



UTPL
La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Geometría y su Didáctica

Guía didáctica



Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Departamento de Ciencias de la Educación

Sistemas de Conocimiento de Geometría y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
▪ <i>Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)</i>	V

Autor:

Bustillos Ronquillo Hernan Serafín



E D U C _ 3 1 5 0

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento de Geometría y su Didáctica

Guía didáctica

Bustillos Ronquillo Hernan Serafin

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.

Telefax: 593-7-2611418.

San Cayetano Alto s/n.

www.ediloja.com.ec

edilojacialtda@ediloja.com.ec

Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-022-6



Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual
4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)

Usted acepta y acuerda estar obligado por los términos y condiciones de esta Licencia, por lo que, si existe el incumplimiento de algunas de estas condiciones, no se autoriza el uso de ningún contenido.

Los contenidos de este trabajo están sujetos a una licencia internacional Creative Commons **Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 (CC BY-NC-SA 4.0)**. Usted es libre de **Compartir** – copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato. **Adaptar** – remezclar, transformar y construir a partir del material citando la fuente, bajo los siguientes términos: **Reconocimiento**– debe dar crédito de manera adecuada, brindar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciatario. **No Comercial**-no puede hacer uso del material con propósitos comerciales. **Compartir igual**-Si remezcla, transforma o crea a partir del material, debe distribuir su contribución bajo la misma licencia del original. No puede aplicar términos legales ni medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia. <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Índice

1. Datos de información.....	9
1.1. Presentación de la asignatura	9
1.2. Competencias genéricas de la UTPL.....	9
1.3. Competencias específicas de la carrera.....	10
1.4. Problemática que aborda la asignatura	11
2. Metodología de aprendizaje.....	11
3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje	14
 Primer bimestre.....	 14
Resultado de aprendizaje 1	14
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje.....	15
 Semana 1	 17
 Unidad 1. Relaciones entre rectas y ángulos	 18
1.1. Los ángulos y sus relaciones	18
1.2. Introducción a la demostración geométrica	23
1.3. Relaciones: Rectas perpendiculares.....	24
1.4. La demostración formal de un teorema	25
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	27
Autoevaluación 1.....	28
 Semana 2	 31
 Unidad 2. Rectas paralelas	 31
2.1. Postulado paralelo y ángulos especiales	31
2.2. Demostración indirecta	33
2.3. Demostración del paralelismo de rectas	33
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	34
Autoevaluación 2.....	36

Índice	
Semana 3	39
Unidad 3. Los triángulos y sus relaciones	39
3.1. Triángulos congruentes.....	39
3.2. Triángulos isósceles	40
3.3. Desigualdades en un triángulo.....	41
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	42
Autoevaluación 3.....	44
Semana 4	48
Unidad 4. Los cuadriláteros y sus relaciones	48
4.1. Propiedades de un paralelogramo	48
4.2. El rectángulo, el cuadrado y el rombo.....	49
4.3. El trapezoide.....	50
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	52
Autoevaluación 4.....	53
Semana 5	56
Unidad 5. Círculos	56
5.1. Círculos y segmentos y ángulos relacionados.....	56
5.2. Relaciones de recta y segmento en el círculo	58
5.3. Algunas construcciones y desigualdades para el círculo	59
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	60
Autoevaluación 5.....	62
Semana 6	66
Unidad 6. Áreas de polígonos y círculos.....	66
6.1. Perímetro y área de polígonos	66
6.2. Polígonos regulares y área	69
6.3. Circunferencia y área de un círculo.....	70
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	73

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Autoevaluación 6.....	74
Semana 7	77
Unidad 7. Superficies y Sólidos	78
7.1. Prismas, área y volumen	78
7.2. Pirámides, área y volumen	80
7.3. Cilindros y conos.....	83
7.4. Poliedros y esferas.....	85
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	88
Autoevaluación 7.....	90
Semana 8	93
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	93
Segundo bimestre	95
Resultado de aprendizaje 2	95
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje.....	95
Semana 9	95
Unidad 8. Vectores tridimensionales. Introducción	96
8.1. Vectores.....	96
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	97
8.2. Operaciones Básicas	98
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	100
8.3. Propiedades de los vectores	101
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	102
Autoevaluación 8.....	104

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Semana 10	107
 Unidad 9. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.....	107
9.1. Ecuaciones de la recta en el espacio	107
9.2. Recta definida como intersección de dos planos	110
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	112
Autoevaluación 9.....	114
Semana 11	116
 Unidad 10. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio	116
10.1.Intersección de una recta y un plano.....	116
10.2.Posiciones relativas de 2 rectas en el espacio.....	118
10.3.Recta perpendicular a un plano	120
10.4.Distancia mínima entre 2 rectas alabeadas	122
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	123
Autoevaluación 10	125
Semana 12	128
 Unidad 11. Posición relativa de dos planos en el espacio.....	128
11.1.Posiciones relativas de 2 planos en el espacio.....	128
11.2.Distancia de un punto a un plano	131
11.3.Proyección de un punto y de una recta sobre un plano..	132
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	134
Autoevaluación 11	136
Semana 13	139
 Unidad 12. Posición relativa de tres planos en el espacio.....	139
12.1.Los tres planos son coincidentes	141
12.2.Los tres planos son paralelos	141
12.3.Los tres planos se cortan en una recta	142
12.4.Dos planos son paralelos y cortan al tercero.....	143
12.5.Los tres planos se cortan en un punto	144
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	145

Autoevaluación 12	147
Semana 14	150
 Unidad 13. Posición relativa de una recta y un plano en el espacio	150
13.1.La recta viene definida por dos planos secantes.....	150
13.2.La recta viene definida por un punto y un vector	152
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	153
Autoevaluación 13	155
 Semana 15	158
 Unidad 14. Ángulos y Distancias.....	158
14.1.Ángulo entre dos planos.....	158
14.2.Ángulo entre recta y plano.....	159
14.3.Ángulo entre dos rectas.....	160
14.4.Distancia punto-recta en R3	161
14.5.Distancia entre dos rectas paralelas	163
14.6.Distancia entre rectas alabeadas.....	164
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	167
Autoevaluación 14	169
 Semana 16	171
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	171
4. Solucionario	173
5. Referencias bibliográficas	198

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura



1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Comunicación oral y escrita.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Trabajo en equipo.
- Comunicación en inglés.
- Comportamiento ético.
- Organización y planificación del tiempo.

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física, basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.
- Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad, y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado en relación a las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.
- Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza-aprendizaje y de evaluación que integren la práctica de investigación acción hacia producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

- Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

Limitada preparación de bachillerato en los conceptos básicos y fundamentos teóricos de la matemática dificulta el aprendizaje significativo de nuevos conocimientos disciplinares y, en consecuencia, impiden una formación integral enfocada a la modelización y resolución de problemas del entorno natural y social



2. Metodología de aprendizaje

La geometría es un instrumento reflexivo, que permite resolver problemas de diversa índole y comprender a nuestro mundo que nos ofrece una amplia gama de variedades y formas geométricas en la naturaleza Y en el escenario creado por el hombre, con este objetivo, el estudio de la asignatura Sistemas de Conocimiento de Geometría y su Didáctica, se convertirá en oportunidades de aprendizaje, donde los educandos participen activamente en el desarrollo de su conocimiento y se apropien de él (Hernández y Villalba, 2001), se diseñan actividades y estrategias fundamentadas con una metodología activa.

La metodología que aplicaremos a nuestra asignatura es TECHNOLOGY, PEDAGOGY AND CONTENT KNOWLEDGE (TPACK, Tecnología, Pedagogía y Contenido). Permitirá alcanzar un aprendizaje significativo, mejorar el rendimiento académico y cumplir con los resultados de aprendizaje propuestos, obteniendo un estudio activo que lleve al alumno a un aprendizaje autónomo.

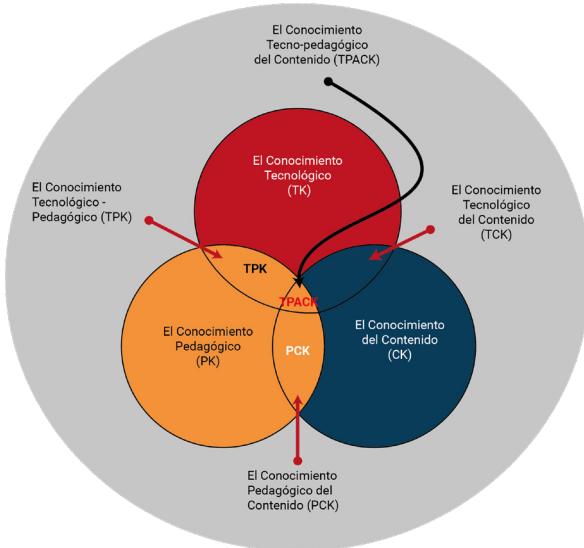


Figura 1. TPACK. Technology, Pedagogy And Content Knowledge

Nota. El núcleo del enfoque TPACK parte de la compleja interacción de tres formas de conocimiento: Contenido (CK), Pedagogía (PK) y Tecnología (TK) para ir más allá, al enfatizar los tipos de conocimiento que se encuentran en las intersecciones, el conocimiento de contenido pedagógico (PCK), conocimiento de contenido tecnológico (TCK), conocimiento pedagógico tecnológico (TPK) para llegar al Conocimiento Tecno – Pedagógico del Contenido (TPACK)

Para mayor información sobre la integración de la tecnología en su enseñanza, revise este enlace [TPACK](#).

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

La conceptualización teórica se obtendrá viendo micro videos, accediendo a recursos planteados en el EVA y la representación de las figuras utilizando herramientas virtuales disponibles en la Web, las actividades en contacto con el docente será el taller de aplicación con un enfoque experimental para la consolidación de los aprendizajes, en las tutorías que serán grabadas, las mismas que estarán a disposición para revisar o para los estudiantes que no pudieron participar.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje



Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

Aplica con pertinencia los postulados y principios de la geometría en el plano, la modelación y resolución de problemas.

Mediante el estudio de este bimestre, usted tendrá la capacidad de aplicar con pertinencia los postulados y principios de la geometría en el plano, la modelación y resolución de problemas.



Figura 3. Valencia España Calatrava Puesta Del Sol

Nota. Adaptado de Valencia España Calatrava Puesta Del Sol, por Papagnoc, Pixabay([enlace web](#)) CC BY 2.0

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estimados estudiantes, esta asignatura facilitará el conocimiento a ustedes, como docentes en formación, de la Carrera Pedagogía de las Ciencias Experimentales -Pedagogía de las Matemáticas y la Física en el uso de los postulados y principios de la geometría en el plano, la modelación y resolución de problemas. La geometría es considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural del hombre, dada su aplicación en diversos contextos y su capacidad formadora del razonamiento lógico (Báez e Iglesias, 2007); además, permite desarrollar en los estudiantes habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente, argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

En concordancia, la UTPL, con el afán de ofrecer una formación de calidad, cuenta con la infraestructura tecnológica que permite, facilita la información y la comunicación interactiva entre los diferentes actores del proceso educativo, garantizando así que los profesionales del área educativa cuenten con las competencias necesarias para innovar la práctica docente dentro y fuera de aula y atender así las necesidades educativas especiales y la diversidad de su grupo de estudiantes.

Los contenidos que se estudiarán para cumplir las competencias de la asignatura están estructurados en dos capítulos: Geometría en el plano y Geometría Espacial, con siete unidades cada una, distribuidas en un capítulo por bimestre.

En el primer bimestre Geometría en el plano, se estudia en la primera unidad las Relaciones entre rectas y ángulos, segunda unidad Rectas paralelas, tercera unidad Los triángulos y sus relaciones, cuarta unidad los Cuadriláteros y sus relaciones, quinta unidad los Círculos, ángulos y medidas de ángulos en el círculo, sexta unidad las Áreas de polígonos y círculos, postulados, perímetro y, en la unidad siete Superficies y Sólidos

En el segundo bimestre Geometría espacial, se estudia en la unidad octava los Vectores tridimensionales, unidad novena las Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio, unidad décima las Posiciones relativas de dos rectas en el espacio, unidad décima primera, la Posición relativa de dos planos en el espacio, unidad décima segunda, la Posición relativa de tres planos en el espacio, unidad treceava la Posición relativa de una recta y un plano en el espacio y, por último, la unidad catorceava los Ángulos y Distancias.

Con el objeto de mantener la atención y el interés, trataremos de dirigir la búsqueda de nuevos conocimientos y habilidades geométricas y las que se orientan a la aplicación creadora de los conocimientos y habilidades geométricas adquiridas, generando situaciones de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de formas

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

lógicas del pensamiento, de la imaginación espacial, de la visión espacial, así como de la elaboración, formulación y argumentación de conjeturas.

Se actividades calificadas y recomendadas, así como recursos externos que le permitirán ahondar en el tema.

¡Bienvenidos!

Capítulo 1. Geometría en el plano

En geometría se puede trazar realidades, ilusiones o arte de magia, que son actividades exigentes a nuestro razonamiento, un ejemplo está en la página 1 del texto básico, que lo tomaremos como la introducción al análisis de los enunciados y los tipos de razonamiento utilizados en geometría.



Semana 1

Iniciamos el estudio con las Relaciones entre rectas y ángulos enfocados en Los ángulos y sus relaciones; la Introducción a la demostración geométrica; las Relaciones: Rectas perpendiculares y La demostración formal de un teorema



Unidad 1. Relaciones entre rectas y ángulos

Es importante realizar un recordatorio del vocabulario y propiedades de la geometría, que están en el texto básico en el apartado 1.3 Primeras definiciones y postulados, que son la base para aprender definiciones y analizar la utilidad de la geometría en la vida.

1.1. Los ángulos y sus relaciones

Definiendo a un ángulo como la unión de dos segmentos de recta que comparten un punto extremo común, que, para nuestro estudio los segmentos de rectas serían los radios de la circunferencia.

Es necesario remitirse al texto básico en el apartado 1.4 Los ángulos y sus relaciones en donde se encuentra en forma detallada todo lo referente a los tipos de ángulos, clasificación de pares de ángulos y la construcción de ángulos.

Después de la lectura comprensiva del Texto Básico, apartado 1.4 Con la utilización de una herramienta virtual de su experticia (recomiendo GeoGebra), en una circunferencia, tracemos un ángulo y sus partes (Fig. 1.1) y en otra los tipos de ángulos (Fig. 1.2)

En la figura 1.1 el ángulo lo simbolizamos con $m\angle ABC$ o $\angle CBA$

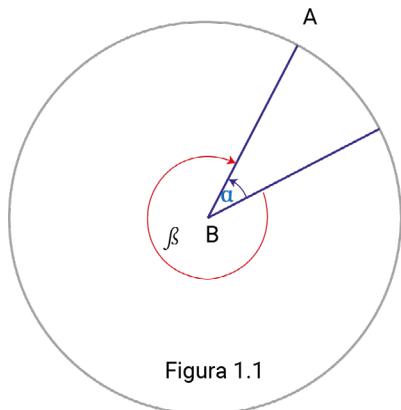


Figura 1.1

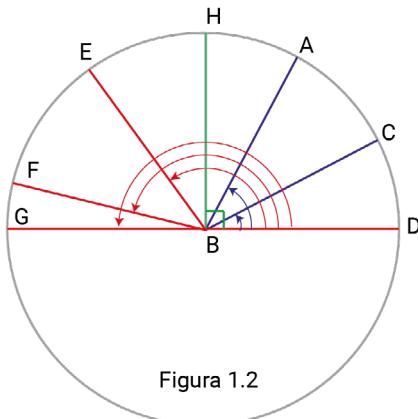


Figura 1.2

En trigonometría, ángulo es la amplitud de rotación que describe un segmento de recta en torno a uno de sus extremos. El ángulo es positivo si gira en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo, en sentido de las manecillas del reloj.

TIPOS DE ÁNGULOS

- **Agudo**, menor a 90° , en la Figura 1.2 los que están en el primer cuadrante, radios azules, formando ángulo con BD
- **Recto**, mide 90° , en la Figura 1.2 es $\angle HBD$
- **Obtuso**, mayor a 90° y menor a 180° , en la Figura 1.2 los que están en el segundo cuadrante, radios de color café, formando ángulo con BD.
- **Llano**, mide 180° , en la Figura 1.2 es $\angle GBD$, es decir, está formado por radios opuestos.
- **Reflejo**, cuya medida está entre 180° y 360° , el $\angle \beta$ de la Figura 1.1

CLASIFICACIÓN DE PARES DE ÁNGULOS

La clasificación de pares de ángulos es respecto a las relaciones angulares que existen en un par de ángulos, clasificándose en: adyacentes, congruentes, opuestos y verticales, que se subdivide en internos, alternos internos, externos, alternos externos y correspondientes.

Con la ayuda de una herramienta virtual de su dominio (recomiendo GeoGebra), trazar ángulos adyacentes (Fig. 1.3) y congruentes (Fig. 1.4)

Dos ángulos son adyacentes si tienen un lado en común y no tiene puntos interiores comunes (Fig. 1.3)

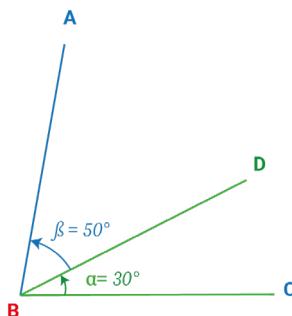


Figura 1.3.

Los ángulos congruentes son los que tienen la misma medida (Fig. 1.4).

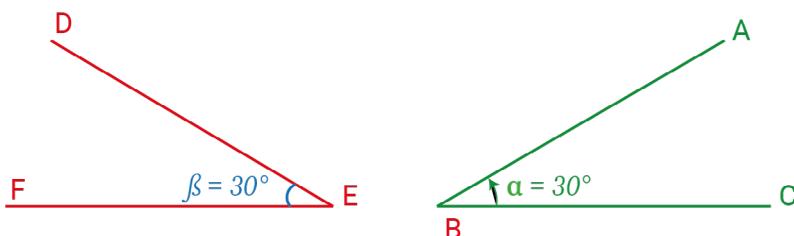


Figura 1.4.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Dos ángulos son complementarios cuya suma de medidas es igual a 90° ($\pi/2$ rad). A cada ángulo se lo llama complemento del otro. (Fig. 1.5), $\alpha + \beta = 90^\circ$

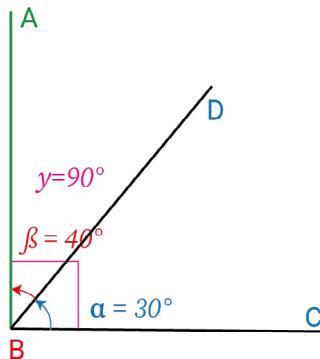


Figura 1.5.

Dos ángulos son suplementarios cuya suma de medidas es igual a 180° ($\pi/2$ rad). A cada ángulo se lo llama suplemento del otro. (Fig. 1.6), $\alpha + \beta = 180^\circ$.

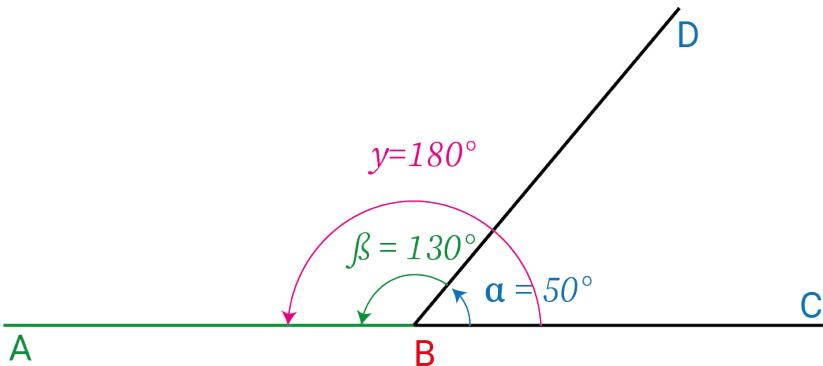


Figura 1.6.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

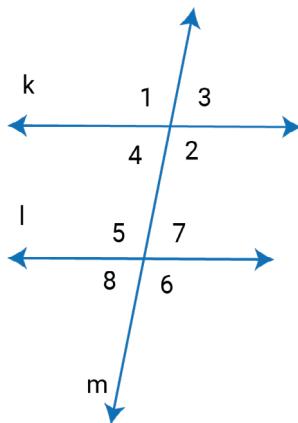


Figura 1.7.

Ángulos verticales, formados por dos rectas cortadas por una transversal, (Fig. 1.7).

Ángulos internos

2 4, 5, 7

Ángulos externos

1, 3, 8, 6

Ángulos alternos internos

2 y 5

4 y 7

Ángulos alternos externos

3 y 8

1 y 6

Ángulos correspondientes, en este caso, por ser k y l paralelas son también congruentes

1 y 5, 3 y 7,

4 y 8, 2 y 6

EJEMPLO 1.

Dado $m \angle \alpha = 50^\circ$, encuentre: a) el complemento x y b) el suplemento y.

Solución (Fig. 1.5 y Fig. 1.6):

- $x + 50^\circ = 90^\circ$, por tanto, el complemento (x) = 40°
- $y + 50^\circ = 180^\circ$, por tanto, el suplemento (y) = 130°

Para que identifique los tipos y clase de ángulos por favor revisar el siguiente video [Determinación de triángulos congruentes](#).

En este video se expone las reglas para determinar si un triángulo es congruente mediante el desarrollo de un ejercicio para encontrar qué triángulos son congruentes.

Después del video, invito a analizar los ejemplos de los triángulos congruentes. Páginas 128 a 134 y los ejemplos pares del texto básico. Apartados 4.1 a 4.4.

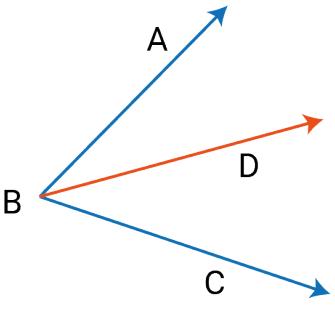
1.2. Introducción a la demostración geométrica

En la vida diaria, para creer algo se necesita pruebas, de forma similar, para creer ciertos principios geométricos es necesario tener una prueba, por tal motivo es necesario conocer algunas directrices para comprobar propiedades geométricas para lo cual se utilizarán ejemplos que ayuden a desarrollar demostraciones.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Para ingresar al campo de las demostraciones geométricas, le invito a leer el texto básico, apartado 1.5 Introducción a la demostración geométrica, que de manera didáctica enseña cada paso las demostraciones geométricas. Analice, detenidamente cada uno de los 5 ejemplos

A continuación de la lectura, esquematice la estrategia para una demostración y desarrolle los ejercicios impares desde el 23 hasta el 31.

Complete las razones faltantes para la demostración geométrica.	DEMOSTRACIÓN	DEMOSTRACIÓN
Dado: biseca $\angle ABC$ Demuestre: $m \angle ABD = \frac{1}{2} (m \angle ABC)$ 	Enunciados	Razones

1.3. Relaciones: Rectas perpendiculares

Para el estudio de este contenido remítase al texto básico apartado 1.6 y revise las relaciones y las construcciones que conducen a rectas perpendiculares y analice su aplicación; es muy

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

importante que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos.

Las rectas perpendiculares, no necesariamente deben ser verticales y horizontales, son rectas que convergen para formar ángulos adyacentes congruentes.

Generalmente se coloca un pequeño cuadro en la apertura de un ángulo formado por las dos rectas para indicar que son perpendiculares

Para mejorar las destreza en las demostraciones y resolución de problemas, revise las comprobaciones que realiza cada uno de los ejemplos y teoremas, argumente cada uno de los pasos a seguir con su propia terminología y además traduzca del lenguaje formal al geométrico.

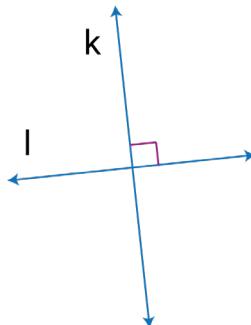


Figura 1.8.

1.4. La demostración formal de un teorema

La demostración es un sistema de razonamientos, por medio de los cuales la veracidad de la proposición que se demuestra se deduce de axiomas y de verdades antes demostradas.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

La respuesta a la pregunta ¿Cómo debe ser la demostración? Lo encuentra en el texto básico apartado 1.7, revise las Partes esenciales de la demostración formal de un teorema y el Recíproco de un enunciado. Es importante que tome en cuenta los diferentes teoremas y analice los ejemplos resueltos

Recurso de aprendizaje

Para comprender de mejor manera estos temas importantes para su formación, por cuanto constituyen los fundamentos axiomáticos del curso, invito para que: analice el diferente material disponible en la nube, la mayoría es una guía para preparar el material didáctico para nuestras clases.

Estudie la explicación detallada de las demostraciones y algunas ejemplificaciones, habilitando el hipervínculo [Introducción a las demostraciones geométricas](#)

En este video se explica con claridad varios ejemplos que ayudará a comprender las demostraciones geométricas, utilizando una tabla que describe cada paso, de las afirmaciones con sus respectivas razones.

Señores estudiante, es necesario que instalen en su equipo la aplicación GeoGebra con la cual se realizarán los ejercicios con la finalidad de visualizar en la realidad las figuras geométricas y sus posibles soluciones, [GeoGebra 001 descarga, instalación e inicio de GeoGebra 5.0.](#) o [GeoGebra 6.0.](#)

El video muestra los procesos de descarga, instalación e inicio del programa GeoGebra, en su versión 5.0, para el sistema operativo Windows, se puede ver de qué se trata esta aplicación y la viabilidad de realizar un recorrido, para conocer las múltiples tareas que son posibles realizar. El proceso en la versión [Geogebra 6.0](#) es similar.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Revisen las páginas del texto en su primera unidad, los apartados: Los ángulos y sus relaciones, Introducción a la demostración geométrica, Relaciones: Rectas perpendiculares y La demostración formal de un teorema, que está explicado hasta la página 58



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de esta semana es plasmar dichos conocimientos, por ello propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido

Compruebe su avance en el estudio de las Relaciones entre rectas y ángulos y resuelva las interrogantes planteadas

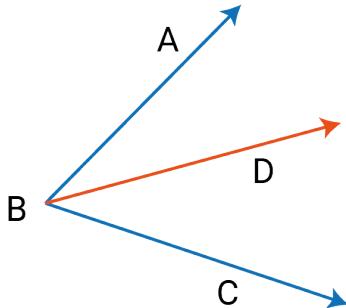
- ¿Cuáles son los tipos de ángulos? Trace cada uno de ellos
- Enumere los ángulos según su clasificación. Trace cada uno de ellos
- ¿Qué es una demostración?
- ¿Qué garantiza la verdad de las proposiciones obtenidas por deducción?
- ¿Para qué hace falta la demostración?
- ¿Cómo debe ser la demostración?

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de Relaciones entre rectas, ángulos, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes



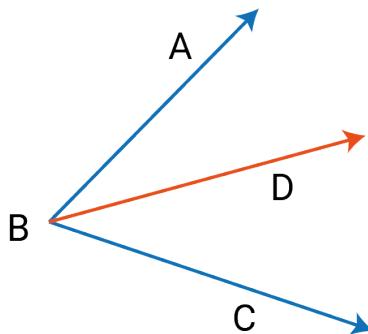
Autoevaluación 1

1. () En el Postulado del transportador La medida de un ángulo es un número positivo único.
2. () Un ángulo cuya medida es menor que 90° es un ángulo recto.
3. () Si la medida del ángulo está entre 90° y 180° , el ángulo es obtuso.
4. () un ángulo llano es aquel cuyos lados forman rayos opuestos.
5. () Un ángulo cuya medida es exactamente 270° es un ángulo llano.
6. En la figura encuentre $m \angle ABC$ si $m \angle ABD = 25^\circ$ y $m \angle DBC = 38^\circ$.

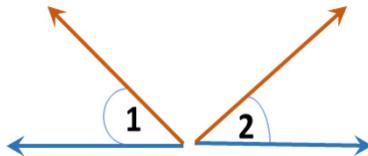


- a. A. 73° .
- b. B. 63° .
- c. C. 38° .

7. En la figura encuentre $m \angle ABC$ si $m \angle ABD = x^\circ$ y $m \angle DBC = (4x + 5)^\circ$.



- a. $5x + 5)^\circ$.
 - b. $10x^\circ$.
 - c. 10° .
8. Dado $\angle 1 \cong \angle 2$.
 $M \angle 1 = 4x + 20$
 $M \angle 2 = 6x + 4$
Encuentre x:



- a. 16° .
- b. -16° .
- c. 24° .

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

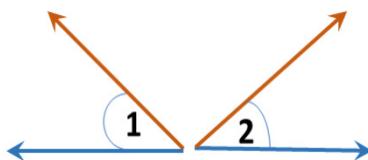
Referencias bibliográficas

9. Dado $\angle 1 \cong \angle 2$.

$$M\angle 1 = 8x - 25$$

$$M\angle 2 = 4x + 2$$

Encuentre x:



- a. 23° .
 - b. 25° .
 - c. $4x$.
10. Dado que $m\angle = 41^\circ$, encuentre el complemento y el suplemento.
- a. 41° y 139° .
 - b. 139° y 49° .
 - c. 49° y 139° .

[Ir al solucionario](#)



Semana 2

Estimado estudiante, en esta semana, estudiaremos lo relacionado a las rectas paralelas, los postulados y ángulos especiales, continuaremos con la Demostración indirecta y la Demostración del paralelismo de rectas



Unidad 2. Rectas paralelas

2.1. Postulado paralelo y ángulos especiales

Las rectas paralelas son dos o más rectas en un plano que nunca se interceptan. Existen muchos ejemplos de rectas paralelas como los rieles del tren, las veredas de una calle, los lados opuestos del marco rectangular de un espejo y los estantes de un librero.

Utilizaremos GeoGebra para realizar las construcciones geométricas. Trazar dos rectas perpendiculares similar a la Figura 2.1

Para el estudio de este contenido remítase al texto básico y revise la temática Postulado paralelo y ángulos especiales. Analice los postulados 10 y 11, los diferentes teoremas; es muy importante

que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos

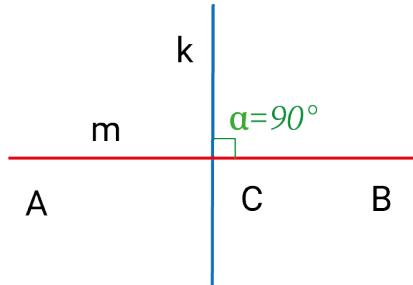


Figura 2.1.

Procedimiento:

Nº	Nombre	Icono	Descripción	Valor
1	Punto A			$A = (1, 4)$
2	Punto B			$B = (6, 4)$
3	Recta f		Recta A B Recta(A, B)	$f: y = 4$
4	Punto C		Punto sobre f Punto(f)	$C = (3.52, 4)$
5	Recta g		Recta que pasa por C	$g: x = 3.52$
6	Ángulo a		Ángulo entre f, g Ángulo(f, g)	$\alpha = 90^\circ$

Con estos pasos se han trazado dos rectas perpendiculares k y m

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Analice las definiciones propuestas en el texto básico, verifique los ejemplos resueltos y desarrolle los ejercicios 5 y 13 del tema de rectas perpendiculares, páginas 78 y 79.

2.2. Demostración indirecta

Cuando no es posible o es difícil, utilizando el método directo para probar un teorema se utiliza el método indirecto o demostración por reducción al absurdo.

Para el estudio de este contenido remítase al texto básico páginas, 80 a 84 y revise la Demostración indirecta. Analice la LEY DE INFERNICIA NEGATIVA (CONTRAPOSICIÓN) y las estrategias para la demostración, es muy importante que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos.

Estimado estudiante, le sugiero para conocer los pasos de las demostraciones indirectas visitar el Blog de Ola Mageo,(s.f). [DEMOSTRACIÓN INDIRECTA](#), en este sitio se puede analizar varios ejemplos, que en forma didáctica explica cada paso del desarrollo de la demostración indirecta.

2.3. Demostración del paralelismo de rectas

Realizaremos un repaso de los postulados y teoremas importantes, tomando como la hipótesis "Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal".

Complete la demostración geométrica.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

	DEMOSTRACIÓN	DEMOSTRACIÓN
Dado: $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$ Demuestre: $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$	Enunciados	Razones
	1. $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$ y 2. $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$ 3. $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$	1. Dado 2. Si dos rectas son \parallel a una tercera recta, entonces esas rectas son \parallel entre sí

Estimado estudiante para contestar la pregunta ¿cómo se determina si dos rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas?, le invito a ver el video [Relación entre rectas](#). En este video usted aprenderá a determinar cuándo dos rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Para el estudio de este contenido remítase al texto básico páginas 86 a 92 y revise Demostración del paralelismo de rectas. Analice el Postulado 11, los diferentes teoremas y las estrategias para la demostración; es muy importante que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos.

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 2 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido

Compruebe su avance en el estudio de las Relaciones Rectas paralelas y resuelva las interrogantes planteadas

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

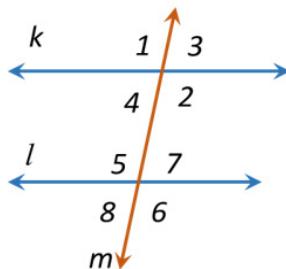
- ¿A qué se refiere el postulado 10 del texto básico? Mediante un gráfico explique
- ¿A qué se refiere el postulado 11 del texto básico? Mediante un gráfico explique
- ¿Qué es una demostración indirecta?
- ¿En qué consiste la Ley de inferencia negativa (contraposición)?

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de Rectas paralelas, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.



Autoevaluación 2

1. () Teorema. A partir de un punto fuera de una recta hay exactamente más de una recta perpendicular a la recta dada.
2. () son rectas en el mismo plano y no se intersecan.
3. () Postulado. A través de un punto fuera de una recta, exactamente una recta es paralela a la recta dada.
4. () Postulado. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son planos.
5. () Teorema. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.
6. En la figura $k \parallel l$ y $m \angle 5 = 127$. Encuentre $m \angle 1$, $m \angle 2$ y $m \angle 8$.



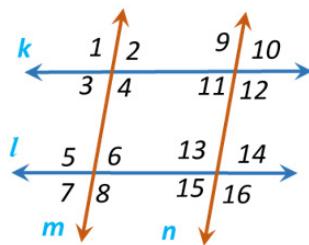
- a. $53^\circ, 53^\circ, 127^\circ$.
- b. $127^\circ, 53^\circ, 53^\circ$.
- c. $127^\circ, 53^\circ, 127^\circ$.

7. Dado $m \angle n$ con transversal a l .

$$m \angle 7 = x^2 + 2x - 6$$

$$m \angle 14 = x^2 + 6$$

Encuentre x y el $m \angle 14$:



- a. 9 y 78° .
- b. 42 y 6° .
- c. 6 y 42.

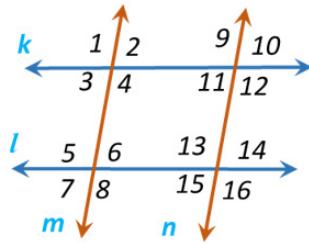
8. Dado $k \angle l$ y transversal a m .

$$m \angle 11 = 3x + 5y$$

$$m \angle 13 = 9x + 3y$$

$$m \angle 14 = 12x + 5y$$

Encuentre x , y , $m \angle 13$ y $m \angle 14$:



- a. 5, 15, 72° y 108° .
- b. 4, 12, 72° y 108° .
- c. 4, 12, 65° y 115.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

9. En un triángulo OPQ, $m \angle O = 40^\circ$ y $m \angle P = 69^\circ$, encuentre $\angle Q$.
- a. 71° .
 - b. 140° .
 - c. 45° .
10. El $\angle P$ es un ángulo recto en el triángulo OPQ, $m \angle O = 52^\circ$, encuentre $\angle Q$.
- a. 38° .
 - b. 90° .
 - c. 45° .

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



Semana 3

"El conocimiento se obtiene de la experiencia mediante la intuición y culmina en la abstracción por el poder de la razón humana".

Aristóteles

Ahora bien, sigamos con la misma dedicación y en especial con el interés por aprender, en esta semana corresponde estudiar la Unidad 3. Los triángulos y sus relaciones, que abraza a los triángulos congruentes, los triángulos isósceles y finalizamos con las desigualdades en un triángulo



Unidad 3. Los triángulos y sus relaciones

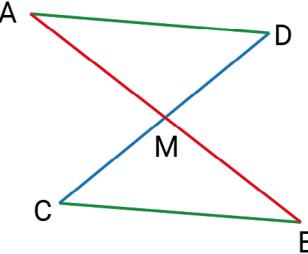
3.1. Triángulos congruentes

Dos triángulos son congruentes si se cumple que son exactamente iguales en tamaño sus elementos, es decir si sus lados y sus ángulos respectivos tienen igual medida, aunque su posición y orientación sean distintas.

En el texto básico revise el punto 3.1 Triángulos congruentes. Analice los postulados 12, 13 y 14, los métodos para demostrar la congruencia de triángulos; es muy importante que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos

Estimado estudiante le sugiero, para conocer los métodos que se utiliza para demostrar la congruencia de triángulos ver el siguiente video [Determinación de triángulos congruentes](#).

En el video se mira como aplica los postulados LLL, LAL, ALA y AAL para encontrar triángulos congruentes, de una manera muy didáctica, que se puede utilizar, como ejemplo, para la creación de material didáctico.

EJEMPLO 3.1	DEMOSTRACIÓN	DEMOSTRACIÓN
DADO: AB y CD se bisecan entre sí en M $AC \cong DB$ DEMUESTRE: $\triangle AMC \cong \triangle BMD$	Enunciados	Razones
 <i>Figura 3.1.</i>	1. AB y CD se bisecan entre sí en M 2. $AM \cong MB$ $CM \cong MD$ 3. $AC \cong DB$ 4. $\triangle AMC \cong \triangle BMD$	1. Dado 2. Si se biseca un segmento, los segmentos formados son \cong 3. Dado 4. 4. LLL

En el texto básico y revise la parte 3.3 Triángulos isósceles. Analice los teoremas, los corolarios y las propiedades de los triángulos, es muy importante que tome en cuenta las definiciones

3.2. Triángulos isósceles

y analice los ejemplos resueltos, plantee conclusiones que le ayudarán en la demostración de teoremas.

EJEMPLO 3.2. Demostración gráfica del teorema: “Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a esos ángulos también son congruentes”.

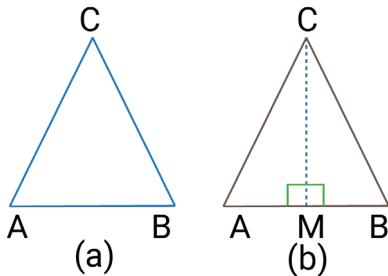


Figura 3.2.

DADO: ΔABC con $\angle A \cong \angle B$ [(Fig. 3.2 (a))]

DEMUESTRE: .

DEMOSTRACIÓN: trace [fig. 3.2 (b)], se observa que $\Delta CMA \cong \Delta CMB$ (por LLL).

Ahora (por. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes. PCTCC)

3.3. Desigualdades en un triángulo

La desigualdad del triángulo o desigualdad de Minkowski es un teorema de la geometría euclíadiana, que permite conocer si se puede trazar un triángulo con tres segmentos de determinada longitud. La teoría establece que en todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado.

De tal forma que si a , b y c son las longitudes los lados de un triángulo, se cumplirán las siguientes desigualdades:

1. $a + b > c$
2. $a + c > b$
3. $b + c > a$

Ejemplo 3.3.1, con los segmentos a, b y c, de medidas 4,5 y 3 respectivamente ¿será posible construir un triángulo?

a + b>c	4 + 5 > 3, 9 > 3	Cumple
a + c>b	4 + 3 > 5; 7 > 5	Cumple
b + c>a	5 + 3 > 4; 8 > 4	Cumple
Si es posible, porque cumple las tres desigualdades		

Ejemplo 3.3.2, con los segmentos a, b y c, de medidas 3,6 y 9 respectivamente ¿será posible construir un triángulo?

a + b>c	3 + 6 > 9, 9 = 9	No Cumple
a + c>b	3 + 9 > 6; 12 > 6	Cumple
b + c>a	6 + 9 > 3; 15 > 3	Cumple
No es posible, porque no cumple las tres desigualdades		

En el texto básico revise el punto 3.5 Desigualdades en un triángulo. Analice los lemas (teorías de apoyo), teoremas y los corolarios, es muy importante que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos, plantee conclusiones que le ayudarán en la demostración de teoremas.

Señor estudiante, para sintetizar la unidad, le invito a leer el siguiente contenido [Propiedades del triángulo isósceles](#), que, con la ayuda de GeoGebra, realizar la demostración y podrá deducir las siguientes propiedades de los triángulos isósceles: a) los ángulos adyacentes a la base son congruentes; b) la altura y la mediana, referidas a la base, son congruentes; y c) la bisectriz divide en partes congruentes al ángulo formado por los lados congruentes.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 3 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido

Compruebe su avance en el estudio de las desigualdades en un triángulo y resuelva las interrogantes planteadas

- ¿Qué establece la teoría de desigualdades en un triángulo?
- ¿Qué son los lemas (teorías de apoyo)? Describa cada uno de ellos.
- ¿Qué son los corolarios? Describa cada uno de ellos.

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de las desigualdades en un triángulo, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.



Autoevaluación 3

1. () Definición. Dos triángulos son congruentes si dos partes del primer triángulo son congruentes con las dos partes correspondientes del segundo triángulo.
2. () Postulado. Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LLL).
3. () Postulado. Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LAL).
4. () Definición. En este contexto identidad es la razón que se cita cuando se comprueba que un segmento de recta (o un ángulo) es congruente consigo mismo; también se le conoce como propiedad de congruencia inversa.
5. () Postulado. Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (ALA).

Índice

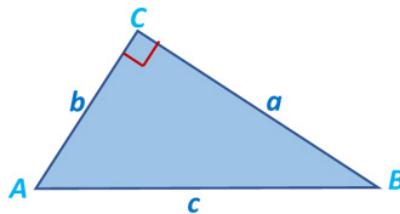
Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

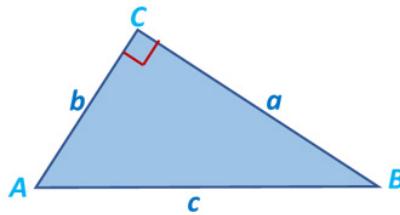
Referencias bibliográficas

6. Encuentre la longitud lado c del triángulo rectángulo ACB, si $a = 3$ y $b = 4$.



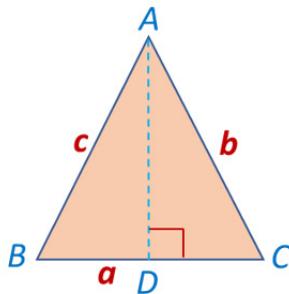
- a. 5.
- b. 5° .
- c. 6.

7. Encuentre la longitud lado a del triángulo rectángulo ACB, si $c = 10$ y $b = 8$.

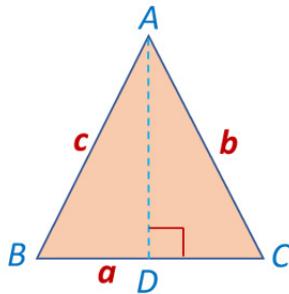


- a. 5.
- b. 5° .
- c. 6.

8. Encuentre la medida de cada ángulos del triángulo isósceles si $m \angle A = 34^\circ$.



- a. $45^\circ, 45^\circ$.
 - b. $73^\circ, 73^\circ$.
 - c. $34^\circ, 73^\circ$.
9. En el triángulo isósceles los $m \angle B = m \angle C$, $c = 4.47$ y $a = 4.0$. Encuentre el perímetro y la longitud de b



- a. $12.40, 4.7$.
- b. $12.70, 4.0$.
- c. $13.40, 4.7$.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

10. En un triángulo ABC se conoce la longitud de sus tres lados, $AB = 4$, $BC = 6.72$ y $AC = 7.36$, ordene los ángulos por su tamaño.
- a. $\angle B, \angle A, \angle C$.
 - b. $\angle A, \angle B, \angle C$.
 - c. $\angle C, \angle A, \angle B$.

[Ir al solucionario](#)



Semana 4

"La matemática es el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo".
Galileo Galilei

En la cuarta semana corresponde estudiar la Unidad 4. - Los cuadriláteros y sus relaciones, estudiaremos las propiedades de un paralelogramo, el rectángulo, el cuadrado y el rombo para finalizar con el trapezoide.



Unidad 4. Los cuadriláteros y sus relaciones

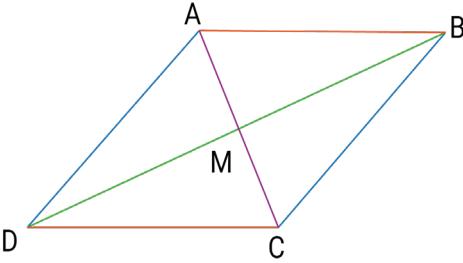
En esta unidad se consideran numerosos tipos de cuadriláteros, entre ellos el paralelogramo, el rombo y el trapezoide. Además, la descripción y las propiedades para cada tipo de cuadrilátero.

4.1. Propiedades de un paralelogramo

El paralelogramo es un cuadrilátero, es decir, un polígono que tiene cuatro lados, con los lados opuestos, paralelos e iguales y sus diagonales se bisecan entre sí.

En el texto básico revise la parte 4.1 Propiedades de un paralelogramo. Analice los corolarios, los métodos para demostrar las propiedades de los paralelogramos; es muy importante que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos

Corolarios del paralelogramo:

	<p>Lados iguales $\underline{AB} \cong \underline{DC}$. $\underline{AD} \cong \underline{BC}$.</p> <p>Diagonales bisecan $\underline{AM} \cong \underline{MC}$. $\underline{DM} \cong \underline{MB}$</p> <p>Ángulos iguales $\angle A \cong \angle C$ $\angle B \cong \angle D$</p>
---	---

Con la finalidad de consolidar el aprendizaje, le invito a analizar detenidamente el ejemplo: Velocidad y dirección de un avión, del texto básico en la página 182, el cual utiliza un paralelogramo para determinar la solución del problema. En el paralelogramo , representa la rapidez y la dirección resultantes, de un avión, cuando la velocidad de éste y la del viento se consideran en conjunto.

4.2. El rectángulo, el cuadrado y el rombo

En el texto básico revise la parte 4.3 El rectángulo, el cuadrado y el rombo. Analice los teoremas, los corolarios y las propiedades de los triángulos, es muy importante que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos, plantee conclusiones que le ayudarán en la demostración de teoremas.

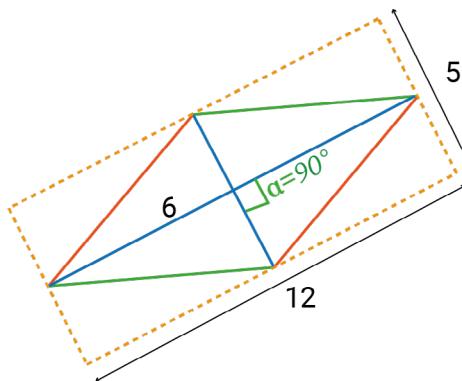


Figura 4.2.

Solución: Las diagonales de un rombo son bisectores perpendiculares entre sí. Por tanto, las diagonales separan el rombo que se muestra en cuatro triángulos rectángulos congruentes con catetos de longitudes 2.5 y 6 cm. Para cada triángulo, $c^2 = a^2 + b^2$ se transforma en $c^2 = 2.5^2 + 6^2$ o $c^2 = 6.25 + 36$. Entonces $c^2 = 42.25$, por tanto, $c = 6.5$. La longitud de cada lado es 6.5 cm.

4.3. El trapezoide

El trapezoide es un cuadrilátero, es decir, un polígono que tiene cuatro lados y solo dos lados opuestos son paralelos.

Desarrollemos el ejercicio 1-6 del texto básico para descubrir ¿qué tipo de cuadrilátero se formó?, para contestar esta pregunta, revise el ejercicio que está en la página 205 y realice.

En el texto básico revise la parte 4.4 El trapezoide. Analice los teoremas, los corolarios y las propiedades de los triángulos, es muy importante que tome en cuenta las definiciones y analice los

ejemplos resueltos, plantea conclusiones que le ayudarán en la demostración de teoremas.

Investigue la aplicación de la geometría en el mundo real, con la utilización de figuras trapezoides isósceles como en la elaboración de las lámparas.

Teorema: La mediana de un trapecio es paralela a las bases y su medida es la mitad de la suma de las medidas de las bases.

EJEMPLO 4.3. Dado el trapecio ABCD con mediana EF, encuentre el valor de x.

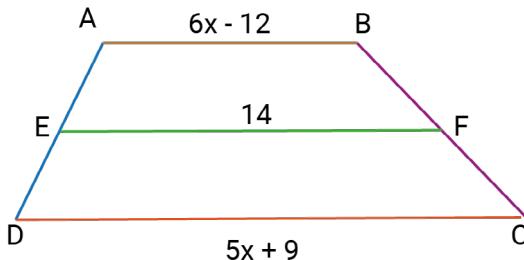


Figura 4.3.

Afirmaciones	Razones
1. $EF = \frac{1}{2} (AB + DE)$	Por el teorema de la media de un trapecio
2. $14 = \frac{1}{2} (6x - 12 + 5x + 9)$	Por sustitución o remplazando valores
3. $14 = \frac{1}{2} (11x - 3)$	Simplificando términos
4. $28 = 11x - 3$	Propiedad de igualdad de multiplicación
5. $11x = 28 + 3$	Simplificando términos semejantes
6. $X = 31/11$	Despejando x
7. $AB = 4.91$	Remplazando valores
8. $DE = 23.10$	Remplazando valores

Señor estudiante, para sintetizar la unidad, le invito a ver el siguiente video: [Introducción a los cuadriláteros](#).

En el video aprenderá a resolver diferentes ejercicios básicos de los cuadriláteros, su clasificación con sus características.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 4 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

Compruebe su avance en el estudio del trapezoide y resuelva las interrogantes planteadas.

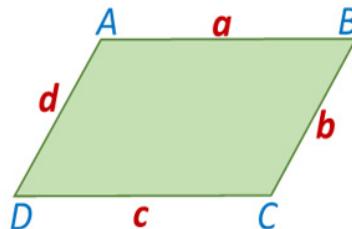
- ¿Qué es el trapezoide?, grafique uno.
- ¿Qué significa que los ángulos base de un trapezoide isósceles son congruentes? Grafique un ejemplo.
- ¿Qué significa que los ángulos base de un trapezoide isósceles son congruentes? Explique gráficamente.

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad del trapezoide, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.



Autoevaluación 4

1. () Definición. Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los dos pares de lados opuestos no son paralelos.
2. () Teorema. Dos rectas paralelas son equidistantes dondequieras.
3. () Teorema. Una bisectriz de un paralelogramo lo separa en dos triángulos congruentes.
4. () Definición. La **altura** de un paralelogramo es un segmento de recta desde un vértice que es perpendicular a un lado no adyacente (o a una extensión de ese lado).
5. () Teorema. En un paralelogramo con pares de ángulos consecutivos desiguales, la diagonal mayor se encuentra opuesta al ángulo obtuso.
6. En el paralelogramo ABCD, la $m \angle B = 42^\circ$, $b = 5.3 \text{ cm}$ y $c = 8.1 \text{ cm}$. Encuentre la medida de los $\angle C$ y $\angle D$ y el perímetro.



- a. $138^\circ, 42^\circ, 36.8 \text{ cm}$.
- b. $148^\circ, 32^\circ, 26.8 \text{ cm}$.
- c. $138^\circ, 42^\circ, 26.8 \text{ cm}$.

Índice

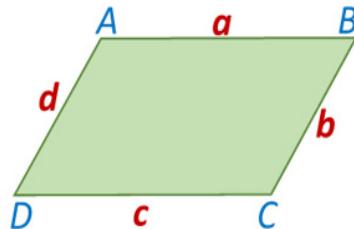
Primer bimestre

Segundo bimestre

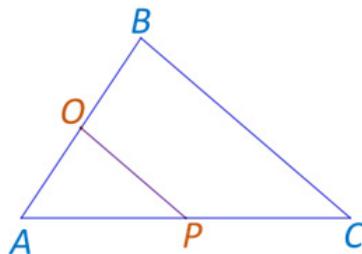
Solucionario

Referencias bibliográficas

7. En el paralelogramo ABCD, la $m \angle D = 2x + 20$ y $m \angle A = 3x - 10$. Determine la diagonal mayor.



- a. AC.
b. DB.
8. En el triángulo ABC, O y P son puntos medios de AB y AC, respectivamente, encontrar la longitud de OP, si BC = 9.22 y encontrar la longitud de BC, si OP = 6.53.



- a. 4.61 y 13.06.
b. 5.61 y 13.06.
c. 4.61 y 9.22.

Índice

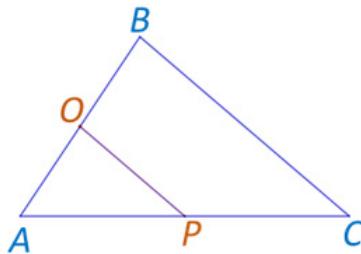
Primer bimestre

Segundo bimestre

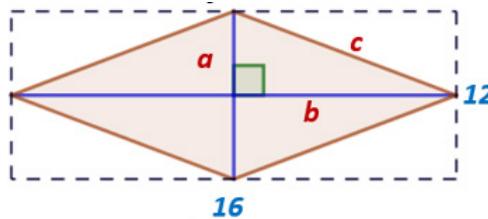
Solucionario

Referencias bibliográficas

9. En el triángulo ABC, O y P son puntos medios de AB y AC, respectivamente, encontrar la longitud de OP y AC, si $OP = 6x + 3$; $AC = 15x - 3$.



- a. 21 y 42.
b. 9 y 18.
c. 20 y 40.
10. ¿Cuál es el perímetro del rombo, cuyas diagonales miden 12 y 16 cm?



- a. 56.
b. 40.
c. 32.

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



Semana 5

"La matemática es abstracta, pero más abstracto es el mundo y más aún... Dios".

Muy bien estimado estudiante, estamos avanzando en forma ordenada y correcta. En esta unidad quinta, que corresponde a esta semana, se presenta la terminología relacionada con el círculo, algunos métodos de medición y propiedades del círculo.



Unidad 5. Círculos

5.1. Círculos y segmentos y ángulos relacionados

Para lograr éxito en el aprendizaje de círculos y segmentos y ángulos relacionados empiece analizando el ejemplo 5.1, sobre el centro del círculo, entonces podrá sacar un criterio sobre la demostración que se utilizó y su aplicación.

En el texto básico revise la parte 6.1 Círculos, segmentos y ángulos relacionados. Analice los teoremas, los métodos para demostrar las propiedades de los círculos y las Relaciones entre ángulo y arco en el círculo; es muy importante

que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos

EJEMPLO 5.1

En la figura 5.1, SV y UT se intersecan en Q, el centro del círculo.

Nombre:

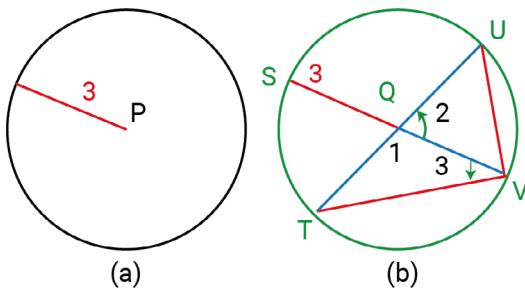


Figura 5.1.

- Los círculos congruentes
- Los cuatro radios (que se muestran)
- Ambos diámetros (que se muestran)
- Las cuatro cuerdas (que se muestran)
- Un ángulo central
- Un arco menor
- Un semicírculo
- Un arco mayor
- El arco intersecado de $\angle SQU$
- El ángulo central que interseca a UV

SOLUCIÓN

- P y Q (tienen radio de igual medida, 3)
- SQ , QV , UQ , QT .
- SV y UT .
- SV , UT , TV , UV .
- $\angle SQU$ (son posibles otras respuestas)
- \widehat{UV} (son posibles otras respuestas)

- g. \widehat{SUV} (son posibles otras respuestas)
- h. \widehat{STU} se puede llamar \widehat{STVU} (son posibles otras respuestas)
- i. \widehat{SU} (se encuentra en el interior de $\angle SQU$)
- j. $\angle UQV$ (también llamado /2)

5.2. Relaciones de recta y segmento en el círculo

En esta sección estudiaremos las relaciones de recta y segmento en el círculo. Ya que algunos de estos enunciados (como los teoremas 6.3.1-6.3.3) son muy similares en palabras, por tal motivo tiene que realizar esquemas y después comparar la información dada en cada teorema con la conclusión de dicho teorema.

Analice cada uno de los teoremas con sus ejemplos de la sección 6.3 del texto básico. Revise lo relacionado con: Círculos que son tangentes, Rectas tangentes comunes a círculos y Longitudes de los segmentos en un círculo, es muy importante que tome en cuenta las definiciones y plantee conclusiones

Desarrollo de un ejemplo sobre la propiedad: en ángulos inscritos de igual medida subtienen arcos de igual medida, y recíprocamente dos arcos de igual medida tienen ángulos de igual medida.

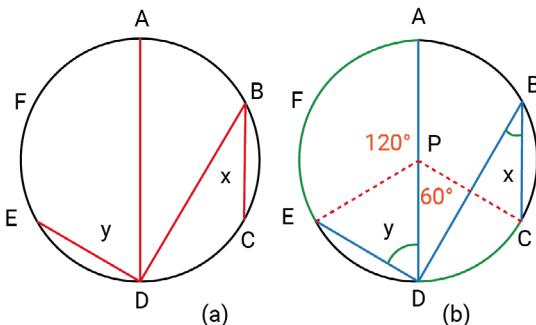


Figura 5.2.

SOLUCIÓN:

- a. Cada arco es = $1/6$ de 360° , porque son 6 arcos. = 60° ,
- b. cada ángulo central = 60°
- c. Como $\angle y = \angle ADE$
- d. Como $\angle APE = 2 \angle ADE$
- e. Entonces $\angle ADE = \frac{1}{2} \angle APE$
- f. Entonces
- g. $y = 60^\circ$
- h. Como $\angle CPD = 2 \angle CBD$
- i. Entonces $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle CPD$
- j. Como $\angle CPD = 60^\circ$
- k. Entonces
- l. $x = 30^\circ$

5.3. Algunas construcciones y desigualdades para el círculo

Conocemos, que el radio trazado hasta una tangente en el punto de contacto es perpendicular a la tangente en ese punto, en esta sección se demostrará: La recta que es perpendicular al radio de un círculo en su punto extremo en el círculo es una tangente al círculo.

Utilizando GeoGebra tracemos las tangentes f con su perpendicular h y g con su perpendicular i , ver figura 5.3.

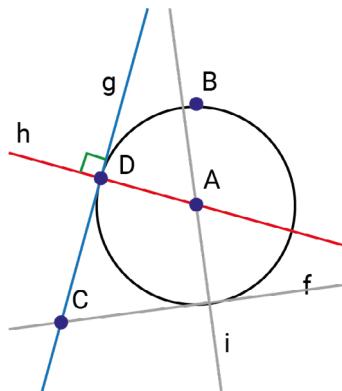


Figura 5.3.

PROCESO

- a. Utilice el ícono Circunferencia y trace el círculo (c) que pasa por B con centro A.
- b. Marcar el Punto C
- c. Trazar la Tangente (f) a c que pasa por C.
Automáticamente GeoGebra traza la Tangente (g) a c que pasa por C
- d. Trazar la Recta (h) que pasa por A perpendicular a g
(Intersección de c, g)
- e. Marcar Ángulo entre las rectas g, h
- f. Trazar la Recta (i) que pasa por A perpendicular a f

Señor estudiante, para sintetizar la unidad, le invito a ver el siguiente video: [Ejercicios básicos de circunferencia-geometría](#).

En el video aprenderá a resolver diferentes ejercicios básicos de la circunferencia, aplicando las diferentes propiedades.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 5 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

Compruebe su avance en el estudio de los Círculos y resuelva las interrogantes planteadas.

- ¿Qué es un círculo?, grafique uno.
- ¿Qué son los círculos congruentes? Grafique un ejemplo.
- ¿Qué son los círculos concéntricos? Grafique un ejemplo.
- ¿Qué es el diámetro, cuerda, semicírculo? Grafíquelos en un círculo.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

- ¿Qué son los arcos? Grafíquelos en un círculo.
- ¿Qué es un ángulo central y un inscrito? Grafíquelos en un círculo.

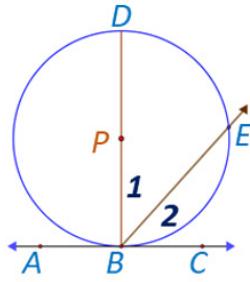
Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de los Círculos, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.



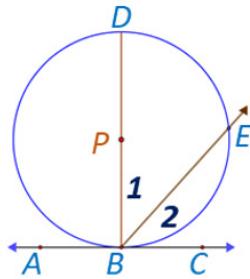
Autoevaluación 5

1. () Definición. Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano que están una distancia fija de un punto dado conocido como **centro** del círculo.
2. () Definición. Los **círculos congruentes** son dos o más círculos que tienen radios congruentes.
3. () Definición. En un círculo o círculos congruentes los **arcos congruentes** tienen medidas diferentes.
4. () Definición. Un **ángulo inscrito** de un círculo es un ángulo que tiene su vértice en un punto en el círculo y sus lados son cuerdas del círculo.
5. () Definición. Una **tangente** es una recta que interseca un círculo en exactamente un punto; el punto de intersección es el **punto de contacto** o **punto de tangencia**.

6. En el círculo P de la figura, con un arco $DE = 82^\circ$, encuentre el $m \angle DBA$ y $m \angle EBA$.

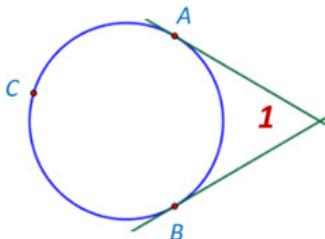


- a. 41° y 48° .
 - b. 48° y 41° .
 - c. 45° y 45° .
7. En el círculo P de la figura, con un arco $DE = 82^\circ$, encuentre el $m \angle 1$ y $m \angle 2$.



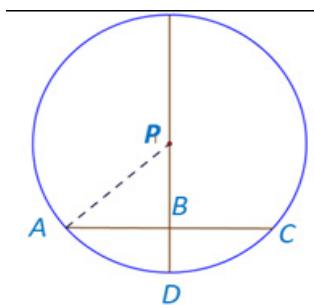
- a. 131° y 90° .
- b. 90° y 131° .
- c. 41° y 48° .

8. Encuentre las medidas de los arcos AB y ACB si $m \angle 1 = 48^\circ$.



Ejemplo 6, página 295.

- a. A. 216° y 144° .
 - b. B. 134° y 226° .
 - c. C. 132° y 228° .
9. Encuentre la longitud de la cuerda AC si el círculo tiene un radio de 10 y $\angle PDA = 60^\circ$ y $PB = 6$



- a. 14.
- b. 12.
- c. 16.

Índice

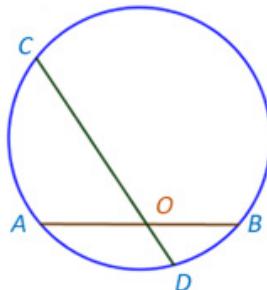
Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

10. Encuentre la longitud de OD si, $AO = 5$, $OB = 4$ y $CO = 8$.



- a. 2.0.
- b. 2.5.
- c. 1.0.

[Ir al solucionario](#)



Semana 6

"No te preocupes por tus dificultades en matemáticas. Te puedo asegurar que las mías son aún mayores".
Albert Einstein".

Estimado estudiante, avanzando en nuestro estudio, en la semana sexta corresponde a la Unidad 6, se estudiará lo relacionado con el área de lugares planos acotadas, de formas regulares e irregulares, utilizadas en construcción, agricultura, bienes raíces y más. Las unidades para utilizar serán la inglesa y las del Sistema Internacional de Unidades



Unidad 6. Áreas de polígonos y círculos

6.1. Perímetro y área de polígonos

Para lograr el éxito deseado en el aprendizaje se estudiará el perímetro de un polígono, el semiperímetro de un triángulo, la fórmula de Herón, la fórmula de Brahmagupta, el área de un trapezoide, de un rombo y una cometa, finalizando con las áreas de polígonos semejantes.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

En el texto básico revise la parte 8.2. Perímetro y área de polígonos. Analice las fórmulas de Herón, Brahmagupta, las fórmulas los métodos para demostrar las propiedades; es muy importante que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos.

EJEMPLO 6.1. Utilizando GeoGebra resolveremos el Ejemplo 2 (página 364), se traza el polígono y la aplicación nos presenta las medidas de cada segmento y el área. Para el perímetro se usa el comando Perímetro, a continuación, está el proceso (Figura 6.1).

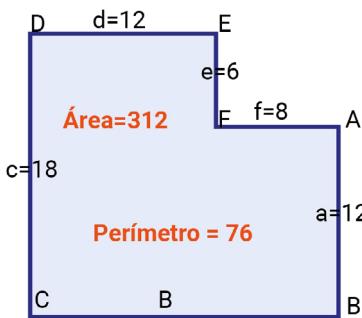


Figura 6.1.

Figura 6.1 Polígono de lado $a = 12$, lado $b = 20$, lado $c = 18$, lado $d = 12$, lado $e = 6$ y lado $f = 8$. Área = 312 y un perímetro igual a 76

PROCESO:

Nº	Nombre	Icono		Valor
1	Punto A			$A = (20, 12)$
2	Punto B		Punto sobre EjeX	$B = (20, 0)$
3	Punto C		Intersección de EjeX, EjeY	$C = (0, 0)$

Nº	Nombre	Icono		Valor
4	Punto D		Punto sobre EjeY	$D = (0, 18)$
5	Punto E			$E = (12, 18)$
6	Punto F			$F = (12, 12)$
7	Hexágono Área		Polígono A, B, C, D, E, F	Área = 312
7	Segmento a		Segmento [A, B]	$a = 12$
7	Segmento b		Segmento [B, C]	$b = 20$
7	Segmento c		Segmento [C, D]	$c = 18$
7	Segmento d		Segmento [D, E]	$d = 12$
7	Segmento e		Segmento [E, F]	$e = 6$
7	Segmento f		Segmento [F, A]	$f = 8$
8	Número Perímetro		Perímetro(Area)	Perímetro = 76
9	Texto texto1		FórmulaTexto(Perímetro, true, true)	"Perímetro\, = \,76"
10	Texto texto2		FórmulaTexto(Area, true, true)	"Área\, = \,312"

Usando el icono del polígono trazar desde el punto A en las coordenadas (20,12) seguidamente el punto B en la coordenada (20,0) y así su sucesivamente, al final se debe dar un clic de nuevo en el punto A para que se cierre el polígono. Activar todos los elementos; en propiedades, activar la casilla [presente nombre y valor], con lo cual, se visualizará los valores de cada lado.

Calcular el perímetro utilizando el comando *perímetro* y dentro del paréntesis colocar el nombre del polígono que se creó. Para crear el texto, simplemente arrastre desde la columna izquierda al dibujo y se visualizarán los datos calculados del polígono.

6.2. Polígonos regulares y área

En esta sección estudiaremos polígonos regulares equiláteros y equiángulos.

Analice cada uno de los teoremas con sus ejemplos de la sección 8.3 del texto básico. Revise lo relacionado con: Polígono regular, Centro y ángulo central de un polígono regular, Radio y apotema de un polígono regular y Área de un polígono regular, es muy importante que tome en cuenta las definiciones y plantee conclusiones.

Recordemos los conceptos de polígono inscrito y circunscrito. Un polígono es circunscrito con respecto a un círculo si cada lado del polígono es tangente a ella. Un polígono está inscrito en un círculo, si y sólo si, todos sus vértices están en el círculo.

Para reforzar estos conocimientos, revise el siguiente ejemplo:

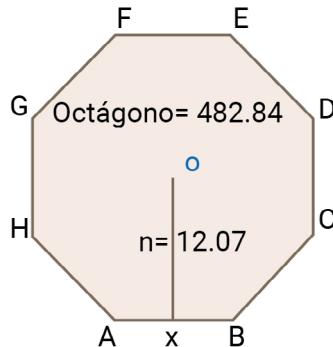


Figura 6.2.

Encuentre el área del polígono regular (octágono) que se muestra en la figura 6.2. El centro de ABCDEFGH es el punto O. La longitud de la apotema OX es 12.07 cm y la longitud del lado AB es 10 cm.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

SOLUCIÓN: Si $AB = 10 \text{ cm}$, entonces el perímetro del octágono regular ABCDEFGH es $8 \times 10 \text{ cm}$, perímetro = 80 cm . Con la longitud de la apotema $OX = 12.07 \text{ cm}$, la fórmula del área es $A = \frac{1}{2} a P$, por tanto $A = \frac{1}{2} \times 12.07 \times 80 = 482.8 \text{ cm}^2$.

6.3. Circunferencia y área de un círculo

En geometría, dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma. En circunferencias semejantes existe proporcionalidad entre las circunferencias (distancia alrededor) y los diámetros (distancias a través) de círculos.

Analice cada uno de los teoremas con sus ejemplos de la sección 8.4 del texto básico, Circunferencia y área de un círculo, es muy importante que tome en cuenta las definiciones y plantee conclusiones.

El estudio de esta sección corresponde a Circunferencia de un círculo, π (Pi), Longitud de un arco, Límites y el Área de un círculo.

Para entender mejor este tema desarrolle la siguiente definición y el ejemplo (Burrill y otros, 2000)

Área de un círculo. - Si un círculo tiene un área de A unidades cuadradas y un radio de r unidades, entonces $A = \pi r^2$.

Revise el siguiente ejemplo: El área de una piscina circular (Figura 6.3) es de aproximadamente 7850 pies cuadrados ($2,392\text{m}^2$). Se quiere cambiar las losas del borde de la piscina.

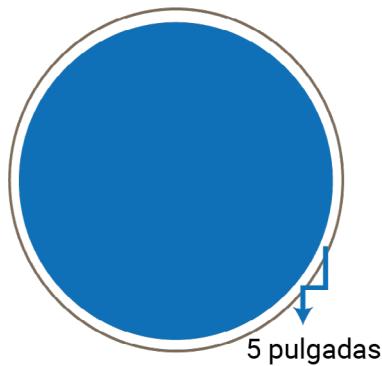


Figura 6.3.

- a. Se desea usar losas cuadradas de 5 pulgadas, ya que el ancho del borde es de 5 pulgadas. ¿Cuántas losas debe comprar?

SOLUCIÓN:

$$A = \pi r^2$$

Si el área de la piscina es de 7850 pies cuadrados, entonces se reemplaza en la ecuación

$$7850 = \pi r^2$$

Despejando r se tiene:

$$r = \sqrt{\frac{7850}{\pi}}$$

$$r = 49.99 \approx 50 \text{ pulgadas}$$

Ahora se usa la fórmula de la circunferencia para hallar la distancia alrededor de la piscina:

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2\pi (50)$$

Índice

$$C = 100\pi$$

$$C = 314.2 \text{ cm}^2$$

Para hallar el número de losas que recubren el borde de la piscina se debe realizar la siguiente operación: $\frac{314.2}{5} = 62.84$

Entonces se debe comprar 63 losas y colocar igualmente espaciadas.

Señor estudiante, para sintetizar la unidad, le invito a ver el siguiente video: [Área de polígonos regulares y del círculo | Demostrando Pi.](#)

El video demuestra las fórmulas de las áreas de los polígonos regulares y del círculo. Define el número Pi. Todas las demostraciones, en el video, lo realiza con métodos geométricos muy visuales para que sean más fáciles de entender y recordar. Tiene algunos enlaces a aplicaciones de GeoGebra para aquellos que quieran ir un poco más allá y experimentar un poco.

Para contestar la pregunta ¿cómo realizar o encontrar polígonos en la vida real?, les invito a ver el siguiente video: [El área de polígonos.](#)

Es un video corto, en el que enseña a medir una parcela, utilizando mediciones en campo y un trazo en una hoja cuadriculada, el dibujo del terreno está a escala, de manera que cada cuadrado mide un metro cuadrado, existen 50 cuadrados de la cuadrícula que cubren completamente el polígono irregular. Empleando la división en triángulos encuentra el área de la parcela.

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 6 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

Compruebe su avance en el estudio de las Áreas de polígonos y círculos, contestando las interrogantes planteadas:

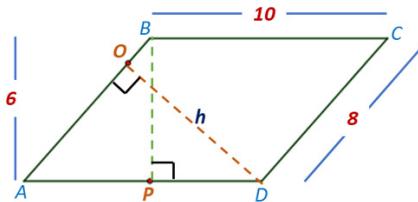
- ¿Qué significa el valor de π ?
- ¿Cuál es la fórmula del perímetro de un polígono? Grafique un ejemplo.
- ¿Para qué se utiliza la Fórmula de Herón? Grafique un ejemplo.
- ¿Para qué se utiliza la Fórmula de Brahmagupta? Grafique un ejemplo.

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las Áreas de polígonos y círculos, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.



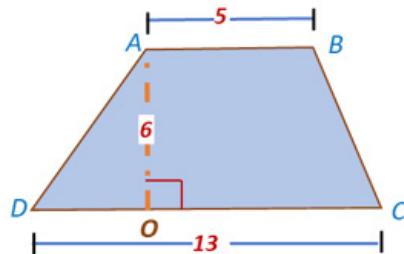
Autoevaluación 6

1. () Definición. El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono.
2. () Teorema. El área A de un rectángulo cuya base tiene longitud b y cuya altura tiene longitud h está dada por $A = \frac{1}{2} bh$.
3. () Definición. π es la relación proporcional entre la circunferencia C y la longitud del diámetro d de cualquier círculo; por tanto, $\pi = C/d$ en cualquier círculo.
4. () Teorema. El área A de un triángulo cuya base tiene una longitud b y cuya altura correspondiente tiene longitud h está dada por $A = \frac{1}{2} bh$.
5. () Teorema. El área A de un cuadrado cuyos lados son cada uno de longitud s está dada por $A = s^2$.
6. En el paralelogramo ABCD encuentre la longitud de la altura h y el área.

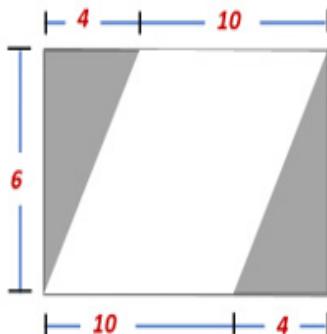


- a. 6.0 y 60.
- b. 7.5 y 60.
- c. 8.0 y 80.

7. Encuentre el área trapezoide ABCD.



- a. 30.
 - b. 78.
 - c. 54.
8. Encuentre el área de la región sombreada de la siguiente figura.



- a. 60.
- b. 84.
- c. 24.

Índice

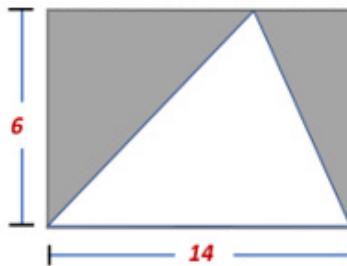
Primer bimestre

Segundo bimestre

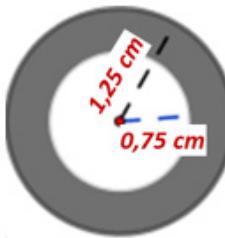
Solucionario

Referencias bibliográficas

9. Encuentre el área de la región sombreada de la siguiente figura.



- a. 84.
 - b. 42.
 - c. 60.
10. En una fábrica de arandelas, se desea saber el área del anillo de una arandela de radio del límite circular interno es de 0.75 cm y el radio del límite circular externo es 1.25 cm.



- a. 3.1416cm^2 .
- b. $\pi * 1.563\text{cm}^2$.
- c. $\pi * 0.563\text{cm}^2$.

[Ir al solucionario](#)



Semana 7

"Las matemáticas son un lugar donde puedes hacer cosas que no puedes hacer en el mundo real".-
Marcus du Sautoy.



Figura 7.0.Por carretera Noches

Nota. Adaptado de *Por carretera Noches*, por mufaddalap.

Pixabay([enlace web](#)) CC BY 2.0

Los sólidos es lo real, igual que el mundo, es tridimensional, tienen longitud, anchura y profundidad, que determinan una región delimitada del espacio conocida como volumen, lo observamos tanto en la naturaleza, montañas, rocas, árboles, etc. como obras realizadas por el hombre, que sobresalen los vestigios de las diversas civilizaciones, como las pirámides, templos, coliseos, etc.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



Unidad 7. Superficies y Sólidos

7.1. Prismas, área y volumen

En la geometría no solo podemos medir las figuras, sino también todo lo que existe, para lo cual se debe utilizar el método correspondiente. Para medir el área de un terreno, generalmente tiene forma variable, puede tener la forma de un rectángulo, cuadrado o alguna otra forma, que nos da la idea de un polígono.

En el texto básico y revise la parte 9.1. Prismas, área y volumen. Analice los diferentes postulados, las fórmulas y los métodos para demostrar sus propiedades; es muy importante que tome en cuenta las definiciones y analice los ejemplos resueltos.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Área lateral de un prisma recto: Si un prisma recto tiene un área lateral de L unidades cuadradas, una altura de h unidades y cada base tiene un perímetro de P unidades, entonces $L = P \cdot h$.

Área de superficie de un prisma recto: Si el área de superficie total recto es T unidades cuadradas, su altura es h unidades y cada base tiene un área de B unidades cuadradas y un perímetro de p unidades, entonces $T = P \cdot h + 2 \cdot B$

Entonces estos conceptos y los del texto plásmelos por medio del siguiente ejemplo, tomado de la Geometría de Burrill y otros (2000) :

Encuentre el área lateral y el área de superficie de un prisma triangular con una altura de 20 pulgadas (50.80 cm) y que tiene como base un triángulo rectángulo con catetos de 8 y 6 pulgadas.

Visualice gráficamente los datos, Figura 8.1:

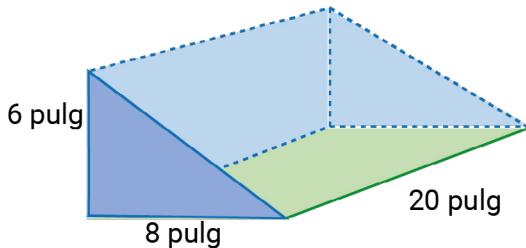


Figura 8.1.

Usando el teorema de Pitágoras, se encuentra la media de la hipotenusa, c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$c = 10$$

Utilizando el valor de la hipotenusa, se encuentra el perímetro.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Ahora, con la definición de perímetro, se suma los tres lados del triángulo

$$P = 6 + 8 + 10 = 24.$$

Para encontrar el área de la base, se utiliza la fórmula: $B = \frac{1}{2} b \times h$

$$b = 6, h = 8$$

$$B = \frac{1}{2} (6)(8) = 24$$

$$\text{Base } (B) = 24 \text{ pulg}^2$$

Con estos datos, se puede determinar el área de la superficie:

$$T = Ph + 2B$$

$$T = 24 \cdot 20 + 2 \cdot 24 = 528 \text{ pulg}^2. P = 24, h = 20, B = 24$$

7.2. Pirámides, área y volumen

En este apartado se estudiará el área superficial y el volumen de una pirámide

Analice cada uno de los teoremas con sus ejemplos de la sección 9.2 del texto básico. Revise los diferentes teoremas del área superficial y el volumen de una pirámide, es muy importante que tome en cuenta las definiciones y plantee conclusiones.

La pirámide en la figura 9.2 es una pirámide cuadrangular. Tiene vértice A, cuadrado BCDE como su base y aristas laterales AB, AC, AD y AE. Aunque al punto A se le llama el vértice de la pirámide, hay en realidad cinco vértices: A, B, C, D y E.

Los lados de la base BA, CD, DE y EB son las aristas de la base. Todas las caras laterales de una pirámide son triángulos; $\triangle ABC$ es una de las cuatro caras laterales de la pirámide cuadrangular. Incluyendo la base BCDE, esta pirámide tiene un total de cinco. La altura de la pirámide, de longitud h , es el segmento de recta AP desde el vértice A perpendicular al plano de la base, punto P.

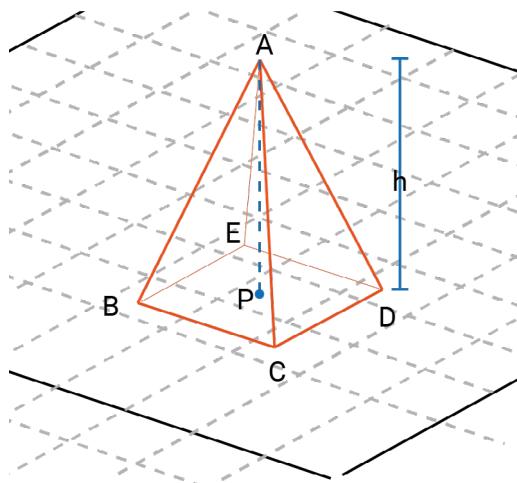


Figura 9.2.

ÁREA SUPERFICIAL DE UNA PIRÁMIDE

Para establecer las bases para el siguiente teorema se justifica el resultado "desarmando" una de las pirámides regulares y poniéndola plana.

Cuando las caras laterales de la pirámide regular se despliegan en un plano, como se muestra en la figura 9.3 (a), el área lateral sombreada es la suma de las áreas de las caras laterales triangulares. Utilizando $A = \frac{1}{2}bh$, se encuentra que el área de cada cara es $\frac{1}{2} \cdot s \cdot l$ (cada lado de la base de la pirámide tiene longitud s y la altura inclinada es l). Las áreas combinadas de los triángulos dan el área lateral. Debido a que hay n triángulos,

$$A = n \cdot (\frac{1}{2} \cdot s \cdot l)$$

$$A = \frac{1}{2} l(n \cdot s)$$

Perímetro (P) = $n \cdot s$ (n = Número de caras y s = base

$$A = \frac{1}{2} lP$$

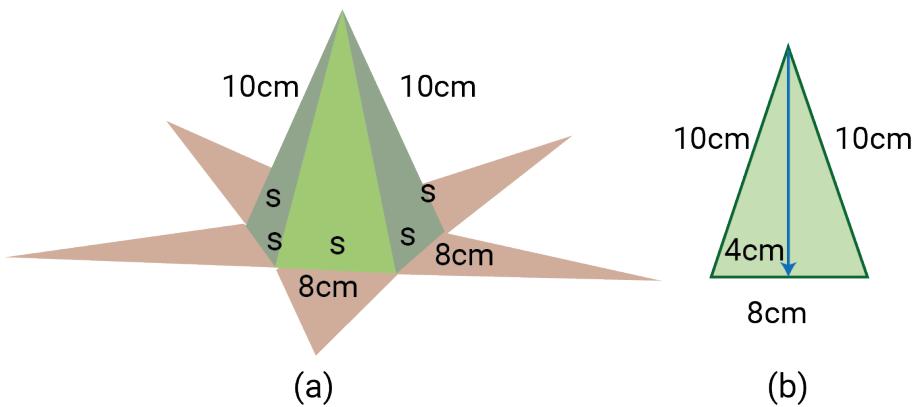


Figura 9.3.

EJEMPLO 9.3

Encuentre el área lateral de una pirámide pentagonal regular si los lados de la base miden 8 cm y las aristas laterales miden 10 cm cada una [vea la figura 9.3 (a)]

Solución:

La longitud de la altura inclinada para la cara lateral triangular [vea la figura 9.3(b)], se encuentra aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$4^2 + l^2 = 10^2$$

$$l^2 = 100 - 16 = 84$$

$$l^2 = (4 \cdot 21) = 2^2 \cdot 21$$

$$l = \sqrt{2^2 \cdot 21} = 2\sqrt{21}$$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Ahora $A = \frac{1}{2} IP$

$$A = \frac{1}{2} 2\sqrt{21} (5 . 8) = 40\sqrt{21}$$

$$A \approx 183.30 \text{ cm}^2$$

7.3. Cilindros y conos

Esta sección se pone interesante, porque se estudia lo relacionado con Cilindros (rectos y oblicuos), Bases y altura de un cilindro, Eje de un cilindro, Conos (rectos y oblicuos), Base y altura de un cono, Vértice y altura inclinada de un cono, Eje de un cono, Área lateral, Área total, Volumen, Sólido de revolución y Eje de un sólido de revolución, les propongo que el mayor número de ejemplos se encuentre graficamente utilizando el GeoGebra, que es una gran herramienta para ayudar a visualizar las figuras geométricas.

Analice cada uno de los teoremas con sus ejemplos de la sección 8.4 del texto básico, Circunferencia y área de un círculo; es muy importante que tome en cuenta las definiciones y plantee conclusiones.

EJEMPLO 7.3.

Para el cilindro circular recto que se muestra en la figura 7.3 encuentre el

- a. área lateral exacta L.
- b. área superficial exacta T.
- c. el volumen

Solución:

En GeoGebra trazamos el cilindro circular de radio 5 y altura 12, en la Vista 3D y se obtiene los resultados, ver figura 7.3.

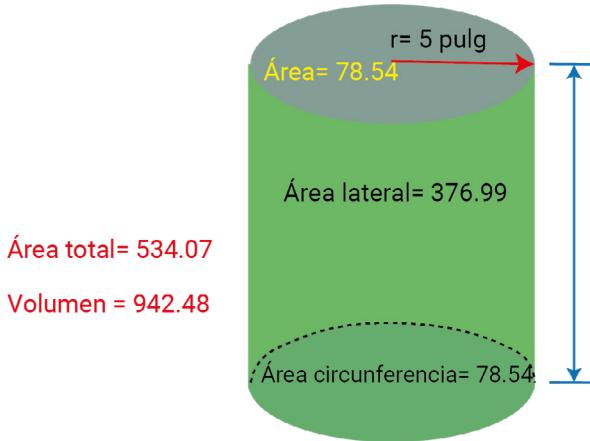


Figura 7.3.

Procedimiento:

En la vista 3D seleccionamos los punto A(0,0,0) y B(0,0,12), activar el ícono cilindro, señalamos el punto A y B, digitamos 5 como radio, con esto se crea el cilindro. En la vista Algebraica, debajo del punto a cilindro, está el valor del volumen del cilindro. En el punto b está el valor del área lateral del cilindro. A continuación, calculamos el área de la base, para lo cual, en la celda de entrada escribimos $Ba = \pi \times 25$, para encontrar el total del área utilizamos la siguiente fórmula $T = b + BA$, con esta información se procede a crear los textos, incluyendo las variables de los resultados y se finaliza.

A continuación, está la secuencia de construcción del cilindro que corresponde a la figura 7.3

Nº	Nomb	Ícono	Descripción	Valor
1	Punto A		Punto de intersección	$A = (0, 0, \dots)$
2	Punto B			$B = (0, 0, \dots)$
3	Cilind...		Cilindro(A, B, 5)	a: 942.48

Nº	Nomb	Ícono	Descripción	Valor
3	Super...		Cilindro(A, B, 5)	b: 376.99
3	Circu...		Cilindro(A, B, 5)	c: X = (0,...
3	Circu...		Cilindro(A, B, 5)	d: X = (0,...
4	Núme...			Volumen...
5	Núme...			Ba = 78....
6	Núme...		b + Ba	T = 455.53
7	Texto ...		"Área lateral=" +	"Área lat...
8	Texto ...		"Volumen = " + a + ""	"Volume...
9	Texto ...		"Área circunferen	"Área cir...
10	Texto ...		"Área = " + Ba + ""	"Área = ...
11	Texto ...		"Área total = " +	"Área tot...

Al final obtenemos el cilindro circular recto que se muestra en la figura 7.3

7.4. Poliedros y esferas

Finalizando el bimestre y el capítulo de geometría plana, estudiaremos lo relacionado al Ángulo diedro, Poliedro (convexo y cóncavo), Vértices, Aristas y caras, Ecuación de Euler, Poliedros regulares, (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro),

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Esfera (centro, radio, diámetro, gran círculo, hemisferio), Área superficial y volumen.

Definición de poliedro.- "Es una superficie cerrada que consta de regiones poligonales. Las regiones poligonales son llamadas caras" (Mervin y Charles, 1965).

Los poliedros como los polígonos se clasifican con el número de elementos frontera, Es decir, los poliedros se clasifican por el número de caras, por ejemplo, el menor número de caras de un poliedro es 4 y se llama tetraedro.

Analice cada uno de los teoremas con sus ejemplos de la sección 9.4 del texto básico, Poliedros y esferas, es muy importante que tome en cuenta las definiciones y plantee conclusiones.

Ahora para reforzar su aprendizaje analícese el siguiente ejemplo, pero antes analice el siguiente teorema:

Teorema.- Si dos sólidos son similares con un factor de escala de $a:b$, entonces las áreas de superficie tienen una razón de $a^2:b^2$ y los volúmenes tienen una razón de $a^3:b^3$

Ejemplo (Burrill y otros, 2000)



Manuel, un agricultor de la sierra, construyó una mazorca grande para atraer turistas a su finca. Dicha mazorca tiene 32 pies de largo y un radio de 12 pies. Cada grano corresponde a un galón de jugo de leche con un volumen de 231 pulg³.

- ¿Cuál es el factor de escala entre la mazorca grande y una real semejante que tenga 14 pulgadas de largo?
- Estime el volumen de un grano de la mazorca real de 14 pulgadas.

Solución:

- Entonces la razón entre las medidas correspondientes de las mazorcas es:

Transformamos los pies a pulgadas= $32 * 12 \text{ pulg} = 384 \text{ pulgadas}$

Por lo tanto, el factor de escala es

$$\frac{\text{Longitud de la mazorca grande}}{\text{longitud de la mazorca real}} = \frac{384}{14} = \frac{192}{7}$$

Por lo tanto, el factor de escala es 192:7

- Ahora por el teorema anterior se tiene que, si el factor de escala es a:b, entonces la relación de los volúmenes es a³:b³, a = 192 y b = 7

$$\frac{\text{Volumen de la mazorca grande}}{\text{volumen de la mazorca real}} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{192^3}{7^3} = \frac{7.077.888}{343}$$

Para hallar el volumen de un grano de la mazorca real, es:

$$\frac{7.077.888}{343} = \frac{231}{x}$$

$$x = \frac{231 * 343}{7.077.888} = 0.01119 \text{ pulg}^3$$

Por lo tanto, el volumen de un grano de mazorca real es de aproximadamente 0.011 pulg^3

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Para contestar la pregunta ¿cómo realizar o encontrar el área y volumen de superficies y sólidos?, les invito a ver el siguiente video: [Volumen de prisma y una pirámide](#).

En el video desarrollan los procesos que se debe realizar para resolver ejercicios de un prisma en relación con una pirámide.

Sugerimos revise el siguiente contenido: [Problemas interactivos de área y volumen del prisma, de la pirámide y del tronco de pirámide](#).

Es un sitio que presenta ejercicios de diferentes tipos, en la que se debe colocar la respuesta, tiene la opción de revisar y corregir los ejercicios, presentando como retroalimentación el desarrollo de cada ejercicio.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 7 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

Compruebe su avance en el estudio de las Superficies y Sólidos, contestando las interrogantes planteadas:

- ¿En qué se diferencian los prismas rectos y oblicuos?, grafique.
- ¿Cuál es la diferencia entre área lateral y total de una pirámide? Grafique un ejemplo.
- ¿En qué se diferencian los cilindros rectos y oblicuos?, grafique.
- ¿En qué se diferencian los poliedros convexos y cóncavos?, grafique.

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las Superficies y Sólidos, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

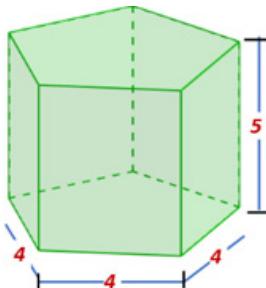
Solucionario

Referencias bibliográficas



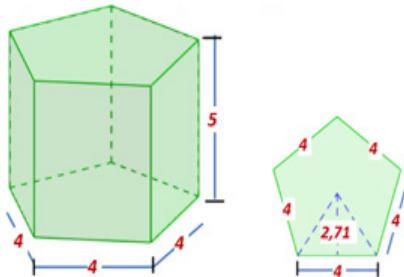
Autoevaluación 7

1. () Un **prisma recto** es un prisma en el cual las aristas laterales paralelas son oblicuas a las aristas de las bases en sus puntos de intersección.
2. () Un **prisma oblicuo** es un prisma en el cual las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base en sus puntos de intersección.
3. () Definición. El **área lateral L** de un prisma es la suma de las áreas de todas las caras laterales.
4. () Definición. Un **prisma regular** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.
5. () Definición. Un **cubo** es un prisma cuadrangular recto cuyas aristas son congruentes.
6. Encuentre el área lateral de un prisma recto, sus bases son pentágonos regulares con lados de 4 cm y una altura de 5 cm.

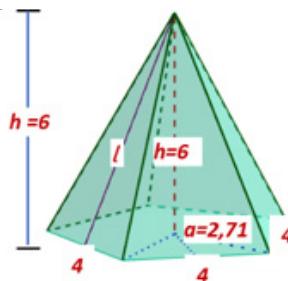


- a. 20cm^2 .
- b. 40cm^2 .
- c. 100cm^2 .

7. Encuentre el área total de un prisma recto, sus bases son pentágonos regulares con lados de 4 cm y una altura de 5 cm. La apotema del pentágono es 2.71cm.



- a. 100.20cm^2 .
 - b. 54.20cm^2 .
 - c. 154.20cm^2 .
8. Encuentre el área total de una pirámide pentagonal regular de 4 cm y una altura de 6 cm. La apotema del pentágono es 2.71cm.



- a. 43.34cm^2 .
- b. 27.10cm^2 .
- c. 93.00cm^2 .

Índice

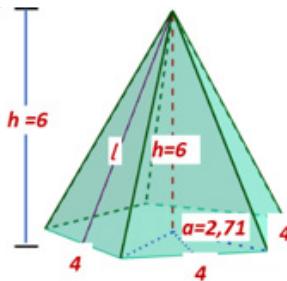
Primer bimestre

Segundo bimestre

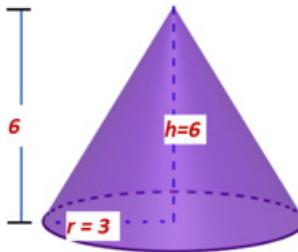
Solucionario

Referencias bibliográficas

9. Encuentre el volumen de una pirámide pentagonal regular de 4 cm y una altura de 6 cm. La apotema del pentágono es 2.71cm.



- a. 48.2 cm^3 .
b. 93.0 cm^3 .
c. 65.90^3 .
10. Encuentre el volumen del cono de radio 3cm y altura 6cm



- a. $18\pi \text{ cm}^3$.
b. 56.55 cm^3 .
c. $27\pi \text{ cm}^3$.

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



Semana 8

"Las matemáticas tienen belleza y romance.

El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario; merece la pena pasar el tiempo allí.". Marcus du Sautoy.

En esta semana ocho, usted debe sistematizar los conocimientos estudiados en las siete semanas anteriores y prepararse para la evaluación de fin del primer bimestre, estudiando, repasando y poniendo en práctica los conocimientos tratados, para lograr el resultado de aprendizaje esperado: Utilice GeoGebra para la comprobación de los ejercicios.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Se sugiere que revise las lecturas y videos propuestos,

De igual forma, revise las evaluaciones parciales y elabore un banco de preguntas referentes a la Geometría en el plano.

Realice nuevamente las autoevaluaciones y ejercicios propuestos de los contenidos del primer bimestre, las unidades:

Unidad 1.- Relaciones entre rectas y ángulos.

Unidad 2. - Rectas paralelas

Unidad 3.- Los triángulos y sus relaciones

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Unidad 4.- Los cuadriláteros y sus relaciones

Unidad 5.- Círculos

Unidad 8.-Áreas de polígonos y círculos

Unidad 7.-Superficies y Sólidos

Procedimiento:

Compruebe gráficamente los resultados de los ejercicios y ejemplos resueltos utilizando GeoGebra, de tal manera que tenga el mayor éxito al momento de desarrollar el cuestionario de evaluación presencial.



Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

Determina los principios y postulados de los vectores para la modelación y resolución de problemas de la geometría espacial.

Mediante el estudio de este bimestre, usted tendrá la capacidad de aplicar con pertinencia los principios y postulados de los vectores para la modelación y resolución de problemas de la geometría espacial.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje



Semana 9

"Si la gente no cree que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicado que es la vida.". John Louis von Neumann.

En hora buena, después de terminar con éxito el primer bimestre, en la primera semana del segundo bimestre ingresaremos al campo de los Vectores tridimensionales, realizando las Operaciones Básicas y estudiando las Propiedades de los vectores.



Unidad 8. Vectores tridimensionales. Introducción

8.1. Vectores

La definición completamente de ciertas magnitudes como la velocidad, la fuerza o la aceleración, además de su valor numérico: es necesario especificar su dirección y se las denominan magnitudes vectoriales o, simplemente, vectores.

Los vectores se representan en el plano o en el espacio mediante segmentos orientados de recta. Si el punto inicial de un vector \vec{v} es B y el punto final es A , escribiremos, figura 9.4 (a)

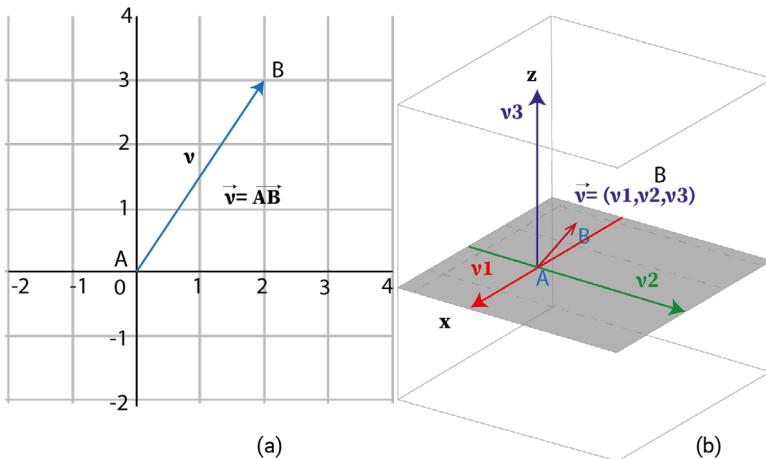


Figura 9.4.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Un vector en el espacio se representa mediante segmentos orientados de recta. Si el punto inicial de un vector \vec{v} es A y el punto final es B , escribiremos, figura 9.1 (b)

Un punto del espacio está determinado por sus coordenadas $P(x, y, z)$ respecto a dichos ejes. Las *componentes* de un vector \vec{v} son las coordenadas (v^1, v^2, v^3) del punto final del representante del vector cuyo origen está situado en el origen de coordenadas. Vamos a identificar cada vector con sus componentes y escribiremos

simplemente $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$, figura 9.1 (b).

Componentes de un vector en el espacio.

Si las coordenadas de A y B son: $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ los componentes del vector \overrightarrow{AB} se obtienen restando a las coordenadas del extremo las del origen. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido y plasmar dichos conocimientos, realice las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

Desarrolle el siguiente ejercicio.

Determinar los componentes de los vectores que se pueden trazar en el triángulo de vértices $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$, FIGURA 9.5.

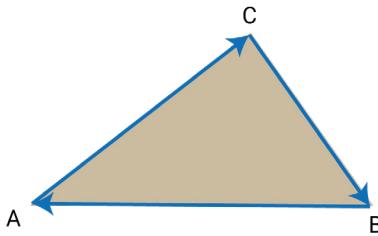


Figura 9.5.

SOLUCIÓN

$$\vec{AB} = (3 + 3, 6 - 4, 3 - 0) = (6, 2, 3)$$

$$\vec{AC} = (-1 + 3, 2 - 4, 1 - 0) = (2, -2, 1)$$

$$\vec{BC} = (-1 - 3, 2 - 6, 1 - 3) = (-4, -4, -2)$$

$$\vec{BA} = (-3 - 3, 4 - 6, 0 - 3) = (-6, -2, -3)$$

$$\vec{CA} = (-3 + 1, 4 - 2, 0 - 1) = (-2, 2, -1)$$

$$\vec{CB} = (3 + 1, 6 - 2, 3 - 1) = (4, 4, 2)$$

Estimado estudiante, para introducirnos en el campo de los vectores, les invito a leer el tema "Vectores", página 10, del texto [Vectores, Rectas y Planos](#)

Con la lectura del tema se aprenderá a marcar un punto y construir vectores en los planos de 2 y 3 dimensiones. La notación como la traslación de los vectores.

8.2. Operaciones Básicas

8.2.1. SUMA DE VECTORES

Consideremos dos vectores $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$ y tomemos los representantes de ellos, de suerte que \vec{v} tenga

como origen el extremo de \vec{u} (B), entonces el vector suma está representado por un vector fijo cuyo origen es el origen del primero y cuyo extremo es el extremo del segundo, figura 9.6 (a)

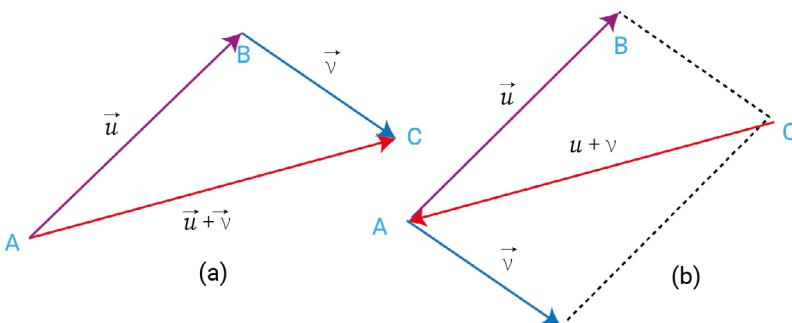


Figura 9.6.

En el caso de que $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$, no sean lineales, la suma de vectores puede regirse por la regla del paralelogramo donde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, entonces $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, ABCD son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

La suma de $\vec{v} + \vec{u}$ es el vector $\vec{v} + \vec{u} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

RESTA: la resta de vectores se define como la suma al minuendo de opuesto del sustraendo: $\vec{u} - \vec{v}_1 = \vec{u} + (-\vec{v}_1)$ es el vector $\vec{v} - \vec{u} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UN VECTOR

El producto de un número real $k \in \mathbb{R}$ por un vector \vec{u} es otro vector de: igual dirección que el vector \vec{u} , del mismo sentido si k es positivo o de sentido contrario, si k es negativo, si tenemos $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ y multiplicamos por k tenemos

$$k\vec{v} = (kx_1, ky_1, kz_1)$$

Las componentes del vector resultante se obtienen multiplicando por K las componentes del vector.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido y plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

Desarrolle el siguiente ejercicio

Dado los vectores $\vec{v} = (1, 2, 3)$ y $\vec{u} = (3, 2, 1)$, encontrar a) $\vec{v} + \vec{u}$, b) $\vec{v} - \vec{u}$ y c) $2\vec{v} - 3\vec{u}$, ver figura 9.7, resuelto en GeoGebra.

SOLUCIÓN:

- $\vec{v} + \vec{u} = (1, 2, 3) + (3, 2, 1) = (1+3, 2+2, 3+1) = (4, 4, 4)$
- $\vec{v} - \vec{u} = (1, 2, 3) - (3, 2, 1) = (1 - 3, 2 - 2, 3 - 1) = (-2, 0, 2)$
- $2\vec{v} - 3\vec{u} = 2(1, 2, 3) - 3(3, 2, 1) = (2, 4, 6) - (9, 6, 3) = (-7, -2, 3)$

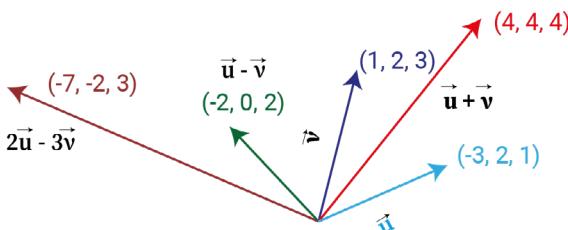


Figura 9.7.

Estimado estudiante, para resolver con destreza las operaciones con los vectores es necesario realizar varios ejercicios, por tal motivo analicemos los diversos ejemplos que propone el texto [Vectores, Rectas y Planos](#).

En el tema “Operaciones básicas”, página 13. Con la lectura del tema y el análisis de los ejemplos se adquirirá la competencia en las operaciones básicas de vectores.

8.3. Propiedades de los vectores

DEFINICIONES (Figura 9.8)

Un **vector fijo** o segmento orientado \vec{AB} , está determinado por un par de puntos del espacio (A, B), el punto A es el origen del vector fijo y el punto B su extremo, ver figura 9.8

El **módulo** de \vec{AB} se indica $| \vec{AB} |$ y es la medida del segmento \vec{AB} es decir la distancia entre los puntos A y B.

Misma dirección. Dos vectores fijos \vec{v}_3 y \vec{v}_4 tienen la misma dirección, cuando las rectas en las que descansan CD y EF coinciden o son paralelas.

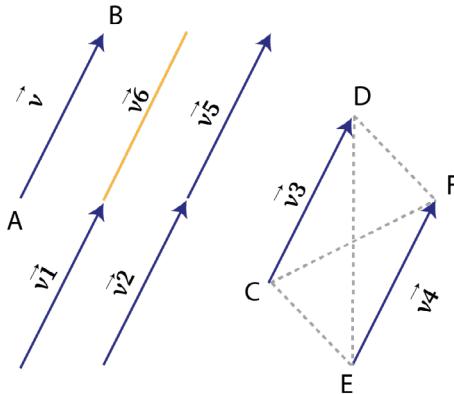


Figura 9.8.

Mismo sentido dos vectores fijos \vec{v}_3 y \vec{v}_4 y tiene el mismo sentido cuando son paralelas o estando en la misma recta (\vec{v}_3 y \vec{v}_5), ambos tienen el mismo sentido que el otro vector fijo que descansa en una recta paralela.

Sentido contrario, cuando dos vectores son paralelos o estando en la misma recta tienen sentido contrario (\vec{v}_1 y \vec{v}_6).

Equipolentes, decimos que dos vectores fijos \vec{v}_3 y \vec{v}_4 y son equipolentes o iguales si tienen el mismo módulo la misma dirección y el mismo sentido, es decir cuando descansan en rectas paralelas. La equipolencia o igualdad es una relación entre los vectores fijos que gozan de las siguientes propiedades:

- Reflexiva: todo vector fijo es equipolente, asimismo.
- Simetría, si \vec{v}_3 es equipolente a \vec{v}_4 dos entonces \vec{v}_4 es equipolente a \vec{v}_3 .
- Transitiva si \vec{v}_3 es equipolente a \vec{v}_4 , y \vec{v}_4 y es equipolente a \vec{v}_5 entonces \vec{v}_3 es equipolente a \vec{v}_5 .

Un vector libre es la clase de vectores formada por un vector fijo y todos los vectores fijos equipolentes a él.

Cuando escribimos $\vec{v} = \vec{AB}$ estamos indicando que \vec{v} es el vector libre formado por \vec{AB} y todo su equipolentes, es decir, el vector fijo \vec{AB} es un representante del vector \vec{v} .

Propiedades de la suma:

- Asociativa: $v + (w + u) = (v + w) + u$
- Elemento neutro: $v + 0 = v$
- Vector opuesto: $v + -v = 0$
- Commutativa: $v + w = w + v$



Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con la finalidad de conocer la aplicabilidad de las diferentes propiedades de los vectores, invito a ver el video [Vectores en el espacio: elementos y operaciones](#), para profundizar los conocimientos de un vector libre y fijo, realice las operaciones con ellos: suma, resta, multiplicación por un escalar y suma de punto más vector.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

También es necesario leer el tema "Propiedades de los vectores", página 22, del texto [Vectores, Rectas y Planos](#).

Con la lectura del tema y el análisis de los ejemplos se adquirirá la competencia en aplicabilidad de las diferentes propiedades de los vectores.

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema los Vectores tridimensionales, de la semana 9 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido:

- a. Desarrolle un ejemplo de cada una de las propiedades de los vectores.
- b. Utilice GeoGebra para graficar las respuestas
 - Sea $v = (1, 3, 4)$ y $w = (3, 1, 4)$, entonces $v + w = ?$
 - Sea $v = (1, 3, 4)$ y $w = (3, 1, 4)$, entonces $v - w = ?$
 - Sea $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 3, 2)$, $C = (1, 5, 0)$ y $D = (p, 2, k)$. Determinar los valores de p y k de modo que $AB = t \cdot CD$.

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de Vectores tridimensionales. Introducción., es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.



Autoevaluación 8

1. () Un par de puntos del espacio (O, P) determina un vector fijo OP . El punto P es el origen del vector fijo y el punto O su extremo.
2. () El módulo de OP se representa $|OP|$ y es la medida del segmento OP es decir la distancia entre: O y P .
3. () Dos vectores fijos OP y QR tienen la misma dirección, cuando las rectas en las que descansan $[r(OP)]$ y $[r(QR)]$ se intersectan.
4. () Dos vectores fijos OP y QR son equipolentes o iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.
5. La equipolencia o igualdad es una relación entre los vectores fijos tiene sus propiedades. Relacione las propiedades con su descripción.

Propiedad	Descripción
1. Reflexiva	a. Sí AB es equipolente a CD y CD es equipolente a EF , entonces AB equipolente a EF
2. Simetría	b. Todo vector fijo es equipolente a si mismo
3. Transitiva	c. Sí AB es equipolente a CD , entonces CD es equipolente a AB

- a. 1a, 2b, 3c.
- b. 1c, 2b, 3a.
- c. 1b, 2c, 3a.

6. Encontrar el vector unitario de $\vec{v} = (2, 1, 2)$.
- $(1, 1, 1)$.
 - $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
 - $(\frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2})$.
7. Encontrar la suma y resta de los vectores $\vec{v} = (1, 3, 4)$ y $\vec{u} = (3, 2, 4)$.
- $\vec{v} + \vec{u}$; $\vec{v} - \vec{u}$
- $(4, 5, 8)$ y $(-2, 1, 0)$.
 - $(8, 5, 4)$ y $(-2, 1, 0)$.
 - $(4, 5, 8)$ y $(2, 1, 0)$.
8. Realizar las siguientes operaciones con los vectores $\vec{v} = (1, 3, 4)$ y $\vec{u} = (3, 2, -4)$; $2\vec{v} - \vec{u}$; $-\vec{v} + 3\vec{u}$.
- $(-1, 4, 12)$ y $(8, 3, -16)$.
 - $(-1, -4, -12)$ y $(8, 3, -16)$.
 - $(4, 5, 8)$ y $(2, 1, 0)$.
9. Halla las componentes de vector \overrightarrow{AB} de los puntos $A(1,1,4)$ y $B(3,0,2)$ de R^3 .
- $(2, -1, -2)$.
 - $(-2, 1, 2)$.
 - $(4, 1, 6)$.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

10. Dados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 0, -1)$ y $D(-1, 1, 1)$, halla los vectores AB , BC y CD . Comprueba si son linealmente dependientes o no. Dar una interpretación geométrica del hecho.
- a. $(1, 1, 1), (-2, -1, -1), (-1, 1, 2)$, dependientes.
 - b. $(1, 1, -1), (2, -1, -1), (-1, 1, 2)$, dependientes.
 - c. $(1, 1, 1), (-2, -1, -1), (-1, 1, 2)$, independientes.

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



Semana 10

"Dios usó las hermosas matemáticas al crear el mundo.". Paul Dirac

Muy bien estimado estudiante, continuando con el aprendizaje, en esta semana décima, estudiaremos la Unidad.9. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio, lo referente a las Ecuaciones de la recta en el espacio y la Recta definida como intersección de dos planos.



Unidad 9. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio

9.1. Ecuaciones de la recta en el espacio

Ecuación vectorial

Definimos la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y Q , figura 10.1, es paralela al vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ como el conjunto de los puntos $Q(x, y, z)$ del plano dados por $\vec{PQ} = k\vec{v}$, con $k \in \mathbb{R}$. o bien,

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + k\vec{v}$$

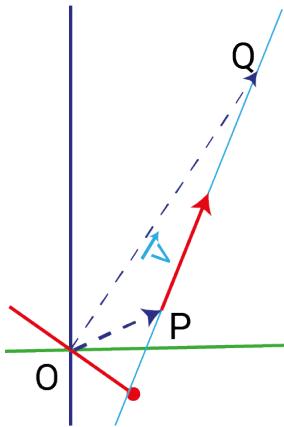


Figura 10.1.

Ecuación paramétrica

Expresando los vectores en función de sus coordenadas obtenemos la ecuación vectorial de la recta:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(v_1, v_2, v_3).$$

Ecuación continua

Expresando la ecuación vectorial, componente a componente, obtenemos la ecuación paramétrica:

$$\{x = x_1 + kv_1 \quad y = y_1 + kv_2 \quad z = z_1 + kv_3$$

Si las componentes del vector \vec{v} no son nulas, podemos despejar k y obtener la ecuación continua.

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$$

Ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta

De la ecuación continua, separando las igualdades y agrupando dos a dos fracciones, obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta:

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \Rightarrow v_2(x - x_1) = v_1(y - y_1) \Rightarrow v_2x - v_2x_1 = v_1y - v_1y_1$$

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{z - z_1}{v_3} \Rightarrow v_3(x - x_1) = v_1(z - z_1) \Rightarrow v_3x - v_3x_1 = v_1z - v_1z_1$$

Con

$$A = v_2; \quad B = -v_1; \quad C = v_1y_1 - v_2x_1$$

$$A' = v_3; \quad B' = -v_1; \quad C' = v_1z_1 - v_3x_1$$

De donde

$$v_2x - v_1y + (v_1y_1 - v_2x_1) = 0 \Rightarrow Ax + Bz + C = 0$$

$$v_3x - v_1z + (v_1z_1 - v_3x_1) = 0 \Rightarrow A'x + B'z + C' = 0$$

Ejemplo: Determina la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos A(2, -3, 1) y B(4, 5, -1).

A es el punto inicial y considerando al punto B, entonces el vector director es = (2, 8, -2), la ecuación sería:

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3} \Rightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 3}{8} = \frac{z - 1}{-2}$$

Ecuación implícita:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{8} \Rightarrow 8x - 16 = 2y + 6 \Rightarrow 8x - 2y - 22 = 0 \Rightarrow 4x - y - 11 = 0$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow -2x + 4 = 2z - 2 \Rightarrow -2x - 2z + 6 = 0 \Rightarrow -x - z + 3 = 0$$

9.2. Recta definida como intersección de dos planos

Una recta definida como intersección de dos planos no paralelos es el producto vectorial de los vectores normales a los planos, que es el vector director de la recta, figura 10.2.

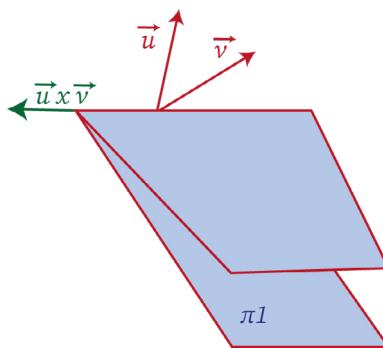


Figura 10.2.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo. Ecuación paramétrica de la recta determinada por los planos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Dos soluciones:

- Calcular un punto y un vector director de la recta. Para calcular un punto P de la recta, le damos un valor a una de las variables, por ejemplo, $Z = 0$, y resolvemos el sistema resultante:

$$X - y + 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow x - y = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$2x + y + 0 = 1 \Rightarrow 2x + y = 1 \Rightarrow y = -1$$

$$P(1, -1, 0)$$

Para calcular un vector director \vec{v} de la recta utilizamos los vectores normales a los planos:

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = 3(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

Por tanto, podemos coger $\vec{v} = (-1, 1, 1)$. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - k \\ y = -1 + k \\ z = k \end{array} \right\}$$

2. Parametrizamos la recta resolviendo el sistema que forman las dos ecuaciones, utilizando Gauss-Jordan.

$$x - y + 2z = 2$$

$$2x + y + z = 1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + z = +1 \\ y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = +1 - z \\ y = -1 + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = +1 + k \\ y = -1 + k \\ z = k \end{array} \right\}$$



Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio, invito a ver el video [Rectas y Planos. Ecuación de plano y recta en el espacio](#).

El video es un repaso general de la ecuación de un plano en el espacio r3. Un plano queda determinado por un punto y dos vectores directores no proporcionales o bien por tres puntos no alineados.

En la página 79, del texto [Vectores, Rectas y Planos](#), el autor presenta otro método para determinar la intersección de una recta con dos planos.

Como futuros profesionales en educación, es importante tener diferentes puntos de vista del material didáctico y la forma de planificar la clase, por tal motivo invito a visitar el sitio [Recta en R3. Ecuaciones de la recta en R3](#), en él encontrará, además de la explicación del contenido con animación, exámenes, que son de mucha ayuda.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de las Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio, de la semana 10 y plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

- a. Contestando las interrogantes planteadas
 - ¿ Cuáles son las ecuaciones de la recta en el espacio?
 - ¿ Cuál es la ecuación de la Recta definida como intersección de dos planos?
- b. Desarrolle un ejemplo de cada una de las ecuaciones de la recta en el espacio.
- c. Utilice GeoGebra para graficar las respuestas de los siguientes ejercicios:
 - Hallar el vector director de la recta dada jura siguientes ecuaciones implícitas

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z - 2 = 0 \\ -x + y + 3z + 2 = 0 \end{array} \right\}$$

- Determine las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(1, 1, 1) y B(2, 1, 2).



Autoevaluación 9

1. () Recta definida como intersección de dos planos no paralelos es la suma vectorial de los vectores normales a los planos es un vector director de la recta.
2. () La ecuación vectorial de la recta está expresada por los vectores en función de sus coordenadas.
$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(v_1, v_2, v_3)$$
3. () La ecuación continua se obtiene despejando el parámetro en cada ecuación paramétricas e igualando.
$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$$
4. () La intersección de 2 planos secantes se interceptan en un punto.
5. () La intersección de 2 planos dado origen a 2 semiplanos el ángulo de intercepción entre 2 semiplanos se denomina ángulo diedro.
6. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos O(3, 2, 1) y P(-2, 2, 0).
 - a. A. $(x, y, z) = (3, 2, 1) + \alpha (-2, 2, 0)$.
 - b. B. $(x, y, z) = (3, 2, 1) + \alpha (-5, 0, -1)$.
 - c. C. $(x, y, z) = (-2, 2, 0) + \alpha (-5, 0, -1)$.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

7. Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta OP; $(x, y, z) = (3, 2, 1) + \alpha(-4, -1, -1)$.
- $x - 3/4 = y - 2 = z - 1$.
 - $x - 3/-4 = y + 2 = z - 1$.
 - $x - 3/4 = y - 2 = z + 1$.
8. Encontrar la recta de intersección entre los planos $a = 3x - 2y + z = 2$ y $b = x + 3y + 5z = 3$. Fijando arbitrariamente $z = 0$
- $r(x,y,z) = \left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, 0\right) + t(-13, -14, 11)$.
 - $r(x,y,z) = \left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, 0\right) + t\left(-\frac{13}{14}, -1, \frac{11}{14}\right) + t(-13/14, -1, 11/14)$.
 - $r(x,y,z) = (3, -2, 1) + t(1, 3, 5)$.
9. Encontrar la recta de intersección entre los planos $a = 3/4x + 2y + 2z = 5$ y $b = 3/4x - 2y + 2z = 3$. Fijando arbitrariamente $z = 0$.
- $r(x,y,z) = (16, 1, 0) + t\left(1, 0, -\frac{3}{8}\right)$.
 - $r(x,y,z) = \left(\frac{16}{3}, \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(1, 0, -\frac{3}{8}\right)$.
 - $r(x,y,z) = (3, -2, 1) + t(1, 3, 5)$.
10. Encontrar la recta de intersección entre los planos $a = x + y + z = -1$ y $b = x - y - z = -2$. Fijando arbitrariamente $z = 0$
- $r(x,y,z) = (16, 1, 0) + t\left(1, 0, -\frac{3}{8}\right)$.
 - $r(x,y,z) = \left(\frac{16}{3}, \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(1, 0, -\frac{3}{8}\right)$.
 - $r(x,y,z) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + t(0, 2, -2)$.

[Ir al solucionario](#)



Semana 11

"Sin matemáticas, no hay nada que puedas hacer. Todo a tu alrededor es matemáticas. Todo a tu alrededor son números".

Estimado estudiante en la semana onceava estudiaremos la Unidad.10. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio lo concerniente a la Intersección de una recta y un plano; las Posiciones relativas de 2 rectas en el espacio; la Recta perpendicular a un plano y la Distancia mínima entre 2 rectas alabeadas.



Unidad 10. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

10.1. Intersección de una recta y un plano

Las posiciones relativas de una recta y un plano, permite, indicar si la recta y el plano en el espacio tienen o no puntos en común. Se clasifican en: Figura 10.3

- Secante** la recta tiene 1 punto en común , figura 10.3 (a);
$$l \cap \pi = \{P\}$$

- b. **Contenidas** todos los puntos de una recta pertenece al plano, figura 10.3 (b); $l \subset \pi$.

$$l \cap \pi = l$$

- c. **Paralelas** todos los puntos de una recta están a la misma distancia del plano, figura 10.3 (c); $l \parallel \pi$.

- d. **Perpendiculares** la recta con el plano forma un ángulo de 90° , solo, si la recta L es perpendicular a 2 rectas, como mínimo, secantes del plano P, figura 10.3 (d); $l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} = k\vec{n}$.

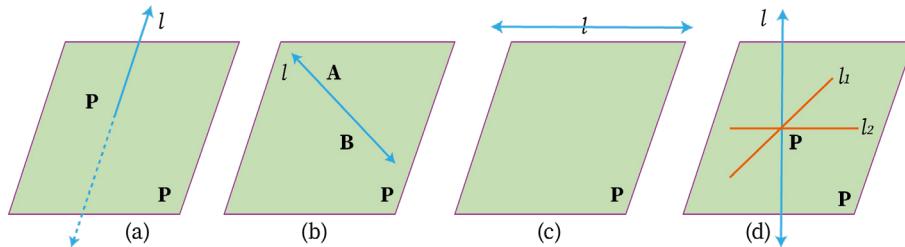


Figura 10.3.

Ejemplo: Buscar la intersección entre la recta r1 y el plano π .

Solución: escribir las ecuaciones paramétricas de la recta y las reemplaza en la ecuación del plano:

$$\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$$

$$r1: (x, y, z) = (0, 1, 3) + a(1, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = a \\ y = 1 \\ z = 3 + a \end{array} \right\}$$

$$2a - 3 \cdot 1 + (3 + a) + 1 = 0 \\ a = -1/3$$

Reemplazar el valor del parámetro a en:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a = -1/3 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

$$z = 3 + a = 3 - 1/3 = 8/3$$

$$r_1 \cap \pi = \{P\} = \left\{-\frac{1}{3}, 1, \frac{8}{3}\right\}$$

10.2. Posiciones relativas de 2 rectas en el espacio

Las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio, permite, indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común. Se clasifican en:

- a. **Paralelas** todos los puntos de una recta están a la misma distancia de la otra.
- b. **Coincidentes** todos los puntos son comunes con todos los puntos, por tanto, son puntos de la misma recta.
- c. **Secantes** las rectas tiene 1 punto en común.
- d. **Se cruzan (Alabeadas)** las rectas no tienen puntos en común porque no pertenecen al mismo plano.
- e. **Perpendiculares** las rectas con el plano forman un ángulo de 90°

En la siguiente tabla se determinan las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio de acuerdo con el valor del rango:

Rango	RECTAS			
	Paralelas	Coincidentes	secantes	Se cruzan
A	2	2	3	3
A'	3	2	3	4
Soluciones	No	Infinitas	Única	No
Ejemplo figura 10.4	l_2 y l_3	l_1 y l_2	l_4 y l_6	l_6 y l_7

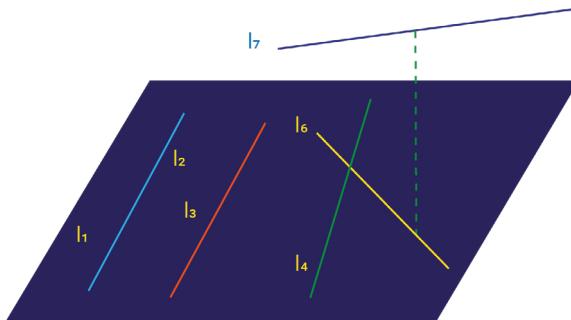


Figura 10.4.

Supongamos que las rectas vienen dadas en forma general o implícita, es decir:

$$R: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

Lo que da lugar a un sistema de 4 ecuaciones con tres incógnitas, luego, y teniendo en cuenta que el rango de A es como mínimo 2, ya que, si fuera rango 1 , tendríamos 4 planos paralelos, lo que implicaría que no habría recta:

EJEMPLO 10.2, ejemplo de (González y Valdés, 2015), determine la posición relativa de las rectas:

$$r: \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ y + z + 4 = 0 \end{cases} \quad s: x + 2 = -2y = z - 1$$

Solución: Encontramos el vector de la recta r:

$$v_r = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

Y el vector director de s encontramos reescribiendo la ecuación continua:

$$s: x + 2 = -2y = z - 1 \Rightarrow s: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1/2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}$$

hallamos ahora el vector siendo P un punto r y Q un punto de s:

$$\begin{aligned} r: \{x + 2y + 3 = 0 \quad y + z + 4 = 0 \Rightarrow \{y = 0 \quad x = 3 \quad z = -4 \Rightarrow P(3,0,-4) \quad y \quad Q(-2,0,1) \Rightarrow \overline{PQ} \\ = (-5,0,5) \end{aligned}$$

planteamos la matriz y calculamos el determinante para hallar el rango

$$\begin{aligned} (u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ q_1 - p_1 \ q_2 - p_2 \ q_3 - p_3) &= (2 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1/2 \ 1 \ -5 \ 0 \ 5) \\ \Rightarrow |2 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1/2 \ 1 \ -5 \ 0 \ 5| &= \frac{35}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

El rango de la matriz es 3 y los vectores son linealmente independientes por tanto las rectas se cruzan.

10.3. Recta perpendicular a un plano

Se dice que la recta es perpendicular al plano cuando la recta con el plano forma un ángulo de 90° , entonces la recta L es perpendicular a todas las rectas del plano π P(d); figura 10.5.

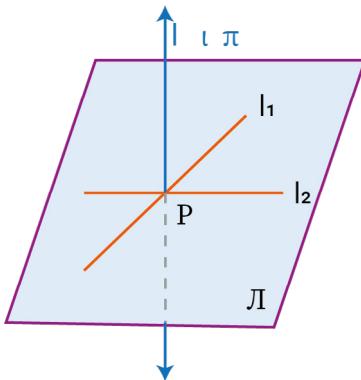


Figura 10.5.

Para verificar la perpendicularidad entre una recta (l) y un plano (π), es suficiente comprobar que dos rectas (l_1 y l_2) no sean paralelas del plano (π) sean perpendiculares, ó ortogonales, a la recta (l).

EJEMPLO 10.3. ejemplo de (Gutiérrez y Mora, 2018)

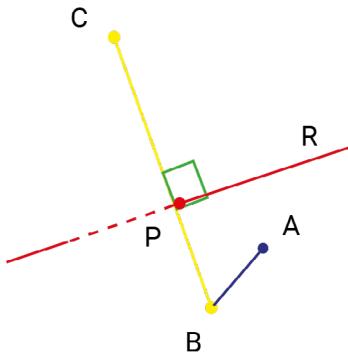


Figura 10.6.

Determinar una ecuación normal del plano que contiene los puntos A = (1, 1, -4), B = (2, -2, 3) y C = (-3, 1, 4).

Solución: Los puntos son no colineales. Para obtener una ecuación normal del plano es necesario hallar un vector normal a este, es decir un vector perpendicular a dicho plano. Supongamos que $n = (a, b, c)$ es el vector normal. Los segmentos \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} son segmentos en el

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

plano, entonces el vector normal es perpendicular a los vectores AB y BC , así AB .

$$n = 0 \quad y \quad BC \cdot n = 0$$

Entonces

$$\mathbf{AB} = (2, -2, 3) - (1, 1, -4) = (1, -3, 7)$$

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow (1, -3, 7) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow a - 3b + 7c = 0$$

Luego,

$$\mathbf{BC} = (-3, 1, 4) - (1, 1, -4) = (-4, 0, 8)$$

$$\mathbf{BC} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (-4, 0, 8) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow -4a + 8c = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se llega a que $a = 2c$ y $b = 3c$ donde c se puede elegir libremente. Entonces $(a, b, c) = (2c, 3c, c) = c(2, 3, 1)$. Así, una ecuación normal del plano es

$$\left\{ \begin{array}{l} [(x, y, z) - (1, 1, -4)] \cdot (2, 3, 1) = 0 \\ (x - 1, y - 1, z + 4) \cdot (2, 3, 1) = 0 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{array} \right.$$

10.4. Distancia mínima entre 2 rectas alabeadas

La distancia mínima entre 2 rectas alabeadas no coplanares ni secantes es la longitud del segmento perpendicular a ambas, $d = PQ$, figura 10.7.

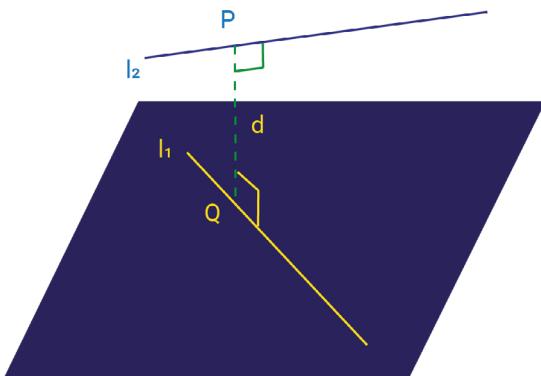


Figura 10.7.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre Posiciones relativas de dos rectas en el espacio, invito a ver el video [Rectas Paralelas | Posición Relativa de Dos Rectas en el Espacio](#).

En este vídeo se estudia la posición relativa de dos rectas en el espacio que resultan ser rectas paralelas. En este caso, se cumple que los vectores de dirección de ambas rectas son paralelos (sus coordenadas son proporcionales) y ningún punto de paso de las dos rectas pertenece a la otra recta.

En la página 94, del texto [Vectores, Rectas y Planos](#), el autor presenta otro método para determinar la intersección de una recta con dos planos.

En la página 17, del texto [Geometría del espacio; ejercicios y problemas](#), los autores grafican cada uno de los casos y determinan la intersección de una recta con dos planos.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de las Posiciones relativas de dos rectas en el espacio, de la semana 11 y plasmar dichos conocimientos, realice las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido

- a. Contestando las interrogantes planteadas
 - ¿Cuál es el procedimiento para obtener la intersección entre una recta y un plano?
 - ¿Cuáles son las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio?, grafique cada una de ellas.
- b. Desarrolle un ejemplo de cada una de las ecuaciones de la recta en el espacio.
- c. Utilice GeoGebra para graficar las respuestas
 - Obtener la intersección, si hubiera, entre el plano $\pi : x - 2y + 3z = 1$ y la recta $L : (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(0, 2, 3)$



Autoevaluación 10

1. () Las posiciones relativas de una recta y un plano, permite, indicar si la recta y el plano en el espacio tienen o no puntos en común.
2. () La Intersección de una recta y un plano es **secante** si la recta tiene 2 o más puntos en común con el plano.
3. () La Intersección de una recta y un plano es **Contenidas** cuando todos los puntos de una recta pertenecen al plano.
4. Las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio, permite, indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común y se clasifican. Relacione el tipo de intersección con su descripción.

Intersección	Descripción
1. Paralelas	a. Las rectas con forma un ángulo de 90
2. Coincidentes	b. Todos los puntos de una recta están a la misma distancia de la otra
3. Secantes	c. Todos los puntos son como unos con todos los puntos son comunes por tanto son la misma recta.
4. Se cruzan	d. Las rectas tienen 1 punto en común
5. Perpendiculares	e. Las rectas no tienen puntos en común porque no pertenecen al mismo plano

- a. 1b, 2d, 3c, 4e, 5a.
- b. 1b, 2c, 3d, 4e, 5a.
- c. 1a, 2c, 3d, 4e, 5b.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

5. () La distancia mínima entre 2 rectas alabeadas no coplanares ni secantes es la longitud del segmento perpendicular a ambas.
6. Encontrar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{v} = (3,2,4)$ que pasa por el punto $P_0(1,1,-1)$.
- $\pi_1 = 2x + 3y + 4z - 1 = 0$.
 - $\pi_1 = 3x + 2y + 4z - 1 = 0$.
 - $\pi_1 = 3x + 2y + 4z - 4 = 0$.
7. Encontrar la ecuación del plano que corta perpendicularmente al segmento OP en su punto medio, los puntos $O(1,3,3)$ y $P(3,-1,3)$.
- $\pi = 2x + y - 5 = 0$.
 - $\pi = 2x + 2y + z - 5 = 0$.
 - $\pi = 2x + y + z - 5 = 0$.
8. Encontrar la posición relativa de las dos rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 30 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

- Secantes.
- coincidentes.
- Paralelas.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

9. Encontrar la posición relativa de las dos rectas r y s:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases}$$

$$z = 1 + 2t$$

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

$$z = 2t$$

- a. Secantes.
- b. Paralelas.
- c. Coincidentes.

10. Encuentre la distancia mínima entre las rectas r y s:

$$r: (x, y, z) = (2, 0, -2) + l(-1, 2, -1)$$

$$s: (x, y, z) = (1, -2, 0) + t(2, 1, 1)$$

- a. $\frac{9}{\sqrt{35}}$.
- b. $\frac{13}{\sqrt{35}}$.
- c. $\frac{11}{\sqrt{35}}$.

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



Semana 12

"Las matemáticas son la creación más poderosa y bella del espíritu humano.". Stefan Banach.

Muy bien estimado estudiante por el interés demostrado en el desarrollo de las actividades, en la semana doceava nos corresponde estudiar la Unidad.11. Posición relativa de dos planos en el espacio, la Distancia de un punto a un plano y la Proyección de un punto y de una recta sobre un plano



Unidad 11. Posición relativa de dos planos en el espacio

11.1. Posiciones relativas de 2 planos en el espacio

Las posiciones relativas de 2 planos, permite, indicar si los 2 planos en el espacio tienen o no puntos en común y se realiza a base de los vectores normales de cada plano, ver Figura 12.1. Se clasifican en:

- Contenidas todos los puntos del plano π_1 pertenece al plano π_2 (a); Los vectores normales son proporcionales ($\vec{n}_1 = k \vec{n}_2$) => significa que son paralelos $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, además, con el punto de paso pertenece a los mismos planos.**

$$\pi_1 = \pi_2 \text{ y } \pi_1 \subset \pi_2$$



- b. **Paralelos** todos los puntos del plano están a la misma distancia del plano (b); Los vectores normales son proporcionales ($\vec{n}_1 = \vec{n}_2$)=> significa que son paralelos , $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$
el punto de paso pertenece solo a un plano.

$$\pi_1 \cap \pi_2 = 0$$

- c. **Secante**, los planos tienen una recta que les intersectan (corta) o en común (c); Los vectores normales no son proporcionales ($\vec{n}_1 \neq \vec{n}_2$)=> significa que no son paralelos $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

$$\pi_1 \cap \pi_2 = l$$

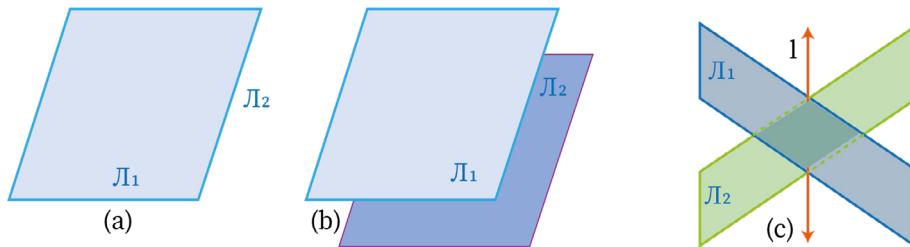


Figura 12.1.

Sean los planos π_1 y π_2 dados por sus ecuaciones generales, obtenemos los vectores normales. Si los vectores son proporcionales (iguales) son paralelos, si, también los términos independientes son proporcionales se trata de planos coincidentes. Si los vectores normales no son proporcionales son planos secantes y tiene una recta que les interceta. En la siguiente tabla está la síntesis de las posiciones relativas de los dos planos según la proporcionalidad de los vectores.

Características	PLANOS		
	Coincidentes	Paralelos	Secantes
<i>Vectores normales proporcionales</i>	Si	si	no

Características	PLANOS		
	Coincidentes	Paralelos	Secantes
Términos independientes proporcionales	si	no	No aplica
Soluciones	Infinitas	No	Una recta
Ejemplo figura 12.1	(a)	(b)	(c)

Ejemplo: Determinación de dos planos en el espacio analizando los rangos de las ecuaciones generales de los planos.

Solución: construimos la matriz M (de los coeficientes) y la matriz ampliada M* (incluido los términos independientes)

$$M = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} \quad M' = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix}$$

Si el $Rg(M) = 1$ y $Rg(M^*) = 1 \Rightarrow$ coincidentes

Si el $Rg(M) = 1$ y $Rg(M^*) = 2 \Rightarrow$ paralelos

Si el $Rg(M) = 2$ y $Rg(M^*) = 2 \Rightarrow$ secantes

En la siguiente tabla está la síntesis de las posiciones relativas de los dos planos de acuerdo al rango de M y M*.

Rango	PLANOS		
	Coincidentes	Paralelas	Secantes
M	1	1	2
M'	1	2	2
Soluciones	Infinitas	No	Una recta
Ejemplo figura 12.1	(a)	(b)	(c)

EJEMPLO 12.1, ejemplo de (González y Valdés, 2015), Estudiar la posición relativa de los siguientes planos $\{\pi_1: 6x+3y-3z-1=0$
 $\pi_2: 10x+5y-5z+1=0\}$:

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices de este:

$$\begin{aligned}\pi_1: 6x+3y-3z-1=0 \quad \pi_2: 10x+5y-5z+1=0 \\ \Rightarrow M = (6 \ 3 \ -3 \ 10 \ 5 \ -5) \Rightarrow M' \\ = (6 \ 3 \ -3 \ 10 \ 5 \ -5 \ 1 \ -1)\end{aligned}$$

Ahora el rango de M es 1 ya que sus filas son proporcionales, y todos los determinantes que podamos construir a partir de ellos son nulos

$$|6 \ 3 \ 10 \ 5| = |3 \ -3 \ 5 \ -5| = |6 \ -3 \ 10 \ -5| = 0 \Rightarrow \text{rg}(M)=1$$

Sin embargo, el rango de M' es dos, ya que D y D' no mantienen la relación de proporcionalidad de los demás coeficientes.

$$|-3 \ 1 \ -5 \ -1| = 3 - (-5) = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M')=2$$

Por tanto, los planos π_1 y π_2 son paralelos.

11.2. Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto a un plano es la longitud del segmento perpendicular a plano deseado, desde el punto, $d=PQ$ figura 12.2

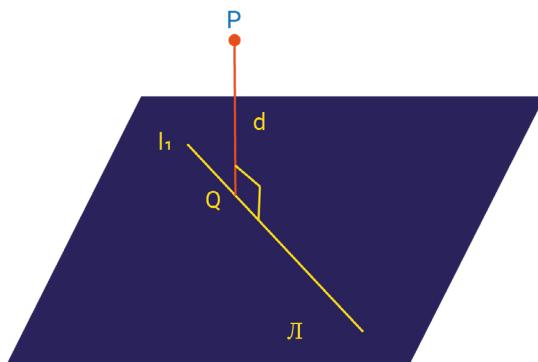


Figura 12.2.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Para determinar la distancia d entre punto P y un plano π , se traza, por el punto A una recta perpendicular al plano π y se determina la intersección Q entre ambos. La distancia de entre los puntos P y Q es igual a la distancia entre el punto A y el plano π .

Si tenemos la ecuación a un plano $ax + by + cz = d$, y siendo $P(x_1, y_1, z_1)$ obtenemos la fórmula de la distancia d :

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

EJEMPLO 12.2, ejemplo de, (Gutiérrez y Mora, 2018). Si $\pi: 2x + 3y - 2z = 5$. La distancia del plano al origen es $d = \frac{|2.0+3.0-2.0-5|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{17}}$

Tener presente que el origen es $O(0, 0, 0)$

11.3. Proyección de un punto y de una recta sobre un plano

PROYECCIÓN DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO.

La proyección de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular al plano trazada desde el punto, $\text{Proy}_\pi P = P'$, figura 12.3.

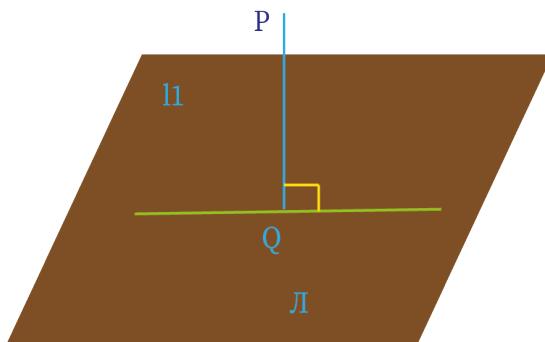


Figura 12.3.

PROYECCIÓN DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO.

La proyección de una recta sobre un plano, si se da una recta r y un plano π se desea obtener la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.

Es el conjunto de los puntos del plano que corresponden a las proyecciones de los puntos de la recta, $\text{Proy}_{\pi} PQ^{\leftrightarrow} = P'Q'^{\leftrightarrow}$, figura 12.4 (a).

En el caso de la proyección de un segmento sobre un plano, se obtiene el segmento cuyos extremos son las proyecciones de los extremos del segmento dado, $\text{Proy}_{\pi}(PQ) = P'Q'$, figura 12.4 (b).

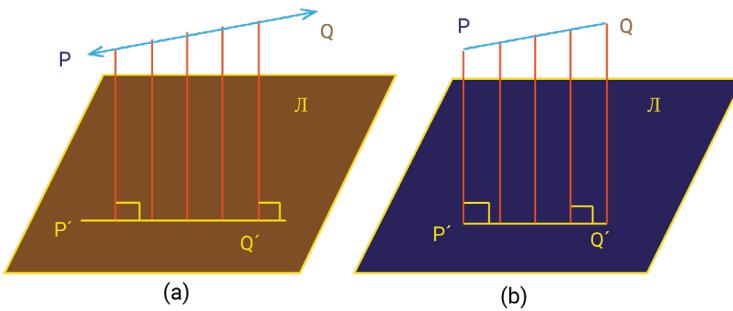


Figura 12.4.

EJEMPLO 12.4. Hallar la proyección de $P(1,2,3)$ sobre la recta, figura 12.5:

$$r = \{x = -1 + 4k, y = 5k, z = 2 + 6k\}$$

Si P' pertenece a la recta $/$ debe ser de la forma $P'(-1+4k, 5k, 2+6k)$ y como $\overline{PP'} \perp \vec{v} \Rightarrow (4,5,6) \cdot (4k-2, 5k-2, 6k-1) = 0 \Rightarrow k = \frac{24}{77}$; entonces el punto buscado es $P'(\frac{19}{77}, \frac{120}{77}, \frac{298}{77})$ $P'(0.25, 1.56, 3.87)$

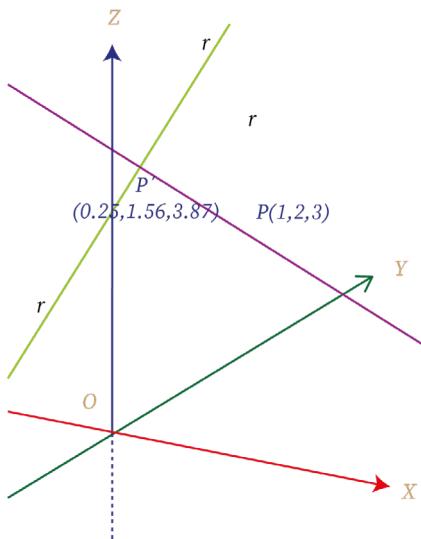


Figura 12.5.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre Posición relativa de dos planos en el espacio, invito a ver el video [Cómo Estudiar la POSICIÓN RELATIVA de DOS PLANOS en el Espacio](#).

En este vídeo se deducen las expresiones que nos permiten estudiar la posición relativa de dos planos en el espacio que pueden tener las siguientes posiciones relativas: coincidentes, paralelos o secantes. El estudio se puede hacer con rangos de las matrices que involucran a las ecuaciones de los planos o mediante los vectores normales y punto de paso de los planos.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

En la página 22, del texto [Geometría del espacio; ejercicios y problemas](#), los autores grafican cada uno de los casos y determinan las posiciones relativas de los planos en el espacio.

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de las Posición relativa de dos planos en el espacio, de la semana 11 y plasmar dichos conocimientos, es realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido

- a. Grafique cada una de las posiciones relativas de dos planos en el espacio.
- b. Utilice GeoGebra para graficar las respuestas.

Dado π : $x + y + z = 3$

- a. Hallar la proyección de la recta r : $(x, y, z) = \lambda(0, 2, 2)$
- b. Dada la recta s : $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t.(-2, b, c)$, hallar los valores b y c para que la proyección de s sobre π sea un punto. ¿Cuál es dicho punto?



Autoevaluación 11

1. () Dos planos en el espacio son coincidentes cuando todos los puntos del plano π_1 no pertenece al plano π_2 .
2. () Dos planos en el espacio son paralelos cuando los vectores normales son proporcionales ($\vec{n}_1 = k \vec{n}_2$) => significa que son paralelos $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, además, con el punto de paso pertenece a los mismos planos.
3. () Dos planos son Secantes cuando tiene una recta que les intersectan (corta) o en común; Los vectores normales no son proporcionales ($\vec{n}_1 \neq k \vec{n}_2$)=> significa que no son paralelos $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$.
4. () Los planos son Paralelos cuando el Ra (M) = 1 y Rg (M*) = 2.
5. () Dos planos en el espacio son secantes cuando el Ra (M) = 1 y Rg (M*) = 1.
6. Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\alpha: x + y - z + 2 = 0$$

$$\beta: 3x + 3y - 3z + 6 = 0$$

- a. Secantes.
- b. Paralelas .
- c. Coincidentes.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

7. Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\alpha = x + y - z + 2 = 0$$

$$\beta = 3x + 3y - 3z + 8 = 0$$

- a. Secantes.
- b. Paralelas.
- c. Coincidentes.

8. Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\alpha = 5x + y - z - 4 = 0$$

$$\beta = 2x - 2y - z + 5 = 0$$

- a. Secantes.
- b. Paralelas.
- c. Coincidentes.

9. Encuentre la ecuación de la recta que les intersectan los planos. Utilizar un parámetro para la x:

$$\alpha = 5x + y - z - 4 = 0$$

$$\beta = 2x - 2y - z + 5 = 0$$

a.
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

10. Hallar la proyección de una recta sobre un plano, la de la ecuación de la recta es $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ sobre el plano $\pi: 2x+y-3z+1=0$.

a. $r': \begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ -4x + 5y - z = 14 \end{cases}$

b. $r': \begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ 4x + 5y - z = 14 \end{cases}$

c. $r': \begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ -4x + y - z = 14 \end{cases}$

[Ir al solucionario](#)



Semana 13

"Dios no se preocupa de nuestras dificultades en matemáticas; él se integra empíricamente.-".

En la semana treceava veremos la Unidad.12. Posición relativa de tres planos en el espacio, lo correspondiente a: tres planos son coincidentes, los tres planos son paralelos, los tres planos se cortan en una recta, dos planos son paralelos y cortan al tercero y finalizamos con tres planos que se cortan en un punto



Unidad 12. Posición relativa de tres planos en el espacio

Las posiciones relativas de 3 planos, permite, indicar si 3 planos en el espacio tienen o no puntos en común, Figura 13.1. Se clasifican en:

- Los tres planos son coincidentes, Figura 13.1 (a).
- Los tres planos son paralelos, Figura 13.1 (b) y (b').
- Los tres planos se cortan en una recta, Figura 13.1 (c), (c'), (1c) y (1c').
- Los tres planos se cortan en un punto, Figura 13.1 (d).

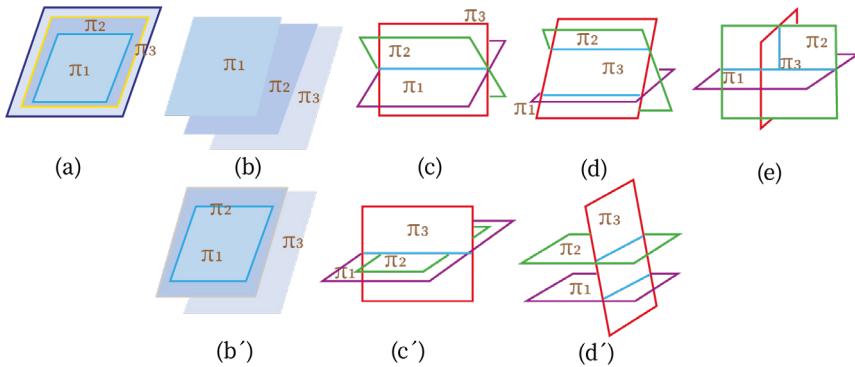


Figura 13.1.

A continuación, estudiaremos las posiciones relativas de tres planos en el espacio, π_1 , π_2 , π_3 , cada uno con su color, para lo cual analicemos los rangos de la matriz M y la ampliada M^* , todos los coeficientes, en la primera fila los coeficientes del plano π_1 , en la segunda fila los del plano π_2 y en la tercera en la tercera fila los coeficientes del plano π_3 .

Sean los tres planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & \pi_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \\ &= 0 & \pi_3 &\equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned}$$

Con las ecuaciones implícitas de los tres planos formamos un sistema de ecuaciones

$$\{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

cuyas matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = (A_1 \ B_1 \ C_1 \ A_2 \ B_2 \ C_2 \ A_3 \ B_3 \ C_3) \quad M^* = (A_1 \ B_1 \ C_1 \ A_2 \ B_2 \ C_2 \ A_3 \ B_3 \ C_3 \ D_1 \ D_2 \ D_3)$$

También tomemos en cuenta los vectores normales de cada plano:

$$\vec{n}_1 \equiv A_1, B_1, C_1 \quad \vec{n}_2 \equiv A_2, B_2, C_2 \quad \vec{n}_3 \equiv A_3, B_3, C_3$$

12.1.Los tres planos son coincidentes

Los planos son coincidentes cuándo el rango de M y el rango de M^* son iguales a 1, las ecuaciones son proporcionales, el sistema es compatible y va a ser indeterminado.

Parámetros	Planos son coincidentes
Rango M	1
Rango M^*	1
Sistema	Sistema Compatible Indeterminado (SCI)
Posición	coincidentes
Figura	13.2

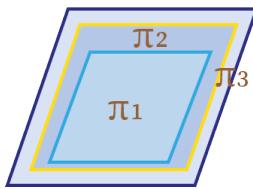


Figura 13.2.

12.2.Los tres planos son paralelos

Los planos son paralelos cuándo el rango de $M = 1$ y el rango de $M^* = 2$, el sistema es Incompatible. Pueden darse dos casos:

- Si dos de las ecuaciones son proporcionales y la otra no, tendremos dos planos coincidentes y paralelos al tercero.
- Si ninguna de las ecuaciones es proporcional tendremos 3 planos paralelos.

Parámetros	Planos paralelos
Rango M	1
Rango M^*	2
Sistema	Sistema Incompatible (SI)

Parámetros	Planos paralelos	
Posición	3 paralelos	2 coincidentes y un paralelo
Figura	13.3 (a)	13.2 (b)

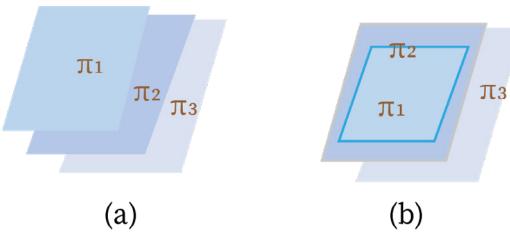


Figura 13.3.

12.3. Los tres planos se cortan en una recta

Los planos se cortan en una recta si el rango de M y de M^* son = 2, en este caso, el sistema es compatible indeterminado y puede darse dos casos:

- Si dos de las ecuaciones son proporcionales tenemos dos planos coincidentes que cortan al tercero.
- Si no hay ecuaciones proporcionales no hay planos coincidentes, los 3 planos se cortan en una recta.

Parámetros	Planos secantes	
Rango M	2	
Rango M^*	2	
Sistema	Sistema Compatible Indeterminado	
Posición	3 secantes y distintos	2 coincidentes y un secante
Figura	13.4 (a)	13.4 (b)

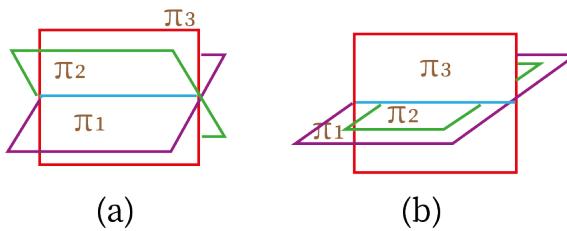


Figura 13.4.

12.4. Dos planos son paralelos y cortan al tercero

Dos planos son paralelos y cortan al tercero, si es rango de $M = 2$ y es diferente a rango de $M' = 3$, entonces el sistema es incompatible y en este caso puede ocurrir:

- Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.
- sí ninguno de los planos es paralelo al otro, se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.

Parámetros	Dos planos son paralelos y cortan al tercero	
Rango M	2	
Rango M^*	3	
Sistema	Sistema Incompatible	
Posición	secantes 2 a 2	2 paralelos y un secante
Figura	13.5 (a)	13.5 (b)

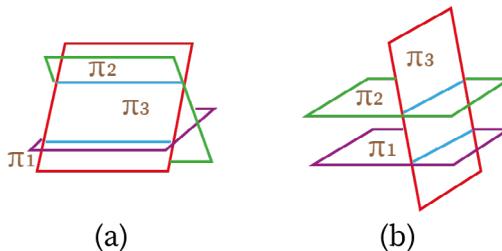


Figura 13.5.

12.5. Los tres planos se cortan en un punto

Por último, los tres planos se cortan en un punto, cuando el rango de M y M^* son igual a 3, en este caso, el sistema es compatible determinado, tiene una única solución porque los 3 planos se cortan en un punto.

Parámetros	Los tres planos se cortan en un punto
Rango M	3
Rango M^*	3
Sistema	Sistema Compatible Determinado (SCD)
Posición	Se cortan en un punto P
Figura	13.6

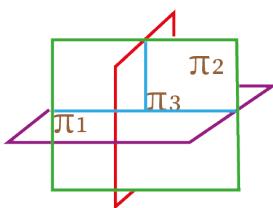


Figura 13.6.

EJEMPLO, ejemplo de (González y Valdés, 2015).

Estudiar la posición relativa de los siguientes planos

$$\{\pi_1: x - y + 2z - 1 = 0 \quad \pi_2: x + y + 3z + 1 = 0 \quad \pi_3: x - 3y - z - 3 = 0\}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices M y M^* :

$$\begin{aligned} \pi_1: x - y + 2z - 1 &= 0 & \pi_2: x + y + 3z + 1 &= 0 & \pi_3: x - 3y - z - 3 &= 0 \\ \Rightarrow M &= (1 \ -1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ -3 \ -1) & \Rightarrow M^* &= (1 \ -1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ -3 \ -1 \ -2 \ 1 \ -3) \end{aligned}$$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Comprobamos que el rango es 3

$$|1 -1 2 1 1 3 1 -3 -1| = -1 - 6 - 3 - 2 - 1 + 9 = -4 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 3$$

Por lo que el sistema es compatible y determinado, los tres planos se cortan en un punto. Resolvemos con el método de Cramer y se obtiene el punto de intersección:

$$x = 1, \quad y = 1 \quad z = 1$$

Todo lo explicado anteriormente con las ecuaciones generales de los planos, sirve también, si alguno de ellos viene dado en ecuaciones paramétricas. Se puede plantear el sistema formado por sus ecuaciones y analizar su compatibilidad o bien hallar los vectores normales y comprobar si son paralelos o no.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento, invito a ver el video [Posiciones relativas de tres planos en el espacio](#), en este video se estudia las posiciones de tres planos en el espacio, alfa, beta y gamma, utiliza un color para diferenciar cada plano en los dibujos y detalla los procedimientos para determinar cada uno de los casos que se puede presentar.

Señor estudiante le invito a analizar el resumen que está en [Posiciones relativas de tres planos en el espacio](#), además de las ecuaciones de los tres planos está el proceso para determinar la posición de los tres planos en el espacio.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

En la página 22, del texto [Geometría del espacio; ejercicios y problemas](#), los autores grafican cada uno de los casos y determinan las posiciones relativas de los planos en el espacio, analizando los rangos de M y M^* , además otras condiciones que cumplen.

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de las Posición relativa de tres planos en el espacio, de la semana 13 y plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido

- a. Completa la siguiente tabla.

Parámetros	Posición relativa de tres planos en el espacio				
	Coincidentes	Paralelos	Secantes en una recta	Cortan al tercero	Se cortan en un punto
Rango M	1	1			
Rango M^*	1	2			
Sistema	SCI				
Otra condición		Ecuaciones proporcionales	Vectores normales paralelos	Vectores normales paralelos	
		2 implícitas	0		
Posición	Coincidentes	2 coincidentes	3 paralelos		

- b. Compruebe que los tres planos siguientes forman un prisma infinito sin bases. (Utilice GeoGebra para graficar los planos)



Autoevaluación 12

1. () Los 3 planos son coincidentes cuándo el rango de M y el rango de M^* son iguales a 0, las ecuaciones son proporcionales, el sistema es compatible y va a ser indeterminado.
2. () Los 3 planos son paralelos cuándo el rango de M = 2 y el rango de $M^* = 1$, el sistema es Incompatible.
3. () Los 3 planos se cortan en una recta sí el rango de M y de M^* son = 2, entonces el sistema es compatible indeterminado.
4. () Dos 3 planos son paralelos y cortan al tercero, si es rango de M = 2 y es diferente a rango de $M' = 3$, entonces el sistema es incompatible.
5. () Los tres planos se cortan en un punto, si el rango de M = 3 y el rango de $M^* = 3$, entonces, el sistema es compatible determinado, tiene una única solución porque los 3 planos se cortan en un punto.
6. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos

$$\pi_{-1}: 2 - y - z = 0$$

$$\pi_{-2}: x + z = 0$$

$$\pi_{-3}: x - y = 1$$

- a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.
- b. Dos planos coincidentes que cortan al tercero.
- c. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero .

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

7. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1: 2x+3y+z=3$$

$$\pi_2: x+y-z=-1$$

$$\pi_3: 3x+y-3z=-1$$

- a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.
- b. Los tres planos se cortan en un punto.
- c. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.

8. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos

$$\pi_1: 2x+3y-2z=3$$

$$\pi_2: x-2y-z=-1$$

$$\pi_3: 3x+y-3z=2$$

- a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.
- b. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.
- c. Los 3 planos se cortan en una recta.

9. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1: 2x+3y+1/3z=3$$

$$\pi_2: x+1/3y-z=-1$$

$$\pi_3: 3x+y-3z=-1/3$$

- a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.
- b. Los tres planos se cortan en un punto.
- c. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

10. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1: x+y+z=7$$

$$\pi_2: 3x+3y+3z=21$$

$$\pi_3: 4x+5y+6z=26$$

- a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases
- b. dos planos coincidentes que cortan al tercero
- c. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero

[Ir al solucionario](#)



Semana 14

"Las matemáticas no conocen razas o límites geográficos. Para las matemáticas, el mundo cultural es una país.".

David Hilbert

Bien estimado estudiante, estamos ya en la penúltima semana y trataremos la Unidad 13. Posición relativa de una recta y un plano en el espacio, lo referente a La recta viene definida por dos planos secantes, por último; a la recta viene definida por un punto y un vector



Unidad 13. Posición relativa de una recta y un plano en el espacio

13.1. La recta viene definida por dos planos secantes

Para comprobar si una recta está definida por dos planos secantes tenemos que analizar la ecuación seleccionando dos puntos y la ecuación del plano, calculando el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada, a partir de los resultados se puede determinar la posición relativa de la recta y el

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

plano, que está dado por los valores de los rangos cómo se indica a continuación.

Sea la recta.

$$r = \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Y del plano

$$\pi = A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Si: r = rango de la matriz de los coeficientes y r' = rango de la matriz ampliada.

Las posiciones relativas de la recta y el plano vienen dadas por la siguiente tabla:

Posición	CARACTERÍSTICAS			
	r	r'	Soluciones	En la figura
Recta contenida en el plano	2	2	Infinitas 3	a
Recta y plano son paralelos	2	3	No	b
Recta y plano son secantes	3	3	Única	c

Ejemplo tomado de superprofe (s.f.).

Hallar la posición relativa de la recta y el plano:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \quad \pi \equiv x - 2y + 3z + 1 = 0$$

En primer lugar, se pasan las ecuaciones continuas a ecuaciones implícitas.

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

Hallamos el rango de la matriz de los coeficientes.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad r = 3$$

Determinamos el rango de la matriz ampliada.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad r' = 3$$

Comparamos los rangos, son iguales a 3, por tanto, la recta y el plano se cortan en un punto.

13.2. La recta viene definida por un punto y un vector

La recta viene definida por un punto A , un vector \vec{u} y un plano π , cuyo vector normal es \vec{v} . Pueden presentarse 3 casos y son:

Posición	CARACTERÍSTICAS		
	$\vec{u} \cdot \vec{v}$	La recta pertenece al plano	Soluciones
Recta contenida en el plano	=0	$\in \pi$	Infinitas 3
recta y plano son paralelos	=0	$\in \pi$	No
recta y plano son secantes	$\neq 0$	Un punto de la recta $\in \pi$	Única

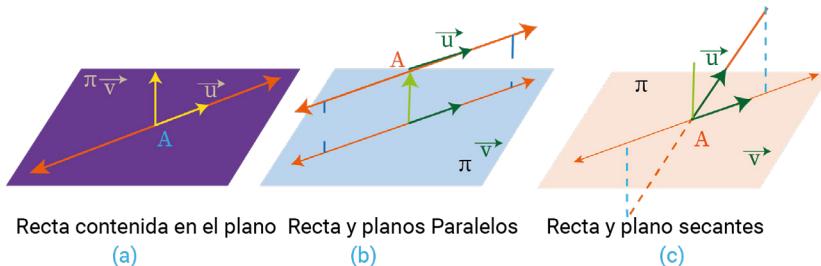


Figura 14.1.

Ejemplo tomado de superprofe (s.f.).

Hallar la posición relativa de la recta y el plano:

$$r \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1} \quad \pi \equiv -x + 3y + 2z + 5 = 0$$

En primer lugar, se pasan las ecuaciones continuas a ecuaciones implícitas.

$$\begin{cases} x - 5y = 1 \\ y - z = 2 \\ -x + 3y + 2z = -5 \end{cases}$$

Hallamos el rango de la matriz de los coeficientes.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad r = 2$$

Determine el rango de la matriz ampliada.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad r' = 2$$

Comparamos los rangos, son iguales a 2, por tanto, la recta está contenida en el plano.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre Posición relativa de una recta y un plano en el espacio, invito a ver el video Intersección entre una recta y un plano en el espacio,

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

(Ronny, 2020), en este video se estudia dos métodos para conocer la posición relativa entre una recta y un plano, considerando que la recta debe llevarse a forma paramétrica y luego esta se relaciona con el plano para el primer método, y en el segundo método, más tradicional, usando los vectores director de la recta y normal del plano para verificar usando producto punto o escalar.

Señor estudiante le invito a analizar el tema [Posiciones relativas de una recta y un plano](#), que detalla las fórmulas para los casos La recta viene definida por dos planos secantes y la recta viene definida por un punto y un vector.

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de las posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio, de la semana 14 y plasmar dichos conocimientos, es realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

- a. Encuentre la intersección entre la recta y el plano. (Utilice GeoGebra para graficar el plano y la recta)

$$\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$$

$$r: (x, y, z) = (0, 1, 3) + a(1, 0, 1)$$



Autoevaluación 13

1. () Una recta está contenida en el plano cuando $\text{Ra}(M) = 2$ y $\text{Rg}(M^*) = 3$.
2. () Una Recta y plano son paralelos cuando el $\text{Ra}(M) = 2$ y $\text{Rg}(M^*) = 2$.
3. () Una Recta y plano son secantes cuando el $\text{Ra}(M) = 3$ y $\text{Rg}(M^*) = 3$.
4. () La recta viene definida por un punto **A** y un vector \vec{u} y un plano **π** cuyo rector normal es \vec{v} y pueden presentarse 3 casos.
5. La recta viene definida por un punto **A** y un vector \vec{u} y un plano **π** cuyo rector normal es \vec{v} y pueden presentarse 3 casos. Las posiciones relativas de la recta de plano son:

Características	Las posiciones
Si $\vec{u} \in \pi$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	a. Recta y plano son paralelos
Si $\vec{u} \notin \pi$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	b. Recta y plano son secantes
Si un punto de la recta $\in \pi$ el $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$	c. Recta contenida en el plano

- a. 1c, 2a, 3b.
- b. 1a, 2b, 3b.
- c. 1b, 2a, 3c.

6. Encontrar la posición relativa de la recta y el plano.

Sea la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x - 5y = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Y del plano

$$\pi = -x + 3y + 2z = -5$$

- a. La recta está contenida en el plano.
- b. La recta y plano son paralelos.
- c. La recta y plano son secantes.

7. Encontrar la ecuación vectorial de la recta definida por un punto y un vector: A(4, 4, 4) y $\vec{v} = (2, 7, 5)$.

- a. $(x, y, z) = (4, 4, 4) + \lambda(2, 7, 5)$.
- b. $(x, y, z) = (2, 7, 5) + \lambda(4, 4, 4)$.
- c. $(x, y, z) = (4, 4, 4) + (2, 7, 5)$.

8. Encontrar la ecuación vectorial de la recta definida por un punto y un vector: A(3, 2, 1) y $\vec{v} = (-4, -1, -1)$.

- a. $(x, y, z) = (3, 2, 1) + (-4, -1, -1)$.
- b. $(x, y, z) = (3, 2, 1) + \lambda(-4, -1, -1)$.
- c. $(x, y, z) = (-4, -1, -1) + \lambda(3, 2, 1)$.

9. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A(-3, -2, -4) y B(2, 3, 4).

- a. 2.0.
- b. 2.5.
- c. 1.0.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

10. Determinar si los puntos $C(2, -3, 1)$ y $D(2, 3, 12)$ pertenecen a la recta:

$$(x, y, z) = (-3, -2, 4) + \lambda(5, 5, 8)$$

- a. C y D si pertenecen a la recta.
- b. C si pertenece y D no pertenece a la recta.
- c. C no pertenece y D si pertenece a la recta.

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



Semana 15

"No todo lo que cuenta puede ser contado. No todo lo que puede ser contado cuenta.".

Excelente, hemos llegado a la última unidad de estudio que es la Unidad 14. Ángulos y Distancias, revisaremos lo referente al ángulo entre dos planos; al Ángulo entre recta y plano; al Ángulo entre dos rectas; la Distancia punto-recta en R3; la Distancia entre dos rectas paralelas finalizando con la Distancia entre rectas alabeadas.



Unidad 14. Ángulos y Distancias

14.1. Ángulo entre dos planos

El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus respectivos vectores normales.

Recordemos que dos planos en el espacio pueden ser coincidentes, paralelas o secantes.

Si los dos planos son coincidentes o paralelos, forman un ángulo de 0° .

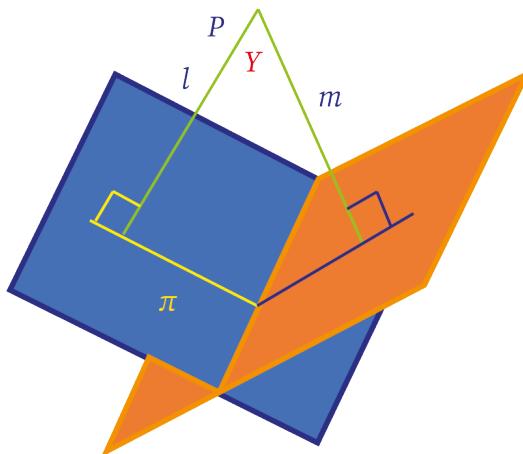


Figura 14.2.

14.2. Ángulo entre recta y plano

Se define como ángulo entre una recta r y un plano π al ángulo agudo que forman r y r' .

Para medir el ángulo (γ) entre una recta (r) y un plano (π):

- Se determina la intersección (I) entre el plano (π) y la recta (r)
- Se traza, por un punto cualquiera (P) de la recta (r), una recta (r') perpendicular al plano (π) y se determina la Intersección (J), entre la recta (r') y el plano (π). Los puntos (I y J) definen la recta (l).

- c. El ángulo (γ) que forman las rectas (r y l) es igual al ángulo que forma la recta (r) con el plano (π).

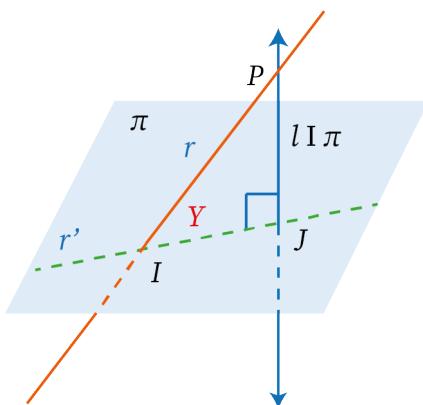


Figura 14.3.

14.3. Ángulo entre dos rectas

El ángulo formado entre dos rectas de R^3 es el ángulo que se forma entre sus vectores directores.

Sean las rectas r_1 y r_2 con sus vectores directores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Entonces:

$$\cos \cos (\alpha) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}$$

Usemos la misma convención que se utiliza para ángulo entre planos, para ángulo entre recta y plano, apliquemos el módulo:

$$\cos \cos (\alpha) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}$$

Por lo tanto:

$$\alpha = \arccos = \left(\frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{\|\vec{v_1}\| \|\vec{v_2}\|} \right), 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Casos particulares:

Si $\alpha = 0$, entonces las rectas son paralelas ($\vec{v_1} = k\vec{v_2}$).

Si $\alpha = \pi/2$, entonces las rectas son perpendiculares ($\vec{v_1} \cdot k\vec{v_2} = 0$)

Ejemplo, de (UTN.BA, s.f.)

Sean:

$$\{r_1: (x, y, z) = k(1, 0, 0) \quad k \in R \quad r_2: (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, 0, 1) \quad t \in R$$

Este sistema de ecuaciones se trata de rectas son alabeadas. ¿Cuál es el ángulo entre ellas?

Como ($\vec{v_1} \cdot k\vec{v_2} = 0$), las rectas son perpendiculares, o sea que $\alpha = \pi/2$

14.4. Distancia punto-recta en R3

En la figura 15.4, se desea encontrar la distancia entre el punto O a la recta r. La recta r que pasa por el punto P, tiene por vector director \vec{v} , hay que hallar la distancia entre O y r (con $O \notin r$), Sea $O' \in r$ tal que $\overrightarrow{OO'}$ es perpendicular a la recta r.

$$d(O, r) = \|\overrightarrow{OO'}\|$$

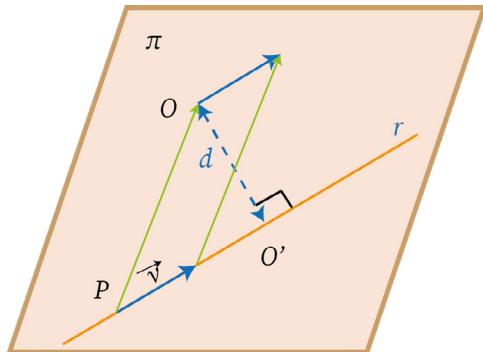


Figura 15.4.

Consideremos al punto $P \in r$ y el vector $\overrightarrow{OO'}$, y construyamos el paralelogramo determinado por v y $\overrightarrow{OO'}$, tal como lo muestra la figura 15.4.

El segmento $\overrightarrow{OO'}$ es la altura del paralelogramo. Si llamamos S al área de dicho paralelogramo, resulta:

$$S = b * h = \|v\| * d$$

El área de paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial:

$$S = \|\overrightarrow{PO} * v\|$$

Igualamos las dos ecuaciones de S

$$\|\vec{v}\| * d = \|\overrightarrow{PO} * \vec{v}\| \Rightarrow$$

$$d(O, r) = \frac{\|\overrightarrow{PO} * \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

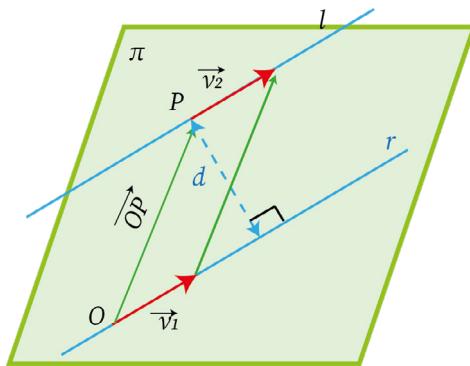


Figura 15.5.

Veamos el ejemplo de ejemplo de (González y Valdés, 2015).

Con las rectas r y l calcular la distancia entre estas dos paralelas, $d(r, l)$:

$$r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(2, -1, 1)$$

$$l: \begin{cases} x + z = 2 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

Halla k tal que $r \parallel l$ y calcular $d(r, l)$:

Partiendo de la condición para que dos rectas sean paralelas:

$$r \parallel l \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \sigma \vec{v}_2 \quad [1]$$

La recta l está definida como intersección de dos planos. Si hacemos el producto vectorial de los vectores normales tendremos un vector director de la recta:

$$(0,1,1) * (1,k,0) = (-k,1,-1)$$

Para calcular la distancia, tomemos dos puntos cualesquiera de las rectas y construyamos el vector

Por [1]:

$$(-k,1,-1) = \alpha(2,-1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -k = 2\alpha \\ 1 = -\alpha \\ -1 = \alpha \end{cases} \Rightarrow k=2$$

$$O(1,0,0) \in r, \quad P(0,0,2), \quad \vec{OP} = (-1,0,2)$$

La distancia entre las rectas será la distancia entre P y r:

$$d(r, l) = d(P, r) = \frac{\|\vec{OP} * \vec{v_1}\|}{\|\vec{v_1}\|}$$

$$\vec{OP} * \vec{v_1} = (-1,0,2) * (2, -1,1) = (2,5,1)$$

$$\|\vec{OP} * \vec{v_1}\| = \sqrt{30}$$

$$d(r, l) = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

14.6. Distancia entre rectas alabeadas

Se denomina rectas alabeadas a las que no son paralelas ni se intersecan en el espacio, es decir, que no pertenecen al mismo plano.

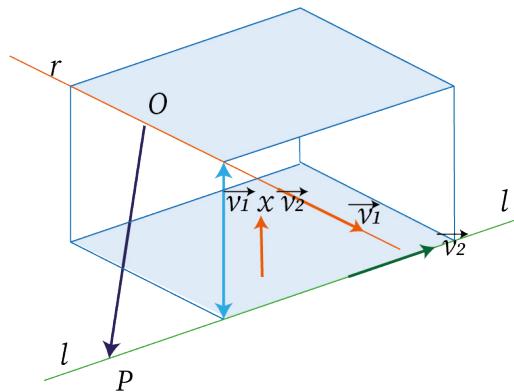


Figura 15.6.

La mínima distancia entre dos rectas alabeadas r y l se obtiene al proyectar el vector \overrightarrow{OP} sobre la dirección perpendicular a ambas rectas, dada por $\vec{v}_1 * \vec{v}_2$:

$$d(r, l) = \|\overrightarrow{\text{proj}_{\vec{v}_1 * \vec{v}_2}(\overrightarrow{OP})}\|$$

Recordar, que:

$$\|\overrightarrow{\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$$

A partir de esto, podemos obtener una fórmula para la distancia entre rectas alabeadas r y l

$$d(r, l) = \frac{|\overrightarrow{OP} * (\vec{v}_1 * \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 * \vec{v}_2\|}$$

EJEMPLO, ejemplo de (González y Valdés, 2015).

Calcular la distancia entre las rectas r y l , $d(r, l)$:

$$r: (x, y, z) = (3, 2, 5) + k(0, -1, 2)$$

$$l: \begin{cases} 2x + y + 3z + 2 = 0 \\ -x + 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Debemos verificar que se trata de rectas alabeadas. Busquemos la dirección de la recta l

$$\vec{v}_2 = (2, 1, 3) * (-1, 2, -4) = (-10, 5, 5)$$

Vemos que las rectas no son paralelas porque sus vectores directores no son paralelos. Luego podemos utilizar la fórmula para distancia entre rectas alabeadas:

$$d(r, l) = \frac{|\overrightarrow{OP} * (\vec{v}_1 * \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 * \vec{v}_2\|}$$

Para hallar $P \in r$ fijamos $z = 0$, por ejemplo, y averiguamos los valores de x e y resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$l: \begin{cases} 2x + y + 3z + 2 = 0 \\ -x + 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}, \quad y = -\frac{8}{5}$$

Encontramos el punto

$$P\left(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}, 0\right) \in l$$

Calcular la distancia:

$$\overrightarrow{OP} \left(-\frac{16}{5}, -\frac{18}{5}, -5 \right)$$

$$\vec{v_1} * \vec{v_2} = (0, -1, 2) * (-10, 5, 5) = (-15, -20, -10)$$

$$\|\vec{v_1} * \vec{v_2}\| = \sqrt{(-15)^2 + (-20)^2 + (-10)^2} = \sqrt{725}$$

$$\overrightarrow{OP} * (\vec{v_1} * \vec{v_2}) = \left(-\frac{16}{5}, -\frac{18}{5}, -5 \right) * (-15, -20, -10) = 48 + 72 + 50 = 170$$

$$d(r, l) = \frac{170}{\sqrt{725}} \cong 6.31$$



Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre Ángulos y Distancias, invito a ver los siguientes videos:

[Ángulo entre planos](#), expone el ángulo entre planos

[Ángulo entre recta y plano](#). Explica a partir de la ecuación de una recta y la ecuación general de un plano, el ángulo que forman entre sí, multiplicando escalarmente el vector normal del plano y el vector director de la recta. Una vez hallado el ángulo que forman ambos, el ángulo que forman la recta y el plano se obtiene fácilmente, si restamos a 90° ese valor.

[Distancia de un punto a una recta](#), es un ejemplo resuelto sobre la distancia de un punto a una recta que pasa por dos puntos, calcula el vector director de la recta y la normal del producto cruz, con el vector que une un punto de la recta con el punto P externo a ella, todo explicado paso a paso

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Distancia entre Rectas Alabeadas R3, explica el método para hallar la distancia entre rectas alabeadas en el espacio.

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de los Ángulos y Distancias, de la semana 15 y plasmar dichos conocimientos, les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

- a. Calcular la distancia desde el punto $P(1,1,1)$ a la recta que pasa por $Q(0,6,8)$ y $R(-1,4,7)$.
- b. Calcular la distancia desde el origen a la recta $l(t) = (1,2,-3) + t(1,1,5)$

Comprobar gráficamente utilizando GeoGebra



Autoevaluación 14

1. () El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus respectivos vectores normales.
2. () El ángulo entre recta y plano se define al ángulo recto que forman r y r' .
3. () El ángulo formado entre dos rectas de \mathbb{R}^3 es el ángulo plano que se forma entre sus vectores directores.
4. () Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas se utiliza la fórmula de la distancia punto-recta:
5. () Se denominan rectas alabeadas a las que no son paralelas ni se intersecan en el espacio, es decir, que no pertenecen al mismo plano.
6. Encuentre el ángulo que forman los planos. $\alpha = 3x - y + 2z + 1 = 0$.

$$\beta = 2x + y - 5z - 1 = 0$$

- a. 75.88° .
- b. 88.75° .
- c. 90.00° .

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

7. Encuentre el ángulo que forman los planos. $\alpha = 3x - 2y + z + 10 = 0$.

$$\beta = x - y + 2z + 12 = 0$$

- a. 40.18° .
- b. 44.00° .
- c. 45° .

8. Encuentre el ángulo que forman la recta r y el plano.

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -21 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

- a. $3x - 4y + 5z - 1 = 0$.
- b. 40.18° .
- c. 44.00° .

9. Calcula la distancia del punto P y la recta r. P(2, 4, 1) y r: $(x, y, z) = (2, 3, -1) + \lambda(1, 2, 1)$.

- a. 1.35.
- b. 1.43.
- c. 1.53.

10. Calcular la distancia entre las rectas s y r que son paralelas.

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 5 - k \\ z = -2 + 3k \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -7 + 6t \\ y = 4 - 3t \\ z = 1 + 9t \end{cases}$$

- a. 1.82.
- b. 3.82.
- c. 2.82.

[Ir al solucionario](#)



Semana 16

“El estudio de las matemáticas, como el Nilo, comienza con minuciosidad, pero termina con magnificencia.”.
Charles Caleb Colton.

En esta semana 16, usted debe sistematizar los conocimientos estudiados en las siete semanas anteriores y prepararse para la evaluación de fin del segundo bimestre, estudiando, repasando y poniendo en práctica los conocimientos tratados para lograr el resultado de aprendizaje: Utilice GeoGebra para la comprobación de los ejercicios.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Se sugiere que revise las lecturas y videos propuestos, de igual forma, revise las evaluaciones parciales y elabore un banco de preguntas referentes al contenido del segundo bimestre.

Realice nuevamente las autoevaluaciones y ejercicios propuestos de los contenidos del segundo bimestre, las unidades:

8. Vectores tridimensionales. Introducción.
9. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.
10. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.
11. Posición relativa de dos planos en el espacio.
12. Posición relativa de tres planos en el espacio.
13. Posición relativa de una recta y un plano en el espacio.
14. Ángulos y Distancias.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Procedimiento:

Compruebe gráficamente los resultados de los ejercicios y ejemplos resueltos utilizando GeoGebra, de tal manera que tenga el mayor éxito al momento de desarrollar el cuestionario de evaluación presencial.



4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	v	El Postulado del transportador es "La medida de un ángulo es un número positivo único"
2	f	Un ángulo recto tiene la medida de 90°
3	v	El ángulo obtuso tiene la medida del ángulo está entre 90° y 180°
4	v	Un ángulo llano es aquel cuyos lados forman rayos opuestos (una línea recta).
5	f	Un ángulo llano tiene su medida de 180°
6	b	$m \angle ABC = m \angle ABD + m \angle DBC = 25^\circ + 38^\circ = 63^\circ$
7	a	$m \angle ABC = m \angle ABD + m \angle DBC = x^\circ + (4x + 5) = (5x + 5)^\circ$
8	a	$4x + 20 = 6x + 4 \Rightarrow 6x - 4x = 20 - 4 = 16^\circ$
9	b	$8x - 25 = 4x + 2 \Rightarrow 8x - 4x = 2 + 25 = 27^\circ$ $m \angle ABC = m \angle ABD + m \angle DBC = 25^\circ + 38^\circ = 63^\circ$
10	c	$x + 41 = 90$, por tanto, $x = 90 - 41 = 49$; el complemento = 49° $x + 41 = 180$, por tanto, $x = 180 - 41 = 139$; el suplemento = 139°

Ir a la
autoevaluación

Autoevaluación 2		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Teorema. A partir de un punto fuera de una recta hay exactamente una recta perpendicular a la recta dada.
2	v	Las rectas paralelas son rectas en el mismo plano y no se intersecan.
3	v	Postulado. A través de un punto fuera de una recta, exactamente una recta es paralela a la recta dada.
4	f	Postulado. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
5	v	Teorema. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.
6	c	$m \angle 1 = 127^\circ$ correspondiente a $\angle 5$ $m \angle 2 = 53^\circ$ suplementario a $\angle 1$ $m \angle 8 = 127^\circ$ vertical a $\angle 5$
7	c	Los ángulos $\angle 7$ y $\angle 14$ son ángulos alternos externos, por tanto, son congruentes, es decir $\angle 7 = \angle 14$ $X^2 + 2x - 6 = x^2 + 6 \Rightarrow x^2 - x^2 + 2x = 6 + 6 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$ $\angle 14 = 6^2 + 6 = 42$
8	b	Los ángulos $\angle 11$ y $\angle 14$ son ángulos alternos internos, por tanto, son congruentes, es decir $\angle 11 = \angle 14$. Los ángulos $\angle 11$ y $\angle 13$ son ángulos suplementarios, es decir $\angle 11 + \angle 13 = 180^\circ$. $3x + 5y = 9x + 3y \Rightarrow 6x - 2y = 0 \Rightarrow y = 3x$ $3x + 5y + 12x + 5y = 180 \Rightarrow 15x + 10y = 180 \Rightarrow 3x + 2y = 36$ $3x + 2(3x) = 36 \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = 4$ $y = 3x \Rightarrow y = 3 * 4 \Rightarrow y = 12$ $m \angle 13 = 9x + 3y = 9*4 + 3*12 = 72^\circ$ $m \angle 14 = 12x + 5y = 12*4 + 5 * 12 = 108^\circ$
9	a	La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° . $m \angle Q = 180 - 40 - 69 = 71^\circ$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Autoevaluación 2

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	a	<p>La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.</p> $m \angle Q = 180 - 90 - 52 = 38^\circ$

Ir a la
autoevaluación

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 3

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Definición. Dos triángulos son congruentes si las seis partes del primer triángulo son congruentes con las seis partes correspondientes del segundo triángulo.
2	v	Postulado. Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LLL).
3	v	Postulado. Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LAL).
4	f	Definición. En este contexto identidad es la razón que se cita cuando se comprueba que un segmento de recta (o un ángulo) es congruente consigo mismo; también se le conoce como propiedad de congruencia reflexiva.
5	v	Postulado. Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (ALA).
6	a	$c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = 9 + 16 = 25$ $c = 5$
7	a	$c^2 = a^2 + b^2$ $a^2 = 100 - 64 = 36$ $a = 6$
8	b	or ser triángulo isósceles los $m\angle B = m\angle C$ $m\angle B + m\angle C = 180 - 34 = 146$ $m\angle B = 146/2 = 73^\circ$ $m\angle C = 73^\circ$
9	c	Si $c = b$ entonces $b = 4.47$, el perímetro = $4.7 + 4.7 + 4.0 = 13.40$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 3

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	a	<p>De acuerdo con el teorema: "Si un lado de un triángulo es más largo que un segundo lado, entonces la medida del ángulo opuesto al lado más largo es mayor que la medida del ángulo opuesto al lado más corto".</p> <p>Ya que $AC > BC > AB$, el ángulo mayor es $\angle B$ que se encuentra opuesto a AC. El ángulo intermedio es $\angle A$ y el más corto $\angle C$</p>

[Ir a la autoevaluación](#)

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 4		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Definición. Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los dos pares de lados opuestos son paralelos.
2	v	Teorema. Dos rectas paralelas son equidistantes dondequiera.
3	f	Teorema. Una diagonal de un paralelogramo lo separa en dos triángulos congruentes
4	v	Definición. La altura de un paralelogramo es un segmento de recta desde un vértice que es perpendicular a un lado no adyacente (o a una extensión de ese lado).
5	v	Teorema. En un paralelogramo con pares de ángulos consecutivos desiguales, la diagonal mayor se encuentra opuesta al ángulo obtuso.
6	c	$m\angle B$ y $m\angle C$ son suplementarios, entonces $m\angle C = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$ Por opuestos $m\angle B = \angle D = 42^\circ$ Por opuestos $a = c$ y $d = b$ $P = (5.3 + 5.3 + 8.1 + 8.1) \text{ cm} = 26.8\text{cm}$
7	b	Los ángulos $\angle D$ y $\angle A$ son suplementarios por consecutivos, entonces $m\angle D + m\angle A = 180^\circ$ $2x + 20 + 3x - 10 = 180$ $5x = 180 - 10$ $X = 170/5 = 34$, entonces $m\angle D = 2x + 20 = 88^\circ$ $m\angle A = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ$ Porque $m\angle A > m\angle D$, la diagonal DB será mayor que AC
8	a	De acuerdo con el teorema: "El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del tercer lado". $OP = \frac{1}{2} BC = 9.22/2 = 4.61$ $BC = 2OP = 2 * 6.53 = 13.06$



[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 4

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	a	Conocemos que $OP = \frac{1}{2} AC$ $15x - 3 = 2(6x + 3) \Rightarrow 15x - 12x = 6 + 3 \Rightarrow 3x = 9$ $\Rightarrow x = 3$ $AC = 15*3 - 3 = 42$ $OP = 6*3 + 3 = 18 + 3 = 21$
10	b	Encontramos la longitud del lado c $C^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ $C = 10$ $P = 4 * 10 = 40$

[Ir a la autoevaluación](#)

Autoevaluación 5		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Definición. Un círculo, son dos o más círculos que tienen radios congruentes
2	v	Los círculos congruentes son dos o más círculos que tienen radios congruentes
3	f	En un círculo o círculos congruentes los arcos congruentes tienen medidas iguales.
4	v	En ángulo inscrito de un círculo es un ángulo que tiene su vértice en un punto en el círculo y sus lados son cuerdas del círculo
5	v	Una tangente es una recta que interseca un círculo en exactamente un punto; el punto de intersección es el punto de contacto o punto de tangencia.
6	a	El ángulo $\angle 1$ es un inscrito por lo tanto $m\angle 1 = \frac{1}{2} m DE = 41^\circ$ El $\angle DBC = 90^\circ$ por lo tanto $m\angle 2 = 90^\circ - 41^\circ = 48^\circ$
7	b	El segmento DB $\angle AB$ por lo tanto $m\angle DBA = 90^\circ$ El ángulo $\angle 1$ es un inscrito por lo tanto $m\angle 1 = \frac{1}{2} m DE = 41^\circ$ El $\angle DBC = 90^\circ$ por lo tanto $m\angle 2 = 90^\circ - 41^\circ = 48^\circ$ El $\angle EBA = \angle DBA + \angle 1 = 90^\circ + 41^\circ = 131^\circ$
8	c	$M\angle 1 = \frac{1}{2} (mACB - mAB)$ La suma de los arcos ACB + AB = $360^\circ \implies x + y = 360$ Si el arco ACB = x y el arco AB = y $M\angle 1 = \frac{1}{2} (x - y) = 48 = \frac{1}{2} (x - y) \implies x = 96 + y$ $x + y = 360$ $96 + y + y = 360 \implies 2y = 264 \implies y = 132^\circ$ $x = 96 + 132 = 228$
9	c	Por el teorema de Pitágoras $AB^2 = AP^2 - PB^2 = 100 - 36 = 64$ $AB = 8$ entonces $AC = 16$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Autoevaluación 5

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	b	<p>De acuerdo con el teorema: Si dos cuerdas se intersecan dentro de un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos (partes) de una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la otra cuerda.</p> $CO * OD = AO * OB$ $OD = (5 * 4) / 8 = 2.5$

Ir a la
autoevaluación

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 6

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	v	Definición. El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono..
2	f	Teorema. El área A de un rectángulo cuya base tiene longitud b y cuya altura tiene longitud h , está dada por $A = bh$.
3	v	Definición. π es la relación proporcional entre la circunferencia C y la longitud del diámetro d de cualquier círculo; por tanto, $\pi = C/d$ en cualquier círculo.
4	f	Teorema. El área A de un triángulo cuya base tiene una longitud b y cuya altura correspondiente tiene longitud h está dada por $A = \frac{1}{2}bh$
5	v	Teorema. El área A de un cuadrado cuyos lados son cada uno de longitud s está dada por $A = s^2$.
6	b	Encontramos el área $A = 10 * 6$ ($BP=6$) = 60 También el área $A = 8 * h = 60$ $h = 60/8 = 7.5$
7	c	$A = \frac{1}{2} h(b_1 + b_2) = \frac{1}{2} 6(13 + 5) = 54$
8	c	$A = 14 * 6 = 84$ $A_2 = 10 * 6 = 60$ $A = 84 - 60 = 24$
9	b	Área sombreada = área de rectángulo – área del triángulo $A = 14 * 6 - \frac{1}{2} 14 * 6 = 42$
10	a	$A = A_2 - A_1 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (1.25^2 - 0.75^2) = \pi * 1\text{cm}^2 = 3.1416\text{cm}^2$

[Ir a la autoevaluación](#)

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 7		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Un prisma recto es un prisma en el cual las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base en sus puntos de intersección.
2	f	Un prisma oblicuo es un prisma en el cual las aristas laterales paralelas son oblicuas a las aristas de las bases en sus puntos de intersección.
3	v	El área lateral L de un prisma es la suma de las áreas de todas las caras laterales
4	v	Un prisma regular es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares
5	v	Definición. Un cubo es un prisma cuadrangular recto cuyas aristas son congruentes.
6	c	Área lateral = perímetro * altura = $5*4 * 5 = 100\text{cm}^2$
7	c	Área lateral = perímetro * altura = $5*4 * 5 = 100\text{cm}^2$ Área de las bases $B = \frac{1}{2} aP = \frac{1}{2}*2.71*20 = 27.10\text{cm}^2$ Área total = área lateral + 2*área base = $100 + 2*27.10 = 154.20\text{cm}^2$
8	b	Encontrar $l, l^2 = h^2 + a^2 = 6^2 + 2.71^2 = 43.3441$ $L = 6.59$ Área de cada triángulo = $\frac{1}{2} * 4 * 6.59 = 13.18$ Área lateral = $5 * 13.18 = 65.90$ Área de las bases $B = \frac{1}{2} a*P = \frac{1}{2}*2.71*20 = 27.10\text{cm}^2$ Área total = área lateral + área base = $65.90 + 27.10 = 93\text{cm}^2$
9	a	Aplicamos la fórmula $V = \frac{1}{3} Bh$ Área de las bases $B = \frac{1}{2} a*P = \frac{1}{2}*2.71*20 = 27.10\text{cm}^2$ $V = \frac{1}{3}(24.10 * 6) = 48.2 \text{ cm}^3$.
10	a y b	$V = \frac{1}{3}(B*h)$ $V = \frac{1}{3}(\pi r^2 h) = \frac{1}{3}(\pi 9 * 6) = 18\pi \text{ cm}^3 = 56.55 \text{ cm}^3$

[Ir a la autoevaluación](#)

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 8

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Un par de puntos del espacio (O, P) determina un vector fijo OP. El punto O es el origen del vector fijo y el punto P su extremo.
2	v	El módulo de OP se representa OP y es la medida del segmento OP es decir la distancia entre: OP.
3	f	Dos vectores fijos OP y QR tienen la misma dirección, cuando las rectas en las que descansan [r(OP) y r (QR)] coinciden o son paralelas
4	v	Dos vectores fijos OP y QR son equipolentes o iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.
5	c	La equipolencia o igualdad es una relación entre los vectores fijos que goza de las siguientes propiedades: Reflexiva: todo vector fijo es equipolente a si mismo Simetría: si AB es equipolente a CD, entonces CD es equipolente a AB Transitiva si AB es equipolente a CD y CD es equipolente EF, entonces AB equipolente a EF
6	b	El módulo del es igual a 3
7	a	$\vec{V} + \vec{U} = (1+3, 3+2, 4+4) = (4, 5, 8)$ $\vec{V} - \vec{U} = (1-3, 3-2, 4-4) = (-2, 1, 0)$
8	a	$2\vec{V} - \vec{U} = 2*(1, 3, 4) - (3, 2, -4) = (2 - 3, 6 - 2, 8 + 4) = (-1, 4, 12)$ $- \vec{V} + 3 \vec{U} = -(1, 3, 4) + 3(3, 2, -4) = (-1 + 9, -3 + 6, -4 - 12) = (8, 3, -16)$
9	b	$\vec{AB} = (3, 0, 2) - (1, 1, 4) = (3 - 1, 0 - 1, 2 - 4) = (2, -1, -2)$
10	c	$AB = (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ $BC = (0, 0, -1) - (2, 1, 0) = (-2, -1, -1)$ $CD = (-1, 1, 1) - (0, 0, -1) = (-1, 1, 2)$ Para ver si son linealmente independientes se hace el determinante $ 1 \ 1 \ 1 \ -2 \ -1 \ -1 \ 1 \ 2 = -1 + 5 - 3 = 1 \neq 0$ Al ser distinto de 0, los vectores son linealmente independientes

[Ir a la autoevaluación](#)

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 9

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Recta definida como intersección de dos planos no paralelos es el producto vectorial de los vectores normales a los planos, es un vector director de la recta
2	v	La ecuación vectorial de la recta está expresada por los vectores en función de sus coordenadas. $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(v_1, v_2, v_3)$
3	v	La ecuación continua se obtiene despejando el parámetro en cada ecuación paramétricas e igualando $\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$
4	f	La intersección de 2 planos secantes determina una recta por tanto se interceptan en infinitos puntos
5	f	La intersección de 2 planos dado origen a 4 semiplanos el ángulo de intercepción entre 2 semiplanos se denomina ángulo diedro
6	b y c	Elegimos uno de ellos como vector director: $P(-2, 2, 0) - O(3, 2, 1) = (-5, 0, -1)$ $(x, y, z) = (3, 2, 1) + \alpha (-5, 0, -1)$ Ecuación vectorial de la recta O $(x, y, z) = (-2, 2, 0) + \alpha (-5, 0, -1)$ Ecuación vectorial de la recta P
7	a	$X = 3 - 4\alpha$ $y = 2 - \alpha$ $z = 1 - \alpha$ Para obtener las ecuaciones simétricas, despejamos el parámetro e igualamos: $\alpha = \frac{x-3}{-4}, \quad \alpha = \frac{y-2}{-1}, \quad \alpha = \frac{z-1}{-1}$ $\frac{x-3}{-4} = y - 2 = z - 1$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 9

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
8	a y b	<p>Resolvemos el sistema: Los planos $a = 3x - 2y + z = 2$ y $b = x + 3y + 5z = 3$ forman un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas. Fijando arbitrariamente $z = 0$ $X = 9/10$ $Y = 7/10$ $Z = 0$ $P(9/10, 7/10, 0)$ Encontramos el vector director $v = (-13, -14, 11)$ Las ecuaciones paramétricas de la recta</p> $r: (x, y, z) = \left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, 0\right) + t(-13, -14, 11)$
9	b	<p>Resolvemos el sistema: Los planos $\frac{3}{4}x + 2y + 2z = 5$ y $b = \frac{3}{4}x - 2y + 2z = 3$ y forman un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas. Fijando arbitrariamente $z = 0$ $X = 16/3$ $Y = 1/2$ $Z = 0$ $P(16/3, 1/2, 0)$ Encontramos el vector director $v = (1, 0, -3/8)$ Las ecuaciones paramétricas de la recta</p> $r: (x, y, z) = \left(\frac{16}{3}, \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(1, 0, -\frac{3}{8}\right)$



[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 9

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	c	<p>Resolvemos el sistema: Encontrar la recta de intersección entre los planos $a = x + y + z = -1$ y $b = x - y - z = -2$. Fijando arbitrariamente $z = 0$</p> <p>$X = -3/2$ $Y = 1/2$ $Z = 0$ $P(-3/2, 1/2, 0)$</p> <p>Encontramos el vector director $v = (0, 2, -2)$</p> <p>Las ecuaciones paramétricas de la recta</p> $r: (x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) + t(0, 2, -2)$

[Ir a la autoevaluación](#)

Autoevaluación 10		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	v	Las posiciones relativas de una recta y un plano, permite, indicar si la recta y el plano en el espacio tienen o no puntos en común.
2	f	La Intersección de una recta y un plano es secante si la recta tiene 1 punto en común con el plano
3	v	La Intersección de una recta y un plano es Contenidas cuando todos los puntos de una recta pertenecen al plano
4	b	Las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio, permite, indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común y se clasifican en: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Paralelas todos los puntos de una recta están a la misma distancia de la otra. ▪ Coincidentes todos los puntos son comunes, por tanto, son la misma recta. ▪ Secantes las rectas tiene 1 punto en común. ▪ Se cruzan (Alabeadas) las rectas no tienen puntos en común porque no pertenecen al mismo plano. ▪ Perpendiculares las rectas con forma un ángulo de 90°.
5	v	La distancia mínima entre 2 rectas alabeadas no coplanares ni secantes es la longitud del segmento perpendicular a ambas
6	b	$\pi_1: 3x + 2y + 4z + d = 0$ El punto debe verificar la ecuación, entonces reemplazamos P_0 y obtenemos el coeficiente que faltaba: $3.1 + 2.1 + 4.(-1) + d = 0$ $d = -1$ la ecuación del plano: $\pi_1: 3x + 2y + 4z - 1 = 0$
7	a	Las coordenadas del punto medio: $= (2, -4, 0)$ Ecuación del plano $= 2x + y + 0z + d = 0$ $2.2 + 1.1 + 0.3 + d = 0 \Rightarrow d = -5$ la ecuación del plano: $2x + y - 5 = 0$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 10		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
8	a	<p>Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes = $\text{Rag A} = 3$ Calculamos el rango de la matriz ampliada = $\text{Rag A}^* = 3$ $\text{Rag A} = \text{Rag A}^* = 3$ Rectas secantes</p>
9	b	$P_r = (2, 0, 1)$ y $d_r = (1, 3, 2)$ $P_s = (-2, 1, 0)$ y $d_s = (1, 3, 2)$ $d_r = d_s$ <i>Puede ser paralelas o coincidentes, comprobar sustituyendo el punto P_r en la recta s</i> $2 = -2 + t \Rightarrow t = 4$ $0 = 1 + 3t \Rightarrow t = 1/3$ $1 = 2t \Rightarrow t = 1/2$ Por tanto, son paralelas
10	c	<p>Punto de paso de s menos el punto de paso r $\vec{SoRo} = R_o - S_o = (2, 0, -2) - (1, -2, 0) = (1, 2, -2)$ Producto mixto = $(\vec{r} * \vec{s}) * \vec{SR} = -1 2 - 1 2 1 1 1 2 - 2 = 11$, es diferente de 0, determina que so rectas alabeadas Vector normal $d = \frac{ (1, 2, -2)(3, -1, -5) }{\sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{11}{\sqrt{35}}$</p>

[Ir a la autoevaluación](#)

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 11		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Dos planos en el espacio son coincidentes cuando todos los puntos del plano π_1 pertenece al plano π_2
2	f	Los planos son Paralelos cuando todos los puntos del plano están a la misma distancia del plano π_2 ; Los vectores normales son proporcionales ($\vec{n}_1 = \vec{n}_2$) => significa que son paralelos $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, el punto de paso pertenece solo a un plano
3	v	Dos planos son Secantes cuando tiene una recta que les intersectan (corta) o en común; Los vectores normales no son proporcionales ($\vec{n}_1 \neq \vec{n}_2$)=> significa que no son paralelos $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$
4	v	Los planos son Paralelos cuando el Ra (M) = 1 y Rg (M*) = 2
5	v	Dos planos en el espacio son secantes cuando el Ra (M) = 2 y Rg (M*) = 2
6	c	Comprobamos la proporcionalidad de los vectores normales Vector normal $\vec{n}_a = (1,1,-1)$ Vector normal $\vec{n}_b = (3,3,-3)$ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} = \frac{2}{6}$ Son iguales, por tanto, los planos son coincidentes
7	c	Comprobamos la proporcionalidad de los vectores normales Vector normal $\vec{n}_a = (1,1,-1)$ Vector normal $\vec{n}_b = (3,3,-3)$ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} = \frac{2}{8}$ Son proporcionales los vectores normales, pero no los términos independientes, por tanto, los planos son paralelos

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 11		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
8	b	<p>Comprobamos la proporcionalidad de los vectores normales</p> <p>Vector normal $\vec{n}_a = (5,1,-1)$</p> <p>Vector normal $\vec{n}_\beta = (2,-2,-1)$</p> $\frac{5}{2} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$ <p>Son diferentes, por tanto, los planos son secantes</p>
9	a	<p>Resolver el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, para lo cual utilizamos un parámetro para $x = \lambda$.</p> $x = \lambda$ $y = 3 - \lambda$ $z = -1 + 4\lambda$
10	a	<p>r:{A(-2,1,-1) U=(3,2,-2) $\pi: \Rightarrow \vec{n}=(2,1,-3)$}</p> <p>La ecuación de $\pi^{\wedge}: x+2 3 2 y-1 2 1 z+1 -2 -3 = 0 \Rightarrow \pi^{\wedge}: -4x+5y-z-14=0$</p> <p>La recta pedida es:</p> $r^{\wedge}: \{2x+y-3z=-1 \quad -4x+5y-z-14$

[Ir a la autoevaluación](#)

Autoevaluación 12		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Los planos son coincidentes cuándo el rango de M y el rango de M^* son iguales a 1, las ecuaciones son proporcionales, el sistema es compatible y va a ser indeterminado.
2	f	Los planos son paralelos cuándo el rango de M = 1 y el rango de $M^* = 2$, el sistema es Incompatible.
3	v	Los 3 planos se cortan en una recta si el rango de M y de M^* son = 2, entonces el sistema es compatible indeterminado
4	v	Dos 3 planos son paralelos y cortan al tercero, si es rango de M = 2 y es diferente a rango de $M^* = 3$, entonces el sistema es incompatible
5	v	Los tres planos se cortan en un punto, si el rango de M = 3 y el rango de $M^* = 3$, entonces, el sistema es compatible determinado, tiene una única solución porque los 3 planos se cortan en un punto
6	a	$M=(2 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0)=(0-1-1)-(0-2+0)=0$ $ 2 \ -1 \ -1 \ 0 =0-1=-1 \neq 0 \Rightarrow Rg(M)=2$ $M'=(2 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \quad 0 \ 0 \ 1)=(0+0+0)-(0+0+1)=-1 \neq 0 \Rightarrow Rg(M')=3$ Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases
7	b	$M=(2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 3 \ 1 \ -3)=(-6+1-9)-(3-2-9)=-6 \neq 0$ $ 2 \ 3 \ 1 \ 1 \ =2-3=-1 \neq 0 \Rightarrow Rg(M)=3$ $M'=(2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 3 \ 1 \ -3 \quad 3 \ -1 \ -1)=(-2+3-9)-(9-2-3)=-4 \neq 0 \Rightarrow Rg(M')=3$ Como tenemos el $Rg(M) = Rg(M^*) = 3$, los 3 planos se cortan en un punto
8	c	$M=(2 \ 3 \ -2 \ 1 \ -2 \ -1 \ 3 \ 1 \ -3)=(12-2-9)-(12-2-9)=0$ $Rg(M) < 3$ $ 2 \ 3 \ 1 \ -2 =4-3=-7 \neq 0 \Rightarrow Rg(M)=2$ $M'=(2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 3 \ 1 \ -3 \quad 3 \ -1 \ 2)=(-8+3-9)-(-18-2+6)=0$ $Rg(M^*) < 3$ $ 2 \ 3 \ 1 \ -2 =4-3=-7 \neq 0 \Rightarrow Rg(M')=2$ Como tenemos el $Rg(M) = Rg(M^*) = 2$, los 3 planos se cortan en una recta

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 12

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	c	$Rg(M) < 3$ $M = (2 \ 3 \ 1/3 \ 1 \ 1/3 - 1 \ 3 \ 1 - 3) = \left(-2 + \frac{1}{3} - 9\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 + 9\right) = 0$ $M' = (2 \ 3 \ 1/3 \ 1 \ 1/3 - 1 \ 3 \ 1 - 3 - 3 - 1 - 1/3) = (-2/9 - 9 + 3) - (3 - 1 - 2) = -56/9 \neq 0 \Rightarrow Rg(M') = 3$ Los planos 2 y 3 son proporcionales menos sus términos independientes por tanto son paralelos Como tenemos el $Rg(M) = 2$ y $Rg(M') = 3$, Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero
10	b	$M = (1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) = (18+15+12) - (12+15+18) = 0$ $Rg(M) < 3$ $ 3 \ 3 \ 4 \ 5 = 15 - 12 = 3 \neq 0 \Rightarrow Rg(M) = 2$ $M' = (1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 - 7 \ 2 \ 1 \ 2 \ 6) = (78+105+84) - (84+105+78) = 0$ $ 3 \ 3 \ 4 \ 5 = 15 - 12 = 3 \neq 0 \Rightarrow Rg(M') = 2$ $\Rightarrow Rg(M') = 2$ Los planos 1 y 2 son proporcionales incluidos sus términos independientes por tanto son coincidentes Como tenemos el $Rg(M) = 2$ y $Rg(M') = 2$, tenemos dos planos coincidentes y el 3º secante

[Ir a la autoevaluación](#)

Autoevaluación 13		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Una recta está contenida en el plano cuando el Ra (M) = 2 y Rg (M^*) = 2
2	f	Una Recta y plano son paralelos cuando el Ra (M) = 2 y Rg (M^*) = 3
3	v	Una Recta y plano son secantes cuando el Ra (M) = 3 y Rg (M^*) = 3
4	v	La recta viene definida por un punto A y un vector U y un plano π cuyo rector normal es V y pueden presentarse 3 casos.
5	v	La recta viene definida por un punto A y un vector U y un plano π cuyo rector normal es V y pueden presentarse 3 casos. Las posiciones relativas de la recta de plano son: a. Si $\epsilon \pi$ y $U \cdot V = 0 \Rightarrow$ Recta contenida en el plano b. Si $\epsilon \pi$ y $U \cdot V \neq 0 \Rightarrow$ Recta y plano son paralelos Si un punto de la recta $\epsilon \pi$ el $U \cdot V \neq 0 \Rightarrow$ Recta y plano son secantes
6	a	$M=(1 -5 0 0 1 -1 -1 3 2)=(2+0-5)-(0-3+0)=0$ $Rg(M) < 3$ $ 1 -5 0 1 =1-0=1 \neq 0 \Rightarrow Rg(M)=2$ $M'=(1 -5 0 0 1 -1 -1 3 2 1 2 -5)=(-5+0+10)-(-1+6+0)=0$ $Rg(M^*) < 3$ $ 1 -5 0 1 =1-0=1 \neq 0 \Rightarrow Rg(M')=2$ Como tenemos el $Rg(M) = Rg(M^*) = 2$, La recta está contenida en el plano
7	a	Encontrar la ecuación vectorial de la recta definida por un punto y un vector: A(4, 4, 4) y =(2, 7, 5) Ecuación vectorial $(x, y, z) = (4, 4, 4) + \lambda(2, 7, 5)$
8	b	Encontrar la ecuación vectorial de la recta definida por un punto y un vector: Ecuación vectorial $(x, y, z) = (3, 2, 1) + \lambda(-4, -1, -1)$
9	c	Con los datos dos puntos de la recta el vector director es $\overrightarrow{AB} = (5, 5, 8)$, tomando como punto de paso A Entonces la ecuación es: $(x, y, z) = (-3, -2, 4) + \lambda(5, 5, 8)$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Autoevaluación 13

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	c	<p>Para el punto A $(2, -3, 1) = (-3, -2, 4) + \lambda(5, 5, 8)$</p> <p>Comprobar si existe algún valor del parámetro λ que verifique esta ecuación vectorial</p> $\begin{cases} -3+5\lambda=2 \\ -2+5\lambda=-3 \\ 4+8\lambda=1 \end{cases}$ <p>Este sistema es incompatible, así que el punto no pertenece a la recta.</p> <p>Para el punto B $(2.5, 2.5, 4) = (-3, -2, 4) + \lambda(5, 5, 8)$</p> <p>Comprobar si existe algún valor del parámetro λ que verifique esta ecuación vectorial</p> $\begin{cases} -3+5\lambda=2 \\ -2+5\lambda=3 \\ 4+8\lambda=12 \end{cases}$ <p>Este sistema es compatible, así que el punto si pertenece a la recta.</p>

[Ir a la autoevaluación](#)

Autoevaluación 14		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	v	El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus respectivos vectores normales.
2	f	Se define como ángulo entre una recta r y un plano π al ángulo agudo que forman r y r' .
3	f	El ángulo formado entre dos rectas de \mathbb{R}^3 es el ángulo que se forma entre sus vectores directores.
4	v	Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas se utiliza la fórmula de la distancia punto-recta:
5	v	Se denominan rectas alabeadas a las que no son paralelas ni se intersecan en el espacio, es decir, que no pertenecen al mismo plano.
6	a	Vectores normales y aplicamos la fórmula: $\vec{n}_1 = (3, -1, 2)$ $\vec{n}_2 = (2, 1, -5)$ $\alpha = \arccos \left(\frac{ 3 * 2 + (-1) * 1 + 2 * (-5) }{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} \right)$ $\alpha = \arccos \left(\frac{5}{\sqrt{420}} \right) = \arccos \arccos (0.244) = 75.88^\circ$
7	a	Vectores normales y aplicamos la fórmula: $\vec{n}_1 = (3, -2, 1)$ $\vec{n}_2 = (1, -1, 2)$ $\alpha = \arccos \left(\frac{ 1 * 3 + 1 * (-4) + 0 * 5 }{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} \right)$ $\alpha = \arccos \left(\frac{7}{\sqrt{84}} \right) = \arccos \arccos (0.764) = 40.18^\circ$
8	b	Vectores normales y aplicamos la fórmula: $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ $\vec{n}_2 = (3, -4, 5)$ $\alpha = \arccos \left(\frac{ 1 * 3 + 1 * (-4) + 0 * 5 }{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} \right)$ $\alpha = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right) = \arccos \arccos (0.10) = 5.74^\circ$

Autoevaluación 14		
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	c	<p>Producto vectorial de un punto de la recta O y P, $\vec{OP} = P(2, 4, 1) - O(2, 3, -1)$</p> $\vec{OP} = (0, 1, 2)$ $ \vec{OP} * \vec{v} = i j k 0 1 2 1 2 1 = i + 2j - k - 4i = -3i + 2j - k $ $= (-3, 2, -1) = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$ <p>Aplicamos la fórmula:</p> $d(P, r) = \frac{ \vec{OP} * \vec{v} }{ \vec{v} } = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = 1.53$
10	c	$\vec{r} = (2, -1, 3); R(1, 5, -2)$ $\vec{s} = (6, -3, 9); S(-7, 4, 1)$ $\vec{rs} = S(-7, 4, 1) - R(1, 5, -2)$ $\vec{rs} = (-8, -1, 3)$ $ \vec{r} * \vec{rs} = i j k 2 - 1 3 - 8 - 1 3 = -3j - 2k - 24j - (8k - 3i + 6j) $ $= 0i - 30j - 10k $ $\vec{r} * \vec{rs} = (0, -30, -10)$ $d(r, s) = \frac{ \sqrt{0^2 + (-30)^2 + (-10)^2} }{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 9^2}} = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{126}} = 2.82$

Ir a la
autoevaluación



5. Referencias bibliográficas

1a con Berni, (20 de febrero de 2019). Ángulo entre planos.[Video].
<https://www.youtube.com/watch?v=Wov5bzhfGal>

AcademiaCibernautas (22 de agosto de 2017). *Ejercicios básicos de circunferencia-geometría.* [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=oEJMdBNKeEU>

Acervo - Televisión Educativa. (25 de octubre de 2019). 17. *El área de polígonos.* [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=6HIADIG1mQc>

Alcerro, J. (28 de abril de 2020). *Introducción a las demostraciones geométricas I.* [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=m28WxnwUaH8>

Centro Matemático Ricardo Araya, (12 de octubre de 2017). Ángulos en la circunferencia 1 ejercicio resuelto. [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=XNb5HBdIFtc>

eMatecs, (s.f.). *Posiciones relativas de tres planos en el espacio.*
<https://ematecs.com/posiciones-relativas-de-tres-planos-en-el-espacio/>

Escoria, C. (1 de enero de 2020). *Relación entre rectas.* [Video].
<https://www.youtube.com/watch?v=hgwumvsapAs>

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Estudia (16 de enero de 2013). *Vectores en el espacio: elementos y operaciones.* [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=9zWOLjOPIM0&list=%20PLVEkl8DcwbMs2AUWHRKg3dqcJM4-7I9-i>

Estudia (7 de febrero de 2013). *Posiciones relativas de tres planos en el espacio.* [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=LwCWIPoWpB8>

Gutiérrez y Mora, (2018). Intersección entre recta y plano. *VECTORES, RECTAS Y PLANOS.* [ARCHIVO PDF]. <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/LibrosCDF/WMVRP/WM-Internet-VectoresRectasyPlanos2018.pdf>

Gutiérrez y Mora, (2018). Operaciones básicas. *VECTORES, RECTAS Y PLANOS.* [ARCHIVO PDF]. <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/LibrosCDF/WMVRP/WM-Internet-VectoresRectasyPlanos2018.pdf>

Gutiérrez y Mora, (2018). Propiedades de los vectores. *VECTORES, RECTAS Y PLANOS.* [ARCHIVO PDF]. <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/LibrosCDF/WMVRP/WM-Internet-VectoresRectasyPlanos2018.pdf>

Hernández, H. (9 de octubre de 2017). *Geogebra 001 descarga, instalación e inicio de GeoGebra 5.0.* [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=3nHSoBfpozM>

Khan Academy, (2019). *Comencemos a usar Khan Academy".* [Video]. <https://es.khanacademy.org/khan-for-educators/khan-para-maestros/bienvenido-a-khan-para-maestros/inscribete-a-khan-academy/v/comencemos-a-usar-khan-academy>

Khan, S. (s.f.). *Determinación de triángulos congruentes.* Khan Academy. [Video]. <https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-congruence/hs-geo-triangle-congruence/v/finding-congruent-triangles>

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Khan, S. (s.f.). *Introducción a los cuadriláteros*. Khan Academy. [Video]. <https://es.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-shapes/basic-geo-quadrilaterals/v/quadrilateral-overview>

Mageo, O. (s.f.) DEMOSTRACIÓN INDIRECTA. Olga mageo. <http://olaurens.blogspot.com/p/demostracion-indirecta.html>.

MateFacil, (9 de julio de 20119). *Distancia de un punto a una recta*. [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=ut1Qsc8asSU>

Mates con Andrés (17 de enero de 2019). *Rectas Paralelas / Posición Relativa de Dos Rectas en el Espacio*. [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=vaJEaP1hJc0>

Mates con Andrés (8 de enero de 2019). *Posición relativa de dos planos en el espacio*. [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=lg-_XN1pTWg

Pérez, A. (2 de octubre de 217). *Rectas y Planos. Ecuación de plano y recta en el espacio*. Universidadurjc. [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=yZI4XJpBFx8>

Pi-ensa Matematik, (20 de marzo de 2020). *Volumen de prisma y una pirámide*. [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=Xc_mKQxC7JU

Portal Académico (s.f.). *Propiedades del triángulo isósceles*. <https://portalacademico.cch.unam.mx/matematicas2/geometria-del-triangulo/propiedades-isosceles>

Pustilnik, I y Gómez, F. (22 de junio de 2019) .*Recta en R3. Ecuaciones de la recta en R3.UTN.BA*. <https://aga.frba.utn.edu.ar/recta-en-r3/>

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Pustilnik, I y Gómez, F. (23 de agosto de 2017) . Ángulos y distancias. *UTN.BA.* <https://aga.frba.utn.edu.ar/angulos-y-distancias/>

Ronny Online, (28 de enero de 2020). *Intersección entre una recta y un plano en el espacio #2.* [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=PJcypuWsonQ>

Siu y Andaluz, (2019). *Planos en el espacio. Geometría del espacio; ejercicios y problemas.* [ARCHIVO PDF]. <http://repositorio.up.edu.pe/handle/11354/2464>

Siu y Andaluz, (2019). *Rectas y planos en el espacio. Geometría del espacio; ejercicios y problemas.* [ARCHIVO PDF]. <http://repositorio.up.edu.pe/handle/11354/2464>

Superprof, (s.f.). *Revise el siguiente contenido: Problemas interactivos de área y volumen del prisma, de la pirámide y del tronco de pirámide.* [Material didáctico] https://www.superprof.es/apuntes/escolar/mathematicas/geometria/espacio/ejercicios-interactivos-del-area-y-volumen-del-prisma-de-la-piramide-y-del-tronco-de-piramide.html#tema_volumen-y-area-del-piramide

Superprof: *Posiciones relativas de una recta y un plano.* <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/mathematicas/analitica/recta/posiciones-relativas-de-una-recta-y-un-plano.html>

Teorema Pi. (14 de marzo de 2017). *Área de polígonos regulares y del círculo | Demostrando Pi.* [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=0paJ1ciCsoQ>

Tourón, J. (2016).TPACK: *Un modelo para los profesores de hoy.* INED21. <https://ined21.com/tpack/>.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Unamunoenlinea, (1 de enero de 2013). *Distancia entre Rectas Alabeadas R3*. [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=AKBJgmjRSys>

Unicoos, 28 de febrero de 2018). *Angulo entre recta y plano*. [Video]. <https://www.youtube.com/watch?v=a049gRmVAOo>