tenemos $\int \frac{2x+x}{(x-3)(x+3)}dx = \int\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}\right)dx$, y resuelves para encontrar los valores de A y B, integrar término a término.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	c	Para este campo direccional, los segmentos a lo largo de la recta *y*= 2*x* son todos horizontales por lo tanto satisfacen la condición $\frac{dy}{dx}=0$, si sustituimos en cada uno de las opciones se tiene que $\frac{dy}{dx}=2x-y$ obtenemos un resultado de 0 cuando *y* =2*x*
2	d	El literal d cumple $\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow x=2$, además se observa que el literal d tiene segmentos verticales a lo largo del eje x, es decir, donde y = 0 y coincide con la ecuación diferencial, con un factor de y en el denominador.
3	b	Para este campo direccional los segmentos que aparecen a lo largo de la recta y = x son todos horizontales por lo tanto la condición $\frac{dy}{dx}=0$, hay dos ecuaciones que cumplen esta condición $\frac{dy}{dx}=x-y$ y $\frac{dy}{dx}=y-x$, para elegir cuál tomar utiliza la recta y = x - 1. Sustituye x - 1 por y en las ecuaciones y tendrás como respuesta $\frac{dy}{dx}=x-y$

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
4	c	Podemos escribir la ecuación en la forma $f(y)dy = g(x)dx$ $\frac{dy}{dx} = 4x^3 y - 6x^2 y$ $\frac{dy}{dx} = y\left(4x^3 - 6x^2\right)$ $\frac{1}{y}dy = \left(4x^3 - 6x^2\right)dx$ Lo que significa que podemos resolver la ecuación mediante el método de separación de variables $\frac{1}{y}dy = \left(4x^3 - 6x^2\right)dx$ $\int \frac{1}{y}dy = \int \left(4x^3 - 6x^2\right)dx$ $\ln\lvert y\rvert = x^4 - 2x^3 + C$ $e^{\ln\lvert y\rvert} = e^{x^4 - 2x^3 + C}$ $\lvert y\rvert = e^{x^4 - 2x^3} e^{C}$ $y = Ce^{x^4 - 2x^3}$
5	c	Separamos las variables $6e^y dy = x^2 dx$ $\int 6e^y dy = \int x^2 dx$ $6e^y = \frac{x^3}{3} + C$ $e^y = \frac{x^3}{18} + C$ $\ln(e^y) = \ln\left(\frac{x^3}{18} + C\right)$ $y = \ln\left(\frac{x^3}{18} + C\right)$

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
6	d	Separamos las variables $\frac{dy}{dx}=y^{-1}x^{-3}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{x^{-3}}{y}$ $ydy=x^{-3}dx$ $\int ydy=\int x^{-3}dx$ $\frac{y^2}{2}=-\frac{1}{2x^2}+C$ $y=\pm\sqrt{-\frac{1}{x^2}+C}$
7	b	Para determinar si $y=3e^{x^5}$ es una solución se necesita sustituir en la ecuación para observar si obtenemos expresiones equivalentes en ambos lados del sigo igual. $y'=\frac{d}{dx}\left(3e^{x^5}\right)=15x^4e^{x^5}$ Sustituimos $y=3e^{x^5}$ y $y'=15x^4e^{x^5}$ en la ecuación $y'=5y$ $15x^4ex^5=5\left(3e^{x^5}\right)$ $15x^4ex^5=15e^{x^5}$ $x^4\neq 1$ Por lo tanto no es una solución de la ecuación diferencial.

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
8	a	Para determinar si $y=-e^{x^2-5x}$ es una solución se necesita sustituir en la ecuación para observar si obtenemos expresiones equivalentes en ambos lados del sigo igual. $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(-e^{x^2-5x}\right)=-\left(2x-5\right)e^{x^2-5x}$ Sustituimos $y=-e^{x^2-5x}$ y $\frac{dy}{dx}=-\left(2x-5\right)e^{x^2-5x}$ en la ecuación $\frac{dy}{dx}=y(2x-5)$ $-(2x-5)e^{x^2-5x}=\left(-e^{x^2-5x}\right)(2x-5)$ $-(2x-5)e^{x^2-5x}=-(2x-5)e^{x^2-5x}$ Por lo tanto si es una solución de la ecuación diferencial.
9	b	Para determinar si $y=\sqrt{10-x}$ es una solución se necesita sustituir en la ecuación para observar si obtenemos expresiones equivalentes en ambos lados del sigo igual. $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{10-x}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{10-x}}$ Sustituimos $y=\sqrt{10-x}$ y $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{10-x}}$ en la ecuación $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ $-\frac{1}{2\sqrt{10-x}}=-\frac{x}{\sqrt{10-x}}$ $-\frac{1}{2}\neq -x$ Por lo tanto no es una solución de la ecuación diferencial.

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
10	a	Para determinar si $f(x)=2(\ln x)^3$ es una solución se necesita sustituir en la ecuación para observar si obtenemos expresiones equivalentes en ambos lados del sigo igual. $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(2(\ln x)^3\right)=\frac{6(\ln x)^2}{x}$ Sustituimos $f(x)=2(\ln x)^3$ y $f'(x)=\frac{6(\ln x)^2}{x}$ en la ecuación $f'(x)=\frac{3f(x)}{x\ln x}$ $\frac{6(\ln x)^2}{x}=\frac{3\left(2(\ln x)^3\right)}{x\ln x}$ $\frac{6(\ln x)^2}{x}=\frac{6(\ln x)^2}{x}$ Por lo tanto si es una solución de la ecuación diferencial.

Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

Larson, R. y Edwards, B. (2014). Cálculo. Novena edición. Editorial Mc Graw Hill. México.

Stewart, J. (2018). Cáculo de una variable. Trascendentes tempranas. Octava edición. Cengage. México.

García Franchini, C. y Alvarado Arellano, M. (2016). Cálculo diferencial en competencias. Grupo Editorial Patria.

Garcia Talavera, G. (2010). Problemas de cálculo diferencial e integral. Instituto Politécnico Nacional.

Anaya, F. J. (1995). Cálculo integral: academia de matemáticas. Instituto Politécnico Nacional.

García Hernández, A. E. (2015). Ecuaciones diferenciales. Grupo Editorial Patria.