UTPL
La Universidad Católica de Loja

Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Fundamentos Matemáticos

Guía didáctica

Modalidad de estudio: a distancia

UTPL

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Fundamentos Matemáticos

Guía didáctica

Carrera	***PAO Nivel***
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)*	I

Autor:

Euler Salvador Granda Lasso

EDUC_2121

Universidad Técnica Particular de Loja

Fundamentos Matemáticos
Guía didáctica
Euler Salvador Granda Lasso

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-979-3

22 de marzo, 2024

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Diseñar, ejecutar, evaluar y orientar secuencias didácticas con elementos pedagógicos y curriculares orientados a los campos de la matemática y la física mediante la fundamentación teórico-práctica de los sistemas de conocimiento que, faciliten la adaptación a los cambios permanentes de la realidad actual y de un mundo globalizado.

- Identificar, diseñar e integrar los sistemas de conocimiento de la física y la matemática relacionados con el entorno natural y social de los estudiantes, aplicando metodologías y didácticas específicas que faciliten la contextualización de estas áreas con la realidad de un mundo globalizado y cambiante.

- Seleccionar, adaptar y aplicar herramientas tecnológicas apropiadas para el desarrollo de metodologías activas e innovadoras que faciliten la ejecución del proceso de enseñanza aprendizaje mediante talleres práctico-experimentales permanentes, empleando contenidos contextualizados a la realidad estudiantil, nacional y mundial.

- Seleccionar, adaptar, construir y aplicar criterios, indicadores, técnicas e instrumentos de evaluación idóneos para los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática y la física, considerando diferencias individuales, interculturales e inclusivas; integrando adecuadamente los elementos curriculares, conocimientos, estrategias y metodologías en función de la realidad natural y social del estudiante.

- Diseñar, ejecutar y evaluar modelos pedagógicos y de organización escolar para brindar soluciones a las diferencias individuales, interculturales e inclusivas, mediante la adaptación de los elementos curriculares y contenidos con estrategias y metodologías adaptadas a la realidad de la comunidad.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

La asignatura de Fundamentos Matemáticos puede abordar una amplia variedad de problemáticas relacionadas con conceptos matemáticos fundamentales. Estos son algunos ejemplos de problemáticas comunes que suelen tratarse en esta asignatura:

- **Fundamentos de álgebra**: muchos estudiantes tienen dificultades para comprender conceptos algebraicos fundamentales, como ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones, polinomios y factorización. La asignatura puede abordar la problemática de cómo desarrollar habilidades algebraicas sólidas.

- **Aplicaciones en ciencias y tecnología**: la asignatura puede abordar cómo aplicar estos conceptos matemáticos fundamentales en campos como la física, la ingeniería, la economía y la informática, y cómo resolver problemas del mundo real utilizando las matemáticas.

- **Modelado matemático**: otra problemática importante puede ser cómo modelar situaciones del mundo real utilizando ecuaciones y funciones matemáticas para hacer predicciones y tomar decisiones informadas.

En resumen, la asignatura de Fundamentos Matemáticos se centra en proporcionar a los estudiantes una base sólida en matemáticas, abordando una variedad de problemáticas relacionadas con conceptos y habilidades matemáticas esenciales que son fundamentales en muchas disciplinas y en la vida cotidiana.

2. Metodología de aprendizaje

Con la finalidad de conseguir los resultados de aprendizaje planteados en la materia de Fundamentos Matemáticos de la carrera de Pedagogía de las Matemáticas y la Física, nos apuntalaremos en la metodología de enseñanza por indagación, método que implica involucrar al estudiante en un problema y desde esta óptica, debe aportar soluciones a través de ejercicios propuestos, problemas aplicados a la vida diaria, autoevaluaciones, cuestionarios, actividades prácticas, video colaboraciones, etc. Dentro del ambiente de aprendizaje, el docente ayudará a los alumnos a externar todas esas grandes ideas a través de preguntas y de la indagación constante. Además, que los alumnos busquen con interés, penetrando en el fondo de las ideas, desarrollando esa capacidad de asombro ante la realidad, analizando, entendiendo y reflexionando. Estas condiciones permiten que el enfoque por indagación facilite la participación de los estudiantes en la adquisición del conocimiento, ayude a desarrollar el pensamiento crítico, la capacidad para resolver problemas y la habilidad en los procesos de las ciencias y las matemáticas; elementos esenciales para constituirse en una práctica pedagógica para desarrollar enfoques de aprendizajes por proyectos.

La metodología de enseñanza por indagación en fundamentos matemáticos se basa en promover la exploración activa, la curiosidad y el descubrimiento por parte de los estudiantes para construir su comprensión de conceptos matemáticos fundamentales. Esta metodología se enfoca en el aprendizaje significativo, donde los estudiantes no solo memorizan fórmulas o procedimientos, sino que comprenden la lógica y el razonamiento detrás de ellos.

Aunque no existe un procedimiento único, lo esencial es la utilización del **texto básico** y micro videos, apoyados de otras herramientas educativas como los cuestionarios interactivos y las infografías; anticipando el estudio de los aspectos teóricos que serán consolidados luego, con la práctica experimental al momento de desarrollar los aportes, principalmente cuantificados, contando con la presencia física del profesor en algunos casos y casi siempre a través de videoconferencias, fomentando el trabajo colaborativo en función de los distintos estilos de aprendizaje y enfocados a lograr resultados de aprendizaje que orientan el desarrollo de las competencias.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Utiliza axiomas y conceptos básicos de los números, del álgebra de polinomios y de las ecuaciones para modelar y resolver problemas del entorno natural y social.

Para lograr el resultado de aprendizaje de fundamentos matemáticos, es importante seguir una serie de estrategias y enfoques que promuevan la comprensión y el dominio de los conceptos matemáticos. Para ello proponemos algunas pautas que pueden ayudarle a lograr resultados de aprendizaje exitosos:

- **Establezca objetivos claros**: antes de comenzar el estudio de la asignatura, define tus objetivos de aprendizaje. ¿Qué quieres lograr al final de la asignatura?
- **Planifique y organice su tiempo**: redacte un plan de estudio que incluya fechas límite y tiempos dedicados a cada tema. La organización es clave para evitar posponer y el estrés de última hora.
- **Comprenda los fundamentos**: asegúrese de comprender los conceptos matemáticos fundamentales desde el principio. Si tiene dificultades con un tema, busque ayuda de su tutor, profesor o recursos en línea.
- **Practique regularmente**: la práctica constante es esencial en matemáticas. Resuelve ejercicios y problemas relacionados con los conceptos que esté estudiando. Cuanto más practique, mejor comprenderá y aplicará los conceptos matemáticos.
- **Utilice los recursos de aprendizaje**: aproveche el plan docente, guía didáctica, **texto básico** y recursos en línea, videos educativos y

software de matemáticas disponibles. Estos recursos pueden ofrecer diferentes enfoques para entender los conceptos y aplicación de las matemáticas.

- **Realice preguntas**: no dude en hacer preguntas a su tutor o compañeros de clase si tienes dudas a través del aula virtual, videocolaboración, teléfono, WhatsApp, etc. La claridad en la comprensión es esencial.
- **Resuelva problemas aplicados a la realidad**: aplique conceptos matemáticos a situaciones reales. Esto puede ayudarle a ver la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y en otros campos.
- **Evalúe su progreso**: realice las autoevaluaciones, propuestas y ejercicios de práctica que se encuentran en la guía didáctica y **texto básico** después de cada unidad para evaluar su progreso y ajustar su enfoque de estudio en las unidades que se necesite refuerzo.

Recuerde que el aprendizaje de las matemáticas puede ser progresivo, y no siempre será fácil. Sin embargo, con un enfoque adecuado y práctica constante, puedes lograr resultados de aprendizaje exitosos en la asignatura de Fundamentos Matemáticos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 1

¡Bienvenidos a Fundamentos Matemáticos! Es un gusto iniciar este viaje de exploración y descubrimiento en el mundo de las matemáticas, durante las próximas 8 semanas, nos sumergiremos en conceptos claves que forman la base de esta disciplina tan fascinante y poderosa.

En este primer bimestre, exploraremos temas como los números reales, exponentes y radicales, expresiones algebraicas, expresiones racionales, ecuaciones y desigualdades, sentando las bases para un entendimiento sólido de las matemáticas.

Así que, sin más preámbulos, ¡comencemos este emocionante viaje de aprendizaje! Estoy seguro de que se sorprenderá de lo que puede lograr en el mundo de las matemáticas. ¡Adelante, estudiantes, a explorar y descubrir!

Unidad 1. Introducción al álgebra

1.1. Números reales

Los números reales es un relato fascinante que se remonta a miles de años atrás y ha evolucionado a lo largo del tiempo. Zamora (2023), menciona en términos simples que los números reales son los números que todos nosotros conocemos y usamos cotidianamente. Aquí tiene un resumen de los hitos más importantes en la evolución de los números reales:

- **Números naturales:** el concepto más básico de número se desarrolló en las civilizaciones antiguas para contar objetos y cantidades. Los números naturales (1, 2, 3, ...) fueron los primeros números utilizados por la humanidad Andrade (2019).
- **Números enteros:** a medida que la necesidad de representar deudas o pérdidas surgió los números enteros, que incluyen los números naturales junto con sus negativos y el cero (..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...).
- **Números racionales:** los antiguos griegos, como Pitágoras y Euclides, exploraron las propiedades de los números racionales, que son fracciones que se pueden expresar como el cociente de dos enteros. Los números racionales incluyen a todos los enteros y fracciones como, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ etc. Álvarez (2002).
- **Números irracionales:** los pitagóricos descubrieron que la $\sqrt{2}$, no podía expresarse como una fracción y, por lo tanto, era un número irracional. Este descubrimiento fue revolucionario, ya que mostró que no todos los números podían expresarse como fracciones simples.
- **Números reales:** en la Edad Media y el Renacimiento, los matemáticos como Rafael Bombelli y François Viète comenzaron a desarrollar una comprensión más completa de los números reales, dicha clasificación incluyen todos los números racionales y todos los números irracionales, estos números forman una línea continua sin brechas,

y su representación gráfica se conoce como la línea de los números reales Andrade (2029).

> Estimado estudiante, me complace invitarte a explorar y comprender la fascinante historia de los números a través de la observación de un video sobre los números reales, el cual le proporcionará una visión enriquecedora y detallada de cómo evolucionaron y se desarrollaron los conceptos numéricos a lo largo del tiempo.

Los números reales forman la base de las matemáticas y tienen una aplicación omnipresente en la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana. Su historia es una narrativa de exploración matemática y comprensión cada vez más profunda de la naturaleza de los números y su relación con el mundo que nos rodea Blade (2015).

1.1.1. Propiedades de los números reales

Los números reales tienen una serie de propiedades fundamentales que los distinguen y los hacen esenciales en matemáticas y en diversas aplicaciones. En la tabla 1, están algunas de las propiedades más importantes de los números reales:

Tabla 1

Propiedades de los números reales

Propiedades	Descripción
Propiedad Conmutativa **Suma:** $a + b = b + a$ $2 + 4 = 4 + 2$ **Multiplicación:** $a \,.\, b = b \,.\, a$ $3 \,.\, 4 = 4 \,.\, 3$	La suma y la multiplicación de números reales son conmutativas, lo que significa que el orden en que se realizan las operaciones no afecta el resultado.

Propiedades	Descripción
Propiedad Asociativa **Suma:** $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(1 + 3) + 4 = 1 + (3 + 4)$ **Multiplicación:** $(a\,.b).c = a.(b.c)$ $(1\,.3)\,.4 = 1.(3\,.4)$	La suma y la multiplicación de números reales son asociativas, lo que significa que el agrupamiento de los términos no afecta el resultado.
Propiedad Distributiva $a\,.(b + c) = (a + b)\,.(a + c)$ $2\,.(2 + 5) = (2 + 2)\,.(2 + 5)$	La multiplicación se distribuye sobre la suma, lo que se conoce como la propiedad distributiva.

Nota. Adaptado de *Introducción al Cálculo Diferencial e Integral Números Reales*, por Díaz, J., s, f., Números reales.

Estas propiedades son esenciales para realizar cálculos matemáticos, resolver ecuaciones, analizar funciones y aplicar los números reales en una variedad de contextos.

1.1.2. Adición y sustracción

La adición y la sustracción son dos operaciones básicas en aritmética, que es la rama de la matemática que se ocupa de los números y las operaciones elementales. Aquí tienes una breve explicación de cada una:

1. La adición es la operación matemática básica que combina dos o más números para obtener una suma o total Demana (2017).

$3 + 4 = 7$	En este caso, 3 y 4 son los sumandos, y 7 es la suma.

2. La sustracción es la operación inversa a la adición. Se utiliza para encontrar la diferencia entre dos números.

$9 - 5 = 4$	Aquí, 9 es el minuendo, 5 es el sustraendo y 4 es la diferencia.

Ejercicios explicativos 1:

- $5 + 8 = 13$ La adición de 5 y 8 da como resultado 13.
- $17 + 23 = 40$ La adición de 17 y 23 es igual a 40.
- $6.25 + 4.75 = 11$ La adición de 6.25 y 4.75 es igual 40.
- $15 - 7 = 8$ La sustracción de 7 de 15 es igual a 8.
- $32 - 19 = 13$ La sustracción entre 32 y 19 es igual 13.
- $10.5 - 3.25 = 7.25$ La sustracción entre 10.5 y 3.25 es igual 7.25.

Ambas operaciones son fundamentales en matemáticas y se utilizan en una variedad de situaciones en la vida cotidiana, desde resolver problemas simples hasta cálculos más avanzados en diversas disciplinas.

1.1.3. Multiplicación y división

La multiplicación y la división son otras dos operaciones fundamentales en matemáticas. Aquí te doy una breve explicación de cada una:

1. La multiplicación es la operación matemática que combina dos o más números para obtener un producto. El símbolo de multiplicación es el "x" (una equis) o simplemente se indica colocando los números juntos Zill (2012).

   $4 \times 7 = 28$ 4 y 7 son factores, y 28 es el producto.

2. La división es la operación inversa a la multiplicación. Se utiliza para distribuir para una cantidad en partes iguales o para encontrar cuántas veces está contenido en otro. El símbolo de la división es "÷" o "/". Por ejemplo:

   $14 \div 2 = 7$ 14 es el dividendo, 2 es el divisor, y 7 es el cociente.

Ejercicios explicativos 2:

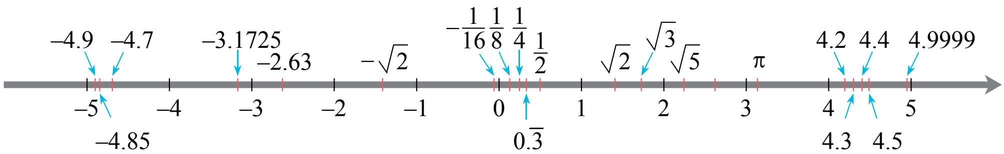
- $6 \times 9 = 54$ El 6 y 9 son factores y 54 es el producto.
- $3.5 \times 2 = 7$ El 3.5 y 2 son factores y el 7 es el producto.
- $20 \div 4 = 5$ 20 es el dividendo, 4 es el divisor, y 7 es el cociente.
- $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ Multiplique los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. El resultado se simplifica si es posible.
- $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$ Multiplique la primera fracción por la inversa (recíproco) de la segunda.

1.1.4. La recta de números reales

En la recta numérica, los números positivos se ubican hacia la derecha del cero, mientras que los números negativos se sitúan hacia la izquierda del cero. El cero es el punto central de la recta y separa los números positivos de los negativos (ver figura 1).

Figura 1

La recta real



Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo* [Ilustración], por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.6, Cengage Learning, *CC BY 2.0*

Una recta numérica es una línea en la que los números están dispuestos en orden creciente o decreciente. Se utiliza comúnmente como una representación visual de los números reales. En una recta numérica, cada punto corresponde a un número específico, y la distancia entre los puntos refleja la magnitud de la diferencia entre los números.

Además, la recta numérica es útil para representar relaciones de orden entre los números reales, cuanto más a la derecha se encuentra un número, mayor es su valor absoluto.

Por ejemplo, el número 3 está a la derecha del 2, indicando que 3 es mayor que 2; y el número -1 está a la izquierda del 0, lo que significa que -1 es menor que 0.

La recta de números reales es una herramienta fundamental en matemáticas y se utiliza en una variedad de contextos, como representar gráficamente funciones, resolver ecuaciones y entender conceptos de magnitudes y distancias.

1.1.5. Conjunto de intervalos

Los intervalos son un concepto matemático fundamental que se utiliza en una variedad de campos y aplicaciones para representar y analizar conjuntos de números o valores. Sirven para varios propósitos importantes:

- **Representación de conjuntos numéricos:** los intervalos se utilizan para representar conjuntos de números reales de manera compacta y eficiente. Por ejemplo, el intervalo [1, 5] representa todos los números reales entre 1 y 5, incluyendo ambos extremos.

- **Análisis de funciones:** en matemáticas y análisis, los intervalos se utilizan para describir los dominios y rangos de funciones. Por ejemplo, se pueden determinar los intervalos en los que una función es creciente, decreciente, positiva o negativa.

- **Resolución de desigualdades:** los intervalos son útiles para resolver desigualdades en ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, si se busca la solución de la desigualdad $2x - 3 < 5$, se puede representar como un intervalo de solución.

- **Estimación y aproximación:** los intervalos se utilizan en estadísticas para expresar la incertidumbre o el margen de error en estimaciones y aproximaciones. Por ejemplo, un intervalo de confianza puede indicar el rango dentro del cual se espera que esté el valor real de un parámetro Morales (2014).

Ejercicio explicativo 3:

Encuentre el conjunto indicado si:

$$A = \{x / x \geq -2\}$$

$B = \{x/x < 4\}$

$C = \{x/-1 < x \leq 5\}$

Solución:

a. $A \cap C = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$; por definición de intersección: elementos comunes en A y C.

b. $A \cap B = \{-2,-1,0,1,2,3,4,\}$; por definición de intersección: elementos comunes en A y B.

Estudie la explicación detallada de los tipos de intervalos y algunas ejemplificaciones, en el siguiente video concerniente a los Intervalos.

En síntesis, los intervalos son una herramienta fundamental en matemáticas y en muchas disciplinas científicas y técnicas para representar, analizar y resolver problemas relacionados con conjuntos de números o valores.

Revise las páginas del **texto básico** en su primera unidad, recordando los conceptos de adición y sustracción, multiplicación y división, la recta de los números reales, los conjuntos de intervalos y el valor absoluto, lo cual aparece explicado desde la página 2 a la 12.

Estimado estudiante, para finalizar, revise la siguiente infografía, la cual le ayudará a la comprensión profunda de los Números reales. A través de una presentación estructurada y visualmente atractiva, busca centrar la atención en los aspectos más relevantes de este concepto matemático fundamental.

Después de revisar la infografía, le brindará una base sólida que le permitirá, como estudiante, comprender y aplicar los números reales en diferentes contextos.

Con cada fórmula que descubra, está un paso más cerca de dominar los números reales. ¡Siga adelante con confianza, su esfuerzo dará frutos brillantes!

Felicidades por culminar el estudio de los números reales. Que este logro le impulse hacia nuevos horizontes de conocimiento y le lleve a explorar las maravillas de las matemáticas.

¡Enhorabuena por su dedicación y éxito!

Actividades de aprendizaje recomendadas

Los números reales son la base de nuestra comprensión numérica, y se utilizan en una amplia variedad de aplicaciones, desde la resolución de problemas cotidianos hasta la formulación de teorías matemáticas avanzadas. Así que, sin más introducciones, le invito a demostrar cuánto ha aprendido sobre los números reales resolviendo las siguientes actividades prácticas.

1. **Clasificación de números reales:** identifique números reales en diferentes conjuntos numéricos, como enteros, racionales e irracionales. Clasifique varios números en estas categorías.

2. **Operaciones básicas:** realice operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división) con números reales. Utilice números decimales, fracciones.

3. **Comparación de números:** compare números reales y organízalos en orden ascendente o descendente. Puede utilizar números mixtos, por ejemplo, decimales, fracciones y números enteros.

4. **Problemas del mundo real:** cree problemas matemáticos que involucren situaciones de la vida cotidiana y resuélvelos utilizando números reales. Por ejemplo, calcular descuentos en compras, manejar presupuestos, o calcular distancias.

5. **Representación gráfica:** represente números reales en la recta numérica. Practique ubicando números positivos y negativos, así como fracciones y decimales.

6. **Juegos matemáticos:** juegue juegos de mesa que involucren números reales, como juegos de cartas que requieran sumar, restar o comparar valores numéricos.

7. **Investigación histórica:** investigue la historia de algunos números irracionales famosos, como π (pi) o √2, y comprende su importancia en matemáticas y ciencia.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Estas actividades prácticas le ayudarán a aplicar los conceptos de números reales en diversos contextos y a fortalecer tus habilidades matemáticas de manera práctica y entretenida. ¡Espero que encuentres útiles estas sugerencias!

Lo está haciendo muy bien. ¡Siga adelante, no se desanime!

8. A continuación, le presentamos una autoevaluación que le permitirá evaluar sus conocimientos, de la misma manera identificar áreas donde podrías necesitar un repaso adicional. ¡Buena suerte!

Autoevaluación 1

Seleccione la respuesta correcta acerca de los números reales:

1. El número π es, a la vez, un número, natural, entero, racional y real.

    a. Verdadero.
    b. Falso.

2. El número $\sqrt[2]{16}$ es, a la vez, un número natural, entero, racional y real.

    a. Verdadero.
    b. Falso.

3. La propiedad conmutativa en la multiplicación de números reales puntualiza que:

    a. En la multiplicación, el orden de los sumandos no altera el producto.
    b. En la multiplicación, el orden de los factores no altera el producto.
    c. En la multiplicación, se pueden asociar de distintas maneras los factores y se obtiene el mismo resultado.

4. La expresión $(6 + 8)5 = 6 \times 5 + 8 \times 5$ es un ejemplo de la propiedad:

    a. Asociativa de la multiplicación respecto a la adición de reales.
    b. Distributiva de la multiplicación respecto a la adición de números reales.
    c. Distributiva de la adición respecto a la multiplicación de números reales.

5. Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado que:

   a. Si multiplicamos ese número por cada uno de los términos y luego sumáramos los resultados.
   b. Si sumamos ese número por cada uno de los términos y luego restamos los resultados.
   c. Si multiplicamos ese número por cada uno de los términos y luego restamos los resultados.

6. El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números:

   a. Enteros positivos y enteros negativos.
   b. Racionales e irracionales.
   c. Imaginarios y valores absolutos.

7. Los números racionales tienen la siguiente forma:

   a. $\frac{a}{b}$, en donde $b \neq 0$.

   b. $\frac{a}{b}$, en donde $b = 0$.

   c. $\frac{a}{b}$, en donde $a \neq 0$.

8. Los números reales que son negativos, en términos de desigualdades, se expresan, como:

   a. $x \geq 0$.
   b. $x > 0$.
   c. $x < 0$.

9. El número 4 elevado al exponente $\frac{2}{3}$ representa un número:

   a. Irracional.
   b. Racional.
   c. Imaginario.

10. Sean a, b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. El signo de la expresión $-a^3b^3c^3$, es:

a. Más (positivo).
b. Menos (negativo).
c. No tiene signo (cero).

Ir al solucionario

1 Bimestre

Semana 2

En la segunda semana de estudio se abordará los temas de exponentes y radicales que nos ofrece la oportunidad de adentrarnos aún más en este fascinante mundo de las matemáticas. Después de haber explorado los conceptos básicos en la primera semana, ahora nos sumergiremos en aspectos más avanzados y aplicaciones prácticas de exponentes y radicales.

1.2. Exponentes y radicales

En esta semana, profundizaremos en temas como las propiedades de las potencias y raíces, simplificación de expresiones algebraicas con exponentes, y resolveremos problemas desafiantes que requerirán el dominio de estos conceptos.

1.2.1. Exponentes enteros

Los exponentes enteros son números enteros que se utilizan para indicar cuántas veces se debe multiplicar una base por sí misma. Un exponente entero puede ser positivo, negativo o cero Andrade (2019). Aquí tienes algunos ejemplos:

- **Exponentes positivos:** si tienes una base elevada a un exponente positivo, significa que debes multiplicar la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	El 3 indica cuantas veces debe multiplicarse el 2.
$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	El 5 indica cuantas veces debe multiplicarse el 5.

- **Exponentes negativos:** cuando tienes una base elevada a un exponente negativo, debe calcular el inverso de la base elevada a ese exponente (recuerde que el inverso de un número es 1 dividido por ese número).

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ El 3^{-2} debe calcular el inverso para convertirlo en positivo.$\frac{}{2}$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$ El 10^{-3} debe calcular el inverso para convertirlo en positivo $\frac{1}{10^3}$.

- **Exponente cero:** un número elevado a la potencia cero siempre es igual a 1.

$7^0 = 1$ El número 7^0 es igual 1.

$100^0 = 1$ El número 100^0 es igual 1.

Los exponentes enteros son una parte fundamental de las matemáticas y se utilizan en una variedad de contextos, como la aritmética, el álgebra y la trigonometría, para representar y calcular números y, expresiones de manera más eficiente.

Ejercicio explicativo 4:

Encuentre el resultado de $\frac{5^4 \cdot 3^4}{15^2}$

1. Reescriba el denominador $15 = 5 \times 3$: $= \frac{5^4 \cdot 3^4}{(5 \cdot 3)^2}$
2. Eleve al cuadrado cada uno de los factores: $= \frac{5^4 \cdot 3^4}{5^2 \cdot 3^2}$
3. Aplique la ley del cociente: $= 5^{4-2} \cdot 3^{4-2}$
4. Realice las restas de los exponentes: $= 5^2 \cdot 3^2$
5. Calcule los exponentes: $= 25 \cdot 9$
6. Resultado: $= 225$

1.2.2. Reglas para trabajar con exponentes

Trabajar con exponentes implica manipular números elevados a potencias, y hay varias reglas que puedes seguir para simplificar y resolver expresiones con exponentes. En el **texto básico** encontrará algunas de las reglas más comunes para trabajar con exponentes.

Estas reglas le ayudarán a simplificar y resolver expresiones con exponentes de manera más eficiente. Recuerda siempre seguir el orden de las operaciones adecuado, cuando trabaje con expresiones complejas que involucren exponentes.

Para cada ejercicio aplicaremos la propiedad exponente negativo que indica la potencia de un número distinto de 0 elevado a^{-1} es igual a su inverso $\frac{1}{a^1}$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0)$$

Ejercicios explicativos 5:

Desarrolle las siguientes operaciones con exponentes:

1. $\left(\frac{s^2 t^{-4}}{5\, s^{-1}\, t}\right)^{-2} = \frac{(s^2 t^{-4})^{-2}}{(5\, s^{-1}\, t)^{-2}} = \frac{(5\, s^{-1}\, t)^2}{(s^2 t^{-4})^2} = \frac{5^2 s^{-2} t^2}{s^4 t^{-8}} = \frac{25\, t^2 t^8}{s^4 s^2} = \frac{25\, t^2 t^8}{s^4 s^2}$

Ley 5 Ley 6 Ley 4 Ley 1 Resultado

2. $\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2\, y^3\, z^{-4}}\right)^{-3} = \frac{(xy^{-2}z^{-3})^{-3}}{(x^2\, y^3\, z^{-4})^{-3}} = \frac{(x^2\, y^3\, z^{-4})^3}{(xy^{-2}z^{-3})^3} = \frac{x^6\, y^9\, z^{-12}}{x^3 y^{-6} z^{-9}} = \frac{x^6\, y^9\, y^6 z^9}{x^3 z^{12}} = \frac{x^3\, y^{15}}{z^3}$

Ley 5 Ley 6 Ley 4 Ley 1 y 2 Resultado

1.2.3. Notación científica

La notación científica es una forma de expresar números muy grandes o pequeños de manera más concisa, utilizando potencias de 10. La notación científica sigue el formato:

$$a \times 10^n$$

Donde:

- **a** es un número decimal mayor o igual a 1 y menor que 10, conocido como la mantisa o coeficiente.
- **n** es un número entero que representa la potencia a la que se eleva 10. Matemáticas profe Alex (2016).

Por ejemplo:

- 3.25×10^4 Representa 32500.
- 6.78×10^{-3} Representa 0.00678.

Ahora que ha explorado en detalle los exponentes enteros, es hora de adentrarse en los radicales, que está estrechamente relacionado y le ayudará a comprender aún mejor los exponentes y radicales.

1.2.4. Radicales

Los radicales, en matemáticas, son una notación que se utiliza para expresar las raíces de números. Las raíces son operaciones inversas de la potenciación. En otras palabras, los radicales nos permiten calcular la raíz cuadrada, cúbica, cuarta, enésima, etc., de un número.

Ejercicios explicativos 6:

Realice las siguientes operaciones con radicales.

1. $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$

   Aplique la propiedad 1 de los radicales: $= \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y^2z^2}$

   Transforme a exponente racional y simplifique: $= x \cdot y^{\frac{2}{4}} \cdot z^{\frac{2}{4}}$

   Su resultado es: $= x \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}}$

2. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64x^6}}$

   Aplique la propiedad 3 de los radicales: $= \sqrt[3\cdot 2]{64x^6}$

   Multiplique índices: $= \sqrt[6]{64x^6}$

   Aplique la propiedad 1 de los radicales: $= \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{x^6}$

   Ahora la propiedad 4: $= \sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{x^6}$

   Su resultado es: $= 2x$

3. $\sqrt{75t + 100t^2}$

   Aplique factores primos: $= \sqrt{5^2 \cdot 3t + 5^2 \cdot 4t^2}$

   Aplique la propiedad 4 de los radicales: $= \sqrt{5^2(3t + 4t^2)}$

   Su resultado es: $= 5\sqrt{3t + 4t^2}$

1.2.5. Exponentes racionales

Los exponentes racionales, también conocidos como exponentes fraccionarios, se refieren a una expresión de potenciación en la que el exponente es un número fraccional. La definición más general de exponentes racionales es la siguiente:

Para cualquier exponente racional $\frac{m}{n}$ en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y $n > 0$ definidos:
$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ o en forma equivalente $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Por ejemplo:

1. $2^{\frac{1}{2}}$ representa $\sqrt[2]{2^1}$, que es aproximadamente igual a 1.414.
2. $3^{\frac{1}{3}}$ representa $\sqrt[3]{3^1}$, que es aproximadamente igual a 1.442.

Con esta definición se puede demostrar que las leyes de exponentes también se cumplen para *exponentes racionales.*

Ejercicios explicativos 7:

Desarrolle los siguientes ejercicios de exponentes racionales.

1. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$

   Aplique la propiedad de exponentes fraccionarios que indica
   $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$: $= \sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^3}$

   Utilice factores primos: $= \sqrt[4]{\left(\frac{2^4}{3^4}\right)^3}$

   Ejecute la ley 5 de los exponentes: $= \left(\frac{2}{3}\right)^3$
   Su resultado es: $= \frac{8}{27}$

2. $\frac{w^{\frac{4}{3}}w^{\frac{2}{3}}}{w^{\frac{1}{3}}}$

Aplique la ley 1 de los exponentes: $= \frac{w^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}}{w^{\frac{1}{3}}}$

Simplifique: $= \frac{w^{\frac{2}{1}}}{w^{\frac{1}{3}}}$

Utilice la ley 2 de los exponentes: $= w^{\frac{2}{1}-\frac{1}{3}}$

Su resultado es: $= w^{\frac{5}{3}}$

Después de analizar la manipulación de exponentes racionales, que facilita el cálculo de raíces y la realización de operaciones con números elevados a potencias fraccionarias, es momento de avanzar hacia otro concepto relacionado, pero igualmente crucial: la racionalización.

1.2.6. Racionalización del denominador

La racionalización es una técnica matemática que se utiliza para eliminar raíces en el denominador de una expresión algebraica. Al aplicar esta estrategia, simplificamos aún más nuestras expresiones y facilitamos los cálculos Sánchez (2009). Así que, ¡sigamos adelante y descubramos cómo podemos usar la racionalización para simplificar nuestras ecuaciones y expresiones matemáticas!

Ejercicios explicativos 8:

1. Racionalice $\frac{8}{\sqrt{2}}$ y simplifique si es posible.

Multiplique la expresión por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$: $= \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Realice la multiplicación: $= \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$

Simplifique: $= \frac{8\sqrt{2}}{2}$

Su resultado es: $= 4\sqrt{2}$

2. Racionalice la expresión $\sqrt{\frac{5}{3}}$

Aplique la propiedad del cociente de raíces cuadradas: $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

Multiplique la expresión por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$: $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Multiplique el numerado y el denominador: $= \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$

Multiplique en un mismo radical: $= \frac{\sqrt{5\cdot 3}}{\sqrt{3\cdot 3}}$

Racionalice: $= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3^2}}$

Su resultado es: $= \frac{\sqrt{15}}{3}$

3. Racionaliza la expresión $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$

Este ejercicio es un poco diferente, ya que tenemos dos términos en el denominador, es decir, un binomio. Para eliminar al radical del denominador, tenemos que multiplicar tanto al numerador como al denominador por el conjugado del binomio. Para ello:

Multiplique por el conjugado de un binomio $\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$: $= \frac{4}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

Realice las multiplicaciones: $= \frac{4\,(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

Elimine términos comunes: $= \frac{8-4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{4}}$

Realice las operaciones: $= \frac{8-4\sqrt{2}}{4-2}$

Opere el numerador y simplifique: $= \frac{2(4-2\sqrt{2})}{2}$

Su resultado es: $= 4 - 2\sqrt{2}$

Para comprender en profundidad cada tema, revise los videos propuestos a continuación:

- Exponentes enteros.
- Exponentes racionales.
- Escribir en notación exponencial.
- Racionalización del denominador.

Estos videos sobre exponentes enteros y racionales tienen como finalidad principal desarrollar en los estudiantes una comprensión profunda y práctica de las propiedades y aplicaciones de los exponentes en el ámbito de los números reales. A través de una metodología didáctica, se busca utilizar eficientemente los exponentes en diversas situaciones matemáticas y resolver problemas del mundo real, además los tutoriales:

- Explican de manera clara y accesible qué son los exponentes enteros y racionales.
- Demuestran la relación entre exponentes y operaciones fundamentales como la multiplicación y la división.
- Enseñan las propiedades de los exponentes (suma, resta, multiplicación y división) y cómo aplicarlas en la simplificación de expresiones algebraicas.
- Presentan situaciones cotidianas que pueden modelarse mediante expresiones con exponentes.
- Guían a los estudiantes en la traducción de problemas del mundo real a expresiones algebraicas y en la resolución de estos. Virtual (2015).

¡Excelente trabajo!

Revise las páginas del **texto básico** en la segunda unidad, recordando conceptos de exponentes enteros, leyes de los exponentes, notación científica, radicales y racionalización del denominador, desde la página 12 la 24.

Para concluir la unidad y las actividades de refuerzo, es importante realizar una revisión de lo que has aprendido y asegúrese de estar listo para avanzar. Aquí tienes algunas actividades recomendadas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Las siguientes actividades ofrecen una manera tangible y visual para que comprenda y experimente con potencias que tienen exponentes racionales. Pueden utilizarse en actividades prácticas y exploratorias para fortalecer la comprensión de estos conceptos.

¡Espero que le sean útiles!

1. **Juego de cartas de exponentes:**

    - Cree un juego de cartas donde cada carta tenga una expresión con exponentes.
    - Luego empareje las cartas que representen expresiones equivalentes.
    - Explique por qué dos expresiones son equivalentes.

2. **Problemas de aplicación:** plantee problemas del mundo real que requieran el uso de exponentes. Por ejemplo, la población actual de una ciudad de Loja es de 400,000 habitantes. Se estima que la ciudad experimenta un crecimiento anual del 3 %. Utilizando un modelo de crecimiento exponencial, calcula la población de la ciudad de Loja en 10 años. $P_{(t)} = P_0 \times (1 + r)^t$

3. **Construcción de fracciones con exponentes:**

    - Elabore materiales manipulables (por ejemplo, bloques o fichas) para representar potencias con exponentes racionales.
    - Use los materiales para construir expresiones con exponentes racionales y simplificarlas usando los materiales.

4. **Investigación de propiedades:**

    - Investigue y presente una propiedad de los exponentes, puede explorar propiedades como la ley de los exponentes para la multiplicación y la división.

    - Con la información obtenida, realice una presentación en Genially con una explicación clara.

5. **Simulación en hojas de cálculo:** utilice hojas de cálculo para crear simulaciones interactivas, donde pueda ingresar diferentes valores de exponentes y observar cómo cambian los resultados.

6. **Presentación de proyectos visuales:** consulte aplicaciones prácticas de los exponentes (por ejemplo, crecimiento poblacional, decaimiento radiactivo) y creen una presentación visual, en la cual debe explicar cómo se usan los exponentes en esa aplicación y presentar ejemplos específicos.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

¡Buena suerte con sus estudios!

7. Estimado estudiante, para evaluar los aprendizajes adquiridos sobre esta temática, le invito a desarrollar la autoevaluación que a continuación se presenta.

Autoevaluación 2

Seleccione la respuesta correcta acerca de los exponentes y radicales:

1. Al observar los resultados de $(-5)^4$ y de -5^4, se puede asegurar que los dos tienen el mismo resultado.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. La definición $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ nos fundamenta para expresar que $\frac{2^{-5}}{(-3)^{-4}} = \frac{81}{32}$

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. La ley del producto de potencias con la misma base, faculta para sumar los exponentes cuando las potencias que se multiplican tienen la misma base; ley que, simbólicamente, se escribe:

   a. $a^{m.n} = a^m + a^n$
   b. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
   c. $a^{m.n} = a^m a^n$

4. El producto de potencias con la misma base, faculta para multiplicar los exponentes cuando se tiene la potencia de otra potencia, ley que, simbólicamente, se escribe:

   a. $a^{m.n} = a^m a^n$
   b. $(a^m)^n = a^{m.n}$
   c. $(a^m)^n = a^{m^n}$

5. Aplicando las leyes de los exponentes se pueden simplificar muchas expresiones, como es el caso de $\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$ igual a:

   a. $\frac{x^3y^{15}}{z^3}$
   b. $\frac{x^{-3}y^5}{z^3}$
   c. $\frac{x^3y^{-5}}{z^3}$

6. Suponiendo que todas las letras representan números positivos, simplifica la siguiente expresión y elimina cualquier exponente negativo: $\left(\frac{4y^{3}z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2}\left(\frac{x^{-3}y^{6}}{8z^{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$ ¿Cuál es el valor resultante de esta expresión?

a. $\frac{8y^{8}}{x^{2}}$

b. $\frac{2y^{6}z^{\frac{8}{3}}}{x^{2}}$

c. $\frac{8y^{8}}{x^{2}z^{\frac{8}{3}}}$

7. De las opciones propuestas, seleccione la expresión racionalizada en forma estándar que corresponde a la expresión fraccionaria $\frac{1}{c^{\frac{3}{5}}}$, es:

a. $\frac{\sqrt[5]{c^{2}}}{c}$ raíz quinta de c^2 / c

b. $\frac{\sqrt[3]{c^{5}}}{c}$

c. $\frac{\sqrt[5]{c^{2}}}{c^{2}}$

8. El número correspondiente al diámetro de un electrón es alrededor de 0,0000000000004 cm. Esta cantidad, escrita en notación exponencial, es:

a. 4×10^{-4} cm.
b. 4×10^{13} cm.
c. 4×10^{-13} cm.

9. Aplicando las leyes de exponentes y utilizando una calculadora para realizar las operaciones, simplifique la expresión $\frac{(73{,}1)(1{,}6341 \times 10^{28})}{0{,}0000000019}$ a notación científica. Seleccione la opción correcta:

a. $6{,}286984737 \times 10^{38}$
b. $6{,}286984737 \times 10^{-38}$
c. $0{,}6286984737 \times 10^{-37}$

10. Próxima Centauri, es la estrella más cercana a nuestro sistema solar, la misma que se encuentra a 4,3 años luz de distancia. Sabiendo que un año luz, distancia que recorre la luz en un año, es alrededor de 5,9 x 10^{12} millas, la distancia en millas desde la tierra a esta estrella, es:

a. 2,537 x 10^{13} millas.
b. 0,2537 x 10^{13} millas.
c. 2,537 x 10^{-13} millas.

Recuerde que el proceso de aprendizaje es constante, y puede revisar o aclarar conceptos anteriores en cualquier momento.

¡Éxito en tus estudios!

Ir al solucionario

1 Bimestre

Semana 3

En la semana tres se estudiará las expresiones algebraicas, que se constituyen en un pilar esencial en el ámbito matemático, ofreciendo herramientas para representar y resolver problemas de manera generalizada. Estas expresiones, que incluyen variables y operaciones, permiten modelar situaciones complejas y resolver ecuaciones con aplicaciones prácticas.

1.3. Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación matemática de números, letras (llamadas variables) y operadores aritméticos, como: suma, resta, multiplicación y división. Estas expresiones se utilizan para representar cantidades desconocidas o variables en términos de otras cantidades conocidas Goodman (2011).

Por ejemplo, $3x + 2y$ es una expresión algebraica que representa la suma de tres veces una variable x, y dos veces una variable y.

Se distinguen varios polinomios de acuerdo con el número de cantidades presentes en la expresión, las cuales se muestran en la tabla 2.

Tabla 2

Clasificación de expresiones algebraicas

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	Trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	Binomio	$x^8, 5x$	8
$8 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	Cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 8$	3
5x+1	Binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	Monomio	$9x^5$	5
6	Monomio	6	0

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.25, Cengage Learning.

1.3.1. Suma y resta de polinomios

La suma y resta de expresiones algebraicas implica combinar términos semejantes o parecidos de dos o más expresiones algebraicas. Los términos semejantes son aquellos que tienen la misma variable o variables elevadas a las mismas potencias. Cuando suma o resta expresiones algebraicas, simplemente sumas o resta los coeficientes de los términos semejantes mientras mantienes las mismas variables y exponentes.

Ejercicios explicativos 9:

1. Determine el resultado de la diferencia de polinomios.

$$(12x-7)-(5x-12)$$

Aplique la propiedad distributiva: $= 12x-7-5x+12$
Agrupe términos semejantes: $= (12x-5x)+(-7+12)$
Combine términos semejantes: $= (7x)+(5)$
Su resultado es: $= 7x+5$

2. Compruebe el resultado de la suma de polinomios.

$$(5-3x)+(2x-8)$$

Combine términos semejantes: $= (2x-3x)+(5-8)$
Simplifique: $= (-x)+(-3)$
Su resultado es: $= -x-3$

3. Determine el resultado de la suma de polinomios.

$$(-2x^2-3x+1)+(3x^2+5x-4)$$

Aplique la propiedad distributiva: $= -2x^2-3x+1+3x^2+5x-4$
Agrupe términos semejantes: $= (-2x^2+3x^2)+(-3x+5x)+(1-4)$
Combine términos semejantes: $= (x^2)+(2x)+(-3)$
Su resultado es: $= x^2+2x-3$

1.3.2. Multiplicación de expresiones algebraicas

La multiplicación de expresiones algebraicas es el proceso de combinar dos o más expresiones algebraicas mediante la multiplicación de sus términos respectivos. Cada término de la primera expresión se multiplica por cada término de la segunda expresión, siguiendo la propiedad distributiva del producto. El resultado es una nueva expresión algebraica que contiene términos que son productos de los términos originales:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Ejercicios explicativos 10:

1. Use la propiedad distributiva.

$$(3t-2)(7t-4)$$

Aplique la propiedad distributiva: $= (3t)(7t-4) - 2(7t-4)$
$= (21t^2 - 12t) - (14t - 8)$

Utilice las leyes de los exponentes: $= 21t^2 - 12t - 14t + 8$
Combine términos: $= 21t^2 - 26t + 8$
Su resultado es: $= 21t^2 - 26t + 8$

2. Multiplique en forma de tabla.

$$x^2 + 2x + 3$$

$$x + 2$$

Multiplique $x^2 + 2x + 3$ por 2: $=$ $2x^2 + 4x + 6$
Multiplique $x^2 + 2x + 3$ por x: $=$ $x^3 + 2x^2 + 3x$
Su resultado es: $= x^3 + 4x^2 + 7x + 6$

1.3.3. División de expresiones algebraicas

La división de expresiones algebraicas se realiza de manera similar a la división numérica, pero teniendo en cuenta las reglas de los exponentes y las operaciones con variable, y puede seguir los siguientes pasos:

- Ordenar.
- Buscar la expresión para multiplicar.
- Multiplicar.
- Restar (cambiar el signo).
- Bajar el siguiente término.

Divida $3x^2 + 2x - 8 \; entre \; x + 2$

$3x^2 + 2x \; - 8 \; x + 2$

$-3x^2 - 6x \; 3x - 4$

$0 \quad - 4x - 8$

$+4x + 8$

$0 \quad\; 0$

1.3.4. Fórmulas de productos notables

Los productos notables son expresiones algebraicas que tienen una forma específica y se pueden factorizar o simplificar de manera más fácil debido a su estructura particular (ver tabla 3). Estos productos notables son útiles en álgebra y matemáticas para resolver ecuaciones, simplificar expresiones y realizar diversas operaciones Matemáticas profe Alex (2016).

Tabla 3

Productos Notables

Fórmulas de productos notables		
Si A y B son cualquier número real o expresión algebraica, entonces		
1	$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$	Suma y producto de términos iguales.
2	$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	Cuadrado de una suma.
3	$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	Cuadrado de una diferencia.

Fórmulas de productos notables	
$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	Cubo de una suma.
$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	Cubo de una diferencia.

Nota. Adaptado de *Pre cálculo*, por Álvarez, F., de la Lanza, C., Ortiz, J., 2002, p.75, editorial Mc Graw-Hill.

En sí, las fórmulas de los productos notables son herramientas matemáticas fundamentales que nos proporcionan un enfoque eficiente para factorizar expresiones algebraicas específicas. Estas fórmulas son especialmente útiles en la simplificación de polinomios y la resolución de ecuaciones algebraicas. Cuenca, L. (2019).

1.3.5. Factorización de factores comunes

La factorización de factores comunes es un proceso en el que se buscan los elementos que están presentes en varios términos de una expresión algebraica y se extraen fuera de los paréntesis. Este proceso simplifica la expresión y a menudo facilita realizar operaciones adicionales con la expresión Math2me. (2013).

Ejercicios explicativos 11:

1. Factorice la expresión $5x + 5y$.

   Observe que 5 es un factor en el término 5x como en el 5y entonces se extrae el 5 y el resultado sería: $5(x + y)$.

2. Factorice la expresión e identifique el factor común de $3x^3 + 6x^2 + 12x$.

   Observe que hay términos comunes tanto en la variable como en el coeficiente, en los coeficientes el factor común es 3 y en las variables, el factor común es x. Por tanto, el resultado sería: $3x(x^2 + 2x + 4)$.

1.3.6. Factorización de trinomios

La factorización de trinomios es un proceso matemático mediante el cual un trinomio $ax^2 + bx + c$, se descompone en el producto de dos binomios $(px + q)(rx + s)$ en donde a, b, c, p, q, r y s, son coeficientes numéricos, a continuación, le proporciono ejercicios de factorización de trinomios:

Ejercicios explicativos 12:

1. Factorice el siguiente trinomio: $x^2 + 5x + 6$.

   Observe que el coeficiente x^2 es igual a 1, $b = 5$ y c $= 6$.
   Forme dos binomios y escriba la raíz cuadrada del primer término:
   $= (x \quad)(x \quad)$.
   El signo del primer binomio es el de segundo término y, del segundo, la multiplicación de los dos signos: $= (x+ \quad)(x+ \quad)$.
   Busque dos números que multiplicados sea igual 6 y sumados igual a 5, siendo el resultado: $= (x + 3)(x + 2)$.

2. Factorice el siguiente trinomio: $x^2 + 4x - 12$.

   Observe que el coeficiente x^2 es igual a 1, $b = 4$ y c $= 12$.
   Forme dos binomios y escriba la raíz cuadrada del primer término:
   $= (x \quad)(x \quad)$.
   El signo del primer binomio es el de segundo término y, del segundo, la multiplicación de los dos signos: $= (x+ \quad)(x- \quad)$.
   Busque dos números que multiplicados sea igual 12 y restados igual a 4, siendo el resultado: $= (x + 6)(x - 2)$.

1.3.7. Fórmulas especiales de factorización, por agrupación de términos

Existen ciertas fórmulas especiales para factorizar trinomios mediante la agrupación de términos. Estas fórmulas son útiles cuando el trinomio tiene una estructura específica que facilita el proceso de factorización. A continuación, en la tabla 4 se presentan algunas de estas fórmulas especiales.

Tabla 4

Fórmulas especiales de factorización

Fórmula	Denominación
$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + 2AB + B^2)$	Diferencia de cubos
$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - 2AB + B^2)$	Suma de cubos

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.30, Cengage Learning.

Ejercicios explicativos 13:

1. Factorice la diferencia de cuadrados: $x^2 - 64$.

   Primero observe que no tenga factor común.
   Como no lo tiene, reescriba la ecuación, descomponiendo el 64:
   $= x^2 - 8^2$.
   Forme dos binomios con las raíces cuadradas de los dos términos, el uno con la diferencia y el otro con la suma, siendo el resultado:
   $= (x - 8)(x + 8)$

2. Factorice el cuadrado perfecto: $x^2 + 10x + 25$

   Reescriba el trinomio convirtiendo el $25 \ en \ 5^2$: $= x^2 + 10x + 5^2$
   Extraiga las raíces cuadradas de los términos extremos
   $\sqrt{x^2} = x \,; \sqrt{5^2} = 5$ y compruebe que la multiplicación de los dos términos multiplicados por 2 sea igual al término medio
   $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$.
   Forme un binomio, con el signo del segundo término del trinomio, y eleve al cuadrado, teniendo el resultado: $= (x + 5)^2$.

3. Factorice la diferencia de cubos: $x^3 - 8$.

Primero observe que no haya términos comunes.
Como no hay, reescriba la expresión, convirtiendo el $8\ en\ 2^3$: $= x^3 - 2^3$.
Forme el primer binomio obteniendo las raíces cúbicas de los dos términos $\sqrt[3]{x^3} = x\ ;\ \sqrt[3]{2^3} = 2$: $= x^3 - 2^3 = (x - 2)$
Multiplique el binomio por el trinomio $(x^2 + 2x + 2^2)$:
$= (x - 2)(x^2 + 2x + 2^2)$
Resultado: $= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

4. **Volumen de concreto:** se construye una alcantarilla con grandes capas cilíndricas de concreto, como se muestra en la figura del volumen de un cilindro de la tabla 5. Mediante la fórmula para el volumen de un cilindro, explique por qué el volumen de la capa cilíndrica es $V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$. La resolución puede observar en la tabla 5.

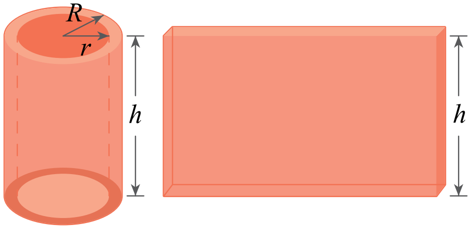
Factorice para demostrar que:

$$V = 2\pi \cdot radio\ promedio \cdot altura\ \cdot grosor$$

1 Bimestre

Tabla 5

Resolución del ejercicio sobre volumen de concreto

Datos	Resolución	Directrices
Volumen de un cilindro 	$V = 2\pi \cdot radio\ \ promedio \cdot altura \cdot grosor$	Volumen
	$V = 2\pi \cdot \dfrac{R-r}{2} \cdot h \cdot R - r$	Reemplazo los valores
	$V = \pi \cdot (R-r) \cdot h \cdot (R-r)$	Simplificamos y agrupamos polinomios
Radio Promedio $RP = \dfrac{R-r}{2}$	$V = \pi h \cdot (R^2 - r^2)$	Multiplicamos y aplicamos la propiedad diferencia de cuadrados
Grosor G$= R - r$	$V = \pi h \cdot (R^2 - r^2)$	El volumen del cilindro es igual a rectángulo desdoblado

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.6, Cengage Learning.

A continuación, le invito a ingresar a Khan Academy y revisar los temas sobre suma y resta de polinomios y fórmulas de productos notables y factorización; los cuales son temas relacionados con expresiones algebraicas, observe con atención que es clave, para el conocimiento de manera efectiva y maximizar su aprendizaje.

Estos temas le proporcionan una sólida base para comprender la suma y resta de polinomios, y productos notables. Combina explicaciones claras con ejemplos prácticos, presenta con claridad los conceptos, explica paso a paso la resolución de ejercicios, que facilita la comprensión de estas operaciones de manera efectiva.

¡Persista en su práctica y busque siempre mejorar su comprensión de estos conceptos fundamentales!

Para ahondar sus conocimientos concernientes a expresiones algebraicas, revise el **texto básico**, recordando los conceptos de suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas, productos notables y factorización, lo cual aparece explicado desde la página 24 a la 35.

Finalmente, recuerde que una expresión algebraica es un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones aritméticas; para darles un último repaso, revise los siguientes ejercicios:

1. **Simplifique la expresión** $3x + 2x - 5y + 7x - 4y$

   Ordene los términos semejantes: $= 3x + 2x + 7x - 5y - 4y$
   Sume o reste los términos semejantes, y su resultado sería:
   $= 12x - 9y$

2. **Factorice la expresión** $4x^2 - 16$

   Obtenga el término común: $= 4(x^2 - 4)$
   Transforme el $4 = 2^2$: $= 4(x^2 - 2^2)$
   Aplique la diferencia de cuadrados y el resultado sería: $= 4(x^2 - 2^2)$

3. **Resuelve la ecuación lineal** $2(3x - 5) = 4x + 6$

   Realice la multiplicación: $6x - 10 = 4x + 6$
   Pase la incógnita x al lado izquierdo: $6x - 4x = 10 + 6$
   Sume y reste términos semejantes: $2x = 16$
   El término que está multiplicando, páselo a dividir: $x = \frac{16}{2}$
   Simplifique, y el resultado sería: $x = 8$

Estos ejercicios le proporcionarán los conocimientos necesarios para que usted, como estudiante, pueda comprender y utilizar las expresiones algebraicas en diversas situaciones.

Tome en cuenta que la estructura de la técnica pedagógica está organizada de manera que facilita la comprensión progresiva de los conceptos relacionados con expresiones algebraicas. Las explicaciones brindadas son claras y concisas, desglosando conceptos difíciles en pasos manejables, esto facilita la asimilación de información y proporciona una base sólida para abordar problemas más avanzados.

El estudio nos mantiene curiosos, nos desafía a cuestionar lo que sabemos y nos inspira a explorar lo desconocido.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Realice las presentes actividades prácticas, las cuales brindan oportunidades para que exploren y refuercen sus habilidades en productos notables y factorización. La combinación de enfoques visuales, prácticos y creativos ayuda a fortalecer la comprensión de estos conceptos algebraicos.

1. **Rompecabezas de productos notables:**
    - Cree un rompecabezas e iguale productos notables con sus expresiones factorizadas correspondientes.
    - Corte las expresiones y sus factores en piezas, las que debe emparejar.
2. **Carteles de factorización:**
    - Elabore carteles visuales que ilustren la factorización y expansión de ese producto notable.
    - Los carteles pueden incluir ejemplos numéricos y representaciones gráficas.
3. **Problemas del mundo real:**
    - Presenta problemas del mundo real que se puedan modelar con expresiones algebraicas. Por ejemplo, supongamos que un grupo de amigos está planeando asistir a un concierto y decide comprar boletos juntos. El costo total de los boletos depende del número de boletos comprados y de una tarifa de servicio. Diseñe una expresión algebraica para representar el costo total en función del número de boletos comprados. $C_{(x)} = 50x + 20$
    - Identifiquen el producto notable que representa la situación y lo factoricen para resolver el problema.

4. **Factorice la expresión algebraica:** $2x^2 + 4xy - 6y^2$

5. **Simplifique la expresión:** $\frac{3x^2 - 9x}{x - 3}$

6. Explique el concepto de término semejante en una expresión algebraica y de un ejemplo.

7. **Realice la multiplicación de la expresión:** $(3x + 2)(2x - 5)$, usando el método de distribución.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Estas actividades serán útiles para su estudio y aprendizaje de expresiones algebraicas. Si necesita explicación adicional, no dudes en preguntar a su tutor.

8. Le invito a reforzar sus conocimientos participando en la siguiente autoevaluación. Al final de esta evaluación, estaremos mejor equipados para abordar problemas algebraicos más complejos y nos sentiremos más seguros en nuestras habilidades matemáticas.

Autoevaluación 3

Seleccione la respuesta correcta acerca de las expresiones algebraicas.

1. El producto de la suma por la diferencia de dos términos es igual a la diferencia de cuadrados de dichos términos, según este producto notable, la expresión $(2x^3 + 3\sqrt{y})(2x^3 - 3\sqrt{y}) = 4x^6 - 9y$.

    a. Verdadero.
    b. Falso.

2. Simplificar una expresión algebraica significa reducir la expresión a su forma más simple posible, manteniendo su equivalencia matemática.

    a. Verdadero.
    b. Falso.

3. El resultado de la operación $(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+1}-1)$, luego de simplificar, es:

    a. x^4
    b. x^2
    c. $x^4 - 2$

4. Luego de realizar la factorización por factor común, la expresión $4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{4}}y - x^2y^{\frac{1}{2}}$ es igual a:

    a. $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}(4 + 2y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{4}})$
    b. $x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{2}}\left(4x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} - 1\right)$
    c. $x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} - 4)$

5. La factorización del trinomio $x^2 - xy^2 - 12y^4$ es:

    a. $(x - 4y)(x + 3y)$
    b. $(x - 3y^4)(x + 4y)$
    c. $(x - 4y^2)(x + 3y^2)$

6. La factorización del trinomio $6y^2 + 11y - 21$, es:

   a. $(6y + 7)(y - 3)$
   b. $(3y - 3)(2y + 7)$
   c. $(6y - 7)(y + 3)$

7. La factorización de $a^3 - b^6$ es igual a:

   a. $(a - b)(a^2 + ab - b^2)$
   b. $(a + b)(a^2 + ab - b^2)$
   c. $(a - b^2)(a^2 + ab^2 + b^4)$

8. La factorización por agrupamiento de $18x^3 + 9x^2 + 2x + 1$, es:

   a. $9x^2(2x + 1)$
   b. $(9x^2 + 1)(2x + 1)$
   c. $(9x^2 + 1)(2x - 1)$

9. El resultado de la división de $6x^2 - xy - 2y^2$ *entre* $y + 2x$ es:

   a. $3x - 2y$
   b. $3y - 2x$
   c. $3x + 2y$

10. El resultado de la división de $2x^2 - 15x + 25$ *entre* $x - 5$ es:

   a. $2x - 5$
   b. $2x + 5$
   c. $4x - 5$

Ir al solucionario

1 Bimestre

Semana 4

En la semana cuatro corresponde el estudio de expresiones racionales, las mismas que nos dota de habilidades prácticas, y también nos brinda una perspectiva más profunda sobre el mundo que nos rodea.

1.4. Expresiones racionales

Las expresiones racionales son un área crucial en el álgebra, que nos permite comprender y manipular situaciones del mundo real de manera más precisa y detallada, en esta nueva fase de nuestro viaje matemático, exploraremos fracciones algebraicas y sus aplicaciones en diversos contextos.

1.4.1. Dominio de una expresión racional

Para entender el dominio de una expresión racional, es fundamental tener en cuenta ciertas restricciones que pueden surgir debido a operaciones como divisiones y raíces cuadradas:

- En una fracción, el denominador no puede ser igual a cero, ya que la división por cero no está definida en matemáticas.
- Del mismo modo, dentro de una raíz cuadrada, el contenido dentro de la raíz no puede ser un número negativo, si estamos tratando con números reales, ya que no hay un número real cuyo cuadrado sea negativo Sánchez (2009).

Ejercicios explicativos 14

Encontrar el dominio de las siguientes expresiones:

1. $\frac{7x}{x-5}$

   Hay que recordar que una expresión racional no puede tener denominador igual a 0: $= \frac{7x}{5-5}$

   Por lo tanto, el 5 no es parte del conjunto solución: $= \frac{7x}{0}$

Respuesta: $Dominio\ de\ esta\ expresión\ es = \ R - \{5\}$

2. $\sqrt{3x+4}$

La expresión algebraica es una expresión radical de índice par, por lo que el subradical solamente puede asumir valores mayores o iguales a cero.

Por lo tanto, a partir de $-\frac{4}{3}$ hasta el infinito es el conjunto solución: $= 3x + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$

Respuesta: $Dominio\ de\ esta\ expresión\ es = \ [-\frac{4}{3}, +\infty[$

1.4.2. Simplificación de expresiones racionales

Simplificar expresiones racionales implica manipular el numerador y denominador para hacerlas más manejables, comprensibles o útiles para un propósito específico, manteniendo al mismo tiempo su equivalencia matemática original Cuenca. (2019).

2. Principio del formulario

---

3. Final del formulario

Ejercicio explicativo 15

Considera la expresión racional $\frac{6x^2-9x}{12x^3-18x^2}$

- Factorice el numerador y denominador: $= \frac{3x(2x-3)}{3x(4x^2-6x)}$
- Cancele los factores comunes: $= \frac{(2x-3)}{(4x^2-6x)}$
- Encuentre el factor común del denominador: $= \frac{(2x-3)}{2x(2x-3)}$
- Cancele los factores comunes, y su resultado sería: $= \frac{1}{2x}$

Esta es la forma simplificada de la expresión racional dada, recuerde que siempre debe buscar cancelar los factores comunes en el numerador y el denominador para simplificar la fracción.

1.4.3. Multiplicación y división de expresiones racionales

La multiplicación y división de expresiones racionales se lleva a cabo de manera similar a la multiplicación y división de fracciones comunes, aquí tienes una guía paso a paso para multiplicar y dividir expresiones racionales:

1. Para multiplicar dos expresiones raciones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$, multiplique los numeradores $A \times C$, luego los denominadores $B \times D$, y, finalmente, simplifique la fracción resultante en caso de existir factores comunes en el numerador y denominador.

   Por ejemplo, si se desea multiplicar las expresiones $\frac{3x}{4y} \times \frac{2y}{5x}$ primero multiplique los numeradores: $3x \cdot 2y = 6xy$, y luego los denominadores: $4y \cdot 5x = 20xy$, quedando entonces $\frac{6xy}{20xy}$. Como se tienen factores comunes en el numerador y denominador, se procede a simplificar la expresión, dando como resultado: $\frac{3}{10}$.

2. Para dividir dos expresiones racionales $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$, invierta la segunda fracción para que la división se convierta en multiplicación, y así la expresión quede de la siguiente forma: $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$. Luego, multiplique los numeradores $A \times D$ y los denominadores $B \times C$. Por último, simplifique la fracción resultante si hay factores comunes en el numerador y denominador.

   Por ejemplo, se desea dividir las expresiones $\frac{3x}{4y} \div \frac{2y}{5x}$, entonces se inicia invirtiendo la segunda fracción: $\frac{3x}{4y} \times \frac{5x}{2y}$. Ahora, multiplique los numeradores: $3x \cdot 5x = 15x^2$, y denominadores: $4y \cdot 2y = 8y^2$ siendo la fracción resultante $\frac{15x^2}{8y^2}$, ya que no puede simplificar a una expresión más simple.

Siempre es importante simplificar las expresiones racionales al máximo para obtener la forma más simple y comprensible de la respuesta.

1.4.4. Suma y resta de expresiones racionales

La suma y resta de expresiones racionales se realiza de manera similar a la suma y resta de fracciones comunes. Aquí tienes una guía paso a paso para sumar y restar expresiones racionales:

- Para sumar o restar dos expresiones racionales $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$, inicie encontrando un denominador común para las dos fracciones. Esto es el Mínimo Común Múltiplo (MCM).
- Ajuste las fracciones al denominador común: reescriba las fracciones con el denominador común encontrado en el paso anterior.
- Sume o reste los numeradores obtenidos en el paso anterior.
- El denominador común se mantiene igual.
- Simplifique la fracción resultante si hay factores comunes en el numerador y el denominador Sánchez (2009).

Ejercicios explicativos 16

1. Sumar $\frac{3}{4x}$ y $\frac{5}{2x}$

   Encuentre el MCM de $4x\ \ y\ \ 2x, que\ es\ 4x$, y ajuste la fracción al denominador común: $= \frac{3+10}{4x}$
   Sume los numeradores: $= \frac{13}{4x}$
   Como no hay factores comunes para simplificar, el resultado es: $= \frac{13}{4x}$

2. Restar $\frac{2}{3y}$ y $\frac{5}{3y}$

   El MCM es $3y$ para las dos fracciones, por tanto, ajuste la fracción al denominador común: $= \frac{2-5}{3y}$

   Reste los valores de los numeradores: $= \frac{-3}{3y}$

   Simplifique, y su resultado es: $= -\frac{1}{y}$

Es importante recordar que debe encontrar un denominador común al sumar o restar expresiones racionales para obtener una respuesta correcta.

1.4.5. Fracciones compuestas

Las fracciones compuestas, también conocidas como fracciones complejas, son fracciones que contienen otras fracciones en su numerador, denominador o en ambas partes. Aquí hay algunas pautas para trabajar con fracciones compuestas en cuanto a su simplificación:

- Encuentre un común denominador para las fracciones dentro de la fracción compuesta, esto implica encontrar un múltiplo común para los denominadores de las fracciones internas.
- Simplifique las fracciones internas por separado, reduzca cada fracción interna a su forma más simple.
- Reescriba la fracción compuesta con las fracciones internas simplificadas, sustituya las fracciones internas por sus formas simplificadas en la fracción compuesta.

Ejercicio explicativo 17

Simplifique la fracción compleja $\frac{y-1-\frac{5}{y+3}}{y+5-\frac{35}{y+3}}$

- Resuelva las operaciones del numerador denominador: $=\frac{\frac{(y+3)(y-1)-5}{y+3}}{\frac{(y+3)(y+5)-35}{y+3}}$
- Aplique la propiedad distributiva: $=\frac{\frac{y^2+2y-3-5}{y+3}}{\frac{y^2+8y+15-35}{y+3}}$
- Simplifique términos comunes: $=\frac{\frac{y^2+2y-8}{y+3}}{\frac{y^2+8y-20}{y+3}}$
- Factorice el trinomio del numerador y denominador: $=\frac{\frac{(y+4)(y-2)}{y+3}}{\frac{(y+10)(y-2)}{y+3}}$

- Combine extremos y medios: $=\frac{(y+4)(y-2)(y+3)}{(y+10)(y-2)(y+3)}$
- Simplifique $(y-2)$ y $(y+3)$, y el resultado es: $=\frac{(y+4)}{(y+10)}$

Para realizar operaciones con fracciones, debe tener presente el cambio de signo en las fracciones compuestas, además implica manejar fracciones que contienen otras fracciones en su numerador, denominador o en ambas partes.

1.4.6. Racionalizar el denominador o el numerador

Racionalizar el denominador o el numerador se refiere a una técnica utilizada para eliminar raíces cuadradas u otras raíces de las fracciones, esto se hace para simplificar la expresión o para hacerla más fácil de manejar en ciertos contextos. A continuación, se explican los pasos para racionalizar el denominador o el numerador de una fracción:

- Cuando se trata de racionalizar el denominador de una fracción que tiene una raíz cuadrada, como $\frac{1}{\sqrt{a}}$ donde a ,es un número real positivo, se debe multiplicar el numerador y el denominador por la raíz cuadrada del número bajo el radical, en este caso, multiplicaría tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{a}$.

Ejercicios explicativos 18

1. **Racionalice el siguiente denominador:** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

   Multiplique el numerador y denominador por $\sqrt{2}$: $=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

   Realice la multiplicación: $=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

   Aplique la propiedad de los radicales: $=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$

   Eleve al exponente 2 para poder cancelar el radical: $=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}$

   Resultado: $=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. **Racionalice el siguiente numerador:** $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Multiplique el numerador y denominador por $\sqrt{2}$: $= \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Realice la multiplicación: $= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{2}}$

Aplique la propiedad de los radicales: $= \frac{\sqrt{4}}{3\sqrt{2}}$

Eleve al exponente 2 para poder cancelar el radical: $= \frac{\sqrt{2^2}}{3\sqrt{2}}$

Resultado: $= \frac{2}{3\sqrt{2}}$

Es importante mencionar que, en algunos contextos, como en ciertas ecuaciones o expresiones trigonométricas, es preferible tener racionalizado el denominador para facilitar los cálculos y las manipulaciones matemáticas.

1.4.7. Evitar errores comunes

Las operaciones con números racionales pueden ser propensas a errores comunes. En la tabla 6 se muestra una lista de errores comunes y consejos para evitarlos:

Tabla 6

Errores comunes en operaciones con números racionales

Propiedad correcta de multiplicación	Error común con la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a + b)^2 = a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\,(a, b \geq 0)$	$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b(a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a + b}$
$\frac{ab}{a} = b$	$\frac{a + b}{a} = b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} = (a + b)^{-1}$

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.42, Cengage Learning.

Revise las páginas del **texto básico** en la unidad de expresiones racionales, recordando conceptos de dominio, simplificación, multiplicación, división, suma y resta, racionalizador del denominador de expresiones racionales, desde la página 36 a la 44.

Para cerrar el estudio de los racionales y consolidar los conocimientos adquiridos, es fundamental llevar a cabo una revisión exhaustiva de lo aprendido y garantizar que estemos preparados para seguir con el aprendizaje, por ello, le invito a ingresar a Khan Academy, el cual le ayudará a profundizar el estudio de las Expresiones racionales.

Las expresiones racionales, como se destaca en el sitio *web*, constituyen un tema esencial y complejo, la presentación logra proporcionar una sólida introducción, ofreciendo información de manera clara y atractiva, este sitio resulta valioso para estudiantes en formación, ya que contribuye de manera efectiva a fortalecer la comprensión de conceptos relacionados con expresiones racionales.

¡Excelente trabajo al brindar una visión accesible y enriquecedora de este tema!

Ahora bien, la actividad pedagógica de expresiones racionales va más allá de la simple manipulación de símbolos; permite el desarrollo de habilidades matemáticas fundamentales, promoviendo el pensamiento abstracto y proporciona herramientas para abordar problemas matemáticos y del mundo real. Por ello, conociendo que una expresión racional es simplemente un cociente de dos polinomios, es decir, una fracción cuyo numerador y denominador son polinomios, le invito a revisar los siguientes ejemplos para una comprensión más profunda:

1. **Simplifique la expresión racional** $\frac{2x^2-6x}{4x}$

   Encuentre el factor común: $=\frac{2x(x-3)}{4x}$

   Simplifique la variable y el coeficiente: $=\frac{2(x-3)}{4}$

   Respuesta: $=\frac{x-3}{2}$

2. **Multiplique las expresiones** $\frac{3x}{5} \cdot \frac{2}{3}$

Multiplique el numerador y denominador: $= \frac{3x \cdot 2}{5 \cdot 3}$

Simplifique: $= \frac{6x}{15}$

Resultado: $= \frac{2x}{5}$

3. **Realice la división** $\frac{4x^2}{8x} \div \frac{2x}{4}$

Invierta el segundo número racional, para que se convierta en multiplicación: $= \frac{4x^2}{8x} \cdot \frac{4}{2x}$

Multiplique el numerador y denominador: $= \frac{4x^2 \cdot 2}{8x \cdot 2x}$

Simplifique: $= \frac{8x^2}{16x^2}$

Resultado: $= \frac{1}{2}$

Después de revisar los ejemplos, obtendrá los conocimientos esenciales que le permitirán, en su rol de estudiante, comprender y aplicar las expresiones racionales en distintos contextos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Espero que su estudio sobre expresiones racionales haya sido productivo y enriquecedor, le invito cordialmente a poner a prueba su comprensión y conocimiento realizando las siguientes actividades prácticas relacionadas con las expresiones racionales:

1. Plantee una serie de expresiones racionales y simplifique al máximo.

   Ejemplo: simplifique la siguiente expresión racional: $\frac{4x^2 - 12x}{8x}$

2. Diseñe problemas que involucren la suma, resta, multiplicación y división de expresiones racionales. Y realice las operaciones para simplificar el resultado.

   Ejemplo: realice las siguientes sumas de racionales: $\frac{3}{x} + \frac{5}{2x}$

3. Plantee problemas del mundo real que requieran la creación y manipulación de expresiones racionales. Por ejemplo, situaciones de proporciones, tasas y problemas financieros.

   Ejemplo: un paciente recibe una dosis inicial de 100 mg de un medicamento cuya concentración disminuye con una constante k de 0.1. Queremos calcular la concentración del medicamento después de 2 horas: $C_{(t)} = \frac{D}{kt} + 1$.

4. Bosqueje expresiones racionales para representar proporciones en contextos cotidianos, como recetas de cocina, mezclas de jugos, o proporciones en una escala de mapas.

   Ejemplo: está diseñando un mapa y quieres ajustar las distancias proporcionales. Si la escala original es de 1:10000 (1 unidad en el mapa representa 10000 unidades en la realidad), y quieres crear un mapa con una escala de 1:5000, puedes usar expresiones racionales:

   Escala Ajustada $Escala\ Ajustada = \frac{1 \cdot 5000}{10000} = \frac{1}{2}$

   Esto significa que, en el nuevo mapa, 1 unidad representará 5000 unidades en la realidad.

5. ¿Cuál es la importancia de las expresiones racionales en contextos del mundo real? Proporcionen al menos dos ejemplos de situaciones prácticas.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Estas actividades ilustran cómo las expresiones racionales pueden ser útiles en diversos contextos cotidianos para ajustar proporciones según las necesidades específicas.

6. Realice la autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 4

Señale la respuesta correcta acerca de las expresiones racionales.

1. La propiedad de las fracciones que permite simplificar expresiones racionales se simboliza por $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. El dominio de la expresión racional $\frac{2x}{6x^2+x-2}$, es todos los reales.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. El dominio de la expresión racional $\frac{2x\sqrt{4x}}{6-2x}$ es:

   a. $\{x \,/\, x \geq 0 \text{ y } x \neq -3\}$
   b. $\{x \,/\, x \geq 0 \text{ y } x \neq 3\}$
   c. $\{x \,/\, x > 0 \text{ y } x \neq -3\}$

4. La expresión que resulta de la simplificación de $\frac{y^2-3y-18}{2y^2+7y+3}$ es:

   a. $\frac{y-6}{1-2y}$
   b. $\frac{y+6}{1-2y}$
   c. $-\frac{6-y}{1+2y}$

5. El resultado simplificado de la operación $\frac{x+3}{4x^2-9} \div \frac{x^2+7x+12}{2x^2+7x-15}$ es igual a la expresión:

   a. $\frac{x+5}{(2x+3)(x+4)}$
   b. $\frac{x-3}{(2x-3)(x+4)}$
   c. $\frac{x+3}{(2x-3)(x-4)}$

6. El resultado simplificado de las operaciones indicadas en $\frac{x}{x^2-x-6} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3}$ es igual a la expresión:

a. $\frac{2x-1}{(x+3)(x-2)}$

b. $\frac{2x-1}{(x-3)(x-2)}$

c. $-\frac{2x+1}{(x-3)(x+2)}$

7. El resultado de simplificar la fracción compuesta $\frac{\frac{x-3}{x-4}-\frac{x+2}{x+1}}{x+3}$, es:

a. $\frac{11}{(x-4)(x+1)}$

b. $\frac{-5}{(x-4)(x-1)}$

c. $\frac{5}{(x-4)(x+1)}$

8. La racionalización simplificada del denominador de la expresión racional $\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y+3}}$, es:

a. $-\sqrt{3} - \sqrt{y+3}$

b. $\sqrt{3} - \sqrt{y+3}$

c. $\sqrt{y+3}$ -$\sqrt{3}$

9. La racionalización simplificada del numerador de la expresión racional $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2}$, es:

a. $\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$

b. $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

c. $\frac{1}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x}}$

10. La racionalización simplificada del denominador de la expresión racional $\frac{5}{\sqrt{3}}$, es:

a. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

b. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c. $\frac{5}{3}$

¡Felicidades por completar el estudio de expresiones racionales! Su dedicación y esfuerzo han dado frutos, y ahora puede sentirse orgulloso/a de alcanzar este importante esfuerzo académico.

¡Bien hecho y adelante hacia nuevos desafíos!

Ir al solucionario

1 Bimestre

Semana 5

El estudio de las ecuaciones se realiza en la semana cinco, las ecuaciones representan igualdades que involucran variables, y su resolución implica encontrar los valores de esas variables que hacen que la igualdad sea verdadera. A lo largo de la semana cinco, examinaremos diversas técnicas y estrategias para resolver ecuaciones de manera sistemática, desvelando su importancia en la modelación y solución de problemas en numerosos campos matemáticos y aplicados. ¡Comencemos nuestra travesía en el intrigante mundo de las ecuaciones!

Unidad 2. Ecuaciones y desigualdades

En esta semana, exploraremos los diferentes tipos de ecuaciones, desde las lineales hasta las cuadráticas y otros tipos. Aprenderemos a manipular ecuaciones para resolver problemas del mundo real y desarrollar habilidades matemáticas.

¡Prepárate para desentrañar los misterios de las ecuaciones matemáticas!

2.1. Ecuaciones

Las ecuaciones son una parte fundamental de las matemáticas y se utilizan para representar relaciones entre diferentes cantidades. "**Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas**" (Pancorbo y Ruiz, 2015, p. 122), entendiendo además por expresión algebraica "una expresión matemática en la que intervienen letras, números y símbolos de operaciones matemáticas" (Pancorbo y Ruiz, 2015, p. 119).

> Las ecuaciones son como enigmas matemáticos que nos desafían a encontrar el valor desconocido, llamado incógnita, que satisface la relación establecida en la ecuación.

2.1.1. Solución de ecuaciones lineales

Resolver ecuaciones lineales es uno de los conceptos fundamentales en álgebra y tiene muchas aplicaciones en la vida cotidiana.

Una ecuación lineal es una ecuación en la forma $ax + b = 0$, donde a y b son constantes conocidas y X es la variable que estamos tratando de encontrar. Academia JAF (30 de noviembre de 2023).

Ejercicio explicativo 19

Resuelva la ecuación lineal $3x - 7 = 2x + 5$

- Restar 2x a ambos lados de la ecuación para agrupar términos con x en un lado y términos constantes en el otro: $3x - 2x - 7 = 2x - 2x + 5$
- Realiza las operaciones: $x - 7 = 5$
- Suma 7 en los dos lados de la ecuación: $x - 7 + 7 = 5 + 7$
- Resultado: $x = 12$
- Comprobación:
- Reemplace el valor de x= 12 en la ecuación original: $3(12) - 7 = 2(12) + 5$
- Realice las operaciones: $36 - 7 = 24 + 5$
- Resultado: $29 = 29$

Recuerde que la clave para resolver ecuaciones lineales es realizar las mismas operaciones en ambos lados de la ecuación para mantener el equilibrio.

2.1.2. Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones polinómicas de segundo grado, es decir, ecuaciones en las que la incógnita x tiene un exponente de 2.

> "Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$" (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 287).

La forma general de una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes conocidas y a no puede ser igual a 0.

Ejercicios explicativos 20

1. Resuelva la ecuación cuadrática: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2)(x - 3)$	Busque dos números que multiplicados den 6 y sumados den -5: los números -2 y -3 cumple con las condiciones
$x - 2 = 0$	Utilice la propiedad del producto nulo que establece que $x - 3 = 0$ si el producto de dos factores es igual a cero.
$x - 2 + 2 = 0 + 2$	Sume a ambos lados 2
$x_1 = 2$	Primer resultado
$x - 3 + 3 = 0 + 3$	Sume a ambos lados 3
$x_2 = 3$	Segundo resultado

2. Dada la ecuación cuadrática: $x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$	Ecuación dada
$(x - 3)(x + 2) = 0$	Factorizamos
$(x - 3) = 0 \qquad (x + 2) = 0$	Cada factor igualamos a 0
$(x - 3) = 0$	En el primer factor
$x - 3 + 3 = 0 + 3$	Sumamos 3 a los dos lados y simplificamos
$x_1 = 3$	Primer resultado
$x + 2 = 0$	En el segundo factor
$x + 2 - 2 = 0 - 2$	Restamos 2 a los dos lados y simplificamos

$x_2 = -2$ Segundo resultado

Respuesta: las soluciones de la ecuación son 3 y -2.

3. **Ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$:** dada la ecuación cuadrática $20x^2 - 27x - 14 = 0$

$20x^2 - 27x - 14 = 0$ Ecuación dada

$20(20x^2 - 27x - 14) = 0$ Multiplicamos por 20

$(20x)^2 - 20(27x) - 280 = 0$ Factorizamos

$(20x - 35)(20x + 8) = 0$

$5(4x - 7)4(5x + 2) = 0$

$\frac{20(4x-7)(5x+2)}{20} = 0$ Dividimos para 20

$(4x - 7)(5x + 2) = 0$

$(4x - 7) = 0 \qquad (5x + 2) = 0$

$(4x - 7) = 0$

$4x - 7 + 7 = 0 + 7$ Sumamos 7 a los dos lados y simplificamos

$4x = 7$

$\frac{4x}{4} = \frac{7}{4}$ Dividimos para 4

$x_1 = \frac{7}{4}$ Primer resultado $5x + 2 = 0$

$5x + 2 - 2 = 0 - 2$

$5x = -2$

$\frac{5x}{5} = \frac{-2}{5}$

$x_2 = -\frac{2}{5}$ Segundo resultado

Respuesta: las soluciones de la ecuación son $\frac{7}{4}$ y $-\frac{2}{5}$

4. **Completando el cuadrado perfecto:** dada la ecuación cuadrática $x^2 = 8$

$x^2 = 8$	Ecuación dada
$\sqrt{x^2} = \sqrt{8}$	Tomamos la raíz en los dos lados
$x = \pm\sqrt{8}$	Solución
$x = \pm 2\sqrt{2}$	
$x_1 = 2\sqrt{2}$	Solución 1
$x_2 = -2\sqrt{2}$	Solución 2

Respuesta: las soluciones de la ecuación son $2\sqrt{2}$ y $-2\sqrt{2}$

5. **Aplicando radicales:** dada la ecuación cuadrática $(x-3)^2 = 9$

$(x-3)^2 = 9$	Ecuación dada
$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{6}$	Tomamos la raíz en los dos lados
$(x-3) = \pm\sqrt{6}$	
$(x-3) = \sqrt{6}$	En el primer factor
$x - 3 + 3 = \sqrt{6} + 3$	Sumamos 3 a los dos lados y simplificamos
$x = 3 + \sqrt{6}$	Solución
$(x-3) = -\sqrt{6}$	En el segundo factor

$x - 3 + 3 = -\sqrt{6} + 3$	Sumamos 3 a los dos lados y simplificamos
$(4x - 7) = 0$	
$4x - 7 + 7 = 0 + 7$	Sumamos 7 a los dos lados y simplificamos
$x = 3 - \sqrt{6}$	
$x_1 = 3 + \sqrt{6}$	Solución 1
$x_2 = 3 - \sqrt{6}$	Solución 2

Respuesta: las soluciones de la ecuación son $3 + \sqrt{6}$ y $3 - \sqrt{6}$

6. Dada la ecuación cuadrática $x^2 - 12x = 0$

$x^2 - 12x = 0$	Ecuación dada
$x^2 - 12x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 0 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$	Completamos el cuadrado
$x^2 - 12x + 36 = 36$	Factorizamos
$(x - 6)^2 = 36$	
$\sqrt{(x - 6)^2} = \sqrt{36}$	Introducimos en un radical ambos lados
$x - 6 = \pm 6$	
$x - 6 = 6$	En el primer factor
$x - 6 + 6 = 6 + 6$	Sumamos 6 a los dos lados y simplificamos
$x = 12$	Solución
$x - 6 = -6$	En el segundo factor
$x - 6 + 6 = -6 + 6$	Sumamos 6 a los dos lados y simplificamos
$x = 0$	Solución

$x_1 = 12$ Solución 1

$x_2 = 0$ Solución 2

Respuesta: las soluciones de la ecuación son $12\ y\ 0$.

7. Ecuación aplicando la fórmula general: dada la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 1 = 0$

El trinomio cuadrado no es perfecto, y no hay dos números enteros que sumados den 2 y multiplicados den -1, por lo que vamos a sustituir los coeficientes en la fórmula general y después realizamos los cálculos pertinentes.

$x^2 + 2x - 1 = 0$	Ecuación dada
$a = 1$	Identificamos los coeficientes
$b = 2$	
$c = -1$	
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula general
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$	Reemplazamos coeficientes
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$	
$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$	
$x = -\frac{2}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{2}$	
$x = -1 \pm \sqrt{2}$	Solución
$x_1 = -1 + \sqrt{2}$	Primer resultado

$x_2 = -1 - \sqrt{2}$ Segundo resultado

Respuesta: las soluciones de la ecuación son $-1 + \sqrt{2}$ y $-1 - \sqrt{2}$

2.1.3. Otros tipos de ecuaciones

Estudiar diferentes tipos de ecuaciones es esencial en matemáticas, ya que estas ecuaciones modelan una amplia variedad de situaciones en la vida real y en diversas disciplinas científicas. Al comprender cómo resolver y manipular distintos tipos de ecuaciones, se pueden analizar problemas complejos y tomar decisiones fundamentadas en diversos contextos.

> Ecuaciones de cuarto grado, para resolver este tipo de ecuación hacemos que $u = x^2$ entonces obtenemos una nueva ecuación cuadrática con la nueva variable u.

Ejercicios explicativos 21

1. **Ecuaciones de cuarto grado de tipo cuadrática:** dada la ecuación cuadrática $x^4 - x^2 - 240 = 0$

$x^4 - x^2 - 16 = 0$ Ecuación dada

$(x^2)^2 - x^2 - 16 = 0$ Escribamos x^4 como $(x^2)^2$

$u^2 - u - 16 = 0$ Sea $u = x^2$ y sustituimos

$a = 1$

$b = -1$

$c = -16$

$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Utilicemos la fórmula general

$u = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$

$u = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$	Solución
$u = x^2$	Sustituimos u por x^2
$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$	
$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}}$	Introducimos en un radical ambos lados
$x = \pm\sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}}$	Solución
$x_1 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}}$	
$x_2 = \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{65}}{2}}$	
$x_3 = -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}}$	
$x_4 = -\sqrt{\frac{-1 - \sqrt{65}}{2}}$	

Respuesta: las soluciones de la ecuación son $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{65}}{2}}$, $\sqrt{\frac{-1-\sqrt{65}}{2}}$, $-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{65}}{2}}$ y $-\sqrt{\frac{-1-\sqrt{65}}{2}}$

2. **Ecuación que contiene un radical:** dada la ecuación cuadrática $\sqrt{x} - 3 = 5$

$\sqrt{x} - 3 = 5$	Ecuación dada
$\sqrt{x} - 3 + 3 = 5 + 3$	Sumamos 3 a los dos lados y simplificamos

$\sqrt{x} = 8$

$(\sqrt{x})^2 = (8)^2$ Elevamos al cuadrado a los dos lados y simplificamos

$x = 64$ Solución

Respuesta: la solución de la ecuación es 64.

3. **Ecuaciones que contienen racionales:** dada la ecuación $\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3} = 0$

$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3} = 0$ Ecuación dada

$\left(\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3}\right)(x^2 - 7x + 12) = 0$

Multiplicamos por $(x^2 - 7x + 12)$

$x^2(x-3) - 16 - x^2(x-4) = 0$

$x^3 - 3x^2 - 16 - x^3 + 4x^2 = 0$ Propiedad distributiva

$x^2 - 16 = 0$ Simplificación

$x^2 = 16$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$ Colocamos la raíz a ambos lados

$x = \pm 4$ Solución

Verifiquemos para $x = 4$

$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3} = 0$ Ecuación dada

$\frac{4^2}{4-4} - \frac{16}{4^2-7(4)+12} - \frac{4^2}{4-3} = 0$ Reemplazo x = 4

$$\frac{16}{0} - \frac{16}{0} - \frac{16}{1} = 0$$ Solución no válida

Verifiquemos para $x = -4$

$$\frac{x^2}{x-4} - \frac{16}{x^2-7x+12} - \frac{x^2}{x-3} = 0$$ Ecuación dada

$$\frac{(-4)^2}{-4-4} - \frac{16}{(-4)^2-7(-4)+12} - \frac{(-4)^2}{-4-3} = 0$$ Reemplazo x = -4

$$\frac{16}{-8} - \frac{16}{56} - \frac{16}{-7} = 0$$ Simplificación

$$\frac{-112-16+128}{56} = 0$$

$$\frac{0}{56} = 0$$

$$0 = 0$$ Solución válida

Respuesta: la ecuación está definida para $x = -4$.

Al finalizar este tema, es importante destacar que el conocimiento y la aplicación de ecuaciones son herramientas poderosas que expanden nuestras capacidades matemáticas.

Examine y comprenda los contenidos propuestos en Khan Academy, que le ayudará a profundizar el estudio de los siguientes temas:

- Ecuaciones lineales.
- Ecuaciones cuadráticas formula general.
- Ecuaciones cuadráticas por factorización.

Estos temas le permitirán desarrollar habilidades matemáticas sólidas y aplicables en diversas situaciones. En primer lugar, estos tutoriales proporcionan una comprensión profunda de los conceptos fundamentales, ecuaciones, permitiéndole abordar ecuaciones de manera más efectiva y resolver problemas con más confianza. Además, presenta los contenidos con una metodología paso a paso que facilita el proceso de resolución de ecuaciones complicadas. Además, ofrecen ejemplos prácticos que ilustran la aplicación de ecuaciones en la vida cotidiana, destacando la relevancia y utilidad de estas habilidades en situaciones del mundo real.

¡Excelente trabajo, siga esforzándose en su aprendizaje!

Para finalizar, revise las páginas del **texto básico** en la unidad Ecuaciones: Solución de ecuaciones lineales, solución de ecuaciones cuadráticas y otros tipos de ecuaciones, desde la página 45 a la 59.

Estimado estudiante, usted tiene la libertad de explorar y aplicar el método que considere más eficiente. Se busca fomentar en los estudiantes la habilidad de razonar y descubrir el enfoque más efectivo. En la actualidad, contamos con herramientas como calculadoras de ecuaciones, sitios *web* como Symbolab, GeoGebra y *software* como Excel, que simplifican la resolución de ecuaciones.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Desarrolle las siguientes actividades prácticas, las cuales no solo ayudarán a ejercer habilidades con expresiones racionales, sino que también les proporcionará un contexto práctico para comprender la relevancia de estos conceptos en la vida cotidiana y en diferentes disciplinas.

1. **Resolución de problemas del mundo real:** diseñe situaciones de la vida cotidiana que requieran la formulación y resolución de ecuaciones.

   Por ejemplo, calcular el tiempo que tomará llenar una piscina con dos mangueras de diferentes tasas de flujo, o determinar el costo total de un producto con descuentos y tasas de impuestos variables.

   $$Costo\ total = P \cdot \left(1 - \frac{D}{100} + \frac{I}{100}\right)$$

   Plantee el modelo para calcular dicho problema, resuelva e indique su procedimiento y solución.

2. **Juegos de ecuaciones:** cree juegos de mesa o digitales que involucren la resolución de ecuaciones, pueden avanzar en el juego al resolver correctamente ecuaciones y aplicar estrategias matemáticas para ganar.

3. **Proyectos de modelado matemático:** consulte un tema donde se modele ecuaciones de interés y cree un proyecto de modelado matemático. Por ejemplo, podrían investigar y modelar el crecimiento de una población, el movimiento de un objeto bajo la fuerza de la gravedad, o el comportamiento de un fenómeno natural utilizando ecuaciones.

4. **Estudio de casos:** consulte problemas del mundo real que han sido resueltos mediante ecuaciones. Analícelas y discuta con algún compañero cómo se aplicaron las ecuaciones en esos casos específicos.

5. **Experimentos con gráficos:** grafique ecuaciones en un plano cartesiano, explore los cambios en los coeficientes y constantes afectan la forma y la posición de las gráficas, proporcionando una comprensión visual de las soluciones.

6. **Simulaciones computarizadas:** utilice el GeoGebra para realizar simulaciones que involucren la manipulación y resolución de ecuaciones, esta actividad le permite experimentar con diferentes escenarios y comprender mejor los conceptos matemáticos.

7. ¿Qué métodos existen para resolver ecuaciones cuadráticas y cómo se pueden interpretar las soluciones en términos del problema original?

8. ¿Cuáles son algunas aplicaciones prácticas de la teoría de ecuaciones en campos como la economía, la biología y la ingeniería, y cómo estas aplicaciones han contribuido al desarrollo de estas disciplinas?

9. ¿Cuáles son las implicaciones éticas y sociales de la aplicación de ecuaciones en la toma de decisiones, especialmente en áreas como la economía, la salud y el medioambiente?

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

"Persista en su esfuerzo, cada página que lee, cada problema que resuelve le acerca un paso más a sus metas. El aprendizaje es un viaje, ¡sigue adelante con determinación y verá crecer su conocimiento!"

10. Estimado estudiante, para evaluar los aprendizajes adquiridos sobre esta temática, le invito a desarrollar la autoevaluación que a continuación se presenta.

Autoevaluación 5

Seleccione la respuesta correcta acerca de las ecuaciones.

1. Para resolver una ecuación se trata de encontrar una ecuación equivalente más sencilla en la cual la variable esté en un solo lado del signo igual.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. El área superficial (A) de un prisma rectangular cuyos lados son a, b y c, está representado por: $A = 2ab + 2ac + 2bc$. Si de esta fórmula, despejamos el lado a, se obtiene $a = \frac{A-2bc}{2b+2c}$

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. Todas las soluciones de la ecuación cuadrática $2w^2 = 3(2w-1)$, son:

   a. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

   b. $\frac{3+\sqrt{5}}{3}$ y $\frac{3-\sqrt{5}}{3}$

   c. $\frac{3+\sqrt{5}}{5}$ y $\frac{3-\sqrt{5}}{5}$

4. Todas las soluciones de la ecuación $\sqrt{3x+1} = 2 + \sqrt{x+1}$, son:

   a. $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$

   b. $\frac{5+\sqrt{22}}{5}$ y $\frac{5-\sqrt{22}}{5}$

   c. $\frac{5+\sqrt{13}}{5}$ y $\frac{5-\sqrt{13}}{5}$

5. Todas las soluciones de la ecuación $\sqrt{11-x^2} - \frac{2}{\sqrt{11-x^2}} = 1$, son:

a. $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$
b. $\sqrt{14}$ y $-\sqrt{14}$
c. $\sqrt{7}, -\sqrt{7}, \sqrt{10} y$ -$\sqrt{10}$

6. Los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera se denominan:

a. Variables de la ecuación.
b. Incógnitas de la ecuación.
c. Soluciones o raíces de la ecuación.

7. Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de ecuaciones:

a. Equivalentes.
b. Dependientes.
c. Independientes.

8. Una ecuación lineal en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma:

a. $ax + bx^2 + c = 0$
b. $- bx + c = 0$
c. $ax + b = 0$

9. Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son:

a. Números reales con $a^2 \neq 0$
b. Números enteros con $a \neq 0$
c. Número reales con $a \neq 0$

10. La solución de la ecuación lineal $\frac{x}{3} - \frac{3x}{5} = 4$ es:

a. -15.
b. 30.
c. 15.

Ir al solucionario

1 Bimestre

Semana 6

En la semana seis abordaremos el modelado mediante ecuaciones, donde las matemáticas se convierten en una poderosa herramienta para representar y resolver situaciones del mundo real. En este estudio, exploraremos cómo traducir fenómenos complejos en ecuaciones matemáticas, permitiéndonos comprender, analizar y prever el comportamiento de fenómenos diversos. ¡Prepárense para descubrir el arte del modelado matemático a través de ecuaciones!

2.2. Modelado de ecuaciones

El modelado de ecuaciones es un proceso fundamental en matemáticas que implica la representación matemática de fenómenos del mundo real. Se trata de traducir situaciones concretas en términos de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, permitiendo así analizar y resolver problemas Parra (2018).

2.2.1. Construcción y usos de modelos

Para modelar nos apoyaremos en los siguientes pasos:

1. Identifique la variable.
2. Transforme palabras en expresiones algebraicas.
3. Formule el modelo.
4. Resolver la ecuación y verificar su respuesta UtecContenidos (2017).

¡Adelante, su próxima ecuación podría ser la llave que desbloquee nuevos horizontes!

2.2.2. Problemas acerca del interés

1. Florita quiere saber cuánto debe cobrar de un préstamo que realizó de 8500 dólares en 6 meses de plazo al 3 % de interés mensual.

   Identifique la variable: interés I

   Modelo matemático: $I = prt$

Tabla 7

Resolución de ejercicio acerca del interés

Datos	Planteamiento y resolución	Directrices
$Cantidad\ principal\ = 8500$ $razón\ = 3\% = 0{,}0$ $tiempo\ = 6\ mes$	$I = prt$	Formula del interés
	$I = 8500 \times 0.03 \times 6$	Reemplace los valores en la ecuación del interés simple
	$I = 8500 \times 0.18$	Multiplique los valores
	$I = 1530$	Es el interés que debe cobra después de los seis meses

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.6, Cengage Learning.

2. Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de 10 dólares por los primeros 1000 mensajes de texto y 10 centavos por cada mensaje adicional de texto. La cuenta de Miriam por mensajes de texto para el mes de junio es de 38.50 dólares. ¿Cuántos mensajes de texto envió dicho mes?

Identifique la variable:
$x = cantidad\ \ de\ mensajes\ de\ texto\ enviados\ por\ Miriam.$

Convertir las palabras a lenguaje algébrico:

- Cantidad de mensajes de textos enviados: X mensajes.
- Valor por los primeros mil mensajes: 10 dólares.
- Cantidad de mensajes adicionales: x-1000 dólares.
- Valor que pagar por mensajes adicionales: 0.1(x-1000) dólares.
- Valor total: 38.50 dólares.

Formular el modelo: valor por los primeros mil mensajes + valor a pagar por los mensajes adicionales = valor total.

$$10 + 0{,}1(x - 1000) = 38{,}50$$

Resolución de la ecuación:

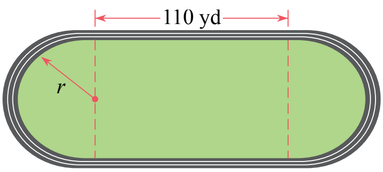
$10 + 0{,}1x - 100 = 38{,}50$	Realice la multiplicación
$0{,}1x = -10 + 100 + 38{,}50$	Ubique la incógnita en el lado izquierdo
$0{,}1x = 128{,}50$	Sume las cantidades
$x = \dfrac{128{,}50}{0{,}1}$	La cantidad que está multiplicando a la X pasa a dividir
$x = 1285$	Resultado

2.2.3. Problemas de áreas o longitud

Dimensiones de una pista: una pista de carreras tiene la forma que se muestra en la tabla 8, con costados rectos y extremos semicirculares. Si la longitud de la pista es de 440 yardas y las dos partes rectas miden 110 yardas de largo cada una, ¿cuál es el radio de las partes semicirculares (a la yarda más cercana)?

Tabla 8

Resolución de ejercicio sobre áreas

Datos	Planteamiento y resolución	Directrices
Cancha de fútbol  *Nota.* Tomado del libro de precálculo (2017)	$L_t = 2L_{sc} + 2L_r$	Ecuación de la longitud total de la pista
	$2L_{sc} + 2L_r = L_t$	Cambie el orden de la igualdad para que el radio quede en el lado izquierdo
	$2(\pi r) + 2(110) = 440$	Remplace los datos conocidos del problema.
	$2(\pi r) + 220 = 440$	Realice la multiplicación
Longitud = 440 yardas	$2(\pi r) + 220 - 220 = 440 - 220$	Restamos -220

Datos	Planteamiento y resolución	Directrices
Partes rectas = 110 yardas C/U	$(\pi r) = \dfrac{440 - 220}{2}$	Pase a un solo lados los términos numéricos
¿Radio semicírculo =?	$(\pi r) = \dfrac{220}{2}$	Realice la resta
Perímetro del círculo $c = 2\pi r$	$(\pi r) = 110$	Realice la división
Perímetro del semicírculo $S_c = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$	$r = \dfrac{110}{\pi}$	Elimine el paréntesis y pase π a dividir
En este problema utilizamos la formula del perímetro del círculo.	$r = \dfrac{110}{3{,}1416}$	Reemplace el valor de PI
	$r = 35{,}03\ yardas$	Divida el racional. Respuesta.

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.68, Cengage Learning.

2.2.4. Problemas de mezclas

Un comerciante mezcla té que vende en 3 dólares por libra con té que vende en 2,75 dólares por libra para producir 80 lb en una mezcla que vende en 2,90 dólares por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de té debe usar el comerciante en la mezcla?

1. Convertir de palabras a lenguaje algebraico

- Cantidad de libras de té que cuesta 3 dólares: X libras.
- Cantidad de té que cuesta 2,75 dólares: Y libras.
- Valor por cobrar la libra de té de $ 3: 3x dólares.
- Valor por cobrar la libra de té de $ 2,75: 2,75y dólares.
- Cantidad total de mezcla: 80 libras.
- Valor por cobrar el total de la mezcla: $2{,}90 \cdot 80 = 232\ dólares$.

2. Formulación del modelo

$x + y = 80$ ecuación 1.

$3x + 2{,}75y = 232$ ecuación 2.

3. Resolución

$x = 80 - y$	Despeje x en la primera ecuación
$3(80 - y) + 2{,}75y = 232$	Sustituya en la ecuación 2
$240 - 3y + 2{,}75y = 232$	Aplique la propiedad distributiva
$-3y + 2{,}75y = 232 - 240$	Deje las variables en el lado izquierdo
$-0{,}25y = -8$	Reste las variables y los enteros
$y = \frac{-8}{-0{,}25}$	Pase a dividir el coeficiente de y
$y = 32$	Divida las dos cantidades y aplique leyes de signos
$x + 32 = 80$	Sustituya el valor de **y** en la primera ecuación
$x = 80 - 32$	Deje la variable **x** en el lado izquierdo
$x = 48$	El valor de **x** es 48

Respuesta: se debe vender 48 libras del té que tiene un valor 3 dólares y 32 libras del té que tiene un valor de 2,75 dólares.

2.2.5. Problemas del tiempo necesario para realizar un trabajo

Compartir un trabajo: Candy y Tim comparten una ruta para vender periódicos, Candy tarda 70 minutos en entregar todos los periódicos; Tim tarda 80 minutos. ¿Cuánto tiempo les toma a los dos cuando trabajan juntos?

1. Convertir de palabras a lenguaje algebraico

- ¿Cuánto tiempo tardan los dos?: $\frac{1}{t}$
- Candy tarda 70 minutos: $\frac{1}{70}$
- Tim tarda 80 minutos: $\frac{1}{80}$

2. Formulación del modelo

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{70} + \frac{1}{80}$$

3. Resolución

$\frac{1}{t} = \frac{1}{70} + \frac{1}{80}$	Ecuación formulada en el modelo
$\frac{1}{t} = \frac{8+7}{560}$	Descomponga en números primos los números del denominador y, determine el M.C.M.
$\frac{1}{t} = \frac{15}{560}$	Sume los datos del numerador
$15t = 1 \cdot 560$	Realice la multiplicación
$t = \frac{560}{15}$	Pase el coeficiente a dividir
$t = 37{,}33$	Tiempo que utilizan los dos para vender los periódicos

4. Comprobación

$\text{Trabajo total} = \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{80}\right) \times 37\frac{1}{3}$	Encuentre un denominador común para las dos fracciones (560) y luego sume las dos fracciones
$\text{Trabajo total} = \left(\frac{15}{560}\right) \times 37\frac{1}{3}$	Realice las operaciones para obtener el resultado de las fracciones
$\text{Trabajo total} = 37\frac{1}{3} \times 37\frac{1}{3}$	Multiplicamos las fracciones
$\text{Trabajo total} = 1\ periodo$	Candy y Tim juntos entregan en 1 periodo los periódicos.

2.2.6. Problemas de distancia, rapidez y tiempo

Distancia, rapidez y tiempo: Wendy hizo un viaje de Davenport a Omaha, una distancia de 300 millas. Parte del trayecto lo hizo en autobús, que llego a la estación de ferrocarril justo a tiempo para que completara su viaje en tren. El autobús promedió 40 mi/h y el tren promedió 60 mi/h. Todo el viaje tomo 5½ h. ¿Cuánto tiempo viajó Wendy en tren?

1. **Identificar la variable: t** tiempo que viajó Wendy.

2. **Convertir de palabras a lenguaje de álgebra**

- Distancia total del viaje: $300\ millas.$
- La distancia que viajó Wendy en autobús: $d\ millas$.
- La distancia que viajó en tren: $300 - d\ millas.$
- Fórmula para calcular el tiempo: $T = \frac{Distancia}{Rapidez}$
- Tiempo en autobús: $t_{autobús} = \frac{d}{40}horas$.
- Tiempo en tren: $t_{tren} = \frac{300-d}{60}horas.$

3. **Formular el modelo**

Sabemos que el tiempo total del viaje es 5.5 horas, Podemos usar esta información para escribir una ecuación:

$$\frac{d}{40} + \frac{300 - d}{60} = 5.5$$

4. **Resolvemos la ecuación**

$\frac{d}{40} + \frac{300-d}{60} = 5.5$	Ecuación planteada
$\frac{3d+2(300-d)}{120} = 5.5$	Se encuentra MCM
$3d + 2(300 - d) = 660$	Se pasa el divisor al otro lado a multiplicar
$3d + 600 - 2d = 660$	Aplique la propiedad distributiva
$d + 600 = 660$	Sume las variables
$d = 660 - 600$	Pase el 600 al otro lado de la ecuación a restar
$d = 60$	Resultado de la resta

$$Tiempo\ en\ tren = \frac{300-d}{60}$$

Ahora que sabemos que Wendy viajó 60 millas en autobús. Para encontrar el tiempo que pasó en el tren, podemos usar la fórmula del tiempo para el tren

$$Tiempo\ en\ tren = \frac{300-60}{60}$$

Reemplazamos el valor de la distancia

$$Tiempo\ en\ tren = \frac{240}{60}$$

Realice la resta

$$Tiempo\ en\ tren = 4$$

Wendy viajó 4 horas en tren

5. Comprobación

$$T.en\ autobús = \frac{60}{40} = 1.5\ h$$

Tiempo en autobús

$$T.en\ tren = \frac{240}{60} = 14\ h$$

Tiempo en tren

$$T.total = 1.5 + 4 = 5.5h$$

La suma de los dos tiempos da como resultado el tiempo total, por consiguiente, el resultado es correcto.

> Mejore el conocimiento concerniente al modelado de ecuaciones, para ello el **texto básico** contribuye significativamente a una comprensión más sólida del tema, por tanto, le invito a revisar el material desde la página 65 a la 81.

Además, le invito a ingresar a Khan Academy y revisar el Modelado de ecuaciones, el cual destaca la relevancia del modelado de ecuaciones, subrayando su importancia crucial al transformar situaciones del mundo real en un formato matemático. Este proceso es esencial, ya que posibilita el análisis detallado y la formulación de predicciones fundamentadas en datos concretos Academia *Internet* (2023).

Para finalizar, revise el presente módulo didáctico sobre Ecuaciones y desigualdades, el cual se convertirá en una herramienta invaluable porque le proporcionará una comprensión profunda y práctica de cómo aplicar conceptos matemáticos a situaciones del mundo real. A través de ejemplos y ejercicios prácticos, podrá desarrollar habilidades esenciales en la formulación y resolución de ecuaciones, permitiéndole traducir problemas cotidianos en términos matemáticos para su análisis y predicción, por tanto, este módulo didáctico se erige en una herramienta esencial para su crecimiento académico y desarrollo de habilidades aplicables a lo largo de su trayectoria educativa y profesional.

Tras examinar el módulo didáctico, adquirirá los conocimientos fundamentales que le capacitarán, en calidad de estudiante, para entender y emplear ecuaciones y desigualdades en diversas situaciones.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, reforcemos el aprendizaje resolviendo las siguientes actividades, las cuales no solo ayudarán a practicar habilidades con ecuaciones, sino que también le proporcionará un contexto práctico para comprender la relevancia de estos conceptos en la vida cotidiana y en diferentes disciplinas.

1. Linh ha obtenido calificaciones de 82,75 y 71 en sus exámenes de álgebra de mitad de periodo. Si el examen final cuenta el doble que el de la mitad del periodo. ¿Qué calificación debe tener en su examen final para obtener una calificación promedio de 80? (Suponga que la máxima calificación posible en cada prueba es de 100).

2. Una mujer gana un 15 % más que su esposo. Juntos ganan, 69875 dólares por año. ¿Cuál es su salario anual del esposo?

3. Un lote de medio acre para construcción mide 5 veces más de largo que de ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones? $Nota: 1\ acre = 43560 pies^2$

4. Una escalera de $19\frac{1}{2} pies$ se apoya contra un edificio. La base de la escalera está a $7\frac{1}{2} pies$ del edificio. ¿A qué altura del edificio llega a la escalera?

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Recuerde, su dedicación hoy es la clave de sus logros mañana. “¡Siga estudiando con pasión y determinación, el camino hacia el éxito está pavimentado con esfuerzo y aprendizaje constante!”

5. Le invito a reforzar sus conocimientos, participando en la siguiente autoevaluación:

Autoevaluación 6

Señale la respuesta correcta acerca del modelado de ecuaciones.

1. Un agricultor cultiva manzanas y peras en su huerto. Tiene un total de 80 árboles que producen un total de 560 frutas. Si cada manzana pesa 0.5 libras y cada pera pesa 0.3 libras, entonces, el agricultor tiene 40 árboles de manzanas y 40 árboles de peras.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. Un padre tiene tres veces la edad de su hijo. La suma de sus edades es 48 años. Entonces el hijo tiene 18 años y el padre 30 años.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. Un automóvil viaja a una velocidad constante. Después de 4 horas de viaje, ha recorrido 240 millas. ¿Cuál es su velocidad en millas por hora?

   a. La velocidad del automóvil es de 60 millas por hora.
   b. La velocidad del automóvil es de 50 millas por hora.
   c. La velocidad del automóvil es de 70 millas por hora.

4. María hereda 100000 dólares y los invierte en dos certificados de depósito. Uno de los certificados paga el 6 % y el otro $4\frac{1}{2}\%$ de interés simple al año. Si el interés total de María es de 5025 dólares al año, ¿cuánto dinero se invierte en cada una de sus tasas de interés?

   a. María ha invertido, 35000 dólares al $4\frac{1}{2}\%$ y los restantes 65000 al 6 %.
   b. María ha invertido, 45000 dólares al 6 % y los restantes 55000 al $4\frac{1}{2}\%$.
   c. María ha invertido, 35000 dólares al 6 % y los restantes 65000 al $4\frac{1}{2}\%$.

5. Un lote rectangular para construcción mide 8 pies más de largo de lo que mide de ancho y tiene un área de $2900\ pies^2$. Encuentre las dimensiones del lote:

   a. El ancho mide 60 pies y la longitud 68 pies.
   b. El ancho mide 50 pies y la longitud 58 pies.
   c. El ancho mide 70 pies y la longitud 78 pies.

6. En un problema de mezclas, un comerciante desea crear una mezcla de café que venda a 5 por libra. Si mezcla café que cuesta 4 por libra, con café que cuesta $6 por libra en una proporción de 2:3, ¿cuántas libras de cada tipo de café debe usar en la mezcla?

   a. 10 libras de café a $4 y 15 libras de café a $6.
   b. 8 libras de café a $4 y 12 libras de café a $6.
   c. 12 libras de café a $4 y 18 libras de café a $6.

7. Una tienda vende dos tipos de camisetas: las básicas a $15 cada una y las prémium a $25 cada una. Si en un día venden un total de 50 camisetas y recaudan $950, ¿cuántas camisetas básicas y cuántas prémium se vendieron?

   a. 30 camisetas básicas y 20 prémium.
   b. 20 camisetas básicas y 30 prémium.
   c. 25 camisetas básicas y 25 prémium.

8. Un estudiante necesita comprar lápices y bolígrafos para la escuela. Cada lápiz cuesta $0.50 y cada bolígrafo cuesta $1. Si el estudiante quiere gastar un total de $10 y comprar 15 artículos en total, ¿cuántos lápices y bolígrafos debe comprar?

   a. 5 lápices y 10 bolígrafos.
   b. 8 lápices y 7 bolígrafos.
   c. 6 lápices y 9 bolígrafos.

9. Un agricultor quiere mezclar dos tipos de fertilizantes, uno que cuesta \$8 por kilogramo y otro que cuesta \$12 por kilogramo, para obtener una mezcla que venda a \$10 por kilogramo. Si desea obtener 100 kilogramos de la mezcla, ¿cuántos kilogramos de cada tipo de fertilizante debe usar?

   a. 40 kilogramos del fertilizante a \$8 y 60 kilogramos del fertilizante a \$12.
   b. 30 kilogramos del fertilizante a \$8 y 70 kilogramos del fertilizante a \$12.
   c. 50 kilogramos del fertilizante a \$8 y 50 kilogramos del fertilizante a \$12.

10. Una tienda vende dos tipos de juguetes: unos a \$10 cada uno y otros a \$15 cada uno. Si en un día venden un total de 40 juguetes y recaudan \$500, ¿cuántos juguetes de cada tipo se vendieron?

   a. 20 juguetes a \$10 y 20 juguetes a \$15.
   b. 15 juguetes a \$10 y 25 juguetes a \$15.
   c. 25 juguetes a \$10 y 15 juguetes a \$15.

Su compromiso y trabajo arduo han rendido frutos.

¡Excelente trabajo y adelante, enfrente con entusiasmo los nuevos desafíos que vendrán!

Ir al solucionario

Semana 7

En la semana siete corresponde realizar el estudio de las desigualdades, este tema permite expresar relaciones de orden entre cantidades, abriendo la puerta a la comprensión de rangos, límites y variaciones en diversas situaciones. En esta búsqueda, descubriremos cómo resolver y manipular desigualdades, aplicando herramientas para analizar y modelar una amplia gama de fenómenos matemáticos y del mundo real. ¡Empecemos nuestro viaje en el intrigante reino de las desigualdades!

2.3. Desigualdades

2.3.1. Resolución de desigualdades lineales

Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo de igual hay uno de los símbolos: $\geq, \leq, >$ *o* $<$. Julio Profe. (2014). Por ejemplo:

$5x + 4 = 6$ Ecuación.

$5x + 4 \geq 6$ Inecuación.

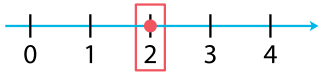
Para resolver una desigualdad que contenga una variable significa encontrar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinidad de soluciones que forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta real.

Ejercicios explicativos 22

1. Resuelva la ecuación $5x + 4 = 14$ y coloque la respuesta en la recta real.

Tabla 9

Desarrollo de ejercicio 1

Solución	Recta real
$5x + 4 = 14$ $5x = 10$ $x = 2$	*Respuesta al ejercicio*  *Nota.* Elaborado por Granda (2024). Solución gráfica de la desigualdad

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.81, Cengage Learning,.

Respuesta: La solución de la ecuación es igual a 2.

2. Resolvamos la inecuación $5x + 4 \leq 14$ y coloquemos las respuestas en la recta real.

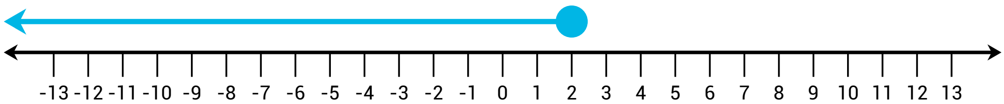
$$5x + 4 \leq 14$$

$$5x \leq 10$$

$$x \leq 2$$

Figura 2

Recta numérica



Nota. Granda, E., (2024)

Respuesta: Las soluciones de la desigualdad son todos los valores menores e iguales a 2, es decir en el intervalo $(-\infty, 2]$.

3. Resolvamos la inecuación y coloquemos las respuestas en la recta real.

$$\frac{2x - 5}{3} < x + 1$$

$$2x - 5 < 3(x + 1)$$

$$2x - 5 + 5 < 3x + 3 + 5$$

$$2x - 3x < 3x - 3x + 8$$

$$-x < 8$$

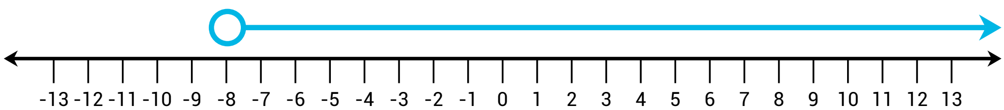
Recuerde que multiplicar por un número negativo implica invertir la dirección de la desigualdad:

$$-x(-1) < 8(-1)$$

$$x > -8$$

Figura 3

Recta numérica



Nota. Granda, E., (2024)

Respuesta: Las soluciones de la desigualdad son todos los valores mayores a -8, es decir, en el intervalo $(-8, \infty)$.

4. **Resolución de desigualdades simultáneas:** para comprender con mayor facilidad, resuelva la desigualdad $\mathbf{12 > -3 - 3x \geq -9}$.

Primer caso

$$12 > -3 - 3x$$

$$-3x - 3 < 12$$

$$-3x - 3 + 3 < 12 + 3$$

Recuerde que multiplicar por un número negativo implica invertir la dirección de la desigualdad.

$$-3x(-1) < 15(-1)$$

$$3x > -15$$

$$x > -\frac{15}{3}$$

$$x > -5$$

Segundo caso

$$-3 - 3x \geq -9$$

$$-3 + 3 - 3x \geq -9 + 3$$

$$-3x \geq -6$$

Recuerde que multiplicar por un número negativo implica invertir la dirección de la desigualdad.

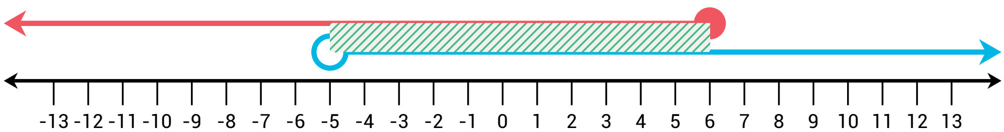
$$-3x(-1) \geq -6(-1)$$

$$3x \leq 6$$

$$x \leq 6$$

Figura 4

Recta numérica



Nota. Granda, E., (2024)

Respuesta: Las soluciones de las desigualdades simultáneas son todos los valores mayores a -5 y menores e iguales a 6, es decir, en el intervalo $(-5, 6]$

2.3.2. Desigualdades con valor absoluto

Para resolver las desigualdades con valor absoluto aplicamos las siguientes propiedades (tabla 10).

Tabla 10

Propiedades de las desigualdades con valor absoluto

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1. $\lvert x\rvert < c$	$-c < x < c$	 *Nota.* Elaborado por Granda (2024). Respuesta a la desigualdad
2. $\lvert x\rvert \leq c$	$-c \leq x \leq c$	 *Nota.* Elaborado por Granda (2024). Respuesta a la desigualdad
3. $\lvert x\rvert > c$	$x < -c \quad o \quad c < x$	 *Nota.* Elaborado por Granda (2024). respuesta a la desigualdad
4. $\lvert x\rvert \geq c$	$x \leq c \quad o \quad c \leq x$	 *Nota.* Elaborado por Granda (2024). respuesta a la desigualdad

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.82, Cengage Learning.

Para comprender de mejor manera este tema resolvamos el siguiente ejercicio:

Dada la desigualdad $|3x + 2| < 4$

La desigualdad $|3x + 2| < 4$ es equivalente a:

$$-4 < 3x + 2 < 4 \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$-4 - 2 < 3x + 2 - 2 < 4 - 2$$

$$-6 < 3x < 2$$

$$-\frac{6}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{2}{3}$$

$$-2 < x < \frac{2}{3}$$

Respuesta: la solución de la desigualdad es $\left(-2 < x < \frac{2}{3}\right)$ en forma de intervalo es $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$.

2.3.3. Modelado con desigualdades

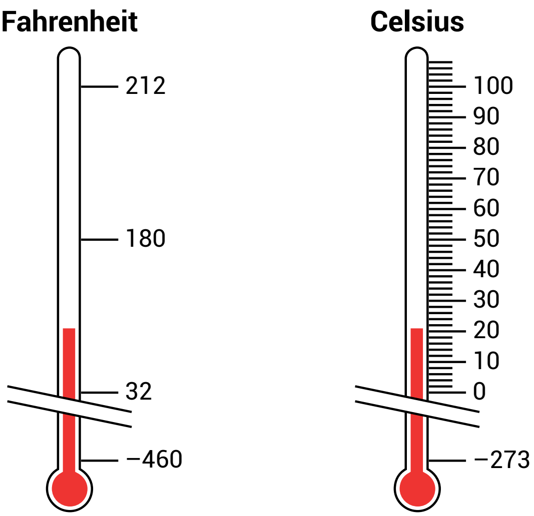
Modelar problemas prácticos conduce a desigualdades porque con frecuencia estamos interesados en determinar cuándo una cantidad es mayor (o menor) que otra Cuenca, L. (2019).

Para comprender de mejor manera este tema resolvamos los siguientes ejercicios:

1. Las instrucciones en una bolsa de café indican que debe conservarse a una temperatura de 20 °C a 30 °C. ¿Qué intervalo de temperatura corresponde en una escala Fahrenheit?

Figura 5

Escalas de temperatura



Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo* [Ilustración], por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.88, Cengage Learning, *CC BY 2.0*

Solución

Expresemos en expresión algebraica:

$20 < C < 30$

1 Bimestre

Sabemos que: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$
Aplicamos el método de sustitución:

$$20 < C < 30$$

$$20 < \frac{5}{9}(F - 32) < 30$$

$$20\left(\frac{9}{5}\right) < \frac{5}{9}(F - 32)\left(\frac{9}{5}\right) < 30\left(\frac{9}{5}\right)$$

$$36 < (F - 32) < 54$$

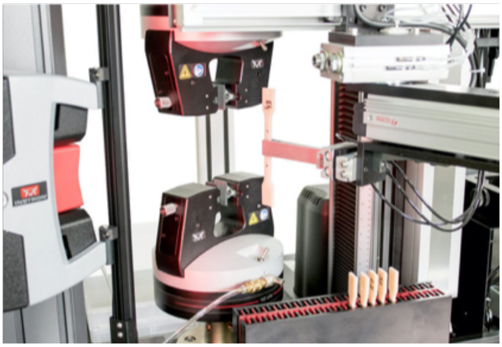
$$36 + 32 < F - 32 + 32 < 54 + 32$$

$$68 < F < 86$$

Respuesta: El café debe conservarse a una temperatura de 68 a 86 °F.

2. La fuerza de tensión que soporta un nuevo plástico varía con la temperatura de acuerdo con la ecuación $T = 100 + 400T - 40T^2$ ¿Para qué intervalo de temperatura podremos hacer que la fuerza de tensión sea mayor de 740 N?

Figura 6
Máquina de tensión/flexión



Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo* [Ilustración], por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.89, Cengage Learning, *CC BY 2.0*

Solución

Expresemos en expresión algebraica:

$$T > 740$$

Sabemos que: $T = 100 + 400T - 40T^2$

Aplicamos el método de sustitución:

$T > 740$

$100 + 400T - 40T^2 > 740$

$-40T^2 + 400T - 640 > 0(-1)$

$40T^2 - 400T + 640 < 0$

$T^2 - 10T + 16 < 0$

$(T - 8)(T - 2) < 0$

Respuesta: El intervalo de temperatura para que la fuerza sea mayor a 740N debe estar entre 2 y 8 grados Celsius.

Estimado estudiante, revise el **texto básico** de precálculo, ya que aborda el tema de desigualdades, así mismo propone ejemplos resueltos y problemas adicionales para reforzar lo aprendido, para ello revise los contenidos desde la página 81 a la 91.

Si tiene preguntas específicas o problemas concretos, no dude en contactarse con el docente tutor.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Realice las actividades prácticas propuestas, pues no solo mejorará sus habilidades en la resolución de desigualdades, sino que también verán la aplicabilidad y la relevancia de estas habilidades en diversos contextos.

1. **Resolución de problemas cotidianos:** plantee situaciones de la vida real que involucren desigualdades, como presupuestos mensuales, restricciones de tiempo o capacidad, formule y resuelva desigualdades para tomar decisiones informadas.

2. **Proyectos de modelado matemático:** consulte un tema de interés y cree un proyecto de modelado matemático que incluya desigualdades.

Esto les permitirá aplicar las desigualdades en situaciones del mundo real.

3. **Análisis de gráficos:** utilice gráficos para representar desigualdades en el plano cartesiano, explore cómo diferentes desigualdades se reflejan en las regiones sombreadas y entender visualmente las soluciones.

4. **Comparación de costos:** plantee problemas en los que se deba comparar costos con restricciones presupuestarias, puede usar desigualdades para determinar las combinaciones de productos o servicios que se ajustan a un presupuesto dado.

5. **Simulaciones computarizadas:** utilice el GeoGebra para simular situaciones que involucren desigualdades. Esto le permitirá experimentar con diferentes escenarios y comprender mejor cómo las desigualdades afectan las soluciones.

6. Explica cómo graficar la desigualdad $x+3 < 10$ en una recta numérica.

7. ¿Cómo se resuelve una desigualdad que involucra un valor absoluto, como $|2x-7|>3$?

8. Demuestra si la afirmación $3x-2 >7$ y $x < 2$ es verdadera o falsa para algún valor de x.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

¡Tú eres capaz de lograr grandes cosas, sigue estudiando con dedicación y confianza!

9. Realice la autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 7

Señale la respuesta correcta acerca de las desigualdades.

1. La solución de un par de desigualdades simultáneas dadas por $4 \leq 3x - 2 < 13$ está dada por el intervalo $(5,2]$.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. La solución de la desigualdad cuadrática $10x - 12 \geq 2x^2$ está representada por el conjunto $\left\{\frac{x}{2} \leq x \leq -3\right\}$.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. La solución de la desigualdad con valores repetidos $0 > x(x-1)^2(x-3)$, es:

   a. $(0,1) \cap (1,3)$
   b. $(-1,2) \cup (1,3)$
   c. $(0,1) \cup (-1,4)$

4. La solución de la desigualdad con valor absoluto $|2x - 10| < 4$, tiene por solución el conjunto:

   a. $\{x \,/\, 3 < x < 7\}$
   b. $\{x \,/\, 6 < x < 14\}$
   c. $\{x \,/\, -14 < x < 6\}$

1 Bimestre

5. Las instrucciones en un frasco de medicamentos indican que debe conservarse a una temperatura entre $20 \leq °C \leq 30$. El intervalo de temperatura que corresponde en la escala Fahrenheit, es:

a. $[75{,}93]$
b. $[65{,}98]$
c. $[80{,}95]$

6. La frase que se proporciona a continuación describe un conjunto de números reales. *Todos los números reales x mayores de 2 unidades desde 0*. La desigualdad con valor absoluto correspondiente a la frase es:

a. $|x| < 2$
b. $2 < |x|$
c. $|x| \leq 2$

7. Se estima que el costo anual de manejar un determinado auto nuevo está dado por la fórmula $C = 0{,}35m + 2200$, donde m representa el número de millas recorridas por año y C es el costo en dólares. Janet compró un auto y decidió presupuestar entre 6400 y 7100 dólares por costos de manejo del año siguiente. El intervalo correspondiente de millas en el que Janet puede manejar su auto nuevo, es:

a. $\{m \,/\, 12000 < m < 14000\}$
b. $\{m \,/\, 10000 < m < 12000\}$
c. $\{m \,/\, 0 < m < 2200\}$

8. El promedio de estatura de los varones adultos es de 68,2 pulgadas y el 95 % de ellos tiene una estatura h que satisface la siguiente desigualdad $\left|\frac{h-68{,}2}{2{,}9}\right| \leq 2$. El intervalo de estaturas correspondiente a este porcentaje, es:

a. $0 < h < 71{,}1$
b. $62{,}4 < h < 74$
c. $68{,}2 < h < 73{,}1$

9. El conjunto $\{x/\ 4 < x \leq 6\}$ es equivalente al conjunto representado por el intervalo:

   a. [6, 4)
   b. (4, 6]
   c. $[-4, 6)$

10. El conjunto $\{x/\ -6 < x < -4\}$ es equivalente al conjunto representado por el intervalo:

   a. [-6, -4)
   b. (-4, -6)
   c. (-6, -4)

Reflexione sobre el conocimiento que ha adquirido y confíe en sus habilidades. La preparación minuciosa y el enfoque sereno le llevarán no solo a superar las dificultades, sino también a destacar sus logros.

¡Adelante con confianza y éxito en sus actividades finales!

Ir al solucionario

Semana 8

Actividad final del bimestre

Estimado estudiante, hemos llegado al final del primer bimestre, en el cual se ha estudiado temas como los números reales, ecuaciones y desigualdades.

Para que tenga mejores resultados en la evaluación bimestral, esta semana dedíquela a estudiar, reforzar y comprender los temas revisados durante las 7 semanas de clases.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Desarrolle las actividades de aprendizaje del primer bimestre, centrándose especialmente en los contenidos relacionados con números reales, ecuaciones y desigualdades. Estas actividades resultarán enriquecedoras por varias razones. En primer lugar, proporcionarán una valiosa oportunidad para consolidar y fortalecer los conceptos fundamentales adquiridos durante el primer bimestre, lo que fomentará una comprensión más sólida de los números reales y sus propiedades. Además, al recordar y poner en práctica la resolución de ecuaciones y desigualdades, se fortalecerán las habilidades matemáticas esenciales, sentando así una base sólida que será fundamental para abordar conceptos más avanzados en el futuro.

Actividad 1. Resumen de los números reales

Realizar resúmenes de los conceptos clave de la introducción al álgebra:

- Identifique los conceptos fundamentales de los números reales.
- Extraiga las ideas principales y organízalas de manera clara y concisa de las propiedades de los números reales.
- Utilice ejemplos para ilustrar el método de resolución de la suma, resta, multiplicación y división de los números reales.
- Construya una recta numérica, destacando sus partes importantes.

Actividad 2. Explique los temas a otros estudiantes

Explicar los temas tratados a amigos o estudiantes:

- Prepare presentaciones breves y claras de exponentes y radicales.
- Realice ejemplos prácticos y situaciones cotidianas para hacer los conceptos más comprensibles sobre notación científica.
- Ejecute ejercicios del **texto básico** para potenciar el aprendizaje de la racionalización del denominador.

Actividad 3. Elaboración de mapas mentales

Elaborar mapas mentales para visualizar la relación entre diferentes conceptos matemáticos de expresiones algebraicas:

- Relacione conceptos mediante líneas y palabras clave concerniente a los contenidos de expresiones algebraicas.
- Utilice colores y símbolos para resaltar la importancia y la naturaleza de las relaciones.
- Organice el mapa mental de manera lógica, desde conceptos más amplios a detalles más específicos.
- Revise y actualice los mapas mentales a medida que avances en el estudio.

Actividad 4. Resolución de problemas

Aplicar lo aprendido, resolviendo problemas y ejercicios relacionados con expresiones racionales:

- Seleccione problemas variados que aborden diferentes aspectos del tema de expresiones racionales.
- Practique regularmente, comenzando con problemas simples y avanzando hacia niveles más complejos.
- Revise las soluciones y comprenda los pasos necesarios para resolver cada tipo de problema.
- Trabaje en problemas del mundo real para aplicar los conceptos de manera práctica.

Actividad 5: Practicar la resolución de ejercicios de ecuaciones

Practicar activamente para reforzar el conocimiento y mejorar la capacidad de aplicación de las ecuaciones:

- Realice ejercicios propuestos en el **texto básico** que permita la práctica en la resolución de ecuaciones.
- Realice ejercicios de forma sistemática, enfocándote en áreas donde enfrentas desafíos.
- Consulte problemas aplicados a la vida real y resuélvalos aplicando las ecuaciones.

Actividad 6: Búsqueda de herramientas educativas interactivas

Buscar videos, *pódcast* o herramientas interactivas que aborden el tema de desigualdades:

- Utilice plataformas educativas en línea para encontrar contenido multimedia relacionado con los temas de desigualdades lineales.

- Seleccione herramientas que se adapten a su estilo de aprendizaje del tema de desigualdades con valor absoluto (videos explicativos, pódcast, simulaciones interactivas, etc.).

- Tome notas mientras ejecute estas herramientas y vuelva a revisarlos para reforzar los conceptos.

- Comparta las herramientas educativas con otros compañeros de estudio para enriquecer la comprensión colectiva.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Tras desarrollar las actividades, estas le proporcionarán los conocimientos necesarios para que usted, como estudiante, pueda comprender y utilizar los contenidos del álgebra, ecuaciones y desigualdades en diversas situaciones.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2	
Resultado de aprendizaje 2	▪ Emplea conceptos y principios básicos de sucesiones y series, funciones y límites para modelar y resolver problemas del entorno natural y social.

Para alcanzar exitosamente este resultado de aprendizaje, se adoptará un enfoque práctico y progresivo. Esto incluirá la comprensión detallada de los conceptos, su aplicación a problemas del entorno natural y social, la resolución activa de problemas, la práctica constante y la conexión entre conceptos, la comunicación efectiva de soluciones y la exploración de recursos multimedia también serán fundamentales.

Al seguir este enfoque estructurado, se potenciará significativamente la capacidad del estudiante para aplicar con destreza los conceptos y principios de sucesiones y series, funciones y límites en la modelación y resolución de problemas del entorno natural y social.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 9

En la semana nueve indagaremos cómo las funciones son herramientas esenciales para analizar y entender fenómenos que se presentan en vida real. El estudio de funciones desempeña un papel fundamental en matemáticas, ofreciendo un marco para entender las relaciones entre variables y prever resultados en diversas situaciones.

Unidad 3. Funciones

Se abordará la esencia de las funciones y su representación. Profundizaremos en los conceptos de dominios y codominios, desentrañando la conexión entre las entradas y salidas de una función.

Exploraremos una variedad de funciones, revelando sus características distintivas y sus aplicaciones prácticas.

Durante el estudio de funciones, participaremos activamente en ejercicios prácticos, abordando problemas y aplicando estos conocimientos a situaciones cotidianas. Al concluir, habrá adquirido las habilidades esenciales para comprender, analizar y emplear funciones de manera eficaz. ¡Prepárate para sumergirte en una emocionante odisea por el universo de las funciones matemáticas!

3.1. Funciones y gráfica de funciones

La comprensión de las funciones matemáticas y sus gráficas son esenciales en el mundo que nos rodea, porque permiten modelar y comprender una amplia variedad de fenómenos y situaciones, al adentrarnos en el estudio de las funciones, exploramos un universo matemático fascinante que abarca desde la resolución de problemas cotidianos, hasta el análisis profundo de patrones y relaciones en distintos campos.

3.1.1. Funciones a nuestro alrededor

La presencia de una función alrededor nuestro, la podemos definir como una regla o relación que describe una variable o cantidad, como se puede observar en los ejemplos propuestos:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

Ejercicio explicativo 23

Se registró la temperatura varias veces en un día, la función T da la temperatura en grados Fahrenheit, n horas después de la media noche, entre los puntos (4,50) y (8,70). Explica el valor de la pendiente.

Tabla 11

Resolución de ejercicio sobre la pendiente

Datos	Pendiente de la recta	Directrices
n: (4,8) T: (50,70)	$m = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$	Aplicamos la fórmula de la pendiente
Estas temperaturas son registradas a las 4 a.m. y a las 8 a.m. respectivamente.	$y^2 = 70$ $y^1 = 50$ $x^2 = 8$ $x^1 = 4$	Identificamos variables
	$m = \frac{70 - 50}{8 - 4}$	Reemplazamos
	$m = \frac{20}{4}$	Hacemos el cálculo correspondiente
	$m = 5$	Valor de la pendiente

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.150, Cengage Learning.

Respuesta: La pendiente de la recta es 5, lo que da a entender que la temperatura aumento 5 grados Fahrenheit por cada hora, entre las 4 a.m. y las 8 a.m., es decir, que hubo un cambio positivo y constante en la temperatura durante ese intervalo de tiempo.

3.1.2. Definición de función

Una función **f** es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponda uno y solo un elemento del segundo conjunto:

- Al primer conjunto se le da nombre de **dominio**.
- Al segundo conjunto se le da nombre de **contradominio.**

A lo que al elemento genérico del dominio se lo conoce como **variable independiente**, al elemento genérico codominio, es una **variable**

dependiente. Esto quiere decir que, en el marco de la función matemática, los elementos de codominio dependen de los elementos del dominio.

Ejercicios explicativos 24

1. La siguiente función proporciona la distancia (en kilómetros) que recorre una moto a una velocidad de 100 km/h en función del tiempo t (en horas).

$$x(t) = 100 \cdot t$$

   a. ¿Qué distancia recorre en 2 horas?, ¿y en 5 horas?
   b. ¿Cuánto tiempo debe circular para recorrer 5 kilómetros?

Solución:

   a. Tenemos que calcular la imagen de 2 y de 5:

$$x(2) = 100 * 2$$

$$x(2) = 200$$

$$x(5) = 100 * 5$$

$$x(5) = 500$$

Respuesta: en dos horas recorre 200 kilómetros y en 5 horas 500 kilómetros.

   b. Tenemos que calcular t tal que x(t) = 5

$$x(t) = 5$$

$$100 * t = 5$$

$$t = \frac{5}{100} = 0.05$$

Respuesta: tarda 0.05 horas en recorrer 5 km, es decir, 3 minutos.

2. Una fábrica de bolígrafos calcula el costo de fabricación (en dólares) mediante la siguiente función:

$$f(x) = 10 + 3\sqrt{x}$$

Siendo $1 \leq x \leq 1600$ el número de unidades.

a. ¿Cuánto cuesta un pedido de 9, 100 y 1600 bolígrafos?
b. ¿Cuál es el precio de cada bolígrafo, en cada uno de los pedidos anteriores?

Solución:

a. Tenemos que calcular la imagen de 9, 100 y 1600, remplazando la x por la cantidad de bolígrafos.

$$f(9) = 10 + 3\sqrt{9}$$
$$= 10 + 9$$
$$= 19$$

Respuesta: el pedido de 9 bolígrafos cuesta 19 dólares.

$$f(100) = 10 + 3\sqrt{100}$$
$$= 10 + 30$$
$$= 40$$

Respuesta: el pedido de 100 bolígrafos cuesta 40 dólares.

$$f(1600) = 10 + 3\sqrt{1600}$$
$$= 10 + 120$$
$$= 130$$

Respuesta: el pedido de 1600 bolígrafos cuesta 130 dólares.

b. Para calcular el precio de cada bolígrafo, dividimos el precio total entre el número de bolígrafos.

$$\frac{19}{9} = 2.11$$

Respuesta: en el pedido de 9 bolígrafos el precio es de 2.11 dólares.

$$\frac{40}{100} = 0.40$$

Respuesta: en el pedido de 100 bolígrafos el precio es de 0.40 centavos.

$$\frac{130}{1600} = 0.08$$

Respuesta: en el pedido de 1600 bolígrafos el precio es de 0.08 centavos.

Cuanto mayor sea el pedido, más barato es el precio unitario de los bolígrafos.

3.1.3. Evaluación de una función

Es el proceso de calcular el valor de salida de la función para una entrada específica, en otras palabras, es el acto de sustituir un valor dado en la variable independiente de la función y obtener el valor correspondiente en la variable dependiente.

Ejercicios de explicativos 25

1. Evalúe el valor (3) de salida en la función propuesta.

$$f(x) = 4x + 2x - 3$$

Evalúe el valor (3) de salida en la función propuesta.

$$f(x) = 4x + 2x - 3$$

Sustituimos x que vale 3.

$$f(3) = 4(3) + 2(3) - 3$$

Realizamos la multiplicación correspondiente.

$$f(3) = 12 + 6 - 3$$

$$f(3) = 12 + 3$$

$f(3) = 15$ Valor de la variable dependiente

2. Evalúe el valor (-2) de salida en la función propuesta.

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 2$$

Sustituimos x por -2

$$f(-2) = 2(-2)^2 + 4(-2) - 2$$

Realizamos la multiplicación correspondiente

$$f(-2) = 2(-2)^2 + 4(-2) - 2$$

Usted cuando tiene un número dentro de un paréntesis y dicho número es negativo y el exponente es par dicho resultado será positivo.

$$f(-2) = 2(4) + (-8) - 2$$

$$f(-2) = (8) + (-8) - 2$$

$$f(-2) = (8) + (-10)$$

$f(-2) = -2$ Valor de la variable dependiente

3.1.4. Dominio de una función

Es el conjunto de todos los valores de entrada, también llamados valores de la variable independiente, para los cuales la función está definida y nos proporciona un valor de salida única.

> Si se tiene una función $f(x) = \frac{1}{x}$, el dominio de esta función generalmente excluye el valor x=0, ya que la división por cero no está definida en matemáticas, entonces, el dominio en este caso sería todos los números reales, excepto x=0, es decir, $(-\infty, 0)\ U\ (0, \infty)$.

Ejercicios explicativos 26

1. Encuentre el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = 3x + 1$$

Siempre que la función sea polinómica, el dominio de la función va a ser todos los números reales; entonces la respuesta es:

$$D_f = x \in R$$

2. Evalúe el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^4 + 4x^2}{x + 2}$$

Para hallar el dominio de esta función tenemos que hallar los valores de la variable **x** para los de denominador (la expresión algebraica inferior) es cero, para esto lo resolvemos:

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

Respuesta: $Dom(f) = R - \{-2\}$

3.1.5. Cuatro formas de representar una función

a. **Descripción verbal:** una función puede venir definida mediante una descripción verbal, ejemplo, la función que indica la relación existente entre el peso de las manzanas y el precio que hay que pagar por ellas, suponiendo que el kilo de manzanas cuesta 1.50 dólares.

b. **Representación tabular o numérica:** una manera importante de representar una función es mediante una tabla, que consiste en darle valores a **X** y buscar los valores de **Y**, con dichos datos formar una tabla con ellos. La tabla puede construirse de manera horizontal o vertical.

c. **Expresión algebraica:** en cálculo la principal manera de representar una función es mediante una ecuación, que liga a las variables (dependiente e independiente).

d. **Gráfica:** una manera de visualizar una función es por medio de una gráfica. La gráfica de una función de una variable, por lo general, es una curva en el plano. Sin embargo, no toda curva del plano es la representación de una función.

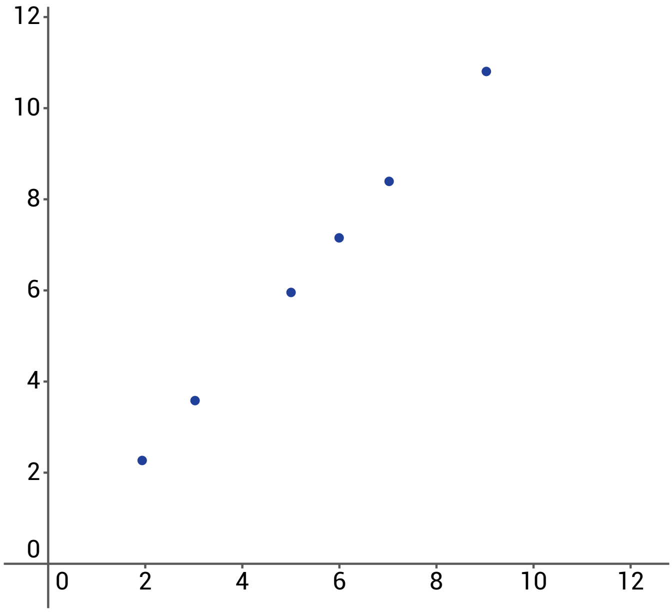
Ejercicio explicativo 27

Fernando compra pan todos los días, desea saber el importe de las piezas de pan que va a comprar dependiendo el número de piezas adquiridas. Exprese de tres formas la función.

1. **Visualmente**

Figura 7

Plano cartesiano



Nota. Granda, E., (2024)

2. **Numéricamente**

Tabla 12

Valores de costo

No de piezas	2	3	5	7	9
Precio	2,40	3,60	6	7,20	10,8

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo* [Ilustración], por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.155, Cengage Learning, CC BY 2.0

3. Algebraicamente

Por último, se da cuenta de que para calcular el precio del pan debe multiplicar 1.20 $ (precio de una barra) por el número de barras que compre, obteniendo así una fórmula que relaciona el n.º de barras con el precio:

$$f(x) = 1'2 * x$$

Con esta fórmula podemos calcular cuánto va a costar el pan de cualquier día sin más que saber el número de barras de pan que van a comprar. No solo eso, también se puede completar la tabla de valores e incluso la gráfica.

La culminación de la unidad de funciones representa el punto álgido donde convergen los distintos elementos y conceptos presentados a lo largo del texto. En este punto, se logra un entendimiento integral de cómo las funciones desempeñan un papel fundamental en el contexto abordado, para ahondar los contenidos de funciones revise las páginas 148 a la 158 del **texto básico**.

Poner énfasis en fortalecer la comprensión de las funciones en diferentes contextos y disciplinas permite tener claro la utilidad en vida cotidiana, para ello apóyese en Khan Academy sobre Funciones.

Las funciones son herramientas versátiles y esenciales que se utilizan en una amplia gama de campos para modelar, analizar y resolver problemas en contextos teóricos y aplicados. Su utilidad se extiende desde las matemáticas puras hasta las aplicaciones prácticas en la vida cotidiana y la investigación científica.

Para resumir, la presente infografía expone lo visto acerca de Funciones y gráficas de funciones, la cual se presenta como una herramienta esencial que potencia la comprensión y aplicabilidad de conceptos matemáticos fundamentales. A través de ejercicios prácticos, esta infografía le permite internalizar la teoría de las funciones de manera tangible, mientras que la resolución de problemas prácticos le desafía a aplicar estos conocimientos en situaciones cotidianas. Por tanto, no solo consolida las habilidades matemáticas, sino que también destaca la relevancia y utilidad de las funciones en diversos contextos educativos y profesionales.

Después de revisar la infografía obtendrá los conocimientos esenciales que le permitirán, en su rol de estudiante, comprender y aplicar las funciones en distintos contextos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Realice las actividades relacionadas con funciones, recuerde que es crucial en diversos contextos académicos y profesionales debido a la importancia de las funciones en sí mismas.

1. **Identificación de funciones:**
    - Consulte una lista de expresiones algebraicas e identifica cuáles representan funciones y cuáles no.
    - Justifique su elección destacando las propiedades clave de las funciones.
2. **Representación gráfica:**
    - Elija una función y represéntela gráficamente.
    - Interprete de la gráfica en términos de dominio, codominio, puntos críticos y comportamiento general.
3. **Análisis de dominio y codominio:**
    - Seleccione funciones del **texto básico** y determine su dominio y codominio.
    - De igual manera, identifique cualquier restricción en el dominio y cómo afecta a la función.
4. **Resolución de problemas del mundo real:**
    - Elabore problemas del mundo real que pueden modelarse mediante funciones (como crecimiento poblacional, ventas, etc.).
    - Formule el modelo matemático y resuelva las ecuaciones basadas en la situación.

5. **Uso de herramientas tecnológicas:**

   - Utilice el GeoGebra o calculadoras gráficas para explorar funciones de manera visual.
   - Realice comparaciones entre funciones y analice cómo se pueden modificar utilizando estas herramientas.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Estas actividades ofrecen un enfoque práctico y variado para trabajar con funciones, permitiéndole aplicar y consolidar sus conocimientos de manera significativa.

6. Le invito a reforzar sus conocimientos participando en la siguiente autoevaluación, ya que desempeña un papel fundamental en el desarrollo personal y profesional, pues ofrece una oportunidad valiosa para reflexionar sobre el propio desempeño, identificar fortalezas y áreas de mejora, y establecer metas para el crecimiento.

Autoevaluación 8

Seleccione la respuesta correcta acerca de las funciones.

1. Una función matemática es una relación entre dominio y codominio.

    a. Verdadero.
    b. Falso.

2. La notación general de una función es $f_{(x)}$ donde f es la función y x la variable dependiente.

    a. Verdadero.
    b. Falso.

3. ¿Cómo se denota el dominio y el codominio de una función?

    a. Dominio se denota $D_{(f)}$ y el codominio $C_{(f)}$
    b. Codominio se denota $D_{(f)}$ y el Dominio $C_{(f)}$
    c. Dominio se denota $f_{(d)}$ y el codominio $f_{(c)}$

4. ¿Cuál es la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática?

    a. La función lineal representa una línea y la cuadrática una hipérbola.
    b. La función lineal representa una línea y la cuadrática una curva.
    c. La función lineal representa una línea y la cuadrática una parábola.

2 Bimestre

5. ¿Qué es el dominio de una función?

   a. El dominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente (x) para los cuales la función está definida.

   b. El dominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable dependiente (y) para los cuales la función está definida.

   c. El dominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente (x) para los cuales la función no está definida.

6. Cuál sería la expresión verbal de la función $f_{(x)} = x^2 + 4$, cuando f actúa, sobre la entrada x para producir la salida $f_{(x)}$:

   a. "Elevar al cuadrado, luego multiplicar 4".
   b. "Elevar al cuadrado, luego sumar 4".
   c. "Elevar al cuadrado, luego restar 4".

7. Al evaluar $f_{(3)}$ en la función $f_{(3)} = x^2 + 4$, el resultado es:

   a. 13.
   b. 3.
   c. 9.

8. Al evaluar $f_{(-2)}$ en la función $f_{(-2)} = x^2 + 3$, el resultado es:

   a. 5.
   b. 7.
   c. 12.

9. Al evaluar $f_{(\sqrt{5})}$ en la función $f_{(\sqrt{5})} = x^2 + 4$, el resultado es:

   a. 6.
   b. 12.
   c. 9.

10. Al evaluar $f_{\left(\frac{1}{2}\right)}$ en la función $f_{(x)} = 3x^2 + x - 5$, el resultado es:

a. $-\frac{15}{4}$

b. $-\frac{4}{15}$

c. $-\frac{2}{7}$

“Cada página que estudia le acerca un paso más a sus sueños. ¡Siga estudiando con determinación y verá cómo se materializan sus metas!”

Ir al solucionario

2 Bimestre

Semana 10

En la semana diez se abordará las funciones matemáticas, la razón de cambio, cómo una variable dependiente varía en relación con otra variable independiente, en otras palabras, nos permite entender cómo la función responde a modificaciones en sus entradas. Prepárese para desentrañar los secretos detrás de la evolución de funciones a medida que exploramos la intrigante razón de cambio. ¡Comencemos nuestra travesía matemática!

3.1.6. Razón de cambio promedio de una función

Este tema se refiere a la tasa de cambio promedio de los valores de la función entre dos puntos dados en su dominio, matemáticamente, esto se calcula dividiendo la diferencia en los valores de la función, entre los puntos por la diferencia en las entradas correspondientes.

3.1.6.1. Razón de cambio promedio

Es el cambio de media o promedio de una variable dependiente en relación con una variable independiente en un intervalo o periodo de tiempo específico.

Fórmula:

$$RCP = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Donde:

- $f(x_2)$ es el valor de la función en el punto x_2.
- $f(x_1)$ es el valor de la función en el punto x_1.
- x_2 y x_1 son las entradas correspondientes a los puntos en el dominio.

Ejercicio explicativo 28

Se tiene $f(x) = x^2 - 5x + 9$, calcule la razón de cambio promedio de f cuando x varía de x_1= 2 a x_2=4.

X1 = 2 $>> f(x_1) = +3$ $\quad f(x_1) = (2)^2 - 5(2) + 9$

$$f(x_1) = 4 - 10 + 9$$

Remplazamos x_1 por 2 en la función.

$$f(x_1) = +3$$

X2 =4 $>> f(x_2) = +5$

$$f(x_2) = (4)^2 - 5(4) + 9$$

$$f(x_2) = 16 - 20 + 9$$

Remplazamos x_2 por 4 en la función.

$$f(x_2) = +5$$

Remplazamos todos los valores en la fórmula de la razón de cambio promedio:

$$RCP = \frac{5-3}{4-2}$$

$$RCP = \frac{2}{2}$$

$$RCP = 1$$

3.1.6.2. Las funciones lineales tienen razón de cambio constante

Una función lineal es una función matemática que se puede representar en la forma general $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente de la línea y b es la ordenada al origen (el valor de f(x) cuando x = 0).

Ejercicio explicativo 29

Sea $f(x) = 3x - 4$ encuentre la razón de cambio promedio de f entre los siguientes puntos:

a. X=0 y x=1

Razón de cambio: $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{(3*1-4)(3*0-4)}{1}$

$$= \frac{(-1)-(-4)}{1} = 3$$

b. X=3 y x=7

Razón de cambio= $\frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{(3*7-4)(3*3-4)}{4}$

$$= \frac{17-5}{4} = 3$$

c. X=a y x=a + h

Razón de cambio: $\frac{f(a+b)-f(a)}{(a+b)-a} = \frac{[3(a+h)-4]-[3a-4]}{h}$

$$= \frac{3a+3h-4-3a+4}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

Respuesta: al parecer la razón de cambio promedio es siempre 3 para esta función.

Para profundizar la comprensión del tema de la razón de cambio de una función, le insto a revisar el **texto básico** en sus páginas 183 a la 190 y revisar Khan Academy con el tema de Razón de cambio.

Esta lectura no solo refuerza la teoría, sino que también proporciona una perspectiva práctica que enriquece la capacidad para interpretar y calcular la razón de cambio de manera efectiva.

Para finalizar, revise la infografía a continuación que resume lo visto sobre la Razón de cambio promedio de una función, el cual ofrece beneficios significativos: clarifica conceptos matemáticos complejos mediante explicaciones visuales, proporciona ejemplos concretos para ilustrar la teoría y fortalece la capacidad de calcular e interpretar las tasas de cambio en funciones de manera efectiva.

Una vez haber revisada la infografía, obtendrá los conocimientos esenciales que le permitirán, en su papel de estudiante, comprender y aplicar la razón de cambio en distintos escenarios.

Al concluir esta unidad sobre funciones, hemos explorado las bases fundamentales que sustentan el mundo matemático de las funciones, con este fundamento, estamos preparados para adentrarnos en nuevas áreas de estudio y aplicar con confianza nuestros conocimientos adquiridos.

Recuerde que cada hora de estudio es una inversión en usted mismo.

Actividades de aprendizaje recomendadas

La razón de cambio promedio de una función representa la tasa media de cambio de una variable dependiente en relación con una variable independiente dentro de un intervalo específico, en este contexto, le invito a reflexionar y realizar las siguientes actividades:

1. **Análisis gráfico:** consulta gráficos de funciones e identifique visualmente las áreas de mayor cambio.
2. **Problemas del mundo real:** plantee problemas del mundo real que involucren cambios en cantidades con el tiempo.
3. **Comparación de tasas:**
   - Consulte dos funciones y compare las tasas de cambio en diferentes puntos.
   - Analice si las funciones varían en relación entre sí.

4. **Simulaciones interactivas:**
   - Utilice herramientas interactivas en línea que permitan ajustar variables y observe cómo afectan a la razón de cambio.
   - Explore diferentes escenarios y analice cómo cambian las tasas.

5. **Estudio de velocidad y aceleración:**
   - Elabore problemas que involucren velocidad y aceleración, relacionando estas magnitudes con las razones de cambio.
   - Calcule y analiza cómo las tasas de cambio se traducen en conceptos físicos.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Estas actividades prácticas ofrecen un enfoque dinámico y aplicado para trabajar las razones de cambio, que le permitirá desarrollar una comprensión sólida y práctica de este concepto de razón de cambio.

6. Lo animo a verificar lo aprendido y perfeccionar sus áreas de oportunidad mediante la realización de una autoevaluación.

2 Bimestre

Autoevaluación 9

Seleccione la respuesta correcta acerca de la razón de cambio.

1. La razón de cambio promedio de una función se define como: la medida que indica cuánto cambia el valor de la función.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. La razón de cambio promedio de una función $f(x) = x^2 entre x = 1\ y\ x = 5$ es una función que incrementa en 6 unidades por cada unidad de cambio en x**:**

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. Si usted hace un viaje de 100 millas en 2 horas, entonces su rapidez promedio del viaje es:

   a. 50 millas por hora.
   b. 200 millas por hora.
   c. 25 millas por hora.

4. La razón de cambio promedio de una función f entre *x* = *a* y *x* = *b* es:

   a. $\frac{f(a)-f(b)}{b+a}$
   b. $\frac{f(b)+f(a)}{b+a}$
   c. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

5. La razón de cambio promedio de la función lineal $f(x) = 3x + 5$ entre cualesquier dos puntos es:

   a. 6 esto indica que la función tiene una tasa constante de cambio.
   b. 9 esto indica que la función tiene una tasa constante de cambio.
   c. 3 esto indica que la función tiene una tasa constante de cambio.

6. La razón de cambio neto de la función $f_{(x)} = (x-3)^2$, dados los siguientes puntos, $x = 1 \;\; y \; x = 3$ es:

a. -4
b. 4
c. $-\frac{1}{4}$

7. La razón de cambio promedio de la función $f_{(x)} = (x-3)^2$, dados los siguientes puntos, $x = 1 \;\; y \; x = 3$ es:

a. -2
b. 2
c. $-\frac{1}{2}$

8. La razón de cambio constante de la función $f_{(x)} = 3x - 5$, dados los siguientes puntos, $x = 0 \; y \; x = 1$ es:

a. 6.
b. 3.
c. 9.

9. La razón de cambio neto de la función $f_{(x)} = (x-3)^2$, dados los siguientes puntos, $x = 4 \;\; y \; x = 7$ es:

a. -15
b. 15
c. $-\frac{1}{15}$

10. La razón de cambio promedio de la función $f_{(x)} = (x-3)^2$, dados los siguientes puntos, $x = 4 \;\; y \; x = 7$ es:

a. 5
b. -5
c. $-\frac{1}{5}$

Ir al solucionario

Semana 11

En esta semana se realizará la exploración de las funciones lineales, un fascinante tema en matemáticas. Las funciones lineales son esenciales en el estudio de relaciones matemáticas y despliegan propiedades únicas. A lo largo del estudio de las funciones lineales, descubriremos cómo estas funciones modelan cambios constantes y ofrecen una perspectiva fundamental en diversos contextos matemáticos y prácticos. ¡Empecemos nuestro viaje por el mundo de las funciones lineales!

3.2. Funciones lineales y modelos

Las funciones lineales en su simplicidad y la capacidad para describir relaciones proporcionan una base sólida para el análisis y la toma de decisiones en situaciones variadas y complejas.

3.2.1. Funciones lineales

Las funciones lineales son un tipo específico de función matemática que se caracteriza por tener una representación gráfica que forma una línea recta.

$$f(x) = mx + b$$

Donde:

- $f(x)$ es el valor de la función en función de la variable independiente x.
- m es la pendiente de la línea, que representa la tasa de cambio o la razón de cambio de la función, es el coeficiente que multiplica a x.
- b es la ordenada al origen, que es el valor de f(x) cuando x es igual a cero. Es el punto en el que la línea cruza el eje vertical (eje y).

Ejercicio explicativo 30

Vamos a representar la gráfica de la función.

$$f(x) = 2x - 3$$

1. Hacemos una tabla para calcular dos puntos de la gráfica:

Tabla 13

Tabla de puntos de la gráfica

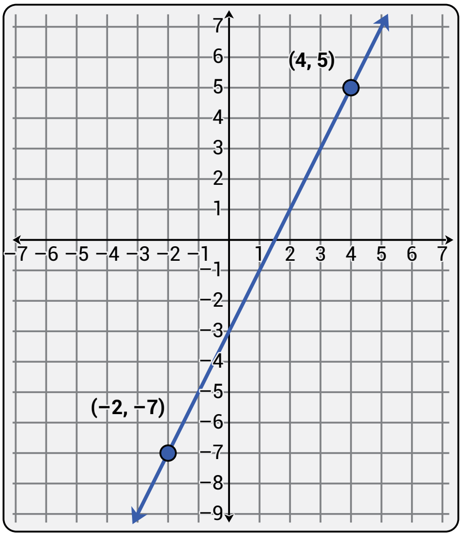
x	$f(x) = 2x - 3$
4	5
-2	-7

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.190, Cengage Learning.

Representamos la recta a partir de los puntos (4,5) y (-2,-7)

Figura 8

Plano Cartesiano



Nota. Granda, E., (2024)

Observamos que la recta corta el eje y por debajo del eje X, esto se debe a que la ordenada es negativa $(n = -3)$.

3.2.2. Pendiente y razón de cambio

La pendiente y razón de cambio son conceptos fundamentales en matemáticas que se utilizan para describir como una variable (dependiente) cambia en relación con otra variable (independiente) o con respecto al tiempo, aunque están relacionados, tiene ligeras diferencias en su enfoque.

a. **Pendiente:** la pendiente es una medida de la inclinación de una línea recta en un gráfico que representa la relación entre dos variables, pero comúnmente se le representa por la letra m.

Fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

b. **Razón de cambio:** se refiere a cómo una cantidad cambia en relación con otra cantidad.

Fórmula: $RCP = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

La finalización del estudio de la pendiente y la razón de cambio marca un punto de dominio en el entendimiento de las funciones y su dinámica.

3.2.3. Construir y usar modelos lineales

Este tema es esencial para analizar datos, tomar decisiones informadas y comprender las relaciones entre variables en una amplia variedad de campos y disciplinas. Y a su vez poder moldear una relación entre dos cantidades.

Ejercicio explicativo 31

Se bombea agua a una piscina a razón de 4 gal/min. Inicialmente, la piscina contiene 100 gal de agua.

a. Encuentre una función lineal V que modele el volumen de agua de la piscina en cualquier tiempo t.

Tenemos que encontrar la función lineal que modele el volumen $V(t)$ de agua en la piscina después de t minutos:

$$V(t) = at + b$$

- La razón de cambio del volumen es 4 galones por minuto, por lo que $a = 4$. Puesto que la piscina contiene $100gal$ en un inicio tenemos V:

$$V(0) = a \cdot 0 + b$$

$$V(0) = 4 \cdot 0 + 100$$

$$V(0) = 100$$

- Entonces $b = 100$, ahora que conocemos los valores de a y b obtenemos el modelo:

$$V(t) = 4t + 100$$

b. Si la piscina tiene una capacidad de 600 gal, ¿cuánto tiempo tarda en llenarse completamente la piscina?

- Queremos encontrar el tiempo t en que V(t)=600. Por lo que tenemos que resolver la ecuación:
$$600 = 4t + 100$$

- Tenemos que convertir la ecuación:
$$4t = -600 + 100$$

- Ahora realizamos la operación correspondiente:
$$4t = -500$$

- Y como nos pide despejar t, lo pasamos al 4 a dividir:
$$t = -\frac{500}{4}$$

- El resultado de t nos sale negativo, lo multiplicamos por -1:
$$t = -125(-1)$$
$$t = 125$$

Respuesta: entonces se tarda 125 minutos en llenarse la piscina.

La culminación de este tema implica la capacidad de calcular y entender estos conceptos de manera fluida, aplicándolos a problemas del mundo real.

Para mejorar y fortalecer su comprensión, le invito a revisar el **texto básico** en las páginas 190 a la 197, y, revise Khan Academy concerniente a la Pendiente y razón de cambio.

2 Bimestre

Estas actividades sobre pendientes facilitan la comprensión de cómo la pendiente refleja la tasa de cambio en una función. Además, ofrece ejemplos prácticos que fortalecen la capacidad para calcular y aplicar pendientes de manera efectiva en diversos contextos matemáticos y aplicaciones del mundo real.

A continuación, revise la siguiente infografía, el cual le resume todo sobre Funciones lineales y modelos, proporcionándole claridad visual sobre este concepto matemático. Facilita la comprensión de cómo la pendiente refleja la tasa de cambio en una función. Además, ofrece ejemplos prácticos que fortalecen la capacidad para calcular y aplicar pendientes de manera efectiva en diversos contextos matemáticos y aplicaciones del mundo real.

Posteriormente, de revisar la infografía, adquirirá los conocimientos fundamentales que le capacitarán, en calidad de estudiante, para comprender y aplicar las funciones lineales en diversos contextos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En las siguientes actividades propuestas abordaremos el tema de funciones lineales y modelos, estos modelos matemáticos ofrecen herramientas poderosas para analizar y comprender una variedad de fenómenos en diversas disciplinas, por tanto, le invito a realizar las actividades planteadas.

1. **Problemas del mundo real:**
    - Plantee situaciones cotidianas que puedan modelarse con funciones lineales (como velocidad y distancia, costos y ganancias, etc.).
    - Formule las funciones lineales correspondientes y resuelva los problemas asociados.
2. **Análisis de datos:** consulte conjuntos de datos simples e identifiquen si pueden modelarse con funciones lineales.
3. **Proyectos de diseño gráfico:**
    - Diseñe gráficos publicitarios o presentaciones visuales utilizando funciones lineales para representar información.

- Utilice su creatividad al incorporar conceptos como la pendiente y la interceptación.

4. **Simulación de escenarios empresariales:**

    - Presente, escenarios empresariales y modele la situación con funciones lineales.
    - Analice cómo los cambios en la pendiente y la ordenada al origen afectan los resultados.

5. **Exploración de *software* matemático:**

    - Utilice el GeoGebra que permita experimentar con funciones lineales y visualizar el impacto de cambios en los parámetros.
    - Practica la experimentación y el descubrimiento autónomo.

6. **Análisis de costos en la producción:** plantee un escenario de producción donde los costos pueden modelarse con funciones lineales.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Estas actividades prácticas le ofrecerán un enfoque dinámico y aplicado para trabajar con funciones lineales, permitiéndole aplicar y consolidar sus conocimientos de manera significativa.

7. Estimado estudiante, para evaluar los aprendizajes adquiridos sobre esta temática, le invito a desarrollar la autoevaluación que a continuación se presenta.

Autoevaluación 10

Señale la respuesta correcta acerca de las funciones lineales.

1. La forma general de una función lineal es $f_{(x)} = ax + b$.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. La pendiente de una función lineal representa el cociente de cambio entre la variable dependiente y la variable independiente.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. La pendiente de una función lineal a partir de dos puntos se representa a través de la fórmula:

   a. $p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en la recta.

   b. $p = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$, donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en la recta.

   c. $p = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$, donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en la recta.

4. Desarrolle la función y encuentre la pendiente de la función $f(x) = 2x - 6$.

   a. La pendiente es 3.
   b. La pendiente es 2.
   c. La pendiente es 6.

5. Desarrolle la función y encuentre el punto de intersección de la función $f(x) = 2x - 6$.

   a. La pendiente es 3.
   b. La pendiente es -6.
   c. La pendiente es -3.

6. Determine la pendiente y el punto de intersección en el eje y de la función $f_{(x)} = 2 + 3x$.

   a. $a = -3 \ \ y \ b = -2$
   b. $a = 2 \ \ y \ b = 3$
   c. $a = 3 \ \ y \ b = 2$

7. Determine la pendiente y el punto de intersección en el eje y de la función $g_{(x)} = 3(1 - 2x)$.

   a. $a = -6 \ \ y \ b = 3$
   b. $a = 6 \ \ y \ b = 3$
   c. $a = -3 \ \ y \ b = -6$

8. Determine la pendiente y el punto de intersección en el eje y de la función $h_{(x)} = x(4 - 3x)$

   a. No tiene pendiente porque no es función lineal.
   b. Tiene una pendiente y punto de intersección constante.
   c. Tiene pendiente y punto de interacción negativa.

9. Determine la pendiente y el punto de intersección en el eje y de la función $k_{(x)} = \frac{1-5x}{4}$

   a. $a = -\frac{4}{5} \ \ y \ b = -\frac{1}{4}$
   b. $a = \frac{5}{4} \ \ y \ b = -\frac{1}{4}$
   c. $a = -\frac{5}{4} \ \ y \ b = \frac{1}{4}$

10. La pendiente de la función $f_{(x)} = 3x + 2$ es:

   a. 6.
   b. 3.
   c. 9.

"Cada hora de estudio es una inversión en usted mismo, piensa en el éxito como el interés compuesto de su esfuerzo constante."

Ir al solucionario

Semana 12

En la semana doce trataremos las sucesiones matemáticas. Las sucesiones son secuencias ordenadas de números que siguen un patrón específico, a través de esta exploración, descubriremos cómo estas secuencias ofrecen un marco estructurado para comprender y prever el desarrollo de patrones numéricos en diversos contextos matemáticos y prácticos. ¡Comencemos nuestro viaje en el fascinante reino de las sucesiones!

Unidad 4. Sucesiones

Las sucesiones son fundamentales en el estudio de la teoría de números, el cálculo y otras ramas de las matemáticas, y ofrecen una herramienta valiosa para analizar patrones y tendencias en conjuntos ordenados de datos.

4.1. Sucesiones y notaciones de sumatoria

Las sucesiones y notaciones de sumatoria son temas fundamentales en matemáticas que se utilizan para representar y trabajar con secuencias numéricas.

4.1.1. Sucesiones

- Una sucesión es una lista de números, en la que cada número se denomina termino y está relacionado con un número natural, generalmente su posición en la secuencia.
- Las sucesiones también pueden ser finitas o infinitas, en una sucesión infinita, la lista de términos continua indefinidamente.

En la tabla 14 podrá observar un ejemplo de sucesión creciente y otra decreciente.

Tabla 14

Ejemplos de sucesiones

Sucesión	Características
$a_n = 1,2,3,4,5,\ldots,n$	▪ Es creciente ▪ Esta acotada inferiormente ▪ Cotas inferiores:1,0,-1..., ▪ El mínimo es 1 ▪ No esta acotada superiormente ▪ Divergente
$a_n = 2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ldots,\frac{n+1}{n}$	▪ Es decreciente ▪ Esta acotada superiormente ▪ Cota superiores: 2,3,4, ... ▪ El máximo es 2 ▪ Esta acotada inferiormente ▪ Cotas inferiores:1,0,-1, ... ▪ El ínfimo es: 1 ▪ Convergente,$= 1$

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.842, Cengage Learning.

4.1.2. Sucesiones definidas en forma recursiva

Las sucesiones definidas en forma recursiva a menudo se expresan mediante una fórmula o una regla que indica cómo se calcula cada término en función de los términos previos. La fórmula generalmente incluye términos anteriores y operaciones matemáticas, y se establece un valor inicial o varios valores iniciales para comenzar la secuencia.

Ejercicio explicativo 32

Considere el término general recurrente: $a_n = 4 + a_{n-1}$

- Las n es el término anterior de la sucesión y así sucesivamente con el resto de los términos.
- El primer término es $a_1 = 2$, entonces:

$$a_2 = 4 + a_{2-1}$$

$$a_2 = 4 + a_1$$

$$a_2 = 4 + 2$$

$a_2 = 6$ Segundo término

$a_3 = 4 + a_{3-1}$

$a_3 = 4 + a_2$

$a_3 = 4 + 6$

$a_3 = 10$ Tercer término

4.1.3. Sumas parciales de una sucesión

La operación parcial de una sucesión es la suma de un cierto número de términos consecutivos de esa sucesión, estas sumas proporcionan una forma de agregar progresivamente los valores de una secuencia numérica para obtener un resultado acumulativo.

Ejercicio explicativo 33

Encuentre las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{2^n}$.

- Las primeras cuatro sumas parciales son:

$$S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

- Podemos observar que, en el valor de cada suma parcial, el denominador es una potencia de 2 y el numerador es uno menos que el denominador, en general, la n-ésima suma parcial es:

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

4.1.4. Notación sigma

La notación sigma (∑) es un símbolo matemático que se utiliza para representar una suma acumulativa o suma de una secuencia de términos, es especialmente útil cuando se desea sumar una serie de términos de manera más concisa y eficiente.

Ejercicio explicativo 34

Dada la notación $\sum_{i=1}^{4} 3i$

- El 4 es el número de términos que tenemos que encontrar.
- A la i la reemplazamos por el número del término que nos toque:

$\sum_{i=1}^{4} 3i = 3 * 1 = 3$	Este sería el primer término
$\sum_{i=2}^{4} 3i = 3 * 2 = 6$	Segundo término
$\sum_{i=3}^{4} 3i = 3 * 3 = 9$	Tercer término
$\sum_{i=4}^{4} 3i = 3 * 4 = 12$	Cuarto término

- Al primer término le vamos a sumar los otros tres términos:

$$\sum_{i=1}^{4} 3i = 3 + 6 + 9 + 12 = 30$$

Refuerce sus conocimientos revisando el **texto básico** en las páginas 842 a la 852 para mejorar sus estudios y revise Khan Academy en el tema de Sucesiones.

Estas actividades proporcionan explicaciones claras y detalladas, facilitando la comprensión de conceptos fundamentales sobre sucesiones matemáticas, utilizando ejemplos visuales y gráficos para ayudar en la visualización y comprensión intuitiva de modelos numéricos.

Para finalizar, revise nuevamente el contenido de la semana, ya que le permitirá, no solo entender el comportamiento de secuencias numéricas, sino también aplicarlo en diversos contextos matemáticos, así, la terminación de este estudio abre la puerta a un dominio más profundo de la matemática y su aplicabilidad en el mundo real.

Tras revisar los contenidos nuevamente, adquirirá los conocimientos fundamentales que le permitirán, en calidad de estudiante, comprender y aplicar las sucesiones en diversos contextos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una vez comprendido el tema de sucesiones y notaciones de sumatoria es esencial saber que estos temas son una ciencia, que nos permiten describir y analizar patrones de número de manera sistemática, en este contexto le invito a realizar las actividades propuestas.

1. **Generación de sucesiones:**

    - Plantee sucesiones numéricas siguiendo reglas específicas.
    - Analice y encuentre la fórmula general que representa cada sucesión.

2. **Visualización gráfica:**

    - Utilice *software* interactivo para representar gráficamente sucesiones.
    - Explore cómo cambian las sucesiones con diferentes parámetros.

3. **Problemas del mundo real:**

    - Plantee problemas del mundo real que puedan modelarse con sucesiones.

    - Por ejemplo: cuando se deja caer una pelota desde una cierta altura y rebota, la altura alcanzada en cada rebote forma una sucesión. Cada término muestra la altura alcanzada en un rebote específico.

4. **Comparación de sucesiones:**

    - Consulte dos sucesiones y compare sus tasas de crecimiento.
    - Analice cuál de las sucesiones crece más rápido y por qué.

5. **Juegos matemáticos:** diseñe juegos de tablero donde el movimiento está determinado por sucesiones.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Las actividades propuestas ofrecen un enfoque interactivo para trabajar con sucesiones, permitiéndole consolidar sus conocimientos y aplicarlos en diversos contextos matemáticos y del mundo real.

6. Realice la autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 11

Señale la respuesta correcta acerca de las sucesiones.

1. Una sucesión es una secuencia ordenada de números irracionales o términos en la que cada término sigue un patrón o regla predefinida.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. La notación general de una sucesión se expresa como a^n donde a es el término general y n es el índice que indica la posición del término en la secuencia.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. Los cinco primeros términos de la siguiente sucesión $a_n = 4n + 3$ es:

   a. 7,11,15,19,23.
   b. 6,10,14,18,22.
   c. 8,12,16,20,24.

4. Los cinco primeros términos de la siguiente sucesión $a_n = n^2 + n$ es:

   a. 1,4,9,16,25.
   b. 3,6,11,18,27.
   c. 2,5,10,17,26.

5. Encuentre el n-ésimo término de la siguiente sucesión:2,4,6, 8 .

   a. $2n$
   b. 2^n
   c. $2n + 1$

6. Los primeros cinco términos de la siguiente sucesión $a_n = 2n - 1$ son:

a. 1,3,5,7,9
b. 2,4,6,8,10
c. 1,4,8,12,16

7. Los primeros cinco términos de la siguiente sucesión $c_n = n^2 - 1$ son:

a. 1,3,8,12,15
b. 0,4,6,8,10
c. 0,3,8,15,24

8. Los primeros cinco términos de la siguiente sucesión $t_n = \frac{n}{n+1}$ son:

a. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$
b. $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}$
c. $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}$

9. Los primeros cinco términos de la siguiente sucesión $t_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ son:

a. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$
b. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$
c. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

10. Encuentre el n-ésimo término de la siguiente sucesión: -2,4, -8,16,-32 .

a. a_n=[(-1)]^n 2^n
b. $a_n = \frac{2n+1}{2n}$
c. $a_n = \frac{2-1}{2n}$

Ir al solucionario

"Recuerde, cada lección aprendida es una victoria sobre la ignorancia. ¡Persista en su camino académico y construya un futuro lleno de logros!"

Semana 13

En la semana trece se divisará los contenidos concernientes a sucesiones aritméticas que avanzan mediante diferencias constantes, mientras que las geométricas se caracterizan por multiplicadores constantes. En esta exploración, desentrañaremos las propiedades únicas de ambas, revelando su importancia en diversos contextos matemáticos y prácticos. ¡Comencemos nuestro viaje por estas fascinantes secuencias!

4.2. Sucesiones aritméticas y geométricas

Las sucesiones aritméticas y geométricas son dos tipos importantes de secuencias numéricas que se utilizan en matemáticas y en aplicaciones en la vida cotidiana.

4.2.1. Sucesiones aritméticas

Una sucesión aritmética es una secuencia numérica en la que la diferencia entre cualquier par de términos consecutivos es constante. Esta diferencia constante se llama "diferencia común" o "razón aritmética" y se denota generalmente como "d", y "a" es el primer término de sucesión:

$$a_n = a + (n-1)d$$

Ejercicios explicativos 35

1. Encuentre el término número 12 de la siguiente sucesión aritmética:3,7,11,15,

    - Tenemos que encontrar la diferencia común de cada par de número consecutivo:

$$d = 15 - 11$$

$$d = 4 \ \ diferencia$$
$$a = 3 \ primer \ término$$

- Entonces, la diferencia común es 4 y primer término es 3, para encontrar término número 12, reemplazamos en la fórmula. Por lo tanto, tenemos:

$$a_{12} = 3 + (12 - 1)4$$
$$a_{12} = 3 + (11)4$$
$$a_{12} = 3 + 44$$
$$a_{12} = 47$$

2. Encuentre el término número 10, en la siguiente sucesión: 28,23,18, 13, ...

   - Calcule la diferencia común de cada par de número consecutivo:

$$d = 23 - 28$$
$$d = -5 \ \ diferencia$$
$$a = 28 \ primer \ término$$

   - Entonces, la diferencia común es -5 y primer término es 28, para encontrar término número 10, reemplazamos en la fórmula. Por lo tanto, tenemos:

$$a_n = a + (n - 1)d$$
$$a_{10} = 28 + (10 - 1) - 5$$
$$a_{10} = 28 + (9) - 5$$
$$a_{10} = 28 + (-45)$$
$$a_{10} = 28 - 45$$
$$a_{10} = -17$$

2 Bimestre

3. Dada la sucesión aritmética $a_n = 3n - 2$, donde n representa el término enésimo de la sucesión, calcula los primeros 5 términos de la sucesión.

- Una sucesión aritmética tiene una regla específica para calcular cada término basándose en el término anterior. En este caso, la regla es $a_n = 3n - 2$. Vamos a calcular los primeros 5 términos:

$$a_1 = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$$
$$a_2 = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$
$$a_3 = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$$
$$a_4 = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$$
$$a_5 = 3(5) - 2 = 15 - 2 = 13$$

Respuesta: los primeros 5 términos de la sucesión son 1, 4, 7, 10, y 13.

- Esta es una sucesión aritmética en la que cada término se obtiene sumando una constante (en este caso, 3) al término anterior, lo que da como resultado una progresión aritmética.

4.2.2. Sumas parciales de sucesiones aritméticas

Es la suma acumulativa de los términos de una secuencia aritmética hasta un cierto término dado, estas sumas parciales se utilizan para calcular la suma de un subconjunto de términos en una sucesión aritmética y son útiles para analizar y entender el comportamiento de la secuencia en diferentes etapas.

Expresión de la suma parcial para los primeros n términos: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$

Ejercicio explicativo 36

Calcula la suma de los primeros 21 términos de la sucesión $a_n = -6 + 6n$

- Paso 1: identificar lo que nos pide el problema.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

- Paso 2: encontrar los datos para sustituir en la fórmula.

$$a_1 = 0$$
$$a_{21} = 120$$
$$n = 21$$

Encontrar a_1:

$$a_n = -6 + 6n$$
$$a_1 = -6 + 6(1)$$
$$a_1 = -6 + 6$$
$$a_1 = 0$$

Encontrar a_{21}:

$$a_n = -6 + 6n$$
$$a_{21} = -6 + 6(21)$$
$$a_{21} = -6 + 126$$
$$a_{21} = 120$$

- Paso 3: sustituir valores en la fórmula.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$
$$S_{21} = \frac{21(0 + 120)}{2}$$
$$S_{21} = \frac{21(120)}{2}$$
$$S_{21} = \frac{2520}{2}$$
$$S_{21} = 1260$$

En conclusión, la suma de los primeros 21 términos es 1260.

4.2.3. Sucesiones geométricas

Es una secuencia numérica en la que el cociente entre cualquier par de términos consecutivos es constante, este consciente constante se llama "razón geométrica" y se denota generalmente como "r":

$a_n = ar^{n-1}$

Ejercicios explicativos 37

1. Encuentre el término 8 en la siguiente sucesión geométrica: 4,8,16, 32,

- Encuentre la razón común de la sucesión geométrica, para esto, dividimos a un término por el anterior:

  - $\frac{32}{16} = 2$
  - $\frac{16}{8} = 2$
  - $\frac{8}{4} = 2$

- Entonces, la razón común es 2 y primer término es 4, para encontrar el término número 8, multiplicamos reemplazamos los valores en la fórmula:

$$a_n = ar^{n-1}$$
$$a_8 = 4\ (2)^{8-1}$$
$$a_8 = 4\ (2)^7$$
$$a_8 = 4\ (128)$$
$$a_8 = 512$$

2. Determine el término número 7, en la sucesión geométrica: 48,24,12,6,

- Nuevamente, empezamos encontrando la razón común en la sucesión:

  - $\frac{6}{12} = 0.5$

- $\frac{12}{24} = 0.5$
- $\frac{24}{48} = 0.5$

- En este caso, observamos que el primer término es 48, y que la razón común está entre 0 y 1, por lo tanto, la sucesión es decreciente, para encontrar el término 7 reemplazamos los valores en la fórmula geométrica:

$$a_n = ar^{n-1}$$
$$a_7 = 48\ (0.5)^{7-1}$$
$$a_7 = 48(0.5)^6$$
$$a_7 = 48\ (0.015625$$
$$a_7 = 0.75$$

3. Dada la sucesión geométrica $a_n = 2^n$, donde n representa el término enésimo de la sucesión, calcula los primeros 5 términos de la sucesión.

- En una sucesión geométrica, cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante llamada razón. En este caso, la razón es 2, ya que a_{n+1} se obtiene multiplicando a_n por 2. Vamos a calcular los primeros 5 términos:

$$a_1 = 2^1 = 2$$
$$a_2 = 2^2 = 4$$
$$a_3 = 2^3 = 8$$
$$a_4 = 2^4 = 16$$
$$a_5 = 2^5 = 32$$

Respuesta: los primeros 5 términos de la sucesión son 2, 4, 8, 16 y 32.

- Esta es una sucesión geométrica en la que cada término se obtiene multiplicando la razón (2) al término anterior, lo que da como resultado una progresión geométrica.

4.2.4. Sumas parciales de sucesiones geométricas

Son sumas de los subconjuntos de términos en una sucesión geométrica y son útiles para analizar y entender el comportamiento de la secuencia en diferentes etapas.

Ejercicio explicativo 38

Encuentre la suma $\sum_{k=1}^{6} \quad 7(-\frac{2}{3})^{k-1}$

La suma dada es la quinta suma de una sucesión geométrica con primer término $a = 7(-\frac{2}{3})^0 = 7$ y $r = -\frac{2}{3}$., en consecuencia, por la fórmula para S_n con $n = 6$ tenemos:

$$s_6 = 7 \cdot \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^6}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$s_6 = 7 \cdot \frac{1-\frac{64}{729}}{\frac{5}{3}}$$

$$s_6 = 7 \cdot \frac{\frac{665}{729}}{\frac{5}{3}}$$

$$s_6 = 7 \cdot \frac{1995}{3645}$$

$$s_6 = \frac{13965}{3645}$$

$$s_6 = 3.83$$

4.2.5. ¿Qué es una serie infinita?

Es una suma infinita de términos que proviene de una secuencia numérica, estas series se utilizan en matemáticas para describir la acumulación de valores a medida que se suman un número infinito de términos.

Cuando tenemos una secuencia infinita de valores, como: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$, que siguen una regla (en este caso, cada término es la mitad del anterior), y los sumamos todos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=s$$

Obtenemos una serie infinita.

Los puntos "…" Significan "continuar indefinidamente".

4.2.6. Serie geométrica infinita

Es una suma infinita de términos que provienen de una sucesión geométrica, estas series son un tipo particular de series infinitas en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior.

Ejercicios explicativos 39

1. Determine si la serie geométrica infinita es convergente o divergente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

- Empezamos escribiendo la información que conocemos:
  - Primer término: $a=1$
  - Razón común: $r=\frac{1}{2}$
- Ahora, usamos la fórmula de la suma infinita de una serie geométrica:

$$S_{\infty}=\frac{a}{1-r}$$

$$S_{\infty}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = 2$$

Respuesta: esta es una serie geométrica infinita con $a = 2$ y $r = \frac{1}{2}$, dado que, $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$, la serie converge.

2. Determine si la serie geométrica infinita es convergente o divergente:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots$$

- En este caso, se tiene lo siguiente:
  - Primer término: $a = 2$
  - Razón común: $r = \frac{1}{4}$
- Use la fórmula de la suma infinita, tenemos:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$S_\infty = \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = \frac{8}{3}$$

Respuesta: esta es una serie geométrica infinita con $a = 1$ y $r = \frac{1}{4}$, dado que, $|r| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$, la serie converge.

La culminación del estudio de sucesiones marca el cierre de un proceso de aprendizaje que abarca desde la comprensión de patrones hasta la aplicación de fórmulas y técnicas.

Complemente su estudio revisando el **texto básico** en las páginas 853 a la 867 y revisando Khan Academy con el tema de Sucesiones aritméticas y geométricas.

Al explorar el tutorial de sucesiones aritméticas y geométricas, ofrece beneficios claros: clarifica la comprensión de patrones numéricos estructurados, facilita la identificación y cálculo de términos en estas secuencias, proporciona estrategias para prever el comportamiento futuro de la sucesión, y fortalece la capacidad para aplicar estos conceptos en contextos matemáticos y resolución de problemas cotidianos.

Para finalizar, revise nuevamente los contenidos sobre sucesiones aritméticas y geométricas, lo cual brinda ventajas significativas: clarifica la comprensión de patrones numéricos estructurados, facilita la aplicación de fórmulas específicas para calcular términos, proporciona ejemplos prácticos que ilustran su utilidad en problemas del mundo real y fortalece la capacidad para prever y analizar el comportamiento de estas secuencias.

Después de revisar el contenido, obtendrá los conocimientos esenciales que le permitirán, en su papel de estudiante, comprender y aplicar tanto las sucesiones aritméticas como las geométricas en distintos escenarios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Antes de realizar las actividades de aprendizaje, podemos decir que las sucesiones aritméticas y geométricas, son dos tipos de secuencias numéricas que desempeñan un papel esencial en las matemáticas y en aplicaciones prácticas en la vida cotidiana.

1. **Generación de términos:**

   - Cree los primeros términos de sucesiones aritméticas y geométricas dadas.
   - Analice cómo cambian los términos al ajustar las diferencias comunes o los multiplicadores.

2. **Cálculo de términos específicos:**

    - Consulte sucesiones aritméticas y geométricas con términos faltantes.
    - Calcule los términos específicos utilizando las fórmulas correspondientes.

3. **Problemas del mundo real:**

    - Plantee problemas prácticos que puedan modelarse con sucesiones aritméticas y geométricas.

        Ejemplo 1: en una empresa, se sabe que el número de productos vendidos cada mes aumenta en 50 unidades respecto al mes anterior. Si en el primer mes vendieron 200 unidades, ¿cuántas unidades habrán vendido después de 8 meses?

        Ejemplo 2: en una población de bacterias, se sabe que la cantidad se duplica cada hora. Si inicialmente hay 100 bacterias, ¿cuántas habrá después de 5 horas?

    - Formule las secuencias y calcule los términos relacionados con la situación.

4. **Comparación de razones y diferencias:**

    - Plantee dos sucesiones aritméticas o geométricas y compare sus razones o diferencias.
    - Analice cómo estas relaciones afectan el comportamiento general de las secuencias.

5. **Aplicaciones en finanzas:**

    - Aborde problemas financieros que involucren crecimiento aritmético o geométrico.
    - Calcule las tasas de interés, inversiones o amortizaciones utilizando las fórmulas adecuadas.

6. **Desafíos de sumas parciales:**

   - Plantee la suma de los primeros términos de una sucesión y calcule estas sumas parciales.
   - Analice cómo la suma de términos afecta la comprensión global de la secuencia.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Las actividades prácticas propuestas presentan un enfoque interactivo y aplicado, para trabajar con sucesiones aritméticas y geométricas, permitiendo consolidar los conocimientos y aplicarlos en diversos contextos matemáticos.

7. Le invito a reforzar sus conocimientos, participando en la siguiente autoevaluación:

Autoevaluación 12

Señale la respuesta correcta acerca de las sucesiones aritméticas y geométricas.

1. La sucesión aritmética se la define como una secuencia de números en la que la diferencia entre cualquier par de términos consecutivos es constante.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. La fórmula general para el término *n*-ésimo de una sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1) + d$

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. La fórmula general para el término *n*-ésimo de una sucesión geométrica es:

   a. $a_n = a_1 - r^{(n-1)}$
   b. $a_n = a_1 + r^{(n+1)}$
   c. $a_n = a_1 + r^{(n-1)}$

4. Si $a = 2$ y $d = 3$, entonces la fórmula para calcular el término n-ésimo queda como:

   a. $a_n = 2 - (n-1)3$
   b. $a_n = 2 + (n-1)3$
   c. $a_n = 2 + (n-1) - 3$

5. La fórmula para calcular el término n-ésimo de sumas parciales de una sucesión aritmética es:

a. $S_n = n\left(\frac{a+a_n}{2}\right)$

b. $S_n = 2\left(\frac{a+a_n}{n}\right)$

c. $S_n = n\left(\frac{a-a_n}{2}\right)$

6. Si $a = 2 \ \ y \ d = 3$ entonces el término n-ésimo es:

a. $a_n = 2 + 3(n+1)$
b. $a_n = 2 + 3(n-1)$
c. $a_n = 2 - 3(n-1)$

7. Si $a = 9 \ \ y \ d = -5$ entonces el término n-ésimo es:

a. $a_n = 9 - 5(n-1)$
b. $a_n = 5 - 9(n-1)$
c. $a_n = 9 + 5(n-1)$

8. Si $a = 3 \ \ y \ r = 2$ entonces el término n-ésimo es:

a. $a_n = 3(2)^{n-1}$
b. $a_n = 2(3)^{n-1}$
c. $a_n = 3(2)^{n+1}$

9. Si $a = 2 \ \ y \ r = -5$ entonces el término n-ésimo es:

a. $a_n = 5(-2)^{n-1}$
b. $a_n = 2(-5)^{n-1}$
c. $a_n = 2(5)^{n-1}$

10. Si $a = 1 \ \ y \, r = \frac{1}{3}$ entonces el término n-ésimo es:

a. $a_n = 5(-\frac{1}{3})^{n-1}$

b. $a_n = -5(\frac{1}{3})^{n-1}$

c. $a_n = 5(\frac{1}{3})^{n-1}$

Una vez completado el estudio de las sucesiones aritméticas y geométricas, le invito a continuar ampliando sus conocimientos mediante la exploración del fascinante tema de los límites.

Ir al solucionario

“La educación es la herramienta más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo, su esfuerzo académico hoy construye el puente hacia un mañana mejor.”

Semana 14

En la semana catorce se tratará los límites que representan la noción fundamental de acercarse infinitamente a un valor sin llegar a alcanzarlo. A través de esta exploración, descubriremos cómo los límites son esenciales en el cálculo y proporcionan herramientas poderosas para analizar el comportamiento de funciones en puntos críticos. ¡Iniciemos nuestro viaje en la comprensión profunda de los límites matemáticos!

Unidad 5. Límites numéricos y gráficos

Son fundamentales en el cálculo y las matemáticas, que se utilizan para comprender el comportamiento, funciones y secuencias en puntos específicos o a medida que se acercan a ciertos valores.

5.1. Definición de límite

Según Blázquez, S y Ortega, T. (2002). El límite describe el valor al que se aproxima una función a medida que su entrada se acerca a un valor particular, pero no necesariamente alcanza ese valor en sí. Es decir, es un concepto fundamental que se utiliza para describir el comportamiento de una función cuando la variable independiente se acerca a un valor particular.

El límite de f(x), cuando x se aproxima a, es igual a L:
$f(x) = L$

Ejercicios explicativos 40

1. Encuentre el límite de: $(x + 3)$

   Reemplace el 2 en x, que le quedaría:

   $(x + 3) = 2 + 3$

$(x+3)=5$ Límite de la función

2. Encuentre el límite de: $\frac{3x}{x^2+x+2}$

$$\frac{3x}{x^2+x+2}=\frac{3(-1)}{(-1)^2-1+2}$$

$$=\frac{-3}{1-1+2}$$

$$=-\frac{3}{2}$$ Límite de la función

5.2. Cálculo de límites numérica y gráficamente

5.2.1. Cálculo de límites numéricamente

- Enfoque numérico o algebraico para encontrar el límite de una función.
- Implica utilizar propiedades algebraicas y técnicas de manipulación de expresiones para simplificar la función y luego evaluarla directamente en el punto en cuestión.
- Puede involucrar la sustitución directa del valor en *x* que se acerca al punto en el que se está calculando el límite.

5.2.2. Cálculo de límites gráficamente

- Enfoque gráfico para entender el comportamiento de una función cerca de un punto en particular.
- Implica trazar el gráfico de la función y observar cómo se comporta la función a medida que te acercas al punto en cuestión.
- El límite se determina observando hacia dónde se dirigen las imágenes de los puntos en el gráfico a medida que te acercas al valor de x en el que se encuentra el límite.

Ejercicios explicativos 41

1. Límite numéricamente:

$$\frac{x^3+1}{x^2-1}$$

Tenemos indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por -1.

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1}{(x+1)(x+1)}$$

$$\frac{x^2-x+1}{x-1} = -\frac{3}{2}$$

2. Límite gráficamente:

$$\frac{x^3+3x^2-10x}{x-2}$$

Simplificamos:

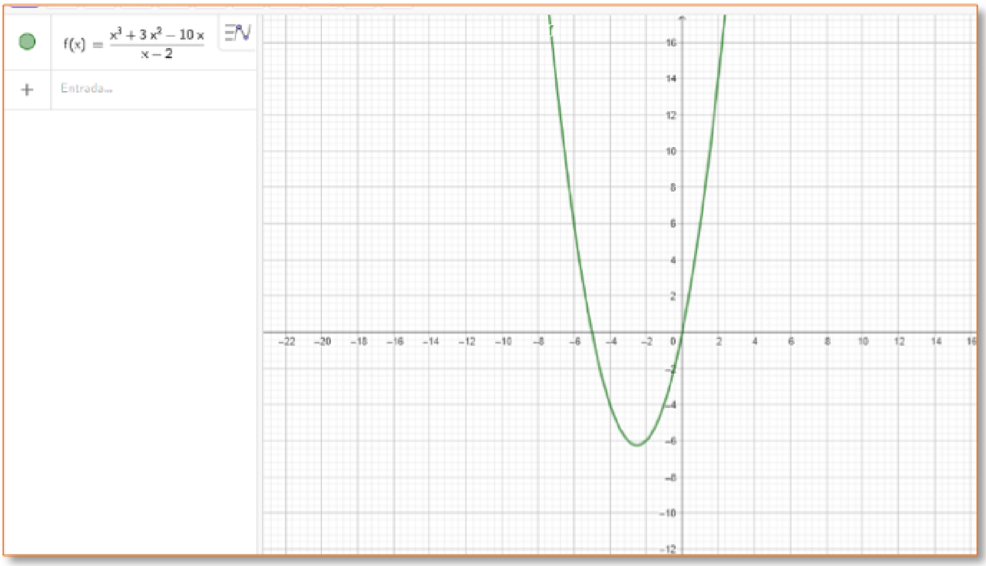
$$= x(x+5)$$

Reemplazamos valores:

$2(2+5) \ = 14$ Límite de una función

Figura 9

Plano Cartesiano



Nota. Granda, E., (2024)

5.3. Límites que no existen

Son límites que no se acercan a un valor específico a medida que su variable independiente se aproxima a cierto punto, en otras palabras, el límite no existente cuando no es posible encontrar un valor único al que la función o secuencia se aproxima a medida que te acercas a ese punto.

Ejercicio explicativo 42

Encuentre $sen\,\frac{\pi}{x}$

- La función $f(x) = sen(\frac{\pi}{x})$ no está definida en 0. Evaluando la función para algunos pequeños valores de x obtenemos:

$$f(1) = sen\ \pi = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = sen\ 3\pi = 0$$

$$f(0.1) = sen\ 10\pi = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = sen\ 2\pi = 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = sen\ 4\pi = 0$$

$$f(0.01) = sen\ 100\pi = 0$$

- Del mismo modo, f (0.0001) =f (0.0001) =0. Con base en esta información podríamos decir estar tentados a calcular que:

$$sen\frac{\pi}{x} = 0\ ?$$

$$\downarrow$$

Entonces el límite no existe.

5.4. Límites unilaterales

Los límites unilaterales son útiles para analizar discontinuidades y comportamientos asintóticos en funciones, ya que pueden proporcionar información sobre cómo se acerca la función a un punto específico desde diferentes direcciones.

Ejercicio explicativo 43

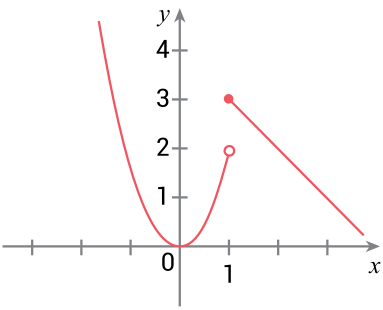
Sea f la función definida por $f(x) = \{2x^2 \quad si\ x < 1\ \ 4 - x \quad si\ x \geq 1$, trace la gráfica de f y úsela para encontrar lo siguiente:

a. $f(x)$ b. $f(x)$ c. $f(x)$

2 Bimestre

Tabla 15

Resolución problema de límites unilaterales

Gráfica	Resolución
Límite 	De la figura vemos que los valores de $f(x)$ se aproxima a 2 cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, pero se aproxima a 3 cuando x se aproxima a 1 por la derecha. Entonces, los límites izquierdo y derecho no son iguales, en consecuencia, tenemos:
	a. $f(x) = 2$
	b. $f(x) = 3$
	c. $f(x)$ $no\ existe$

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.6, Cengage Learning.

Habiendo completado el estudio exhaustivo de los límites, tanto desde una perspectiva numérica como gráfica, le extendemos una cordial invitación a continuar su exploración académica adentrándose en el **texto básico**, cuyos contenidos se despliegan en las páginas 898 a 905, este material proporcionará información adicional y perspectivas clave que fortalecerán aún más su comprensión sobre este concepto esencial de matemáticas, así mismo observe el material educativo del Khan Academy con respeto a Límites.

El tutorial sobre límites ofrece beneficios esenciales: explica conceptos matemáticos complejos relacionados con el acercamiento infinito a valores específicos, facilita la comprensión de la evaluación de funciones en puntos límite, proporciona estrategias para calcular límites en situaciones diversas y fortalece la habilidad para abordar problemas matemáticos avanzados con confianza.

Para finalizar, revise nuevamente el contenido de la semana, ya que ofrece beneficios significativos: explica conceptos matemáticos complejos relacionados con el acercamiento infinito a valores específicos, facilita la comprensión de la evaluación de funciones en puntos límite, proporciona estrategias para calcular límites en situaciones diversas y fortalece la habilidad para abordar problemas matemáticos.

Posteriormente, de revisar los contenidos, adquirirá los conocimientos fundamentales que le capacitarán, en calidad de estudiante, para comprender y aplicar los límites en diversos contextos.

¡Le deseamos éxito continuo en su viaje educativo!

Actividades de aprendizaje recomendadas

Realice las siguientes actividades, donde exploraremos los conceptos esenciales relacionados con los límites numéricos y gráficos, así como las técnicas y estrategias para calcularlos y comprender su significado en el contexto de las funciones matemáticas.

1. **Problemas del mundo real:**

   - Plantee problemas del mundo real que involucren límites matemáticos, como velocidad promedio, tasas de crecimiento.
   - Modele y resuelva estos problemas.

2. **Límites laterales:**

   - Analice límites laterales para entender el comportamiento de una función al acercarse desde la izquierda y la derecha.
   - Observe cómo difieren o son iguales en puntos específicos.

3. **Aproximación numérica:**

   - Utilice calculadoras o *software* matemático para aproximar límites de funciones en puntos específicos.
   - Compare los resultados con diferentes niveles de precisión para entender la convergencia.

4. **Análisis gráfico:**

   - Grafique funciones y observa el comportamiento en puntos límite.
   - Analice visualmente cómo se acercan los valores de la función al límite.

5. **Exploración de discontinuidades:**

   - Identifique discontinuidades en funciones y analiza los límites en esos puntos.
   - Desarrolle la comprensión de cómo las discontinuidades afectan el cálculo de límites.

6. **Resolución de ecuaciones:**

   - Resuelva ecuaciones con límites involucrados y evalúa cómo cambian las soluciones al variar los límites.
   - Aplique conceptos de límites para entender el comportamiento de soluciones en casos particulares.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Los ejercicios prácticos propuestos proporcionan un enfoque interactivo y aplicado para trabajar con límites matemáticos, permitiendo a los estudiantes consolidar sus conocimientos y aplicarlos en diversos contextos matemáticos.

7. Estimado estudiante, para evaluar los aprendizajes adquiridos sobre esta temática, le invito a desarrollar la autoevaluación que a continuación se presenta.

Autoevaluación 13

Señale la respuesta correcta acerca de los límites:

1. El límite de una función está definido por la fórmula $f(x) = L$.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. El valor del límite de la función $\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ es igual a $0.66666 \ldots$

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. Un límite es infinito $(\infty, -\infty)$ cuando en la:

   a. Función se acerca a valores cada vez mayores al ∞, o, menores $-\infty$.
   b. Función se alejan los valores cada vez mayores al ∞, o, menores $-\infty$.
   c. Función se mantienen los valores mayores al ∞, o, menores $-\infty$.

4. Una “asíntota” en una función es una línea recta que se:

   a. Aleja continuamente, pero nunca cruza o toca.
   b. Acerca continuamente, pero nunca cruza o toca.
   c. Acerca continuamente, y llega a cruzar en un punto.

5. Hay relación entre un límite y la continuidad de una función cuando, es:

   a. Continua en un punto, si y sólo si el límite en ese punto no existe y es igual al valor de la función en ese punto.
   b. Continua en un punto, si y sólo si el límite en ese punto existe y es igual al valor de la función en ese punto.
   c. Continua en un punto, si y sólo si el límite en ese punto existe y es diferente al valor de la función en ese punto.

6. El valor del siguiente límite $\frac{x-1}{x^2-1}$ es:

a. 0.5
b. 5
c. 5.5

7. Determine si existe o no el valor del siguiente límite $\frac{1}{x^2}$:

a. No existe.
b. Si existe.
c. Imaginario.

8. La definición de límite está dada por la fórmula:

a. $f_{(x)} = -L$
b. $f_{(x)} = L$
c. $f_{(x)} = 1$

9. La definición de límite unilateral está dada por la fórmula:

a. $f_{(x)} = L$
b. $f_{(x)} = 2$
c. $f_{(x)} = 1$

10. Determine si existe o no el valor del siguiente límite $sen\frac{\pi}{x}$:

a. No existe.
b. Si existe.
c. Imaginario.

¡Ha completado el estudio de límites! Ahora tiene un sólido entendimiento de cómo se comportan las funciones a medida que sus variables se acercan a ciertos valores.

Ir al solucionario

Semana 15

En la semana quince se estudiará el cálculo de límites de forma algebraica. En este contexto matemático, exploraremos técnicas y estrategias para evaluar límites utilizando herramientas algebraicas. Extraeremos los secretos detrás de expresiones que pueden resultar indeterminadas o complejas, aplicando reglas y propiedades algebraicas para revelar el valor al cual una función se aproxima. ¡Prepárense para sumergirse en un viaje algebraico que revelará los secretos de los límites matemáticos!

5.5. Encontrar límites algebraicamente

Este tema implica en utilizar propiedades algebraicas y técnicas de manipulación de expresiones matemáticas para simplificar una función antes de evaluar en un punto o determinar su límite en ese punto. Aquí hay algunos pasos comunes para calcular límites algebraicamente.

5.5.1. Leyes de los límites

Usamos las propiedades de límites presentes en la tabla 16, llamadas leyes de límites, para calcular límites.

Tabla 16

Leyes de límites

Limite	Descripción
$[f(x)+g(x)] = f(x)+g(x)$	Límite de una suma.
$[f(x)-g(x)] = f(x)-g(x)$	Límite de una diferencia.
$[cf(x)] = cf(x)$	Límite de un múltiplo constante.
$[f(x)g(x)] = f(x) * g(x)$	Límite de un producto.
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad si\ g(x) \neq 0$	Límite de un cociente (siempre que el límite del denominador no sea 0).
$[f(x)]^n = [f(x)\ ]^n.$	Límite de una potencia. $donde\ n\ es\ un\ entero\ positvo$

2 Bimestre

Limite	Descripción
$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(x)}$	Límite de una raíz. $donde\ n\ es\ un\ entero\ positivo.$

Nota. Adaptado de *Pre cálculo matemáticas para el cálculo*, por Stewart, J., Redlin, L., Waltson, S., 2017, p.6, Cengage Learning.

Ejercicios explicativos 44

1. Evalúe el límite $(2x\, log\, log\, x^3)$

- Aplique la regla del producto:

$$(2x\, log\, log\, x^3) = 2x \cdot log\, log\, x^3$$

- Utilice la regla constante y de la función logarítmica:

$$(2x\, log\, log\, x^3) = x \quad \cdot)$$

- Evalúe el límite:

$$(2x\, log\, log\, x^3) = 2(10) \cdot log\, log\, (1000) = 20\, log\, log\, (1000) = 20(3) = 60$$

2. Evalúe el límite $\frac{4x^2}{1+\sqrt{x}}$

- Aplique la regla del cociente:

$$\frac{4x^2}{1+\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{(1+\sqrt{x})}$$

- Utilice la regla de la suma:

$$\frac{4x^2}{1+\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{1+\lim_{x\to 9}\sqrt{x})}$$

- Evalúe el límite:

$$\frac{4x^2}{1+\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{1+\lim_{x\to 9}\sqrt{x})} = \frac{4\cdot 9^2}{1+\sqrt{9}} = \frac{4\cdot 9^2}{1+3} = \frac{4\cdot 9^2}{4} = 81$$

5.5.2. Aplicación de leyes de límites

Al aplicar las leyes de límites necesitamos usar cuatro límites especiales:

- $c = c$
- $x = a$
- $= a^n$ *donde n es un entero positivo.*
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ *donde n es un entero positivo* $a > 0$

Usamos las propiedades de límites, llamadas leyes de límites, para calcular límites.

Ejercicios explicativos 45

1. $(2x^2 - 3x + 4)$

$= (2x^2) - (3x) + 4$	Límite de una diferencia y suma.
$= 2x^2 - 3x\ 4$	Límite de un múltiple constante.
$= 2(5^2) - 3(5) + 4$	Límites especiales 3,2 y 1.
$= 39$	Respuesta.

2. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

$= \dfrac{(x^3 + 2x^2 - 1)}{(5 - 3x)}$	Límite de un cociente.
$= \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5\ - x}$	Límites de sumas, diferencias y múltiplos constantes.
$= \dfrac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$	Límites especiales 3,2 y 1.
$= -\dfrac{1}{11}$	Respuesta.

5.5.3. Encontrar límites usando álgebra y las leyes de límites

Esto implica aplicar las propiedades de las funciones y las reglas de los límites para simplificar una expresión y evaluar el límite en un punto específico.

Ejercicio de explicativo 46

Factor común: $\frac{x-1}{x^2-1}$

- No podemos encontrar el límite si sustituimos x=1 porque f (1) no está definida. Tampoco podemos aplicar la ley 5 (límite de un cociente) porque el límite del denominador es 0. En cambio, necesitamos hacer un poco de álgebra previa. Factorizamos el denominador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$ Factorizamos

- El numerador y el denominador tienen un factor común de x-1. Cuando tomamos el límite, cuando x se aproxima a 1, tenemos x≠1 y entonces x-1≠0. Por tanto, podemos eliminar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x+1}$$ Eliminamos

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$ Sea x = 1

5.5.4. Uso de límites izquierdo y derecho

Los límites se calculan mejor si primero encontramos los límites izquierdo y derecho.

Ejercicio explicativo 47

Encuentre el límite por la izquierda y derecha de la función a trozos: $f(x)$
$f(x) = \{x^3 + 1 \quad si\ x < 1\ x + 1 \quad si\ x \geq 1$

- Límite por la derecha: $f(x) = x + 1 = (1) + 1 = 2$
- Límite por la izquierda: $f(x) = x^3 + 1 = (3)^3 + 1 = 2$
- Teorema de la existencia: $f(x) = f(x)$

$2 = 2$ El límite existe

Fortalezca su comprensión concerniente al tema de límites, examinando detenidamente el **texto básico** que abarca las páginas 906 a 914, no dude en explorar herramientas educativas adicionales para enriquecer su comprensión y aprovechar al máximo su estudio a cerca del Cálculo de límites algebraicamente.

Esta actividad, sobre el cálculo de límites algebraicamente, clarifica la aplicación de reglas algebraicas para resolver límites, facilita la comprensión de cómo manejar expresiones indeterminadas, proporciona estrategias paso a paso para simplificar funciones complicadas y fortalece la habilidad para abordar cálculos límite de manera eficiente y precisa.

Para concluir, revise nuevamente los contenidos de la semana, pues le permitirá aclarar el manejo de expresiones indeterminadas mediante técnicas algebraicas, proporciona guías paso a paso para simplificar funciones complejas, fortalece la comprensión de reglas y propiedades algebraicas aplicadas a límites y desarrolla la habilidad para abordar problemas matemáticos avanzados con destreza y precisión.

Después de revisar los contenidos, obtendrá los conocimientos esenciales que le permitirán, en su rol de estudiante, comprender y aplicar el cálculo de límites en distintos escenarios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Desarrolle las siguientes actividades prácticas, en las cuales exploraremos las estrategias y leyes de los límites que nos permiten calcular límites algebraicamente. A través de ejemplos y preguntas, profundizaremos en cómo utilizar estas herramientas para resolver problemas de límites y entender el comportamiento de las funciones en diversos contextos matemáticos.

1. **Resolución de fracciones complicadas:** consulte fracciones con polinomios en el numerador y denominador, simplifique y calcule los límites.

2. **Límites en el infinito:**

   - Examine límites hacia el infinito y aplique técnicas algebraicas para evaluarlos.
   - Analice cómo los términos absolutos afectan el resultado final.

3. **Cálculo de límites laterales:**

   - Construya gráficas con funciones a trozos y calcule los límites laterales de forma algebraica desde la izquierda y la derecha.
   - Consulte cómo se pueden utilizar técnicas algebraicas para abordar la continuidad y existencia de límites.

4. **Análisis de continuidad:**

   - Consulte funciones y analice la continuidad mediante el cálculo de límites en puntos específicos.
   - Describa cómo los límites están relacionados con la continuidad de una función.

5. **Problemas de optimización:** plantee problemas de optimización que requieran el cálculo de límites algebraicamente.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Las actividades prácticas propuestas proporcionan un enfoque interactivo y aplicado para trabajar con el cálculo de límites de forma algebraica, permitiéndole consolidar sus conocimientos y aplicarlos en diversos contextos matemáticos.

6. Le invito a reforzar sus conocimientos, participando en la siguiente autoevaluación:

Autoevaluación 14

Señale la respuesta correcta acerca de los límites algebraicos.

1. La notación general para representar un límite es $f(x)$ donde *a* es el punto hacia el cual se aproxima *x*, y *f*(*x*) es la función.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. La definición de límite es $f(L) = a$.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. El límite de la función $\frac{x-1}{x^2-1}$ es:

   a. 0.5.
   b. 0.10.
   c. 0.7.

4. Construya una tabla de valores, e identifique el valor del límite de la función $\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ es:

   a. $\frac{1}{3}$
   b. $\frac{1}{4}$
   c. $\frac{1}{6}$

5. La ley de la suma de una función es:

   a. $[f(x) + g(x)] = f(x) + g(x)$
   b. $[f(x) \cdot g(x)] = f(x) + g(x)$
   c. $[f(x) + g(x)] = f(x) \cdot g(x)$

6. El límite de una suma $[f_{(x)} + g_{(x)}]$ es igual:

a. $f_{(x)} + g_{(x)}$
b. $(f_{(x)} + g_{(x)})$
c. $f_{(x)} - g_{(x)}$

7. El límite de un múltiplo constante $[cf_{(x)}]$ es igual:

a. $c \cdot f_{(x)}$
b. $cf_{(x)}$
c. $fc_{(x)}$

8. El límite de un producto $[f_{(x)} \cdot g_{(x)}]$ es igual:

a. $f_{(x)} \cdot g_{(x)}$
b. $f_{(x)} + g_{(x)}$
c. $\cdot\ g_{(x)}$

9. El límite de una potencia $[f_{(x)}]^n$ es igual:

a. $[f_{(x)}]^n$ donde n es un racional.
b. $[f_{(x)}]^n$ donde n es entero positivo.
c. $[f_{(x)}]^n$ donde n es entero negativo.

10. El límite de una raíz $\sqrt[n]{f_{(x)}}$ es igual:

a. $\sqrt[n]{f_{(x)}}$ donde n es entero positivo R.
b. $\sqrt[n]{f_{(x)}}$ donde n es entero negativo.
c. $\sqrt[n]{f_{(x)}}$ donde n es entero racional.

Ir al solucionario

¡Felicidades por alcanzar este logro monumental! Ahora que ha concluido sus estudios, recuerde que cada desafío es una oportunidad para brillar. ¡El mundo está esperando sus talentos y contribuciones! Adelante con confianza y determinación hacia un futuro lleno de éxitos y realizaciones.

Semana 16

Actividad final del bimestre

Estimado estudiante, hemos llegado al final del segundo bimestre, en el cual se ha estudiado temas como las funciones, sucesiones y límites.

Para que tenga mejores resultados en la evaluación bimestral, esta semana dedíquela a estudiar, reforzar y comprender los temas revisados durante las 7 semanas de clases.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Desarrolle las actividades de aprendizaje del segundo bimestre, centrándose especialmente en los contenidos relacionados con funciones, sucesiones y límites, estas actividades resultarán enriquecedoras por varias razones. En primer lugar, proporcionarán una valiosa oportunidad para consolidar y fortalecer los conceptos fundamentales adquiridos durante el segundo bimestre, lo que fomentará una comprensión más sólida de las funciones, además, al recordar y poner en práctica la resolución de sucesiones y límites, se fortalecerán las habilidades matemáticas esenciales, sentando así una base sólida que será fundamental para abordar conceptos más avanzados en el futuro.

Actividad 1. Resumen de funciones y gráficas

Realizar resúmenes de los conceptos clave de funciones y gráficas:

- Identifique los conceptos fundamentales de funciones.

- Extraiga las ideas principales y organízalas de manera clara y concisa de las propiedades de realizar una gráfica de una función.
- Utilice ejemplos para ilustrar el método para encontrar el dominio de una función.
- Sintetice las cuatro formas de representar una función y razón de cambio.

Actividad 2. Explique los temas a otros estudiantes

Explicar los temas tratados a amigos o estudiantes con base en funciones:

- Prepare presentaciones breves y claras de funciones lineales.

- Realice ejemplos prácticos y situaciones cotidianas para hacer los conceptos más comprensibles concernientes a la pendiente y razón de cambio.

- Ejecute ejercicios del **texto básico** para potenciar el aprendizaje con base en la construcción de modelos lineales.

Actividad 3. Elaboración de mapas mentales

Elaborar mapas mentales para visualizar la relación entre diferentes conceptos matemáticos de sucesiones:

- Relacione conceptos mediante líneas y palabras clave concerniente a los contenidos de sucesiones y notación de sumatoria.
- Utilice colores y símbolos para resaltar la importancia y la naturaleza de las sucesiones.
- Organice el mapa mental de manera lógica, desde conceptos más amplios a detalles más específicos.
- Revise y actualice los mapas mentales a medida que avance en el estudio.

Actividad 4. Resolución de problemas

Aplicar lo aprendido, resolviendo problemas y ejercicios relacionados, con sucesiones aritméticas y geométricas:

- Seleccione problemas variados que aborden diferentes aspectos del tema de sucesiones aritméticas y geométricas.

- Practique regularmente, comenzando con problemas simples y avanzando hacia niveles más complejos.
- Revise las soluciones y comprenda los pasos necesarios para resolver cada tipo de problema.
- Trabaje en problemas del mundo real para aplicar los conceptos de manera práctica.

Actividad 5: Practicar la resolución de ejercicios de límites

Practicar activamente para reforzar el conocimiento y mejorar la capacidad de aplicación, de los límites:

- Realice ejercicios propuestos en el **texto básico** que permita la práctica en la resolución de límites.
- Realice ejercicios de forma sistemática, enfocándote en áreas donde enfrenta desafíos.
- Consulte problemas aplicados a la vida real y resuélvalos aplicando límites.

Actividad 6: Búsqueda de herramientas educativas interactivas

Buscar videos, pódcast o herramientas interactivas que aborden el tema de cálculo de límites algebraicamente:

- Utilice plataformas educativas en línea para encontrar contenido multimedia relacionado con las leyes de los límites.

- Seleccione herramientas que se adapten a su estilo de aprendizaje del tema de leyes de límites (videos explicativos, pódcast, simulaciones interactivas, etc.).

- Tome notas mientras ejecute estas herramientas y vuelva a revisarlos para reforzar los conceptos.

- Comparta las herramientas educativas con otros compañeros de estudio para enriquecer la comprensión colectiva.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Una vez desarrolladas las actividades, obtendrá los conocimientos esenciales que le permitirán, en su papel de estudiante, comprender y aplicar los contenidos de funciones, sucesiones y límites en distintos escenarios.

Quiero expresar mis más sinceras felicitaciones por haber completado con éxito el estudio de la materia de Fundamentos Matemáticos, este logro refleja su dedicación, esfuerzo y perseverancia a lo largo de este periodo académico. Su compromiso con la excelencia académica es verdaderamente inspirador y merece un reconocimiento especial. Aprecio sinceramente su arduo trabajo y determinación, ya que han sido aspectos fundamentales para alcanzar este destacado hito educativo. Estoy convencido de que el conocimiento adquirido durante este ciclo le brindará nuevas perspectivas y oportunidades en su camino hacia el éxito. ¡Felicidades y gracias por su constante dedicación al aprendizaje!

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	F	π es un número irracional, lo que significa que no puede ser expresado como una fracción finita o una repetición decimal.
2	V	Es un número natural, entero y real, ya que es la raíz cuadrada de 4, y es racional porque puede expresarse como una fracción decimal.
3	b	La propiedad conmutativa en la multiplicación establece que el orden de los factores no altera el producto. Es decir, cambiar el orden de los números no cambia el resultado de la multiplicación.
4	b	La expresión dada muestra la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición de números reales. Esto significa que la multiplicación se distribuye sobre la adición.
5	a	Esta afirmación refleja la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición. Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado que si multiplicamos ese número por cada uno de los términos de la suma y luego sumamos los resultados.
6	b	El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales e irracionales. Los números racionales pueden expresarse como una fracción, mientras que los irracionales no pueden expresarse como fracciones y tienen infinitas cifras decimales no periódicas.
7	a	Los números racionales tienen la forma de a/b, donde “a” y “b” son enteros y “b” no es igual a cero. Esto significa que el denominador no puede ser cero, ya que no se puede dividir por cero.
8	c	Los números reales que son negativos se expresan con la desigualdad $x < 0$, lo que significa que x es menor que cero.
9	a	El número 4 elevado al exponente 2/3 es un número irracional. Esto se debe a que las potencias fraccionarias de números enteros positivos no suelen dar como resultado números racionales, sino en números irracionales.
10	b	El producto de números positivos y negativos siempre da como resultado un número negativo. Entonces, $-a^3b^3c^3$ será negativo.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	F	Sí, existe diferencia, por cuanto $(-5)^4 = 625$ y $-5^4 = -625$, son dos números opuestos.
2	V	La definición $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ nos permite invertir una potencia con exponente negativo, convirtiéndola en una fracción donde el numerador es 1 y el denominador es la potencia con el exponente positivo.
3	b	La ley del producto de potencias con la misma base establece que cuando se multiplican potencias con la misma base, se suman los exponentes. Simbólicamente, esto se expresa como $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.
4	b	La ley para simplificar una potencia de potencia establece que cuando tienes una potencia de una potencia, se multiplican los exponentes. Simbólicamente, esto se representa como $(a^m)^n = a^{m.n}$.
5	a	Al simplificar la expresión el resultado es $\frac{x^3 y^{15}}{z^3}$
6	a	El resultado de la operación de expresiones es $\frac{8y^3}{x^2}$
7	a	La expresión racionalizada es $\frac{\sqrt[5]{c^2}}{c}$ raíz quinta de c^2 / c
8	c	La notación científica es 4×10^{-13} cm.
9	a	La notación científica es $6{,}286984737 \times 10^{38}$
10	a	La distancia es $2{,}537 \times 10^{13}$ millas.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	El producto de la suma por la diferencia de dos términos es igual a la diferencia de cuadrados de dichos términos. Esto se puede verificar aplicando la fórmula de la diferencia de cuadrados $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
2	V	Esto implica combinar términos semejantes, aplicar las propiedades de los exponentes, realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división, y factorizar cuando sea posible.
3	b	La respuesta de la operación es x^2.
4	a	La solución de la factorización es $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}\left(4+2y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{5}{4}}\right)$
5	c	La respuesta del trinomio es $(x - 4y^2)(x + 3y^2)$
6	c	El resultado del trinomio es $(6y - 7)(y + 3)$
7	c	Factorizando es igual $(a - b^2)(a^2 + ab^2 + b^4)$
8	b	La agrupación es $(9x^2 + 1)(2x + 1)$
9	a	La respuesta a la división es $3x-2y$
10	a	La respuesta a la división es $2x-5$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	La propiedad de las fracciones que permite simplificar expresiones racionales es la propiedad de cancelación. Esta propiedad establece que si tenemos una fracción $\frac{ac}{bc}$, donde c no es igual a cero, entonces podemos simplificarla dividiendo ac y bc por el factor común c, lo que da como resultado $\frac{a}{b}$.
2	F	El dominio es {x / x $\neq +\frac{1}{2}$ y x $\neq -\frac{2}{3}\}$
3	b	El dominio de la expresión la racional es {x / x $\geq$ 0 y x $\neq 3\}$
4	c	El resultado de la expresión racional es $-\frac{6-y}{1+2y}$
5	a	La solución de la división es $\frac{x+5}{(2x+3)(x+4)}$
6	c	El resultado del ejercicio es $-\frac{2x+1}{(x-3)(x+2)}$
7	c	La solución de la fracción compuesta es $\frac{5}{(x-4)(x+1)}$
8	c	La racionalización es $\sqrt{y+3}\,.\sqrt{3}$
9	a	El resultado de la expresión racional es $\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$
10	a	El resultado de la expresión racional es $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 5		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	Para resolver una ecuación, el objetivo es aislar la variable en un solo lado del signo igual para encontrar una expresión equivalente más simple que describa la relación entre las variables. Esto implica realizar operaciones algebraicas en ambos lados de la ecuación hasta que la variable deseada esté sola.
2	V	Si despejamos el lado **a** de la fórmula obtenemos $a = \frac{A-2bc}{2b+2c}$. Esto se logra al restar 2bc de ambos lados de la ecuación original y luego dividir ambos lados por (2b + 2c), dejando **a** aislado.
3	a	La solución de la ecuación $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
4	a	Todas las soluciones $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$
5	a	Las respuestas a la ecuación $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$
6	c	Las soluciones o raíces de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera. Son las soluciones que satisfacen la igualdad de la ecuación original.
7	a	Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman ecuaciones equivalentes. Esto significa que si un valor satisface una de las ecuaciones, también satisfará la otra, y viceversa.
8	c	Una ecuación lineal en una variable tiene la forma ax + b = 0, donde a y b son conocidas y x es la variable que se desea resolver.
9	c	Una ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales con a $\neq$ 0. Esta ecuación involucra el cuadrado de la variable desconocida, lo que la diferencia de una ecuación lineal.
10	a	La solución es: -15.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 6		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	Podemos establecer un sistema de ecuaciones para encontrar el número de árboles de cada tipo. Si **x** representa el número de árboles de manzana y **y** el de peras, obtenemos que $x + y = 80$ y $0.5x + 0.3y = 560$. Resolviendo el sistema tenemos que el agricultor tiene 40 árboles de manzana y 40 de pera.
2	F	Podemos establecer un sistema de ecuaciones para resolver este problema. Si **x** representa la edad del hijo y **y** la edad del padre, entonces tenemos las ecuaciones $y = 3x$ y $x + y = 48$. Al resolver, el hijo tiene 12 años y el padre tiene 36 años.
3	a	La velocidad del automóvil es 60 millas por hora.
4	c	María ha invertido, 35000 dólares al 6 % y los restantes 65000 al $4\frac{1}{2}\%$.
5	b	El ancho mide 50 pies y la longitud 58 pies.
6	b	Se deben usar 8 libras de café a \$4 y 12 libras de café a \$6.
7	a	Se vendieron 30 camisetas básicas y 20 prémium.
8	a	Debe comprar 5 lápices y 10 bolígrafos.
9	a	Se debe usar 40 kilogramos del fertilizante a \$8 y 60 kilogramos del fertilizante a \$12.
10	b	Se vendieron 15 juguetes a \$10 y 25 juguetes a \$15.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 7		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	F	La desigualdad $4 \leq 3x-2 < 13$ se puede resolver en dos pasos. Primero, sumamos 2 a todos los lados de la desigualdad para obtener $6 \leq 3x < 15$. Luego, dividimos por 3 para aislar **x** y obtenemos $2 \leq x < 5$. El intervalo correcto es [2,5).
2	F	Para resolver la desigualdad cuadrática $10x-12 \geq 2x$, primero llevamos todos los términos al mismo lado de la desigualdad para obtener $-10x+12 \leq 0$. Luego, factorizamos para obtener $(x-2)(2x-6) \leq 0$. Esto da como resultado dos soluciones $x \leq 2$ y $x \geq 3$, lo que significa que la solución correcta es $\{x/2 \leq x \leq 3\}$
3	c	La solución de la desigualdad es: $(0,1) \cup (-1,4)$
4	a	El valor absoluto es $\{x/3 < x < 7\}$
5	a	El intervalo de la temperatura es: $[75,93]$.
6	b	El valor absoluto es: $2 < \|x\|$.
7	a	El intervalo que Janet puede manejar es: $\{m \ / \ 12000 < m < 14000\}$.
8	b	El intervalo de la estatura es: $62{,}4 < h < 74$.
9	b	El intervalo solución (4, 6].
10	c	El intervalo solución es: (-6, -4).

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 8		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	Una función matemática es una relación en la que a cada elemento del conjunto de entrada (dominio) le corresponde exactamente un elemento del conjunto de salida (codominio).
2	F	La notación general de una función es f(x), donde **f** es el nombre de la función y **x** es la variable independiente. La variable dependiente se denota como f(x).
3	a	Dominio se denota $D_{(f)}$ y el codominio $C_{(f)}$. El dominio es el conjunto de todos los posibles valores de entrada (variables independientes), mientras que el codominio es el conjunto de todos los posibles valores de salida (variables dependientes).
4	c	La diferencia clave entre una función lineal y una función cuadrática radica en la forma de sus gráficos: la función lineal produce una línea recta y la función cuadrática produce una parábola.
5	a	El dominio de una función son todos los valores de entrada (variables independientes) para los cuales la función produce un resultado definido.
6	b	Para la función $f(x)=x^2+4$, primero elevamos al cuadrado la entrada **x**, lo que significa multiplicar x por sí mismo, y luego le sumamos 4. Por lo tanto, la expresión verbal que describe esta función es: "Elevar al cuadrado, luego sumar 4".
7	a	El resultado es 13.
8	b	El resultado es 7.
9	b	El resultado es 9.
10	a	La respuesta es $-\frac{15}{4}$.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 9		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	La razón de cambio promedio de una función es una medida que indica cuánto cambia el valor de la función en promedio cuando la variable independiente (x) experimenta un cambio determinado. Es una forma de medir la tasa de cambio general de la función en un intervalo específico.
2	V	Para la función $f(x)=x^2$, la razón de cambio promedio entre x=1 y x=5 es (f(5) −f(1))/(5−1)=(25−1)/(5−1)=6. Esto indica que la función incrementa en 6 unidades por cada unidad de cambio en **x**, lo que es consistente con el comportamiento de una función cuadrática.
3	a	50 millas por hora.
4	c	La razón de cambio promedio de una función entre dos puntos **a** y **b** se calcula dividiendo la diferencia de las imágenes de los puntos por la diferencia de las coordenadas de los puntos. Por lo tanto, la respuesta correcta es $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
5	c	La razón de cambio es 3, esto indica que la función tiene una tasa constante de cambio.
6	a	La razón de cambio -4.
7	a	La razón de cambio -2.
8	b	La razón de cambio 3.
9	b	La razón de cambio neto es 15.
10	a	La razón de cambio neto es 5.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 10		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	La forma general es: $f(x) = ax + b$, donde a y b son constantes y x es la variable independiente. Esta forma se conoce comúnmente como la ecuación de pendiente-intersección, donde **a** representa la pendiente de la recta y **b** es el término independiente que indica el punto de intersección de la recta con el eje y.
2	V	La pendiente de una función lineal indica la tasa de cambio de la variable dependiente (generalmente y) con respecto a la variable independiente (generalmente x). Se calcula como el cociente del cambio en la variable dependiente dividido por el cambio en la variable independiente.
3	a	La fórmula para calcular la pendiente **p** de una función lineal a partir de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la recta es $p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Esto se deriva de la definición de pendiente como el cambio en y dividido por el cambio en x.
4	b	La pendiente es 2.
5	c	La pendiente es -3.
6	c	$a = 3$ y $b = 2$.
7	a	$a = -6$ y $b = 3$.
8	a	No tiene pendiente porque no es función lineal.
9	c	$a = -\frac{5}{4}$ y $b = \frac{1}{4}$.
10	b	La pendiente es 3.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 11		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	F	Una sucesión es una secuencia ordenada de números o términos en la que cada término sigue un patrón o regla predefinida. Estos términos pueden ser números racionales, irracionales, enteros o cualquier otro tipo de elemento que cumpla con la regla establecida.
2	F	La notación general de una sucesión se expresa comúnmente como a_n donde a es el término general y n es el índice que indica la posición del término en la secuencia.
3	a	Los cinco primeros términos son: 7,11,15,19,23.
4	c	La serie es: 2,5,10,17,26.
5	a	El n-ésimo es: $2n$
6	a	Los primeros cinco términos son: $1,3,5,7,9$.
7	c	Los primeros cinco términos son: $0,3,8,15,24$
8	a	Los primeros cinco términos son: $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$
9	a	Los primeros cinco términos son: $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},-\frac{1}{32}$
10	a	El n-ésimo término es: $a_n = \frac{2n-1}{2n}$

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 12		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	Una sucesión aritmética es aquella en la que la diferencia entre cualquier par de términos consecutivos es constante. Esto significa que cada término se obtiene sumando (o restando) una cantidad constante, llamada diferencia, al término anterior.
2	F	La fórmula general para el término n-ésimo de una sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1)d$, donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y d es la diferencia común entre los términos consecutivos.
3	c	La fórmula general para el término n-ésimo de una sucesión geométrica es $a_n = a_1 + r^{(n-1)}$, donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y r es la razón común entre los términos consecutivos.
4	b	El planteamiento que así: $a_n = 2 + (n-1)3$
5	a	La fórmula para calcular el término n-ésimo de las sumas parciales de una sucesión aritmética es $S_n = n\left(\frac{a+a_n}{2}\right)$, donde S_n es la suma de los primeros n términos, **a** es el primer término, y a_n es el término n-ésimo.
6	b	El término n-ésimo es: $a_n = 2 + 3(n-1)$
7	a	El término n-ésimo es: $a_n = 9 - 5(n-1)$
8	a	El término n-ésimo es: $a_n = 3(2)^n$
9	b	El término n-ésimo es: $a_n = 2(-5)^{n-1}$
10	c	El término n-ésimo es: $a_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 13		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	La definición del límite de una función se expresa como $f(x) = L$, lo que significa que el valor de **f(x)** se acerca a **L** cuando **x** se acerca a **a**.
2	F	El límite de esta función es $0.166666 \ldots$ Este resultado se puede obtener aplicando técnicas de límites, como la regla de L'Hôpital o la racionalización del numerador.
3	a	Un límite es infinito $(\infty, -\infty)$ cuando en la función se acerca a valores cada vez mayores al ∞, o, menores $-\infty$.
4	b	Una asíntota en una función es una línea recta a la cual la función se acerca continuamente a medida que **x** se aleja hacia ±∞, pero nunca cruza o toca la línea.
5	b	Una función es continua en un punto si y solo si el límite en ese punto existe y es igual al valor de la función en ese punto. Esto se conoce como el "teorema del límite de una función continua".
6	a	El valor del límite es 0.5.
7	a	No existe el límite.
8	b	$f_{(x)} = L$
9	a	$f_{(x)} = L$
10	a	No existe el límite.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 14		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	V	La notación estándar para expresar un límite es $f(x)$ donde *a* es el punto hacia el cual se aproxima *x*, y *f*(*x*) es la función que se está evaluando en ese límite.
2	F	La definición correcta del límite de una función **f(x)** cuando x tiende a **a** es $f(x) = L$, lo que significa que el valor de f(x) se aproxima a **L** a medida que **x** se aproxima a **a**, no **a** mismo.
3	a	El límite es: 0.5.
4	c	El valor del límite es: $\frac{1}{6}$
5	a	La ley de la suma es: $[f(x) + g(x)] = f(x) + g(x)$
6	a	$f_{(x)} + g_{(x)}$
7	b	$cf_{(x)}$
8	a	$f_{(x)} \cdot g_{(x)}$
9	b	$[f_{(x)}]^n$ donde n es entero positivo.
10	a	$\sqrt[n]{f_{(x)}}$ donde n es entero positivo.

Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

Álvarez, F., de la Lanza, C., Ortiz, J. (2002). *Precálculo.* Mc Graw-Hill

Andrade, E., Cuenca, L., y Larrea, P. (2019). *Texto fundamentos matemáticos*. Universidad Técnica Particular de Loja.

Academia internet. (30 de noviembre de 2023). Cómo resolver problemas de Inecuaciones. https://www.youtube.com/watch?v=yKiGhV3scAM

Academia JAF. (30 de noviembre de 2023). Sistemas de ecuaciones no lineales - Con una ecuación de segundo grado. https://www.youtube.com/watch?v=w44c_gX_tyg

Cuenca, L. (2019). *Introducción a las desigualdades*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=poFDfvI3KDQ. (Enlaces a un sitio externo.)

Cuenca, L. (2019). *Productos notables*. [Archivo de video] https://view.genial.ly/5cf066e1c506180f39cda4e0 (Enlaces a un sitio externo.).

Cuenca, L. (2019). *Representación de números racionales*. [Archivo de video].

Demana, F., Waits, B., Foley, G. y Kennedy, D. (2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Goodman, A. y Hiersh, L. (2011). *Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica*. Prentice Hall-Hispanoamericana S.A.

JulioProfe. (2014). *Desigualdades cuadráticas-Ejercicio 3.* [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=wzV2ZkKhB7A

Matemáticas Profe Alex. (2016). *Productos notables*. Conceptos previos. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=G-ym95yl3Es

Math2me. (2013). *Factorización por agrupación*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=vgG2l5V6HG4

Morales, E. (2014). *Intervalos*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=LnK47p17AtQ

Sánchez, A. (2009). *Suma y resta de expresiones racionales. Parte 2*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=vgG2I5V6HG4

UtecContenidos. (2017). *M Modelado con ecuaciones A*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=TEddZghjFNs

Vitual. (2015). *Racionalización (el denominador es un binomio). Ejemplo 2*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=1TC-Ik48yxA

Referencias