La Universidad Católica de Loja

Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Funciones Polinomiales y Racionales y su Didáctica

Guía didáctica

Modalidad de estudio: a distancia

UTPL

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Sistemas de Conocimiento de Funciones Polinomiales y Racionales y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
▪ *Pedagogía de las Ciencias Experimentales(Pedagogía de las Matemáticas y la Física)*	II

Autor:

Luis Alberto Cuenca Macas

EDUC_1131

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento de Funciones Polinomiales y Racionales y su Didáctica
Guía didáctica
Luis Alberto Cuenca Macas

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojacialtda@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-991-5

26 de marzo, 2024

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Identificar, diseñar e integrar los sistemas de conocimiento de la física y la matemática relacionados con el entorno natural y social de los estudiantes, aplicando metodologías y didácticas específicas que faciliten la contextualización de estas áreas con la realidad de un mundo globalizado y cambiante.

- Seleccionar, adaptar y aplicar herramientas tecnológicas apropiadas para el desarrollo de metodologías activas e innovadoras que faciliten la ejecución del proceso de enseñanza aprendizaje mediante talleres práctico-experimentales permanentes, empleando contenidos contextualizados a la realidad estudiantil, nacional y mundial.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

Al existir una limitada capacitación y/o formación en temas: pedagógicos y didácticos, dominio disciplinar, la UTPL involucra recursos tecnológicos, infraestructura y personal capacitado en las diferentes áreas del conocimiento, para dar respuesta a los nuevos lineamientos exigidos por el reglamento para carreras y programas académicos en modalidades en línea, a distancia y semipresencial o de convergencia de medios.

2. Metodología de aprendizaje

En el estudio de la asignatura "Sistemas de Conocimiento de Funciones Polinomiales y Racionales y su Didáctica" se aplicará una metodología constructivista basada en el aprendizaje cooperativo. Esta metodología tiene como objetivo principal crear una experiencia de aprendizaje colaborativa entre los estudiantes, donde puedan apropiarse del contenido de manera efectiva (Ferreiro Gravié, Pasión por la enseñanza: Las competencias profesionales didácticas del Método ELI, 2016).

El enfoque constructivista se basa en la idea de que el aprendizaje es un proceso activo en el que los estudiantes construyen su propio conocimiento a través de la interacción con su entorno y con sus pares.

Mediante el aprendizaje cooperativo se destaca la importancia de la colaboración entre los estudiantes para alcanzar objetivos de aprendizaje compartido, fomentando la interdependencia positiva.

De esta forma se aplica el método ELI, que consta de siete momentos clave que se aplicarán en cada una de las clases y actividades de la asignatura (Ferreiro Gravié & Vizoso, 2020).

1. **Momento A:** activación social, afectiva e intelectual para crear un ambiente propicio para el aprendizaje al estimular la curiosidad y el interés de los estudiantes hacia el tema de estudio.

   Fomentar la interacción entre los estudiantes para que compartan sus ideas y experiencias relacionadas con el tema.

2. **Momento O:** orientación de la atención para captar y mantener el interés de los alumnos mediante la presentación de un panorama general del tema y sus aplicaciones prácticas.

3. **Momento R:** recapitulación o repaso de los temas estudiados hasta ese momento para fortalecer la retención y comprensión del contenido previo.

4. **Momento PI:** procesamiento de la información para permitir que los estudiantes procesen la información de forma individual o grupal, fomentando la reflexión y la asimilación del contenido.

5. **Momento I:** interdependencia social positiva para promover la interacción entre los estudiantes, donde compartirán sus conocimientos y aprenderán los unos de los otros, creando una auténtica comunidad de aprendizaje.

6. **Momento E:** evaluar el proceso y los resultados del aprendizaje de manera continua, proporcionando retroalimentación formativa para la mejora constante.

7. **Momento SSMT:** sentido y significado, metacognición y transferencia con el que se fomenta la reflexión y la metacognición, ayudando a los estudiantes a comprender el sentido y el significado del contenido, así como su aplicación en situaciones del mundo real.

Esta metodología de aprendizaje, basada en el constructivismo y el aprendizaje cooperativo a través del método ELI, proporcionará a los estudiantes una experiencia de aprendizaje enriquecedora, que promoverá la comprensión profunda de los sistemas de conocimiento de funciones polinomiales y racionales, al mismo tiempo que desarrollará habilidades de colaboración y pensamiento crítico.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Determina los principios y leyes de las funciones lineales para modelar y resolver problemas del entorno.

Para alcanzar el resultado de aprendizaje, esta asignatura se enfoca en brindar una comprensión integral de las funciones lineales y su aplicación práctica. A lo largo del curso, exploraremos estas funciones matemáticas fundamentales, aprendiendo a graficarlas, analizarlas y emplearlas para representar situaciones del mundo real. Además, nos dedicaremos a desarrollar estrategias pedagógicas efectivas para enseñar estas funciones en el aula, con el fin de capacitar a nuestros estudiantes para aplicar estas habilidades en una variedad de contextos de la vida real mediante la modelación matemática.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 1

Es importante su participación en las sesiones en tiempo real donde podrás hacer preguntas, debatir ideas y colaborar con tus compañeros de curso. En tu aula virtual contarás con una amplia gama de materiales, incluyendo lecturas, ejercicios prácticos, videos explicativos y ejemplos resueltos.

Fomentamos el aprendizaje colaborativo a través de actividades grupales, proyectos conjuntos y discusiones en línea, permitiéndote aplicar los conceptos en contextos prácticos.

Con todo ello, estará listo para inspirar y guiar a sus futuros estudiantes hacia una comprensión profunda de las funciones lineales, capacitándolos para abordar desafíos del mundo real con confianza y destreza matemática. *¡Bienvenidos a esta emocionante aventura de aprendizaje en línea!*

Unidad 1. Funciones

La conceptualización de las funciones es de gran importancia, es por ello por lo que empezaremos analizando algunos temas relacionados con las funciones y sus propiedades, en esta primera unidad nos apoyaremos en los siguientes temas:

- Relaciones y funciones en nuestro entorno.
- Definición, dominio y rango de una función.
- Formas de representar funciones.

Previo a iniciar el estudio de las funciones, analicemos y demos respuesta a los siguientes cuestionamientos:

> ¿Qué entendemos por relaciones, funciones y cómo se relacionan con nuestro entorno? ¿Cuáles son las características que poseen las funciones? ¿En la vida real para que nos es útil la noción de una función? ¡Adelante, iniciemos con este estudio!

1.1. Relaciones y funciones en nuestro entorno

En nuestra vida cotidiana estamos rodeados de relaciones, por ejemplo: la relación entre personas y fechas de nacimiento, la relación con estudiantes y estudios, etc. Claramente en toda relación se identifica dos conjuntos, el primero de partida donde nace la relación y el segundo de llegada, es decir, hacia donde llega la relación; en el caso de la relación entre personas y fechas de nacimiento, el conjunto de partida correspondería a cada una de las personas y el conjunto de llegada a las fechas de nacimiento.

De esta forma podemos realizar una primera aproximación al concepto de función, ya que se trataría de una relación entre dos conjuntos de valores, pero que deben cumplir dos condiciones:

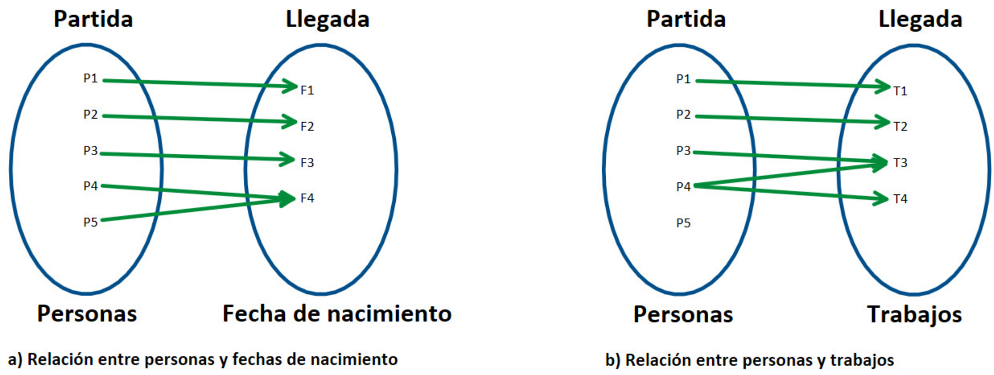
1. Todos los elementos del conjunto de partida deben tener una relación.

2. A cada elemento del conjunto de partida le corresponde una única relación.

En la figura 1 se puede apreciar dos relaciones, la gráfica a, cumple con las condiciones, mientras que la b, no cumple las condiciones, por lo que no se la puede catalogar como función.

Figura 1

Ejemplos de relaciones a y b



Nota. Cuenca, L., 2023.

Se puede apreciar que en la relación a, cada persona tiene asignada una fecha, así mismo se aprecia que la persona 5 y 4 comparten una misma fecha de nacimiento, lo cual es algo que sucede en la realidad, con lo cual esta relación cumple con las características para ser catalogada como función. En cambio, en la relación b, se puede apreciar que no todas las personas tienen un trabajo, adicional se observa que la persona 4 tiene dos trabajos, lo que hace que se incumpla las condiciones para ser una función.

A continuación, le invito a participar en el siguiente quiz titulado relaciones y funciones, en el cual deberá identificar si las relaciones propuestas son funciones o no.

Como pudo haber notado, existen relaciones que no se los puede considerar como funciones, dado que no cumplen con las dos condiciones, así mismo encontramos múltiples ejemplos que sí cumplen con las características de las funciones. Le invito a que analice su entorno e identifique las relaciones existentes y proceda a clasificarlas.

1.2. Definición, dominio, rango y evaluación de función

Una función se refiere a la relación entre dos variables, lo que implica que un cambio en una variable afecta a la otra. Por ejemplo, puede observarse la relación entre la presión de aire de un compresor y la altura de una llanta, o los ingresos por ventas y el número de libros vendidos. En estos casos, el conjunto de valores posibles para las variables independientes y dependientes se considera como el conjunto de partida y el conjunto de llegada, respectivamente.

Una función de dos variables se define como la relación entre los conjuntos a los que pertenecen estas variables. En esta relación, para cada valor que pueda tomar la variable independiente, existe un único elemento en el conjunto al que pertenece la variable dependiente que le corresponde, de esta forma no puede darse el caso que un elemento del conjunto de partida le corresponda 2 o más elementos del conjunto de llegada.

La nomenclatura que se usa para las funciones está dada por $y=f(x)$ "y es igual a f de x" con ello se denota que la variable dependiente y es una función de la variable independiente x.

Para completar el concepto de función, es necesario conocer los tipos de funciones, los conjuntos, dominio y rango de cada tipo de función. Estos conocimientos permitirán interrelacionar sus expresiones algebraica y gráfica en el plano cartesiano.

Dominio: se considera al conjunto de los valores presentes en el conjunto de partida o también conocido como los valores que va a tomar la variable independiente, los valores se ubican en el eje x de un plano cartesiano.

El dominio siempre parte de todos los reales, luego dependiendo del tipo de función van agregando restricciones al mismo. Por ejemplo, **para funciones polinomiales,** exponenciales: el dominio será el conjunto de los números reales, **para funciones racionales:** el dominio será el conjunto de los reales con excepción de aquellos valores que hagan que el denominador sea 0, **para funciones con radicales pares:** el dominio será el conjunto de los reales sin considerar a los valores que generen que el radicando sea menor que 0. (Cuenca Macas, Andrade Pazmiño, & Larrea Falconi, 2020)

Rango: se refiere al conjunto de los valores de salida de la función, *f(x)* los cuales que están relacionados con la variable dependiente, gráficamente los valores del rango se representan sobre el eje y.

El rango se puede obtener mediante la gráfica de la función, otra alternativa es usar el método algebraico realizando un despeje de la variable independiente en función de la variable dependiente.

Ejemplo 1. Obtener el dominio y rango de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 7 + 2x$,

El dominio son todos los reales, dado que no hay restricción alguna para que la variable x tome valores.

El rango son todos los reales, ya que para cada valor de x tendrá un valor asociado.

Para denotar todos los reales en notación de intervalos se lo realiza así:

$$(-\infty, \infty)$$

b. $f(x) = \frac{4x-2}{x-5}$,

El dominio son todos los reales, menos aquellos valores que hagan el denominador *x* - 5 sea 0, para ello se iguala el denominador a 0.

$$x - 5 = 0$$

$$x=5$$

Entonces el dominio abarca a todos los reales con excepción del 5, expresado en intervalos sería:

$$(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$$

Para el rango se procede despejando x en función de y o f(x)

$$f(x)\,(x - 5) = 4x - 2$$

$$f(x)\,x - 5f\,(x) = 4x - 2$$

Se agrupan x y se saca factor común

$$f(x)\,x - 4x = 5f(x) - 2$$

$$x(f(x) - 4) = 5f(x) - 2$$

Despejamos x

$$x = \frac{5f(x) - 2}{f(x) - 4}$$

De esta forma, los valores que deben omitirse del rango son aquellos f(x) que hagan 0 el denominador.

$$f(x) - 4 = 0$$

$$f(x) = 4$$

Por lo tanto, el rango son todos los reales menos el 4.

c. $f(x) = \sqrt{x+2}$, Dominio: excluir aquellos valores que hagan que el contenido del radical par sea negativo.

$x+2<0$, estos se excluyen.

$x+2\geq 0$, estos son permitidos.

$x<-2$, es decir, de todos los reales se excluyen los reales menores a -2.

Por lo tanto, el dominio será los reales mayores o iguales a -2.

$$x + 2 \geq 0$$

$x \geq -2$, y se dice que el dominio son los reales mayores o iguales a -2. Y en notación de intervalos:

$$[-2, \infty)$$

Para el rango dado que el radicando es lineal, entonces el rango será los reales positivos:

$$[0, \infty)$$

¿Qué implica evaluar una función?

Evaluar una función no es más que encontrar el valor de salida de la función para un determinado valor de entrada. Por ejemplo, si se tiene la función:

$$f(x) = 2x + 4$$

Al evaluar para la entrada 5 se tendría que encontrar , lo que implica reemplazar 5 en lugar de x:

$$f(5) = 2(5) + 4$$

$$f(5) = 10 + 4 = 14$$

De esta forma $f(5) = 14$.

1.3. Formas de representar funciones

Las funciones pueden ser representadas de diversas formas. Aquí se presentan las cuatro formas más comunes:

Tabla 1

Tipos de funciones

Tipo de función	Definición
Expresión algebraica o fórmula.	Esta es la forma más común de representar una función. En este enfoque, se utiliza una ecuación o fórmula matemática para expresar la relación entre la variable independiente (por lo general, denotada como "x") y la variable dependiente (por lo general, denotada como "y"). Por ejemplo, la función lineal y = 2x + 3 es una expresión algebraica que relaciona "x" y "y".

Tipo de función	Definición
Gráfica	Una representación gráfica de una función muestra cómo los valores de "x" se relacionan con los valores correspondientes de "y". Esto se hace generalmente mediante un gráfico en un plano cartesiano, donde "x" se coloca en el eje horizontal (eje x) y "y" en el eje vertical (eje y). Cada punto en el gráfico representa un par ordenado (x, y), lo que permite visualizar fácilmente la relación funcional.
Tabla de valores	Otra forma de representar una función es mediante una tabla de valores. En esta tabla, se enumeran varios valores de "x" y se calculan los valores correspondientes de "y" utilizando la expresión algebraica de la función. Esto proporciona una lista de pares ordenados que muestran cómo los valores de "x" se relacionan con los valores de "y".
Descripción verbal o en palabras	A veces, una función se describe verbalmente sin utilizar una ecuación o gráfico. En este enfoque, se utiliza el lenguaje natural para explicar cómo una variable depende de otra. Por ejemplo, "la temperatura disminuye a medida que aumenta la altitud" es una descripción verbal de una relación funcional.

Nota. Cuenca, L., 2023.

Estas formas son herramientas útiles en matemáticas y ciencias para comprender y comunicar la relación entre las variables. Es importante mencionar a Raymond Duval, un matemático francés, quien desarrolló la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS), que postula que la construcción conceptual y la comunicación en matemáticas están intrínsecamente ligadas a la actividad de crear representaciones y a los procesos de transformación de sistemas de signos, conocidos como "registros", que constituyen estas representaciones. (Duval, 1999).

La sustitución de objetos matemáticos escolares por representaciones semióticas se basa en las transformaciones y relaciones entre los signos que están regidos por reglas específicas. Esta actividad desempeña un papel fundamental en la comunicación y en la adquisición de nuevos conocimientos en matemáticas. Los errores o dificultades en el aprendizaje de matemáticas suelen estar relacionados principalmente con problemas en la conversión, es decir, en las transformaciones de representaciones de un tipo de registro a otro.

Por lo tanto, resulta crucial la habilidad de cambiar de un registro a otro para comprender y comunicar adecuadamente las relaciones entre variables.

Para profundizar el análisis en la definición de función, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 2.1 dónde se explica con ejemplos ilustrativos las funciones, dominio, rango y representaciones, conceptos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 2.1 ejercicios.

Se recomienda realizar una revisión sistemática del siguiente artículo sobre rango de funciones disponible en la plataforma Khan Academy, este artículo le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre determinar el rango de funciones.

Con la realización de este repaso se puede comprender de forma clara cómo se obtiene el rango de una función, ya que en los ejercicios propuestos le permite ir experimentando y poniendo en práctica los distintos aspectos que debe considerar, con lo cual se afianza el conocimiento.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta primera semana estudiamos sobre las funciones, para reforzar estos aprendizajes teóricos es conveniente experimentarlos, para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Enumere 2 relaciones que, SI cumplen las características para ser función, indique el conjunto de partida y el conjunto de llegada.

2. Enumere 2 relaciones que NO cumplen las características para ser función.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Ejercicios sobre dominio, rango, evaluación y representación de funciones

Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con las funciones, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 2

1.4. Gráfica de funciones

Graficar funciones juega un papel esencial en la educación matemática y es una herramienta importante para los futuros profesores de matemáticas. Estas representaciones visuales permiten a los estudiantes comprender conceptos abstractos de una manera concreta y accesible. Los gráficos proporcionan una representación visual de cómo interactúan las variables y cómo los cambios en una variable afectan a otra, lo que facilita la comprensión de las relaciones matemáticas. Además, los gráficos son esenciales para ilustrar conceptos como transformaciones de funciones y resolver problemas del mundo real.

Es fundamental tener habilidades sólidas en la interpretación y creación de gráficas. De esta manera, se puede promover una comprensión profunda de las matemáticas entre los estudiantes y ayudarles a aplicar estas habilidades de manera efectiva en diferentes situaciones de la vida diaria. A continuación, le invito a revisar con detenimiento la siguiente infografía donde se explica cómo graficar una función.

Es importante tener en cuenta que la forma de la gráfica estará determinada por la función que estés representando. Existen diversas formas en las que estas líneas pueden presentarse: pueden ser rectas, curvas, parábolas, exponenciales, entre otras. La práctica es esencial para mejorar tus habilidades en gráficos y comprender el comportamiento de las funciones.

1.4.1. Gráfica de funciones por tramos

Comprender la importancia de las funciones definidas por tramos es esencial en su formación. Estas funciones son una herramienta poderosa, permiten modelar situaciones reales y muestran cómo las matemáticas se aplican en la vida cotidiana.

¿Pero cómo se grafica una función definida por tramos?

Primero hay que considerar que cada tramo obedece a una condición, por ejemplo, la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \ x < 0 \\ x, \ x \geq 0 \end{cases}$$

Posee dos tramos, el primero indica que para los valores negativos el resultado será -x, y para los valores positivos el resultado de la función será x.

Entonces, para graficar esta función con la ayuda de GeoGebra procedemos a utilizar el comando Si, y se procede a escribir esta secuencia de comandos en GeoGebra para ingresar una función por tramos.

Nombre de función = Si(condición 1, expresión 1, condición 2, expresión 2, …) donde cada condición hace referencia a un tramo de la función.

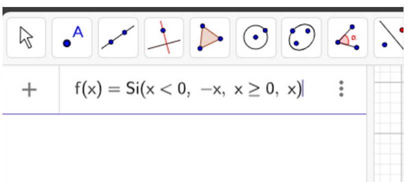
Entonces para graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} -x, \ x < 0 \\ x, \ x \geq 0 \end{cases}$$

Se debe escribir el siguiente comando: f(x)=Si(x<0,-x,x>=0,x) en la entrada de GeoGebra, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 2

Vista de entrada de comando en GeoGebra



Nota. Adaptado de *GeoGebra Classic* [Ilustración], GeoGebra, 2024, GeoGebra. CC BY 2.0

A continuación, realice la siguiente práctica con la herramienta GeoGebra.

Título: Visualizar y manipular una función definida por tramos.

Instrucciones: en la aplicación GeoGebra, siga las instrucciones dadas y experimente con las gráficas de funciones definidas por tramos.

i. Ingrese la función definida por tramos, puede usar las propuestas en su libro de **texto básico** en la sección de ejercicios 2.2 sobre trazar gráficas de funciones definidas por tramos.

ii. Recuerde usar el comando Si para establecer cada uno de los tramos de la función.

iii. Finalmente, podrá visualizar la función.

Applet de GeoGebra – Función definida por tramos.

En esta experimentación, se observa con claridad cómo los tramos que conforman la función se van generando, es importante que se estructure de forma adecuada el comando Si, ya que de no hacerlo no obtendremos la gráfica correcta.

¿Las funciones definidas por tramos se usan en la vida real?

Por supuesto, por ejemplo, en las tarifas diferenciadas de servicios básicos como la telefonía, donde se cobra a los consumidores una tarifa base de $6 dólares por mes, más 10 centavos por minuto por los primeros 300 minutos consumidos y 6 centavos por minuto por el consumo mayor de 300 minutos.

La función que define esta situación sería:

$$f(x) = \begin{cases} 6 + 0.1x, 0 < x \leq 300 \\ 6 + 0.1(300) + 0.06(x - 300),\ x > 300 \end{cases}$$

Ahora puedes representarla mediante GeoGebra a la función.

1.4.2. Prueba de la recta vertical

La prueba de la recta vertical es un concepto básico en el análisis de funciones, ya que proporciona una herramienta valiosa para identificar si una gráfica representa o no a una función. Para ello se traza una línea vertical sobre una gráfica en el plano cartesiano y se observa la intersección con la gráfica, si corta con la gráfica en un solo punto, entonces se tratará de una función; caso contrario si corta en varios puntos, se puede decir que la gráfica no se ajusta a una definición estricta de la función.

A continuación, realice la siguiente práctica con la herramienta GeoGebra.

Título: prueba de la recta vertical.

Instrucciones: en la aplicación GeoGebra, siga las instrucciones dadas y determine cuáles gráficas se corresponden con la definición de función.

i. Seleccione la gráfica.
ii. Mueva la recta vertical.
iii. Determine la gráfica que cumple con la definición de función.

Applet de GeoGebra – Prueba de la recta vertical.

Mediante este simulador pudo identificar las gráficas que se corresponden con funciones, con lo cual le permite comprender el criterio de la recta vertical para identificar si la gráfica corresponde o no a una función. Recuerde que si la recta vertical corta en más de una ocasión a la gráfica, entonces no se corresponde con una función.

Para profundizar las gráficas de función, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 2.2 donde se explica con ejemplos ilustrativos cómo se grafican las funciones, procedimiento que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece en el apartado 2.2 ejercicios.

Se recomienda evaluar funciones definidas por partes, disponible en la plataforma Khan Academy, esta práctica le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre las funciones por tramos.

Con la realización de este repaso se puede comprender de forma clara cómo se evalúa una función por tramos, ya que en los ejercicios propuestos le permite ir experimentando y evaluando la entrada de la función y debe identificar a qué tramo corresponde, con lo cual se afianza el conocimiento.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta segunda semana estudiamos sobre las gráficas de funciones, para reforzar estos aprendizajes teóricos es conveniente experimentarlos, para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Trace la gráfica de una función definida por tramos que satisfaga las siguientes condiciones:
   - Para los valores de x menores a 10, la función es: $2x^2 - 3x$
   - Para los valores de x entre 10 y 50, la función es: $4x - 2$
   - Para los valores de x mayores a 50, la función es: 5
2. Establece una función definida por tramos para representar la función valor absoluto.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word. Verifica lo realizado en GeoGebra.

3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Reconocer funciones a partir de gráficas.

Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar las gráficas de funciones, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 3

1.5. Información de las gráficas de funciones

La representación gráfica de una función provee información valiosa para analizar el comportamiento que presente el modelo matemático.

¿Qué podemos encontrar en la gráfica de una función?

Dentro de la gráfica se puede identificar el dominio y rango, es importante recordar que el dominio representa la entrada de la función, visualmente se ubica en el eje x, y el rango, en cambio, es el resultado de la función que se obtiene al ingresar valores del dominio; visualmente se ubica en el eje x, mientras que el rango se ubica en el eje y.

A continuación, realice la siguiente práctica con la herramienta GeoGebra.

Título: Identifica el dominio y rango.

Instrucciones: en la aplicación GeoGebra, siga las visualice los valores del dominio y rango.

i. Ingrese una función.
ii. Active la opción dominio, luego la opción rango
iii. Para detener la simulación, debe dar clic sobre el botón Detener.

Applet de GeoGebra – Dominio y Rango.

Con este simulador se pudo de forma visual identificar el dominio cuyos valores se representan a largo del eje x, y el rango donde los valores se representan en el eje y.

¿Cómo identificar máximos, mínimos y segmentos crecientes, decrecientes, en una función?

Los puntos máximos, mínimos y los segmentos crecientes y decrecientes son esenciales en el análisis de funciones por diversas razones (Swokowski, y otros, 2018):

1. **Comprender el comportamiento de la función**

   Los valores máximos y mínimos representan los valores más altos y bajos de la función en un intervalo, lo que proporciona información crucial sobre su comportamiento.

   Los intervalos de crecimiento y decrecimiento muestran en qué rangos la función aumenta o disminuye, lo que ayuda a entender cómo se comporta la función.

2. **Optimización**

   En aplicaciones prácticas, los puntos máximos y mínimos pueden representar valores óptimos en problemas de optimización, como maximizar ganancias o minimizar costos.

   Los máximos y mínimos pueden ser locales, es decir, en un intervalo específico o globales en todo el dominio, lo cual puede proporcionar información sobre la función en diferentes escalas.

3. **Modelado matemático**

   En la interpretación y predicción de problemas del mundo real, ya que al identificar estos puntos y segmentos ayuda a comprender los fenómenos físicos, económicos o científicos, así como la predicción de tendencias futuras.

4. **Diseño de experimentos y análisis de datos**

   En estadística y análisis de datos, analizar los puntos extremos y los segmentos crecientes - decrecientes puede ayudar a tomar decisiones informadas basadas en patrones y tendencias presentes en la gráfica.

A continuación, realice la siguiente práctica con la herramienta GeoGebra.

Título: Segmentos crecientes y decrecientes.

Instrucciones: sobre el simulador puede ir mostrando las rectas tangentes, ascendentes, descendentes, así como visualizar los tramos crecientes y decrecientes de la función.

Applet de GeoGebra – Segmentos crecientes y decrecientes

En la animación mostrada usted puede visualizar los segmentos que son crecientes y decrecientes de la función, de forma que si a y b son dos valores del dominio de la función y b > a entonces:

1. El segmento de crecimiento es el intervalo en el cual se cumple que f(b) > f(a), y en el gráfico de la función se observa una pendiente de la tangente a la función que es positiva (recta inclinada ascendente).

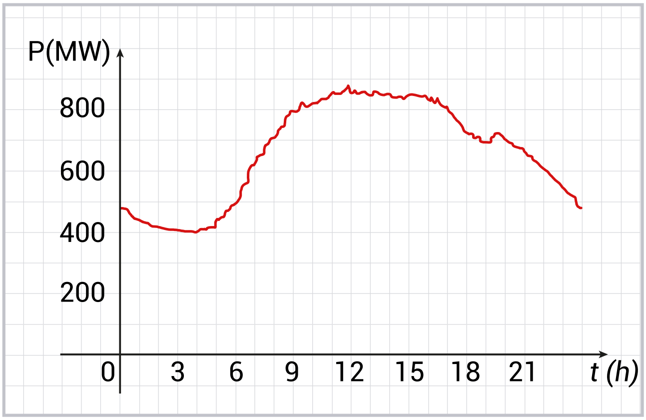
2. El segmento de decrecimiento es el intervalo en el cual se cumple que f(b) < fa), y en el gráfico de la función se observa una pendiente de la tangente a la función que es negativa (recta inclinada descendente).

Así también usted puede identificar los máximos locales de la función de color negro, y los mínimos locales en color rojo. También podrá notar que un máximo se genera cuando se presenta un cambio en el segmento que va de creciente a decreciente, mientras que un mínimo se genera al pasar de un segmento decreciente a creciente.

Ahora vamos a presentar una situación sobre consumo de energía en la cual se evidencia la aplicación de estos elementos, para lo cual se presenta una gráfica que muestra el consumo de energía eléctrica de una ciudad para un día en particular. Note que P se mide en megawatts (MW); t se mide en horas empezando a la medianoche.

Figura 3

Consumo de energía eléctrica de una ciudad



Nota. Tomado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

Con base a la información dada, responder a las siguientes interrogantes:

A. ¿Cuál fue el consumo de energía eléctrica a las 6:00 a.m. y a las 6:00 p.m.?

De acuerdo con la gráfica se puede observar que a las 6:00 a.m., el consumo fue aproximadamente de 500 MW y a las 6:00 p.m. fue de 720 MW.

B. ¿Cuándo fue el mínimo consumo de energía eléctrica?

El consumo mínimo fue entre las 3:00 y 4:00 a.m., ya que en este periodo de tiempo se observa en la gráfica el punto más bajo, lo que implica que sea un mínimo absoluto.

C. ¿Cuándo fue el máximo consumo de energía eléctrica?

Luego de analizar la gráfica se puede deducir que el consumo máximo se da a eso de las 12:00 p.m., ya que es donde se presenta el punto más alto en la gráfica, es decir, se trata de un máximo absoluto.

Para profundizar las gráficas de función, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 2.3 donde se explica con ejemplos ilustrativos sobre los máximos, mínimos, segmentos crecientes y decrecientes de funciones, así mismo podrá revisar sobre el dominio y rango de funciones y cómo se identifican en las gráficas, procedimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece en el apartado 2.3 ejercicios.

Se recomienda resolver los problemas verbales de interpretación de gráficas disponible en la plataforma Khan Academy, esta práctica le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre la interpretación de gráficas de funciones.

Con la realización de este repaso se puede comprender de forma clara cómo los elementos presentes en una gráfica, como intersecciones con el eje x, eje y, intervalos crecientes, decrecientes, máximos y mínimos, permiten describir distintas situaciones que están presentes en nuestra cotidianidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta tercera semana estudiamos sobre la información presente en las gráficas de funciones, para reforzar estos aprendizajes teóricos es conveniente experimentarlos, para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

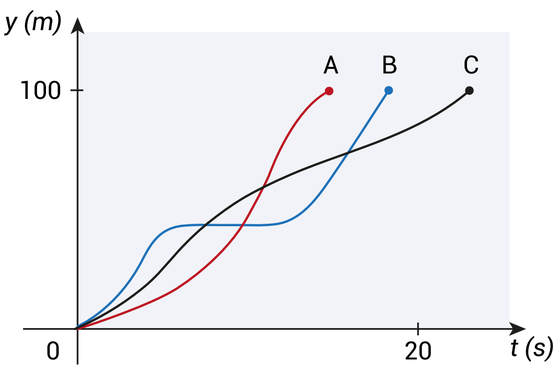
1. Analice y resuelva el siguiente problema sobre carrera de obstáculos. Tres atletas compiten en una carrera de 100 metros con vallas. La figura describe la distancia recorrida como función del tiempo para cada uno de los atletas.

   Describa verbalmente lo que indica la gráfica acerca de la carrera.

1 Bimestre

Figura 4

Gráfica sobre carrera de obstáculos



Nota. Tomado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

- ¿Quién la ganó?
- ¿Cada uno de los atletas terminó la carrera?
- ¿Qué piensa usted que le ocurrió al corredor B?

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Desarrolle los ejercicios propuestos en Khan Academy para determinar los intervalos crecientes y decrecientes.

3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Dominio y rango a partir de gráficas.

   Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo analizar los distintos elementos presentes en las gráficas de funciones, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

4. Hemos concluido la semana tres, es momento de autoevaluar nuestros conocimientos logrados hasta aquí. La presente autoevaluación le permitirá medir su aprendizaje, por lo cual es importante que la desarrolle, así mismo esta actividad le permitirá prepararse para la evaluación bimestral, para lo cual en cada pregunta seleccione el o los literales correctos.

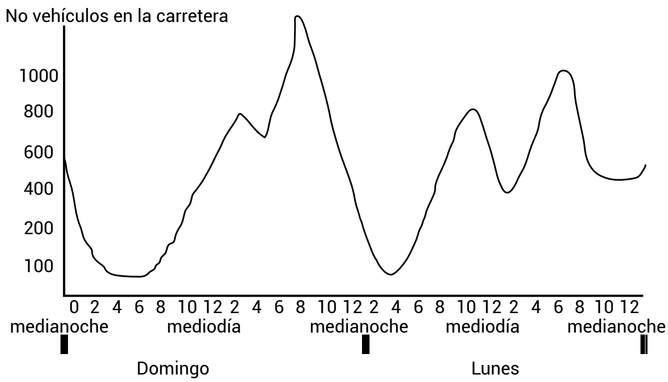
Autoevaluación 1

1. En una función al conjunto de valores que puede tomar la variable x, se la conoce como:

   a. Dominio.
   b. Rango.
   c. Recorrido.
   d. Imagen.

2. Se realizó un informe para estudiar el volumen de tráfico que circula por una de las carreteras que conecta Quito con Santo Domingo.

   Los resultados se publicaron mediante la gráfica, que muestra el número de vehículos que usa esta carretera en cada momento de tiempo durante un domingo y un lunes de cada semana.



   Seleccione el dominio y rango

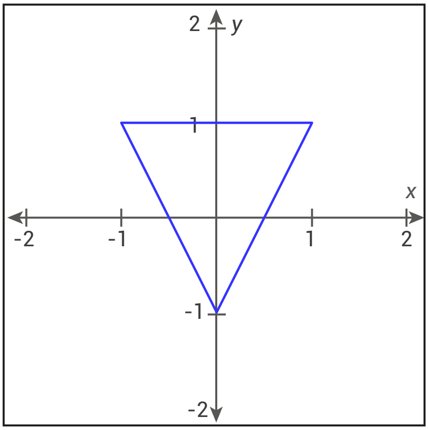
   a. Dominio: las horas del domingo y lunes.
   Rango: la cantidad de vehículos.

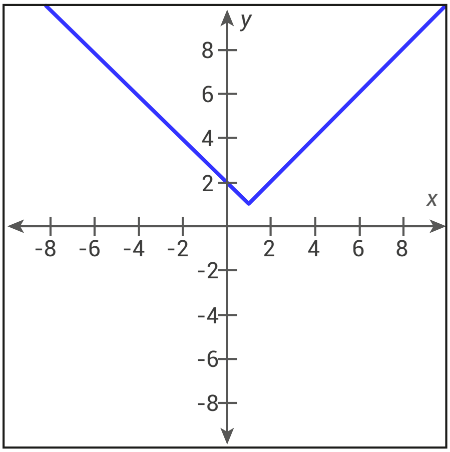
   b. Rango: las horas del domingo y lunes.
   Dominio: la cantidad de vehículos.

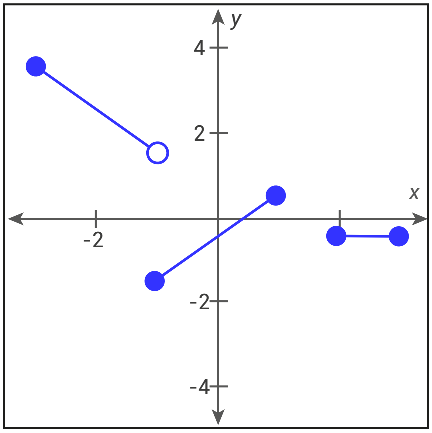
   c. Dominio: las horas.
   Rango: los días.

   d. Rango: los días.
   Dominio: las horas.

3. Seleccione los dos gráficos que representan a una función:

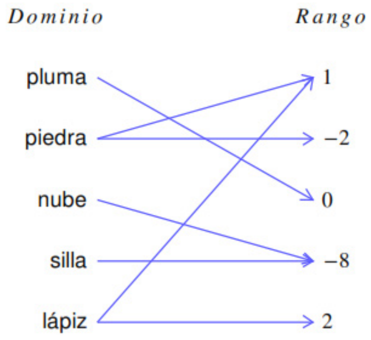
a. 

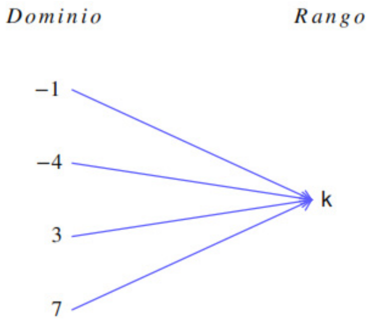
b. 

c. 

1 Bimestre

4. Seleccione las dos relaciones que son funciones:

a. 

b. 

c. {(9, −9), (1, 5), (1, 9), (1, −9)}.

d. {(−6, −6), (−4, −4), (2, 2), (5, 5)}.

5. Verdadero o falso: el dominio de una función racional nunca incluye el número cero.

a. Verdadero.
b. Falso.

6. Verdadero o falso: el dominio de una función polinómica siempre incluye todos los números reales.

a. Verdadero.
b. Falso.

7. Impuesto sobre la renta. En cierto país, el impuesto sobre ingresos iguales o menores a € 20000 es 10 %. Para ingresos mayores a € 20000, el impuesto es € 2000 más 20 % de la cantidad que pase de € 20000.

Seleccione una función f, que dé el impuesto sobre la renta en un ingreso x. Exprese f como función definida por tramos.

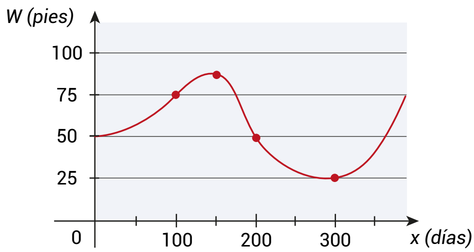
a. $$f(x) = \begin{cases} 0.1 \times x & si\ x \geq 20000 \\ 2000 + (x - 20000) \times 0.2 & si\ x < 20000 \end{cases}$$

b. $$f(x) = \begin{cases} 0.1 \times x & si\ x > 20000 \\ 2000 + (x - 20000) \times 0.2 & si\ x > 20000 \end{cases}$$

c. $$f(x) = \begin{cases} 0.1 \times x & si\ x \leq 20000 \\ 2000 + (x - 20000) \times 0.2 & si\ x > 20000 \end{cases}$$

d. $$f(x) = \begin{cases} 0.1 \times x & si\ x < 20000 \\ 2000 + (x - 20000) \times 0.2 & si\ x > 20000 \end{cases}$$

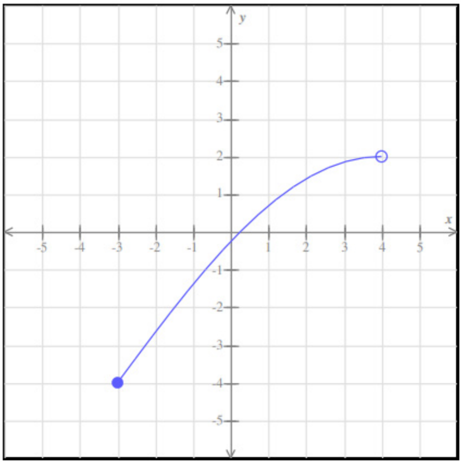
8. Niveles cambiantes de agua: la gráfica muestra la profundidad del agua W en un depósito en un periodo de un año, como función del número de días x desde el principio del año.



Determine los intervalos en los que la función W es creciente

a. De 0 a 150 días y de 300 a 400 días.
b. De 100 a 200 días.
c. De 200 a 400 días.
d. A los 150 días y 300 días.

9. La siguiente figura muestra la gráfica de la función f.



Seleccione 2 valores que pertenecen al rango.

a. -3
b. 2
c. 4
d. -4

10. Complete: el rango de una función se lo visualiza en …

a. En el eje x.
b. En el eje y.
c. En el eje x, positivo.
d. En el eje x, negativo.

Verifique sus respuestas en el solucionario que se encuentra al final de la guía didáctica.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Ir al solucionario

Unidad 2. Funciones lineales y modelos

2.1. Funciones lineales

Las funciones lineales juegan un papel fundamental en las matemáticas y en muchos campos aplicados. Estas funciones tienen la forma:

$$f(x) = mx + b$$

donde **m** es la **pendiente** y **b** es la **intersección con el eje y.**

Esta forma simple que presenta lo hace esencial para el modelado matemático, ya que son adecuadas para describir relaciones proporcionales y cambios constantes.

En aplicaciones prácticas como economía, física y estadística, las funciones lineales permiten una interpretación y predicción de fenómenos de forma clara y eficiente.

¿Qué es la pendiente, como podemos obtener una pendiente?

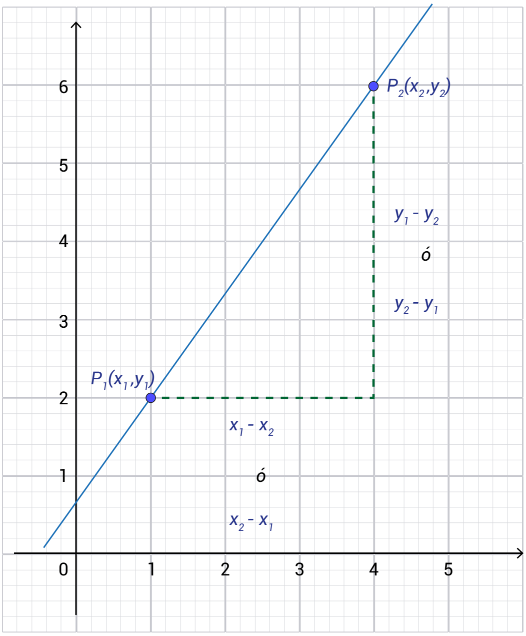
La pendiente es una medida que indica, por una parte, la orientación de la recta y por otra su grado de inclinación, por ejemplo: una pendiente negativa se asocia a una recta descendente y una pendiente positiva a una recta ascendente.

Para calcular la pendiente se debe conocer dos puntos sean $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ que formen parte de la recta, luego se determina la variación en y con respecto a x, es decir:

$$pendiente = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{variación\ en\ y}{variación\ en\ x}$$

Figura 5

Pendiente de la recta



Nota. Cuenca, L., 2023.

La variación en y, x se puede calcular de dos formas:

variación en y = $y_2 - y_1$ *o variación en y* = $y_1 - y_2$

variación en x = $x_2 - x_1$ *o variación en x* = $x_1 - x_2$

De tal forma que la pendiente se la puede obtener mediante:

$$pendiente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

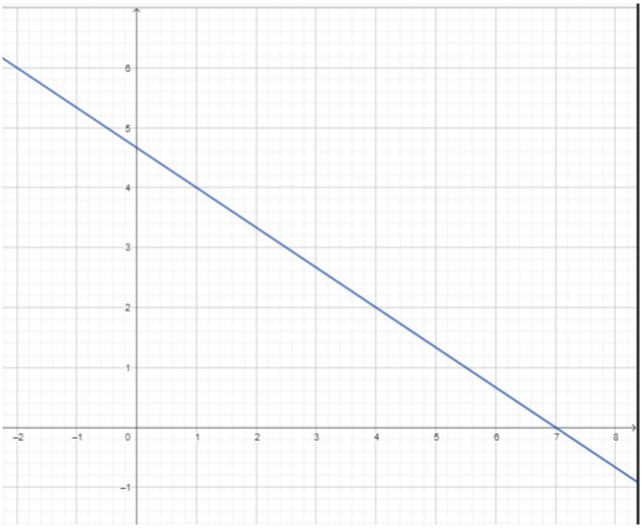
O

$$pendiente = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo: determine la pendiente de la recta que se muestra a continuación en la figura.

Figura 6

Ejemplo de pendiente



Nota. Cuenca, L., 2023.

En la figura se puede identificar 4 puntos de forma exacta (-2, 8), (1, 4), (4, 2) y (0, 7), entonces para calcular la pendiente se requiere de dos, de esta forma se podría tomar los puntos: P1(1, 4) y P2(4, 2), luego se calcula la pendiente.

$$pendiente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-4}{4-1} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

Cómo pudo notar la pendiente salió negativa, lo cual se relaciona con la recta descendente a la que corresponde, así mismo se puede interpretar que por cada unidad que se incrementa en x, se disminuye en $-\frac{2}{3}$ y.

2.2. Modelos lineales

Los modelos lineales pueden construirse de varias maneras, ya sea a partir de la gráfica, conociendo la pendiente y un punto, o incluso conociendo dos puntos específicos. Si se tiene la gráfica de una función lineal, es posible identificar su pendiente y ordenada al origen, lo que permite describir la relación entre las variables involucradas.

Por otro lado, si se conoce la pendiente y un punto específico de la función, se utiliza la forma general de la función lineal $f(x) = mx + b$ para encontrar la ordenada al origen y así completar el modelo.

Asimismo, si se tienen dos puntos en la recta, se puede calcular la pendiente y, luego, utilizar uno de esos puntos junto con la pendiente para encontrar la ordenada al origen, obteniendo así la función lineal.

Ejemplo de construcción de un modelo lineal conociendo la pendiente.

Llenando una piscina: una piscina está llenándose con una manguera a un ritmo de 10 gal/min. Inicialmente, la piscina tiene 300 galones de agua. Encuentre una función lineal V que modele el volumen de agua en el estanque en cualquier tiempo t, luego calcule el tiempo que le tomará llenar una piscina de 1000 galones.

Solución

En este problema la parte que indica "está llenándose con una manguera a un ritmo de 10 gal/min" se relaciona con la pendiente, es decir, el problema ya nos da la pendiente m=10.

Luego, en la parte "Inicialmente, la piscina tiene 300 galones de agua" se puede tomar como un punto (0, 300), o bien como la intersección con el eje y, en este caso, se lo toma como punto (0, 300).

Ahora la función es:

$$V(t) = mt + b$$

Como se conoce m, entonces se tendría:

$$V(t) = 10t + b$$

Ahora queda encontrar el valor de b, para ello se usa el punto (0, 300) en la función V, donde V(0)=300 y t=0:

$$300 = 10(0) + b$$

$$b = 300$$

De esta forma la función resultante sería:

$$V(t) = 10t + 300$$

Finalmente, se pide determinar el tiempo que le tomará en llenar una piscina de 1000 galones, entonces lo que se proporciona es: V(t)=1000, y lo que se desconoce es t, de esta manera se introduce estos valores en V:

$$1000 = 10t + 300$$

$$1000 - 300 = 10t$$

$$10t = 700$$

$$t = \frac{700}{10} = 70$$

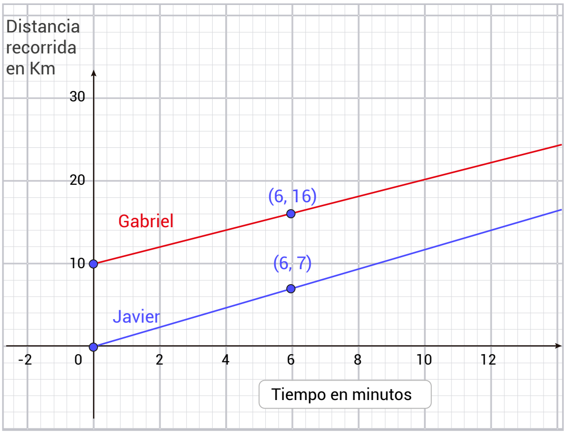
Esto significa que para llenar la piscina de 1000 galos bajo las condiciones dadas se demorará 70 minutos.

Ejemplo de construcción de un modelo lineal a partir de la gráfica.

Gabriel y su colega Javier van a trabajar cada mañana, Gabriel vive 10 Km más adelante que Javier, ambos viajan por la carretera E-35. Una mañana ambos hacia el trabajo, condujeron con una rapidez constante. La figura siguiente muestra la distancia (en km) que cada uno de ellos ha viajado en la E-35 al tiempo t (en minutos).

Figura 7

Grafica de distancias



Nota. Adaptado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

Encuentre funciones lineales f y g que modelen las distancias que Gabriel y Javier viajan como funciones de t (en minutos).

Solución

Las funciones lineales por encontrar son: *f(t) = mt + b* y *g(t) = mt + b*, en la gráfica se puede identificar los puntos para el caso de Gabriel: (0, 10) y (6,16), para Javier (0, 0) y (6, 7).

Lo siguiente es calcular las pendientes:

Para f: $m = \frac{16-10}{6-0} = \frac{6}{6} = 1$

Para g: $m = \frac{7-0}{6-0} = \frac{7}{6}$

En este caso, la gráfica proporciona la intersección con el eje y, para el caso de Gabriel es y=10 y para Javier es y=0.

De esta forma completamos cada una de las funciones.

Función lineal f que modela la distancia que Gabriel recorre es:

$$f(t) = t + 10$$

Esto implica que Gabriel por cada minuto recorre 1 Km.

Función lineal f que modela la distancia que Javier recorre es:

$$f(t) = \frac{7}{6}t$$

Esto implica que Javier por cada minuto recorre $\frac{7}{6}$ Km.

Para profundizar las funciones lineales y modelos, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 2.5 donde se explica con ejemplos ilustrativos cómo se gráfica funciones, procedimiento que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece en el apartado 2.5 ejercicios.

Se recomienda revisar el artículo sobre Modelar con tablas, ecuaciones y gráficas disponible en la plataforma Khan Academy, este artículo le permitirá modelar situaciones cotidianas que se presentan en formas diferentes, lo cual le permitirá afianzar sus conocimientos sobre la modelación con funciones.

Con la revisión de este artículo se puede comprender de forma clara cómo se modela una situación, donde los datos se presentan en tres formas: tablas, ecuaciones y gráficas, ya que en los ejemplos presentados le permite ir experimentando y evaluando los modelos lineales generados.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta cuarta semana estudiamos sobre las gráficas de funciones, para reforzar estos aprendizajes teóricos es conveniente experimentarlos, para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Trace la gráfica de una función lineal cuya pendiente sea positiva y su intersección con el eje y sea en y=-3.

2. Trace la gráfica de una función lineal cuya pendiente sea negativa y su intersección con el eje y sea en y=2.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word. Verifica lo realizado en GeoGebra.

3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Problemas verbales de modelos lineales.

Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar las gráficas de funciones lineales cuando su pendiente es positiva y negativa, así mismo trabajar con modelos lineales de problemas verbales, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 5

2.3. Transformación de funciones

Las transformaciones de funciones muestran la versatilidad que tienen las expresiones matemáticas. Las traslaciones horizontales y verticales desplazan gráficas a lo largo del eje x o y, permitiendo ajustar la posición de una función en el plano cartesiano. Las compresiones y expansiones, tanto verticales como horizontales, modifican la amplitud o longitud de las funciones, acercándolas o alejándolas del eje x o y. Las reflexiones, por su parte, invierten las gráficas alrededor de los ejes vertical u horizontal, creando simetrías.

A continuación, le invito a que revise el siguiente módulo didáctico sobre: Transformación de funciones.

Mediante este módulo didáctico pudo experimentar cómo las funciones se transforman, se observa con claridad que al modificar el dominio la transformación se da sobre el eje x, mientras que al modificar el rango la transformación se da sobre el eje y. Así mismo, siempre que se suma o resta valores al dominio, la gráfica se traslada horizontalmente, y si se suma o resta al rango, la gráfica se traslada verticalmente, mientras que al multiplicar el dominio o rango la gráfica se expande o comprime.

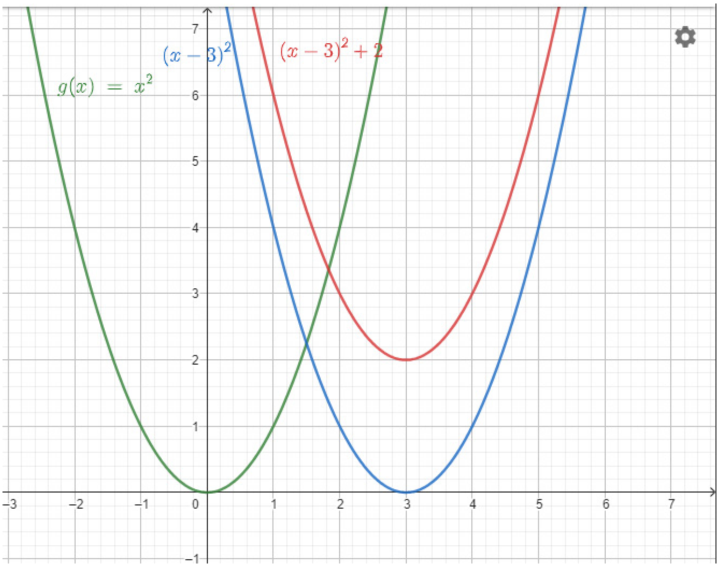
Ejemplo de una función que se traslada horizontal y verticalmente

La función $f(x) = (x - 3)^2 + 2$, se genera como resultado de aplicar transformaciones a la función $g(x) = x^2$. Identifique las transformaciones realizadas a ***g*** para obtener ***f.***

Se observa que una primera transformación se realiza dentro del dominio y corresponde a una traslación horizontal hacia la derecha de 3 unidades, $g(x - 3)$ luego se traslada verticalmente hacia arriba en 2 unidades $g(x - 3) + 2$. En la figura a continuación, puede apreciar las transformaciones que tuvo la función ***g*** hasta llegar a la función ***f***.

Figura 8

Traslación horizontal y vertical



Nota. Cuenca, L., 2023.

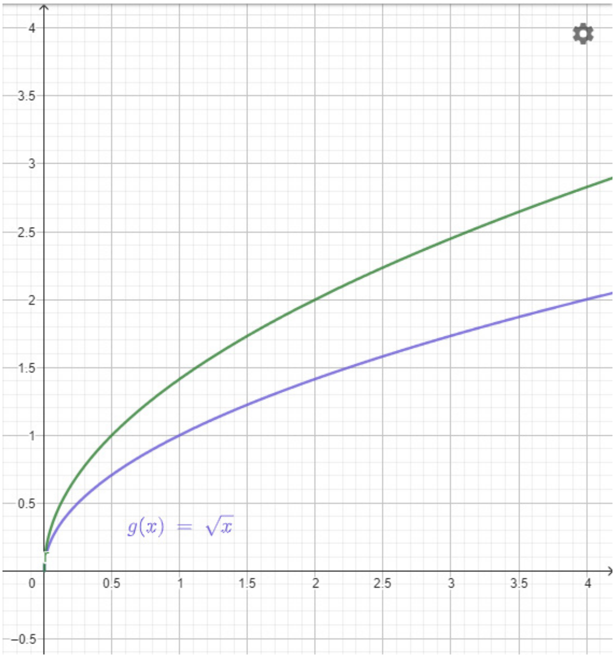
La gráfica de color verde muestra la función original ***g***, la gráfica azul muestra cómo la gráfica se traslada 3 unidades a la derecha, finalmente la gráfica de color rojo consolida la traslación vertical hacia arriba en 2 unidades.

Ahora vamos a revisar cómo identificar una transformación que involucra un estiramiento o expansión.

En la siguiente figura se presenta dos gráficas, en color azul la función original $g(x) = \sqrt{x}$, y en color verde la transformación. Identifique cuál transformación se realiza.

Figura 9

Gráfica de la función g y su transformación



Nota. Cuenca, L., 2023.

Se puede notar en la figura, que el dominio se ha modificado, ya que en la gráfica original cuando x=1, y=1, cuando x=4, y=2; así mismo en la gráfica transformada se tiene que: cuando x=0.5, y=1 y cuando x=2, y=2; como puede notar el rango sigue siendo el mismo, lo que se ha transformado es el dominio el cual se ve reducido a la mitad, ya que pasa de 1 a 0.5 y de 4 a 2, de esta forma se deduce que la transformación es: $g(2x)$, lo que implica una reducción horizontal en un factor de 2.

Reflexión vertical y horizontal

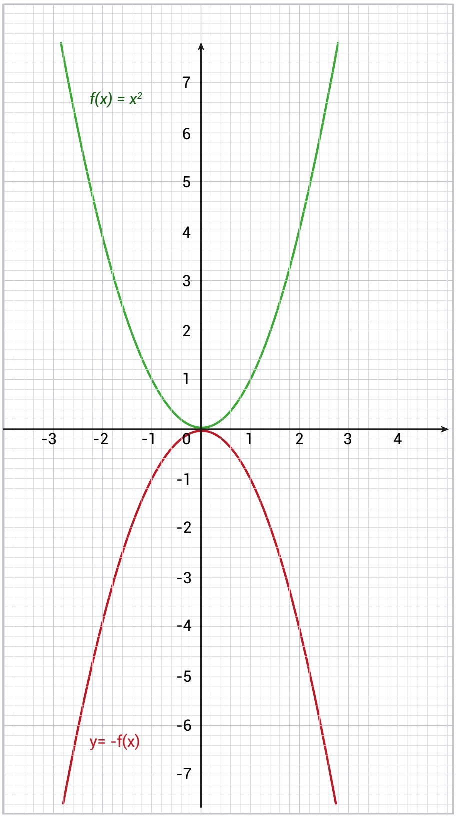
Otra transformación que se puede aplicar a las funciones es la reflexión, que pueden ser de dos tipos:

1. $y = -f(x)$

y denota una reflexión sobre el eje x, se da cuando en el rango se antepone un signo negativo. A esta reflexión también se la denomina reflexión vertical. En la figura siguiente se ilustra la función f de color verde, y su reflexión vertical representada por $y = -f(x)$ de color naranja.

Figura 10

Reflexión vertical y=-f(x)



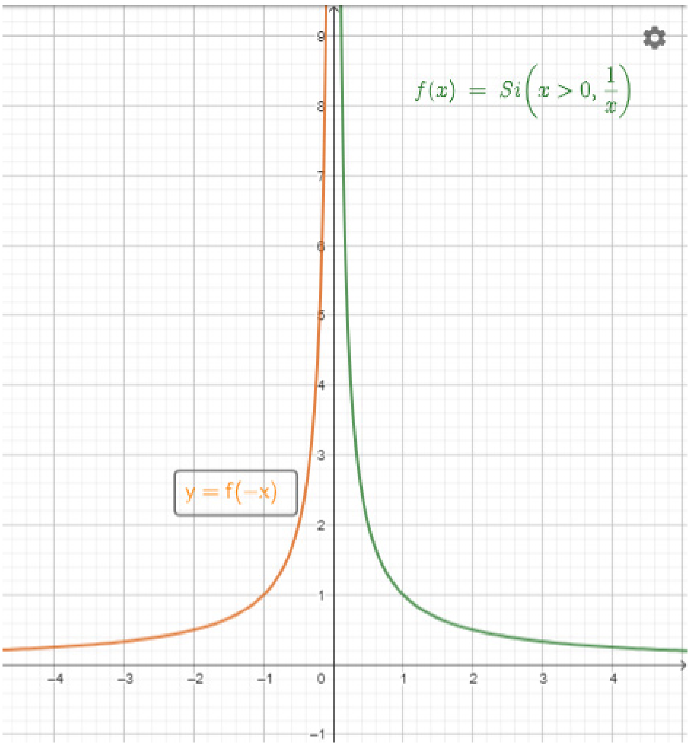
Nota. Cuenca, L., 2023.

2. $y = f(-x)$

y denota una reflexión sobre el eje y, se da cuando en el dominio se antepone un signo negativo. A esta reflexión también se la denomina reflexión horizontal. En la figura siguiente se ilustra la función f de color verde, y su reflexión horizontal representada por *y* = *f*(-x) de color naranja.

Figura 11

Reflexión horizontal y=f(-x)



Nota. Cuenca, L., 2023.

Ahora cómo estas transformaciones se ven reflejadas en problemas de la cotidianidad. Para ello vamos a desarrollar un problema en el cual se aplican las transformaciones.

Figura 12

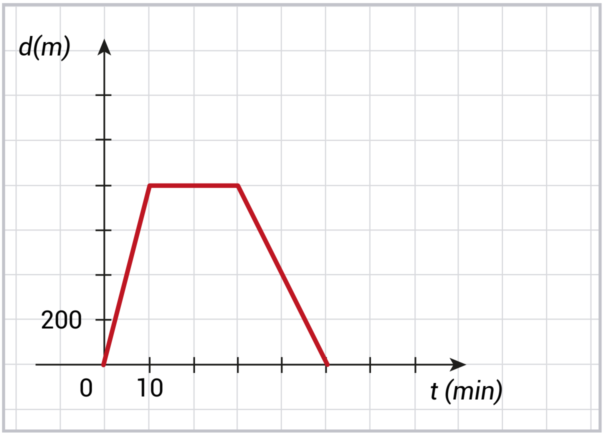
Paseo

Nota. Tomado de Alumnos bromeando y riendo [Fotografía], por pressfoto, s.f., freepik, CC BY 2.0

Paseo: en un paseo los alumnos de cuarto año caminan hacia un parque. La función $y = f(t)$ se muestra en la figura siguiente, la cual presenta la distancia recorrida (en metros) t minutos después de que salieron de la escuela.

Figura 13

Función f, que denota el paseo realizado por los alumnos



Nota. Adaptado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

Analice la gráfica y argumente la respuesta a cada una de las interrogantes.

a. **¿Cuál es la rapidez promedio con la que van al parque?**

Para responder a estas interrogantes primero hay que identificar la información mostrada en la gráfica, en la cual se puede observar que sobre el eje x, se tiene el tiempo, y en el eje y la distancia recorrida.

Ahora se debe recordar que la rapidez promedio se la puede asociar con la pendiente de una recta, de esta forma se calcula la pendiente del tramo ascendente, en el cual se observa una variación de 800 metros, en los primeros 10 minutos, de tal forma que la rapidez promedio es $\frac{800metros}{10minutos}$ de 80 metros por minuto.

¿A qué distancia del parque estaban los alumnos?

El recorrido en el segmento ascendente indica la distancia al parque, en este caso el parque está a 800 metros.

¿Qué tiempo permanecieron en el parque?

Todo el segmento constante indica el tiempo que han permanecido en el parque, en este caso permanecieron durante 20 minutos.

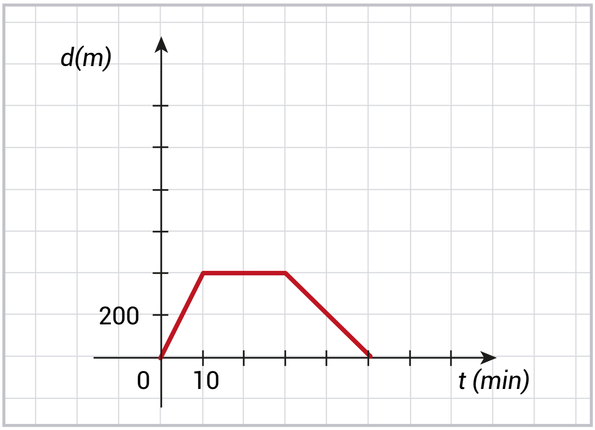
b. Trace la gráfica de la función y = 0.5f(t). ¿Cómo se relaciona la gráfica de la nueva función con la gráfica de la función original? ¿A qué distancia está el nuevo parque? ¿Cuál es la rapidez con la que van al nuevo parque?

La gráfica $y = 0.5f(t)$ implica una compresión vertical a la mitad, de esta forma la gráfica sería tal como se muestra en la siguiente figura:

1 Bimestre

Figura 14

Gráfica de 0.5f(t)



Nota. Adaptado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

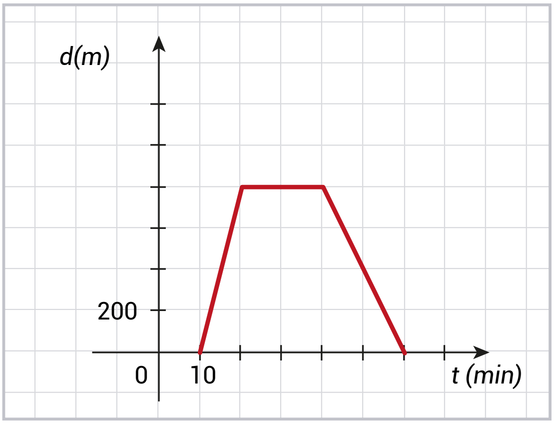
Esto implica una reducción en la distancia recorrida hacia el parque, pues ahora el parque estará a 400 metros, esto implica que la nueva rapidez promedio será de 40 metros por minuto.

c. Trace la gráfica de la función y = $f(t - 10)$. ¿Cómo se relaciona la gráfica de la nueva función con la gráfica de la función original? ¿Cómo difiere el paseo descrito por esta función con el paseo original?

La gráfica de la función y = $f(t - 10)$ implica que se traslade 10 unidades a la derecha, lo cual implica un cambio en el paseo, debido a que ahora saldrán 10 minutos más tarde.

Figura 15

Gráfica de f(t-10)



Nota. Adaptado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

Cómo ha podido notar las transformaciones de funciones están presentes en la vida cotidiana y pueden ser empleadas para representar diversas situaciones.

Para profundizar sobre las transformaciones que se realizan sobre las gráficas de una función, así como definir funciones pares e impares, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 2.6 donde se explica con ejemplos ilustrativos cómo se transforman las funciones, de qué forma se evalúa si una función es par o impar, procedimiento que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece en el apartado 2.6 ejercicios.

Se recomienda realizar una revisión sistemática del siguiente artículo sobre La simetría de funciones disponible en la plataforma Khan Academy, este artículo le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre la simetría de funciones, la cual se analiza mediante la definición de funciones pares e impares.

Con la realización de este repaso se puede comprender de forma clara que una función par, implica que tiene una simetría con respecto al eje y, mientras que una función impar tiene una simetría con respecto al origen.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta quinta semana estudiamos sobre las transformaciones y simetrías de funciones, para reforzar estos aprendizajes teóricos es conveniente experimentarlos, para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Desarrolle el ejercicio 98 sobre la práctica de natación, disponible en la sección 2.6 ejercicios de su texto básico.

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Identificar transformaciones de funciones.

3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Funciones pares e impares: gráficas y tablas.

Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar las transformaciones que se pueden aplicar a las funciones, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

> ¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 6

2.4. Combinación de funciones

La enseñanza de las operaciones con funciones no solo implica transmitir conceptos matemáticos, sino también cultivar habilidades analíticas y de resolución de problemas, en la cual se fomenta un entendimiento profundo de las propiedades y reglas asociadas con la suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones.

Es fundamental presentar estas operaciones de manera progresiva, partiendo de ejemplos concretos y cotidianos para establecer conexiones significativas. Es importante proporcionar múltiples enfoques para abordar estos conceptos, desde métodos gráficos y algebraicos hasta aplicaciones computacionales, permitiendo a cada estudiante encontrar su propia forma de comprensión. La inclusión de actividades prácticas y problemas contextualizados ayuda a consolidar el aprendizaje, permitiendo a los estudiantes aplicar estas operaciones en situaciones auténticas. Al promover la exploración activa y el descubrimiento guiado, se potencia la capacidad de los estudiantes para resolver problemas complejos, estimulando así su curiosidad y preparándolos para enfrentar desafíos matemáticos. (Cattaneo, Lagreca, González, & Buschiazzo, 2011).

A continuación, le invito a que revise el siguiente módulo didáctico sobre: Combinación de funciones.

Mediante este módulo didáctico pudo experimentar cómo se aplica la combinación de funciones en el desarrollo de problemas de la vida cotidiana, así mismo es importante mencionar que en la composición de funciones C o G, se debe tomar en consideración que el rango de la función G, debe ser equivalente al dominio de la función C.

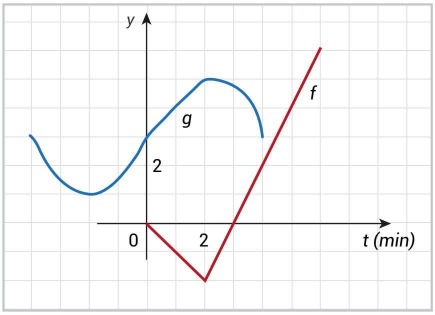
$$(C^\circ G)(x) = C(G(d))$$

Es decir, el resultado de *G* son los gigabytes consumidos, se corresponde con la entrada que recepta la función *C* que igualmente son los gigabytes consumidos.

El proceso de la composición se la puede realizar de manera gráfica, por ejemplo, las funciones f y g se muestran en la figura a continuación:

Figura 16

Gráfica de las funciones f y g



Nota. Tomado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

Evalúe $f(g(2))$

Para ello primero se evalúa g(2) y de acuerdo con la gráfica el resultado es: 5, esto implica que luego se debe evaluar f(5) cuyo resultado es 4. Finalmente $f(g(2)) = 4$

2.5. Funciones inversas

A menudo, en la vida diaria, se emplean funciones inversas, como cuando se realiza la conversión de monedas de dos países, o la transformación de unidades de medida, entre otros casos. Por ejemplo, la fórmula para obtener el área de un círculo es: $A= \pi r^2$, donde se utiliza el radio como entrada. Entonces una función inversa sería que se puede calcular el radio en función del área.

La función inversa invierte el dominio y el rango de la función original, de tal forma que el dominio de la función original será el rango en la función inversa, y el rango de la función original será el dominio en la función inversa. Se denota como f^{-1}, lo que implica que $x = f^{-1}(y)$ si y solo si $y = f(x)$.

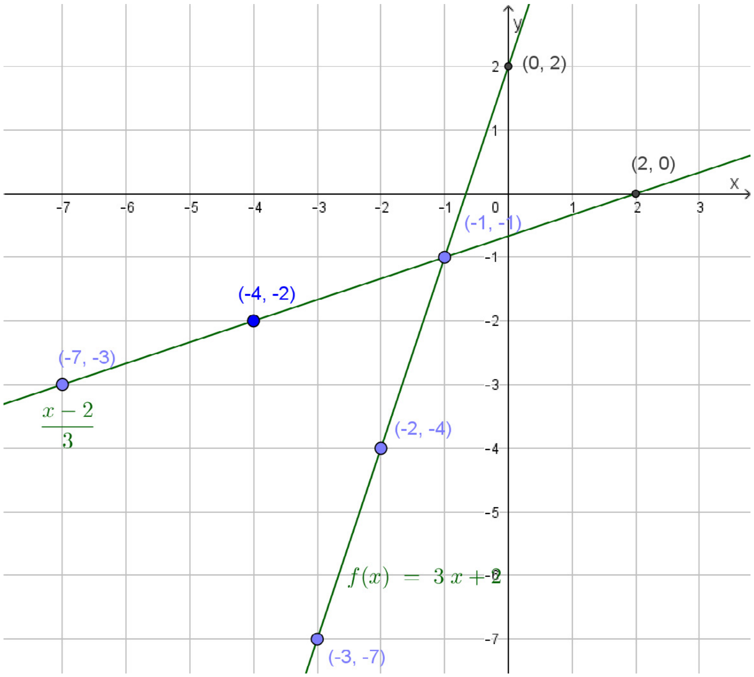
Para comprenderlo mejor, consideremos el ejemplo de la función g(x) = 5x - 4, donde la inversa , se obtiene despejando la variable independiente en función de la dependiente, dando como resultado $g^{-1}(x) = \frac{x+4}{5}$.

1 Bimestre

Desde el punto de vista gráfico, en el plano cartesiano, intercambiar los valores del dominio y el rango de una función proporciona su inversa, como se ilustra en la figura siguiente.

Figura 17

Función original y su inversa



Nota. Cuenca, L., 2023.

Como puede notar la función f se tiene los puntos: (-3, -7), (-2, -4), (-1, -1), (0, 2), y para la función inversa, lo que se ha realizado es invertir dichos puntos, por ejemplo se pasó de (-3, -7) a (-7, -3) y así con los puntos restantes, logrando así obtener la gráfica de la función inversa de f.

Pero se debe prestar atención en ciertas gráficas que, al aplicar el cambio del rango por dominio, se podría tener el caso de que un valor del rango esté asociado con dos o más valores del dominio, esto implica una restricción, ya que el rango al convertirse en dominio, este debe tener una única relación.

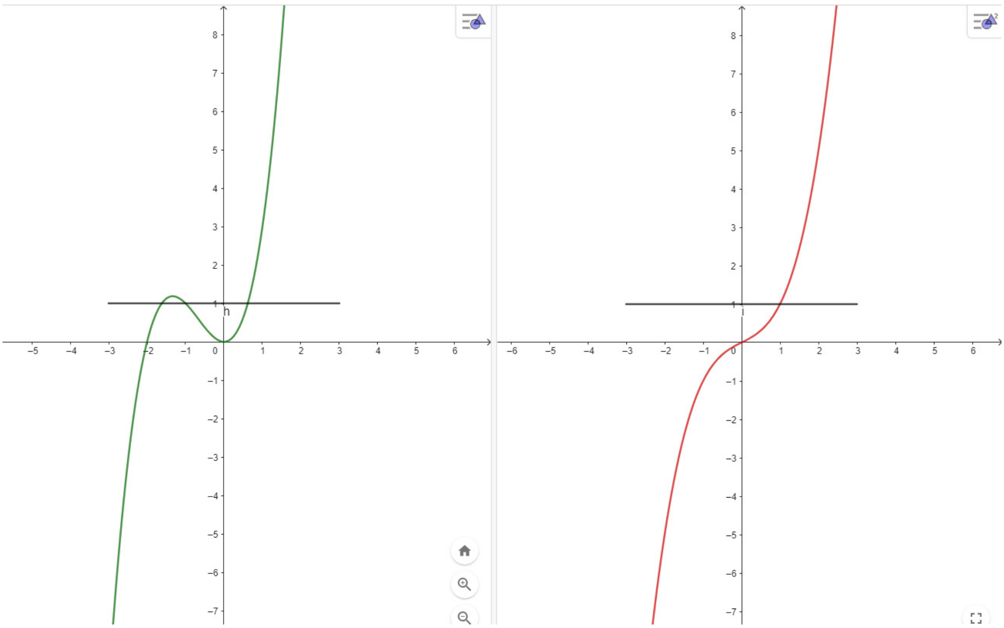
¿Qué implicación tiene el uso de la prueba de la recta horizontal?

Para identificar estos casos se debe aplicar la prueba de la recta horizontal, la cual consiste en trazar una recta horizontal sobre la gráfica, y si esta corta en dos o más puntos, entonces la función no es invertible de forma directa, ya que previo a ello se debe hacer una restricción al dominio.

En la figura siguiente se puede observar que la función representada de color verde no pasa la prueba de la recta horizontal, lo cual implica realizar una restricción en el dominio para obtener su inversa; mientras que la gráfica de color rojo sí cumple con la regla, por lo que se le puede sacar la inversa de forma directa sin restricción alguna.

Figura 18

Prueba de la recta horizontal



Nota. Cuenca, L., 2023.

¿Cómo comprobar que dos funciones son inversas la una de la otra?

Para comprobar si dos funciones son inversas la una de la otra, se debe aplicar la composición de funciones, por ejemplo, sean las funciones f y g, al realizar la composición $f°g(x) = f(g(x)) = x$, el resultado de la composición debe ser x, de la misma forma $g°f(x) = g(f(x)) = x$, también debe resultar en x.

Ejemplo 1. Verifique si las funciones $f(x) = 4x - 3$ y $g(x) = \frac{x+3}{4}$ son inversas.

Para verificar que son inversas debe cumplirse que:

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$
$$f(g(x)) = 4\left(\frac{x+3}{4}\right) - 3$$
$$f(g(x)) = x + 3 - 3$$
$$f(g(x)) = x$$

Ahora verificamos *g*(*f*(*x*)):

$$g(f(x)) = \frac{4x-3+3}{4}$$
$$g(f(x)) = \frac{4x}{4}$$
$$g(f(x)) = x$$

De esta forma se puede concluir que f y g son funciones inversas la una de la otra.

Ejemplo 2. Verifique si las funciones $f(x) = 4x - 3$ y $g(x) =- 4x + 3$ son inversas.

Para verificar que son inversas debe cumplirse que

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$
$$f(g(x)) = 4(- 4x + 3) - 3$$
$$f(g(x)) =- 16x - 12 - 3$$
$$f(g(x)) =- 16x - 15$$

Ahora verificamos *g*(*f*(*x*)):

$$g(f(x)) =- 4(4x - 3) + 3$$
$$g(f(x)) =- 16x + 12 + 3$$
$$g(f(x)) =- 16x + 15$$

Como puede notar en ningún caso el resultado ha sido x, de esta forma se puede concluir que f y g no son funciones inversas la una de la otra.

Ahora cómo las funciones inversas se ven reflejadas en problemas de la cotidianidad. Para ello vamos a desarrollar un problema en el cual se debe calcular la función inversa.

Impuesto sobre la renta: en el Ecuador El SRI establece que, a partir de enero del 2023, las personas naturales que ganen sobre los USD, 11722 al año o

1 Bimestre

USD 977 al mes pagarán Impuesto a la Renta, para los ingresos de hasta 14935 pagarán el 5 % de impuesto del excedente de los 11722; mientras que para ingresos desde 14935 hasta 18666, pagarán USD 161 más el 10 % del excedente de su ingreso con respecto a 14935. Para este ejercicio únicamente se toman estos dos primeros rangos, en el anexo 1. Cálculo de impuesto a la Renta, encontrará la tabla completa para el cálculo del impuesto.

Con base a la información presentada, desarrolle los siguientes literales:

a. Encuentre una función que dé el impuesto sobre la renta en un ingreso x. Exprese como función definida por tramos.

Se define la siguiente función definida por tramos.

$$f(x) = \begin{cases} 0.05(x - 11722), 11722 < x \leq 14935 \\ 161 + 0.1(x - 14935),\ 14935 < x \leq 18666 \end{cases}$$

El primer tramo de la función calcula el impuesto para el rango de valores entre 11722 y 14935, siendo $f(14935) = 0.05(14935 - 11722) = 0.05(3213) = 160.65$ el valor máximo a pagar en este rango.

El segundo tramo de la función calcula el impuesto para el rango de valores entre 14935 y 18666, en este caso se puede notar la inclusión del valor constante de 161 que representa el valor fijo que debe pagar, sumar al 10 % del excedente, de esta forma el valor mínimo a pagar será de 161 y el máximo será $f(18666) = 161 + 0.1(18666 - 14935) = 161 + 0.1(3731) = 161 + 373,1 = 534,1$

b. Encuentre f^{-1}, ¿qué representa f^{-1}?

Para obtener la función inversa de f, se debe calcular para cada tramo.

Tramo 1: se despeja x, en función de f(x)

$$f(x) = 0.05(x - 11722)$$
$$\frac{f(x)}{0.05} = x - 11722$$
$$\frac{f(x)}{0.05} + 11722 = x$$

Recuerde se cambia x por $f^{-1}(x)$ y f(x) por x

$$\frac{x}{0.05} + 11722 = f^{-1}(x)$$

Tramo 2:

$$f(x) = 161 + 0.1(x - 14935)$$
$$f(x) - 161 = 0.1(x - 14935)$$
$$\frac{f(x)-161}{0.1} = x - 14935$$
$$\frac{f(x)-161}{0.1} + 14935 = x$$
$$\frac{x-161}{0.1} + 14935 = f^{-1}(x)$$

Finalmente, la función inversa sería:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{0.05} + 11722, 0 < x < 161 \\ \frac{x-161}{0.1} + 14935,\ 161 \leq x < 534 \end{cases}$$

Bajo este contexto f^{-1} puede interpretar como la función que permite calcular el ingreso requerido con el cual se paga una renta determinada.

c. ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de $500?

Para este caso implica realizar la evaluación de la función inversa tomando como ingreso 500 que viene a ser la renta pagada y la inversa me permite conocer cuál debió ser el ingreso para pagar el valor de 500 como renta.

$$f^{-1}(500)$$

En este caso se debe ejecutar el segundo tramo de la función inversa, ya que 500 está en el rango entre 161 y 534:

$$f^{-1}(500) = \frac{x-161}{0.1} + 14935$$
$$f^{-1}(500) = \frac{500-161}{0.1} + 14935$$
$$f^{-1}(500) = \frac{339}{0.1} + 14935$$
$$f^{-1}(500) = 3390 + 14935 = 18325$$

De esta forma se requiere de un ingreso anual de USD, 18325 para pagar un impuesto a la renta de USD 500.

Como puede evidenciar, las funciones inversas pueden ayudar en la resolución de diversos problemas de nuestra cotidianidad.

Para profundizar las gráficas de función, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 2.7 donde se explica con ejemplos ilustrativos la composición de funciones y la sección 2.8 sobre la función inversa, procedimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final de cada sección.

Se recomienda revisar el artículo sobre Introducción a las funciones inversas y sobre Comprobar funciones inversas por composición disponibles en la plataforma Khan Academy, estos artículos le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre las funciones inversas y la composición de funciones.

Con la revisión de este artículo se puede comprender de forma clara el proceso que implica la obtención de la inversa de una función, tanto desde el punto de vista algebraico como el gráfico; también pudo notas como la composición de funciones es una herramienta útil para verificar si dos funciones son inversas, todo ello permite ver la importancia que tienen en la aplicación en problemas cotidianos.

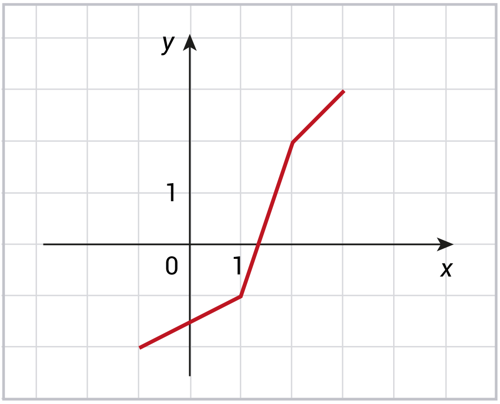
Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta sexta semana estudiamos sobre la combinación de funciones, es decir con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición, así mismo se abordó sobre las funciones inversas, finalmente trabajó con algunos problemas de aplicación práctica, para reforzar estos aprendizajes teóricos y prácticos es conveniente experimentarlos para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. La gráfica de la función f, se presenta a continuación.

Figura 19

Gráfica de la función f



Nota. Tomado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

Con relación a la gráfica de f, desarrolle lo siguiente:

- La gráfica de la función inversa de f.
- Evalúe

$$
\begin{gathered}
f(f(1)) = \\
f\left(f^{-1}(1)\right) = \\
f^{-1}(-\ 2) = \\
f^{-1}(2) + f(-\ 1) = \\
f^{-1}(3) - f(2) = \\
f^{-1}(2) \bullet f(-\ 1) = \\
\frac{f(-1)}{f^{-1}(2)} =
\end{gathered}
$$

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Existen funciones que requieren de realizar una restricción en su dominio para obtener su inversa, práctica en la siguiente actividad sobre Restringir el dominio de funciones para hacerlas invertibles disponible en Khan Academy.

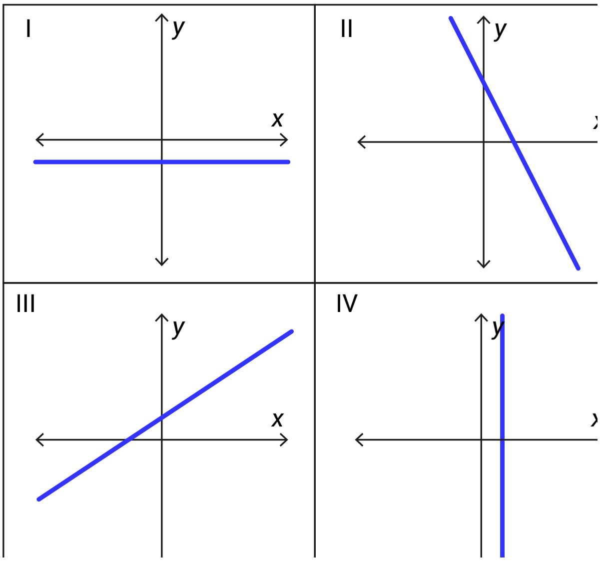
3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Modela con combinación de funciones.

Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar la combinación de funciones, funciones inversas, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

4. Hemos concluido la semana seis, es momento de autoevaluar nuestros conocimientos logrados hasta aquí. La presente autoevaluación le permitirá medir su aprendizaje, por lo cual es importante que la desarrolle, así mismo esta actividad le permitirá prepararse para la evaluación bimestral, para lo cual en cada pregunta seleccione el o los literales correctos.

Autoevaluación 2

1. A continuación, se muestran las gráficas de 4 rectas, relacione con el tipo de pendiente (positiva, negativa, cero, no está definida) que corresponde a cada una.



a. No está defina.
b. Cero.
c. Negativa.
d. Positiva.

2. Mariuxi gana 96 dólares por semana trabajando a tiempo parcial en una librería. Ella gana un dólar adicional por cada libro que él vende. La cantidad, A (en dólares), que Mariuxi gana en una semana si vende b libros, se determina por la siguiente función.

$A(b) = 96 + b$

¿Cuánto gana Mariuxi en una semana si vende 24 libros?

3. Manuel deposita dinero en una cuenta bancaria. Sea S(t) la cantidad total de dinero en la cuenta (en dólares) se modela con la función.

   S(t)=20x+540.

   Donde t es el número de semanas que Manuel ha estado depositando dinero.

   Determine la cantidad de semanas que Manuel debe hacer depósitos en la cuenta para ahorrar $1000, asumiendo que no se hace ningún retiro.

4. En una empresa que ensambla computadoras han determinado la función para determinar el total de ventas por computador vendido V(x)=260+1.2x así mismo tiene la función del costo de producción de cada computador C(x)=155+0.9x

   Determine las utilidades monetarias de ensamblar y vender 10 cantidades de computadoras.

   a. Utilidad=C(x)-V(x)
      Utilidad=155+0.9(10)-260-1.2(10)=155+9-260-12.

   b. Utilidad =V(x)-C(x)
      Utilidad=155+0.9(10)-260+1.2(10)=155+9-260+12.

   c. Utilidad=V(x)-C(x)
      Utilidad=260+1.2(10)-155-0.9(10)=260+12-155-9.

   d. Utilidad=C(x)-V(x)
      Utilidad=260+1.2(10)-155+0.9(10)=260+12-155+9.

5. Verdadero o falso: Manuel deposita dinero en una cuenta de cheques. Sea y la cantidad total de dinero en la cuenta (en dólares).

   Sea x, el número de semanas que Manuel ha estado depositando dinero. Supongamos que x e y están relacionadas por la ecuación 20x + 650 = y.

   De acuerdo con el contexto, la cantidad inicial de dinero en la cuenta sería de 650.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

6. Verdadero o falso: si $g(2)=5$, entonces al evaluar la función inversa de g para la entrada 5, su resultado sería -2.

$g^{-1}(5)=-2$

a. Verdadero.
b. Falso.

7. Costo de fabricación. El gerente de una fábrica de muebles encuentra que el producir 100 sillas en un día le cuesta $2200 dólares, y producir 300 sillas en un día le cuesta $4800.

Suponiendo que la relación entre el costo y el número de sillas producidas es lineal, determine una función lineal C que modele el costo de producir x sillas en un día.

a. $C(x) = 13x + 900$.
b. $C(x) = 13 + 900x$.
c. $C(x) = (13 + 900)x$.
d. $C(x) = 13x - 900$.

8. Sea la función $E(x)=100+1.6x$ para la cantidad de estudiantes por universidad en el Ecuador después del 2010 y $U(x)=24+0.4x$ la cantidad de universidades en el Ecuador después del 2010.

Determine la función que permita determinar el total de estudiantes universitarios en Ecuador después del 2010.

a. Estudiantes=E(10)+U(10).
b. Estudiantes=E(U(10)).
c. Estudiantes=U(E(10)).
d. Estudiantes=E(10)U(10).

9. Tarifa por un servicio. Por sus servicios, un investigador privado requiere una tarifa de anticipo de 500 dólares más 80 dólares por hora.

   Sea f la función que determina el valor de la tarifa del investigador como función de las horas trabajadas.

   Seleccione la descripción de la función inversa f^{-1}

   a. El valor de los honorarios en función del tiempo empleado.
   b. La cantidad de horas que emplea un investigador por sus honorarios.
   c. La tarifa del investigador cuando trabaja menos de 80 horas.
   d. La cantidad de horas que debe trabajar por el anticipo de los 500 dólares.

10. Verdadero o falso: la Editorial UTPL planea publicar un libro nuevo. Dejemos que C representa el costo total de publicar el libro (en dólares). Dejemos que N representa el número de copias del libro producidas. Para la primera impresión, la compañía puede imprimir hasta 200 copias del libro.

    Supongamos que $C = 20N + 600$ nos da C como una función de N para la primera impresión.

    Se podría concluir que el costo de publicar un libro es 600 dólares por cada copia del libro.

    a. Verdadero.
    b. Falso.

Verifique sus respuestas en el solucionario que se encuentra al final de la guía didáctica.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Ir al solucionario

Semana 7

Actividades finales del bimestre

Estimado estudiante en estas dos últimas semanas de estudio se invita para que revise los contenidos del primer bimestre y con ello logre buenos resultados en la evaluación bimestral, para lo cual se sugiere las siguientes actividades:

- **Actividad 1:** realice una revisión de su diario de notas.
- **Actividad 2:** desarrolle las actividades recomendadas.
- **Actividad 3:** interactúe con los simuladores presentes en el curso.

Semana 8

La evaluación bimestral comprende los conocimientos adquiridos en la unidad 1 y 2 estudiadas en el primer bimestre, revise cada uno de los conceptos y sus aplicaciones. Además, se sugiere las siguientes actividades:

- **Actividad 1: participe de la videoconferencia donde se realizará un repaso para el examen bimestral**

Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las temáticas estudiadas, desarrollando las actividades recomendadas al final de cada semana.

- **Actividad 2: examen bimestral**

Revise el horario de exámenes para que tenga claro el día y la hora de la evaluación.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje, hemos concluido este primer bimestre!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

- Determina los principios y leyes de las funciones polinomiales y racionales para modelar y resolver problemas del entorno.

Para alcanzar el resultado de aprendizaje es esencial entender cómo las funciones polinomiales y racionales representan y solucionan situaciones del mundo real. Con una comprensión de estos conceptos, se adquiere la capacidad de analizar y representar diversos fenómenos, como el crecimiento poblacional o la optimización de procesos, mediante modelos matemáticos específicos. Esto proporciona una base sólida para abordar desafíos y tomar decisiones acertadas en distintos contextos, promoviendo así la capacidad de resolver problemas efectivamente y tener una base matemática robusta. Estas competencias no solo proporcionan herramientas básicas en matemáticas, sino que también tienen amplias aplicaciones en diversos campos como la física, la economía, la ingeniería y las ciencias sociales.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 9

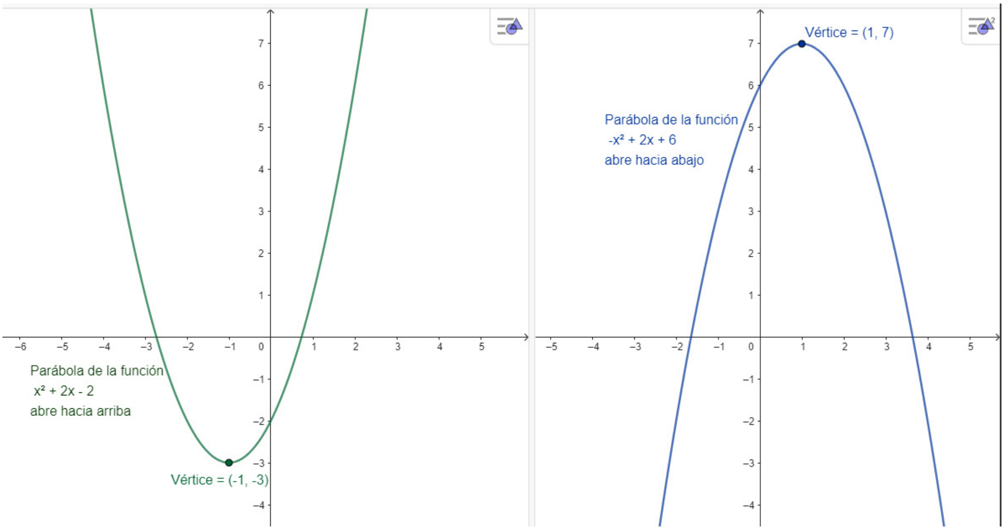
Unidad 3. Funciones polinomiales

3.1. Funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas o también conocidas como polinomiales de grado 2 tienen la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde *a, b, c* son números reales y $a \neq 0$, de ser 0 entonces la función no sería cuadrática. La gráfica que genera este tipo de función es una parábola, donde el coeficiente principal indica la orientación de la parábola, ya que si a, es positiva, la parábola abre hacia arriba y si a, es negativa, abre hacia abajo (Aguilar Márquez, 2015).

Figura 20

Gráfica de funciones cuadráticas



Nota. Cuenca, L., 2023.

Es importante reconocer algunos elementos presentes en la parábola, como lo es el vértice, el cual representa el punto más alto (máximo, ver gráfica color azul) o más bajo de la gráfica (mínimo, ver gráfica color verde).

Pero ¿Cómo se puede determinar el valor del vértice?

El vértice (h, k) en la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ se encuentra mediante la siguiente expresión:

$$h = \frac{-b}{2a}$$

$$k = c - \frac{b^2}{4a}$$

Verificamos para el caso de la gráfica de color verde se tendría:

a=1, b=2 y c =-2

$$h = \frac{-2}{2(1)} = -1$$

$$k = -2 - \frac{2^2}{4(1)} = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$$

El vértice sería (-1, -3) como se puede ver concuerda con el mostrado en la gráfica de la función.

Forma estándar de una función cuadrática

Existe una forma de escribir una función cuadrática la cual permite identificar de forma directa el vértice. Se trata de la forma estándar.

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Cuando la función está escrita en esta forma, el vértice estará ubicado en la coordenada (h, k), es importante reconocer que h es el momento en que se genera ya sea el máximo o mínimo y el valor k es el valor máximo o mínimo.

En el siguiente módulo didáctico titulado ¿Cómo se convierte a la forma estándar una función cuadrática?, se muestra el proceso para reescribir una función cuadrática a su forma estándar.

Valor máximo y mínimo de una función cuadrática

El coeficiente principal ***a*** de una función cuadrática indica si esta posee o mínimo o máxi.mo.

Si $a > 0$ entonces la función tendrá un valor mínimo.

Si $a < 0$ entonces la función tendrá un valor máximo.

Para reforzar el aprendizaje del tema, realice el siguiente quiz sobre los mínimos y máximos de funciones cuadráticas.

Como pudo haber notado, el coeficiente principal nos provee información valiosa, ya que sin necesidad de la gráfica de la función se puede tener una noción de cómo será la gráfica y si tendrá un máximo o un mínimo.

3.2. Modelos cuadráticos

Las funciones cuadráticas desempeñan un papel esencial en la modelización de fenómenos reales debido a su versatilidad y capacidad para describir una amplia variedad de situaciones. Desde la trayectoria de un proyectil hasta la forma de un arco, pasando por la optimización de recursos o la predicción de comportamientos, estas funciones se adaptan a curvas suaves y continuas. Su habilidad para representar tanto el crecimiento como la disminución, y su forma característica de parábola, las convierte en una herramienta en disciplinas que abarcan desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias sociales.

A continuación, se resolverán problemas de aplicación implementando modelos cuadráticos.

1. **Caso ingresos:** una empresa de venta de balones encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de balones está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso R(x) se mide en dólares.

   ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántos balones deben venderse para obtener este máximo?

   Solución

   En este caso el problema pide obtener el valor máximo dado que el coeficiente principal es -0.4, entonces para encontrar el valor máximo se procede a encontrar el vértice V(h, k) de la parábola, mediante las fórmulas: $h = \frac{-b}{2a}$ y $k = c - \frac{b^2}{4a}$, debe recordar que el valor h, será el momento en que se genera el máximo, en este caso corresponde a la cantidad de ventas de x balones, mientras que el valor k, corresponde al valor máximo, es decir, al ingreso máximo.

   Los valores a, b y c de la función R son: a=-0.4, b=80, c=0

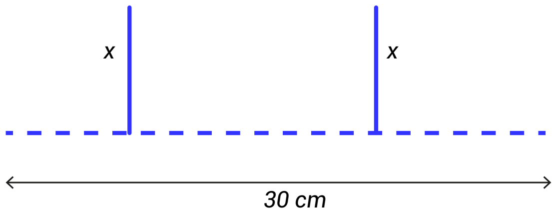
   $$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2(-0.4)} = \frac{-80}{-0.8} = 100$$
   $$k = c - \frac{b^2}{4a} = 0 - \frac{80^2}{4(-0.4)} = -\frac{6400}{-1.6} = 4000$$

   Esto indica que se requiere vender 100 unidades de balones para obtener un máximo de ingresos de USD 4000.

2. **Canal para riego:** un canal de recolección de agua se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 centímetros de ancho, como se muestra en la figura.

Figura 21

Sección transversal de un canal de riego



Nota. Adaptado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

Solución

a. Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de x.

De acuerdo con los datos, se cuenta con una lámina de 30 cm de ancho, sobre la cual se doblan en cada lado un valor x cm, de esta forma se estructura la siguiente expresión.

Ancho: 30 – 2x

30 es la longitud de la lámina, y 2x el valor x que se dobla en cada lado.

Alto: x

Ahora para calcular el área transversal se aplica el producto del ancho por el alto.

$$Área = (30 - 2x)(x)$$

Ahora escrita en forma general:

$$Área = 30x - 2x^2$$
$$Área = -2x^2 + 30x$$

Donde a=-2, b=30 y c=0

b. Encuentre el valor de x que permite obtener la máxima área de la sección transversal del canal.

Para dar respuesta a esta interrogante se requiere calcular la coordenada x, del vértice, para lo cual se emplea la siguiente expresión: $x = \frac{-b}{2a}$

$$x = \frac{-30}{2(-2)} = \frac{-30}{-4} = 7.5$$

Esto implica que el valor x que debe doblarse debe ser de 7.5 cm en cada lado.

c. ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?

En este caso se calcula la coordenada y del vértice, se aplica la siguiente expresión: $y = c - \frac{b^2}{4a}$

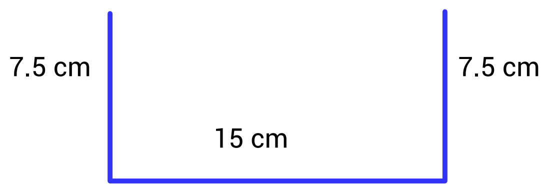
$$y = 0 - \frac{30^2}{4(-2)} = \frac{900}{8} = 112.5$$

Entonces, el área superficial máxima a obtener es de 112.5 cm².

Finalmente, el canal tendrá las siguientes dimensiones para lograr la máxima área transversal.

Figura 22

Sección transversal del canal de riego



Nota. Cuenca, L., 2023.

3. Caso maximizar utilidades: una comunidad del parque Yasuní, en la cual existe una diversidad de aves, fabrica y vende comederos para las aves con el fin de recaudar dinero para sus diferentes actividades de conservación. Los insumos que se requieren para construir para cada comedero cuesta 6 dólares, y la comunidad vende un promedio de 20

2 Bimestre

por semana a $10 cada uno. La comunidad ha estado considerando subir el precio, por lo cual ha realizado un estudio y ha determinado que, por cada dólar que sube el precio, se disminuye 2 ventas por semana.

Solución

a. Encuentre una función U que modele las utilidades semanales en términos del precio por comedero.

Para abordar este problema, primero se debe establecer una función que modele las utilidades semanales en términos del precio por comedero.

Las utilidades semanales se calculan restando el costo total de producir los comederos del ingreso total obtenido por su venta.

Sea x el precio por comedero, la cantidad de ventas por semana se puede expresar como:

$$20 - 2(x - 10)$$

Donde 20 es la cantidad de ventas por semana x - 10, representa cada incremento en el precio, y - 2(x - 10) calcula las ventas que se disminuyen, es decir, 2 ventas por cada incremento (x - 10)

El ingreso por ventas sería:

$$x(20 - 2(x - 10))$$

El costo total de producir los comederos se calcula como el costo de insumos por la cantidad de comederos vendidos, es decir:

$$6(20 - 2(x - 10))$$

La utilidad implica restar los costos a los ingresos:

$$x(20 - 2(x - 10)) -6(20 - 2(x - 10))$$

Resolviendo se tendría:

$$20x - 2x^2 + 20x - 120 + 12x - 120$$
$$- 2x^2 + 52x - 240$$

Por lo tanto, las utilidades semanales (U) en términos del precio por comedero (x) se expresan como:

$$U(x) = -2x^2 + 52x - 240$$

Donde a=-2, b=52 y c=-240

b. ¿Qué precio debe tener cada comedero para maximizar las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas semanales?

En este caso se debe calcular el vértice, ya que su coordenada x indica el precio de cada comedero y, y representa la utilidad máxima a obtener, para lo cual se emplea la siguiente expresión:

$$x = \frac{-b}{2a};\ y = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(52)}{2(-2)} = \frac{-52}{-4} = 13$$

$$y = c - \frac{b^2}{4a} = -240 - \frac{52^2}{4(-2)} = -240 + \frac{2704}{8} = -240 + 338 = 118$$

Entonces, el precio al cual deben venderse los comederos es USD 13, con lo cual se obtendrá una utilidad máxima de USD 118.

c. ¿Qué cantidad de comederos debe vender para que se cubran los costos de producción?

Para esta interrogante se debe encontrar el valor de x que hace 0 la función, ya que se pide encontrar la cantidad de comederos que hacen que la utilidad sea 0, es decir, se ha cubierto los costos.

Para ello se debe recordar existen diversos métodos como: fórmula general, factorización, etc.

$$U(x) = -2x^2 + 52x - 240$$
$$U(x) = -2\left(x^2 - 26x + 120\right)$$
$$U(x) = -2(x - 20)(x - 6)$$

Entonces en este caso se deben vender como mínimo 6 comederos para cubrir los gastos de producción, el otro valor que también hace 0 la función significa que pasadas las 20 unidades ya no se genera utilidad sino pérdida.

Para profundizar las gráficas de función, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 3.1 donde se explica con ejemplos ilustrativos los distintos elementos que constituyen una función cuadrática como: vértice, máximo y mínimo. Así mismo, el apartado sobre Modelado con funciones cuadráticas donde se explica con ejemplos ilustrativos como se emplea las características de las funciones cuadráticas en la resolución de problemas, procedimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos en la sección 3.1 ejercicios y aplicaciones.

Se recomienda revisar el artículo sobre Gráfica de funciones cuadráticas disponible en la plataforma Khan Academy, este artículo le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre cómo realizar la gráfica de las funciones cuadráticas.

Con la revisión de este artículo se puede comprender de forma clara el proceso que debe seguirse a la hora de graficar una función, la cual se parte de conocer información importante como el vértice, las intersecciones con el eje x, todo ello permite ver la importancia que tienen las características de las funciones cuadráticas y cómo se podrían asociar a problemas cotidianos.

Es importante recordar cómo se resuelve una ecuación cuadrática, ya que tiene la misma implicación cuando se trabaja con funciones cuadráticas, ya que en muchas ocasiones es necesario encontrar la intersección con el eje x, para ello se recomienda revisar el artículo Factorizar expresiones cuadráticas en cualquier forma disponible en la plataforma Khan Academy.

Se recomienda revisar el video sobre Interpreta modelos cuadráticos: forma factorizada y sobre Interpreta modelos cuadráticos: forma canónica disponible en la plataforma Khan Academy, estos videos le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre la integración de funciones cuadráticas en la resolución de problemas.

Con la revisión de estos videos se puede comprender de forma clara cómo se emplean las características de las funciones cuadráticas en el proceso de resolver un problema, ya que en ocasiones los problemas nos piden las raíces, el vértice o bien identificar el valor máximo o mínimo, todo ello permite ver la importancia que tienen en la aplicación en problemas cotidianos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta novena semana estudiamos sobre las funciones cuadráticas, se ha reconocido algunos elementos esenciales que son necesario conocerlas como son: el vértice, máximo y mínimo, para reforzar estos aprendizajes teóricos y prácticos es conveniente experimentarlos, para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Dada la función $f(t) = 3x - 4x^2 + 5$, determine dónde estará ubicado el vértice, indique la orientación que tendrá la parábola y si posee un máximo o un mínimo.

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Las diferentes formas en la que se puede encontrar las funciones cuadráticas (factorizada, general, estándar) revelan información importante como: raíces de la función, vértice, máximo, mínimo, orientación de la parábola, por lo que se sugiere la realización de la siguiente práctica en la siguiente actividad sobre Características de funciones cuadráticas disponible en Khan Academy.

3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Gráfica, parábolas en todas las formas.

4. **Caso vuelo de Dron:** Samanta mira un dron despegar desde una plataforma. La altura del dron (en metros sobre el suelo) t minutos después del despegue está modelada por .

   Samanta quiere saber:

   - ¿Cuándo el dron aterrizará?
   - ¿Cuál será la máxima altura que puede volar, y en qué tiempo lo alcanza?

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

5. Otro aspecto importante es la interpretación de los modelos cuadráticos, para ello, desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad Interpretar modelos cuadráticos disponible en la plataforma Khan Academy.

6. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Problemas verbales sobre cuadráticas (forma factorizada) y Problemas verbales de cuadráticas (forma canónica) ctions.

Con el desarrollo de estas actividades, usted pudo practicar, aplicar y experimentar el trabajo con funciones cuadráticas, sus gráficas e información relevante que hay en cada una, y experimentar los modelos con funciones cuadráticas, lo cual le será muy útil para interpretar y generar modelos que emplean a las funciones cuadráticas en situaciones de la realidad.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 10

3.3. Funciones polinomiales y sus gráficas

Las funciones polinomiales se componen de términos que involucran variables elevadas a potencias no negativas y multiplicadas por coeficientes constantes.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Como puede notarse, la función polinomial debe cumplir dos condiciones: primero, los exponentes de las variables deben ser números enteros no negativos, y segundo, no puede haber divisiones por variables.

Otros elementos importantes en este tipo de funciones son: el grado, el coeficiente principal y el coeficiente independiente. Para el grado del polinomio se determina por el exponente más alto de la variable presente en la expresión; por ejemplo, en la función f:

$$f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5$$

El grado es 4.

El coeficiente principal de un polinomio corresponde al coeficiente del término con el grado más alto. Para el caso de la función f, mostrada anteriormente sería 3, ya que acompaña al término con la potencia más alta de la variable. Y el coeficiente independiente es aquella constante que no tiene ninguna variable asociada, para el caso de la función f, sería -5.

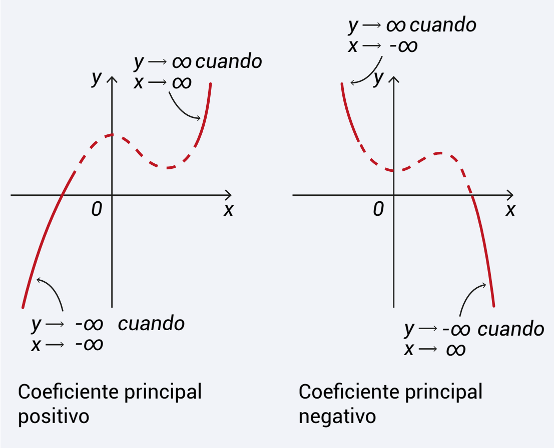
Estas condiciones y conceptos son fundamentales para clasificar, analizar y comprender la naturaleza de los polinomios en diversas áreas de las matemáticas y su aplicabilidad en la resolución de problemas del mundo real.

¿Las gráficas de las funciones polinomiales siguen un patrón?

Si, en primer lugar, son continuas, y dependiendo del grado y coeficiente principal presentan una determinada forma. A continuación, en figura, se explica mediante gráficas de funciones polinomiales de grado par e impar.

Figura 23

Gráfica de función polinomial de grado impar

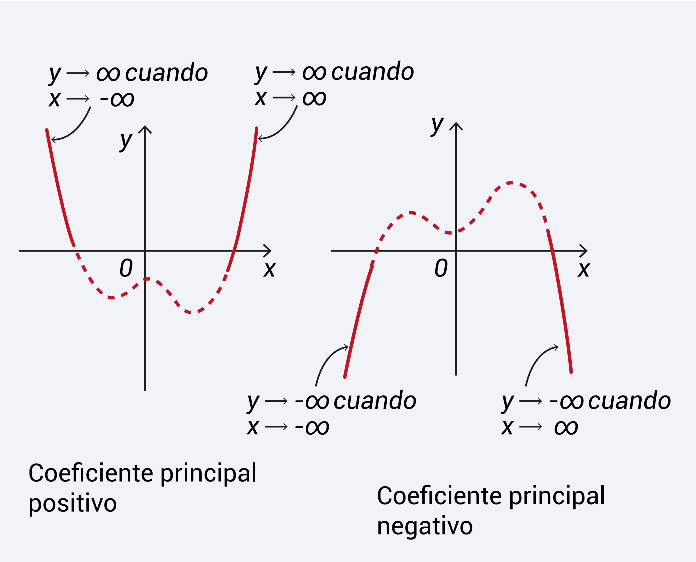


Nota. Tomado de Precálculo Matemáticas para el Cálculo [Ilustración], por Stewart et al., 2017. México D.F.: Cengage.

Se puede notar que cuando el coeficiente principal es positivo, cuando *x* tiende a menos infinito, en *y* también tiende a menos infinito, mientras que *x* tiende a más infinito, *y* también tiende a más infinito. En cambio, si el coeficiente es negativo, cuando *x* tiende a menos infinito, *y* tiende al infinito positivo, y cuando *x* tiende a más infinito, *y* tiende a menos infinito. Este patrón se repite para todas las funciones polinomiales de grado impar, y para identificarlo únicamente se necesita conocer el coeficiente principal.

Figura 24

Gráfica de función polinomial de grado par



Nota. Tomado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart et al., 2017. México D.F.: Cengage.

Observe que, si el coeficiente principal es positivo, cuando *x* tiende a menos infinito y a más infinito, entonces *y* tiende a más infinito, es decir, los extremos de la gráfica tienden al infinito positivo. En cambio, si el coeficiente es negativo, cuando *x* tiende a menos infinito y a más infinito, entonces *y* tiende al infinito negativo, de esta forma los extremos de la gráfica tienden a menos infinito. De esta manera el patrón se repite para todas las funciones polinomiales de grado par, para lo cual se requiere conocer el coeficiente principal.

Ahora, le invito a participar en el siguiente juego de relacionar sobre las funciones polinomiales y gráficas.

Con este juego pudo experimentar cómo son los comportamientos de las gráficas de funciones polinomiales de grado par e impar, así mismo destacar la importancia de reconocer el grado y coeficiente principal del polinomio.

Para profundizar las gráficas de función, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson (2017). Precálculo.

Matemáticas para el cálculo, la sección 3.2 donde se explica con ejemplos ilustrativos las funciones polinomiales y sus gráficas, procedimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final de la sección 3.2 ejercicios.

Se recomienda revisar el artículo sobre comportamiento de polinomios en los extremos disponible en la plataforma Khan Academy, este artículo le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre las funciones polinomiales y sus gráficas.

Con la revisión del primer artículo se puede comprender de forma clara el comportamiento que tienen las funciones polinomiales, tanto de grado par como impar, todo ello permite ver la importancia que tienen en la interpretación gráfica en problemas cotidianos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta semana once estudiamos sobre la gráfica de funciones, y como con la ayuda de los ceros reales se puede determinar la gráfica de la función, así mismo se revisó cómo determinar los ceros reales de una función, finalmente se indicó algunos comandos para identificar extremos locales mediante GeoGebra; para reforzar estos aprendizajes teóricos y prácticos es conveniente experimentarlos para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Analice el comportamiento que tendría el siguiente polinomio en sus extremos, identifique los posibles ceros reales, con la ayuda de GeoGebra obtenga todos los ceros reales y los extremos locales.

$$f(x) = x^5 - 9x^3$$

2. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Comportamiento de polinomios en los extremos.

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con la gráfica de funciones polinomiales en la resolución de problemas de la vida real, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 11

3.4. Ceros reales de polinomios

Los ceros reales de polinomios hacen referencia a aquellos valores del dominio que hacen que la función se anule, es decir, f(x)=0. Dependiendo del grado de la función se puede tener una noción de la cantidad de ceros, ya que una función de grado n, tendrá como máximo n ceros reales. Para determinar los ceros reales se pueden aplicar procesos de factorización, con lo cual se facilita el cálculo de los ceros reales.

Entonces si a, es un cero real del polinomio P, se tiene que:

x=a, será una solución del polinomio P, es decir P(x)=0.

x − a, será un factor del polinomio P(x).

a, será un punto de intersección con el eje x de la gráfica de la función P.

Ejemplo 1: determine los ceros reales del siguiente polinomio.

$$P(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 1)$$

En este caso se parte de una función polinomial en forma factorizada, donde los ceros reales son:

x=-2, x=3, x=-1

Como puede notar, cuando x adopta cualquiera de estos valores, la función se hace 0.

Una utilidad tiene que conocer los ceros reales para reconocer cómo será la gráfica, ya que estos valores cortarán en el eje x.

¿Cómo encontrar los ceros reales, cuando no está factorizado el polinomio?

Si el coeficiente principal e independiente de un polinomio son distintos de 0, entonces se puede obtener un listado de **posibles** ceros reales, que serán de la forma $\frac{p}{q}$, donde p es un factor del coeficiente independiente y q un factor del coeficiente principal.

Otro aspecto que se debe tener en cuenta es la regla de los signos de Descartes, que me da la noción de la cantidad de ceros positivos y negativos. Stewart, Lothar, & Saleem, (2017), mencionan lo siguiente:

> Sea P un polinomio con coeficientes reales.
>
> 1. Los ceros reales positivos de P(x) son iguales o menores al número de variaciones de signo en P(x), siendo este número un entero par.
> 2. Los ceros reales negativos de P(x) son iguales o menores al número de variaciones de signo en P(-x), siendo este número un entero par.

Analicemos el siguiente caso: determine los ceros reales del siguiente polinomio.

$$f(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$$

El polinomio es de grado 4, por lo tanto, tendrá como máximo 4 ceros reales, el coeficiente principal es 1, y el independiente es 10, de esta forma los posibles ceros reales serán los factores de 10 divididos entre los factores de 1.

Posibles ceros: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Ahora, aplicando el teorema de Descartes, se puede apreciar que hay dos variaciones de signo en el polinomio f(x), por lo que como máximo habrá dos ceros reales positivos.

Para determinar los posibles ceros reales negativos se debe verificar la variación de signo del polinomio f(-x):

Se puede notar que existen dos variaciones de signo, entonces como máximo se tendrá dos ceros reales negativos.

$$f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^3 - 5(-x)^2 + 23(-x) + 10 = f(x) = x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 23x + 10$$

Con los posibles ceros reales, se procede a evaluar, y en los casos que dé como resultado 0, entonces se habrá encontrado un cero real.

Evaluamos para $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

$$f(1) = (1)^4 - 5(1)^3 - 5(1)^2 + 23(1) + 10 = 24$$
$$f(-1) = (-1)^4 - 5(-1)^3 - 5(-1)^2 + 23(-1) + 10 = -12$$
$$f(2) = (2)^4 - 5(2)^3 - 5(2)^2 + 23(2) + 10 = 12$$
$$f(-2) = (-2)^4 - 5(-2)^3 - 5(-2)^2 + 23(-2) + 10 = 0$$
$$f(5) = (5)^4 - 5(5)^3 - 5(5)^2 + 23(5) + 10 = 0$$
$$f(-5) = (-5)^4 - 5(-5)^3 - 5(-5)^2 + 23(-5) + 10 = 1020$$
$$f(10) = (10)^4 - 5(10)^3 - 5(10)^2 + 23(10) + 10 = 4740$$
$$f(-10) = (-10)^4 - 5(-10)^3 - 5(-10)^2 + 23(-10) + 10 = 14280$$

Para facilitar los cálculos se puede emplear GeoGebra para evaluar la función para estos valores.

Se puede apreciar que x=-2 y x=5 son ceros reales, es decir (x+2) y (x-5) son factores del polinomio f, entonces se puede aplicar la división sintética de polinomios para encontrar los factores restantes.

$$\frac{x^4-5x^3-5x^2+23x+10}{(x-5)} = x^3 - 5x - 2$$

Ahora el cociente se lo divide para el otro cero real x=-2:

$$\frac{x^3-5x-2}{(x+2)} = x^2 - 2x - 1$$

Reescribiendo el polinomio se tendría:

$$f(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = (x+2)(x-5)(x^2 - 2x - 1)$$

Para el último factor se puede aplicar la fórmula cuadrática para determinar los dos ceros faltantes.

Mediante GeoGebra se puede identificar los ceros reales mediante el comando Interseca (función, Eje X, número de cero real).

Para el caso del ejemplo sería:

- Interseca(f, EjeX, 1) = (-2, 0).
- Interseca(f, EjeX, 2) = (-0.41421, 0).

- Interseca(f, EjeX, 3) = (2.41421, 0).
- Interseca(f, EjeX, 4) = (5, 0).

¿Cómo realizar un esbozo de la gráfica de una función polinomial?

Para realizar el esbozo de la gráfica de una función polinomial se debe primero analizar el comportamiento en los extremos de la función polinomial, tal como se ilustra en las figuras 23 y 24; luego conociendo los ceros reales, se los ubica en el eje x, y entre estos valores se debe aplicar el teorema del valor intermedio, el cual brinda la información sobre si la función es positiva o negativa. Para ello se debe evaluar un valor que esté entre dos ceros reales.

Ejemplo 1: realice un bosquejo de la gráfica de la función polinomial.

$$f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

Solución

Primero se identifica el grado y signo del coeficiente principal, en este caso el grado es 3, y el coeficiente principal es positivo, entonces el comportamiento que tendrá en los extremos es: cuando x tiende al infinito positivo, y también tiende al infinito positivo, cuando x tiende al infinito negativo, y tiende al infinito negativo.

Luego se identifica los ceros reales, en este caso al ser un polinomio en su forma factorizada, se tienen como ceros reales a:

$x=-2$, $x=1$ y $x=3$

Se ubican los puntos sobre el eje x, y posterior a ello se aplica el teorema del valor intermedio, en el cual se evalúa valores entre los ceros reales, por ejemplo:

Evaluamos la función en un valor entre:

a. -2 y 1, un valor que se puede tomar aquí sería el 0, entonces se evalúa y se determina el signo resultante.

$$f(0) = (0 + 2)(0 - 1)(0 - 3) = 2(-1)(-3) = 6$$

Como se observa el resultado es positivo, esto implica que en el intervalo de valores entre -2 y 1 la función estará sobre el eje x, es decir, será positiva.

b. 1 y 3, un valor de evaluación, aquí sería el 2, se procede a evaluar:

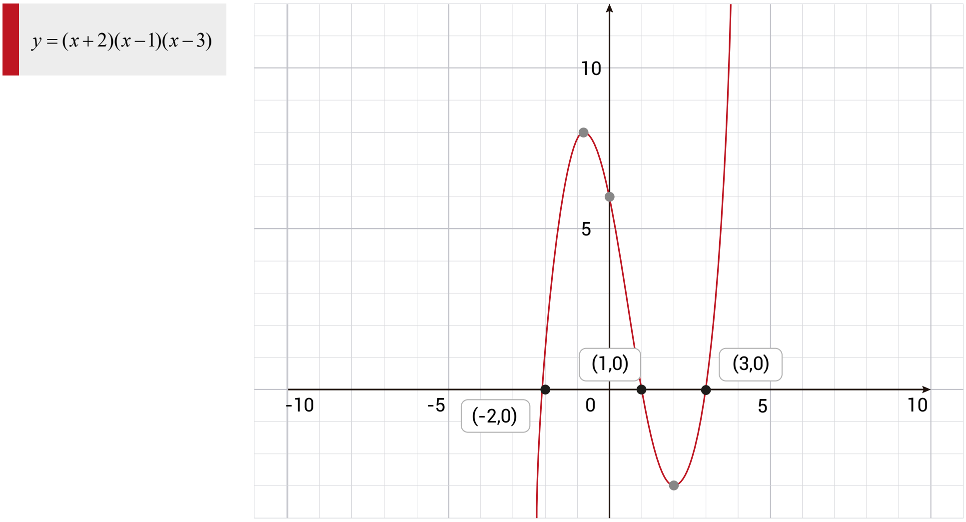
$$f(2) = (2 + 2)(2 - 1)(2 - 3) = 4(1)(-1) = -4$$

En este caso es negativo, por lo que la función en este intervalo de 1 y 3 estará bajo el eje x, es decir, sobre los valores de y negativos.

En la figura siguiente se puede apreciar la gráfica resultante.

Figura 25

Gráfica de la función polinomial f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)



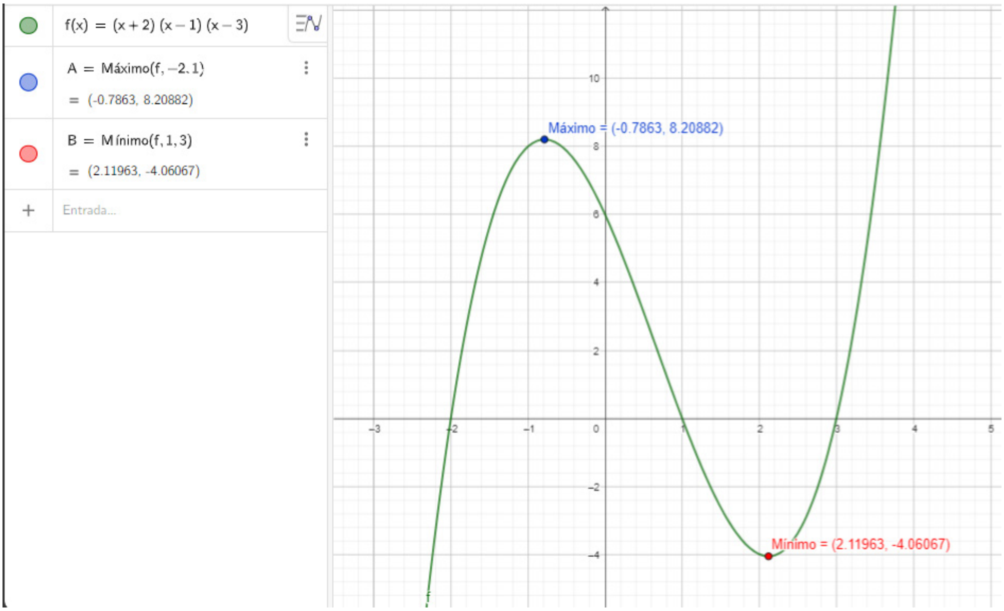
Nota. Tomado de *Sistemas de Conocimiento de Funciones Polinomiales y Racionales y su Didáctica* [Ilustración], por Armijos J., 2020, Ediloja.

Como puede notar, la gráfica concuerda con la descripción dada mediante el análisis realizado previamente. Así mismo podrá notar la presencia de puntos máximos y mínimos, también conocidos como extremos locales, que de acuerdo con el grado n del polinomio la gráfica poseerá n-1 extremos locales, en el caso del ejemplo el polinomio es de grado 3, por lo que se tendrá 2 extremos locales, y en efecto se puede apreciar un máximo y un mínimo local.

En GeoGebra para localizar un extremo local se puede emplear el comando Máximo o Mínimo. Por ejemplo, para encontrar el valor máximo de la función f, del ejemplo 1, se debe escribir Máximo (f, -2, 1) y para encontrar el valor mínimo se debe escribir Mínimo (f, 1, 3). Nótese que se coloca el nombre de la función, seguida de los intervalos donde se observa un extremo local. En la figura siguiente se ilustra lo indicado para determinar el valor máximo y mínimo.

Figura 26

Gráfica de la función con sus extremos locales



Nota. Cuenca, L., 2023.

A continuación, vamos a revisar una aplicación de un estudio de mercado donde se debe aplicar todo lo indicado en esta semana.

Un analista de mercado de una fábrica de electrodomésticos ha determinado que, si la fábrica produce y vende x batidoras al año, su ganancia total (en dólares) es:

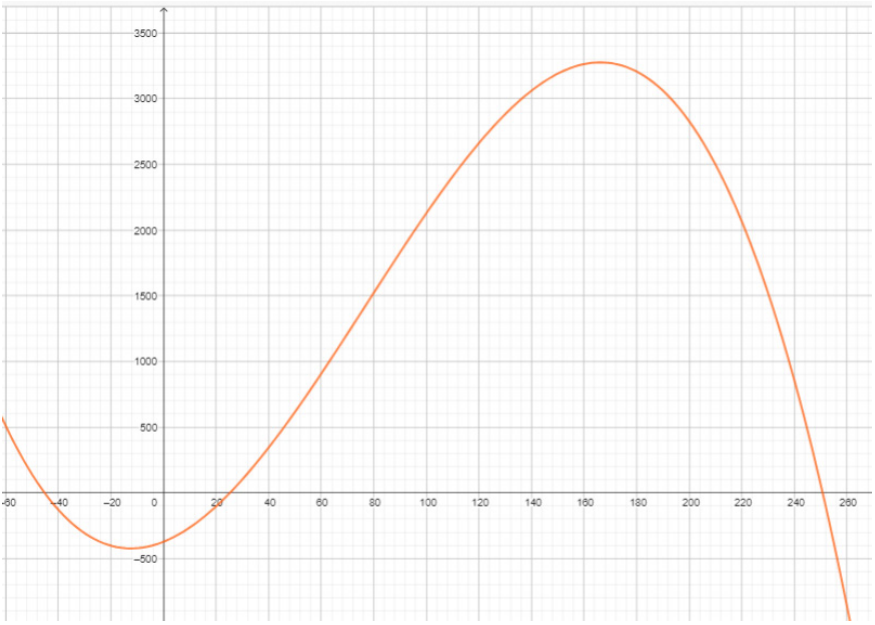
$$P(x) = 8x + 0.3x^2 - 0.0013x^3 - 372$$

Trace la gráfica de la función P para contestar las siguientes preguntas.

Con la ayuda de GeoGebra se procede a graficar la función.

Figura 27

Gráfica de la función P



Nota. Cuenca, L., 2023.

a. Cuando se fabrican sólo unas cuantas batidoras, la fábrica pierde dinero (utilidad negativa). (Por ejemplo, P(10)=-263.3 de modo que la compañía pierde $263.30 si produce y vende solo 10 batidoras.)

Esta situación se ilustra cuando la gráfica está por debajo del eje x.

¿Cuántas licuadoras debe producir la compañía para alcanzar el punto de equilibrio (no pierde ni gana)?

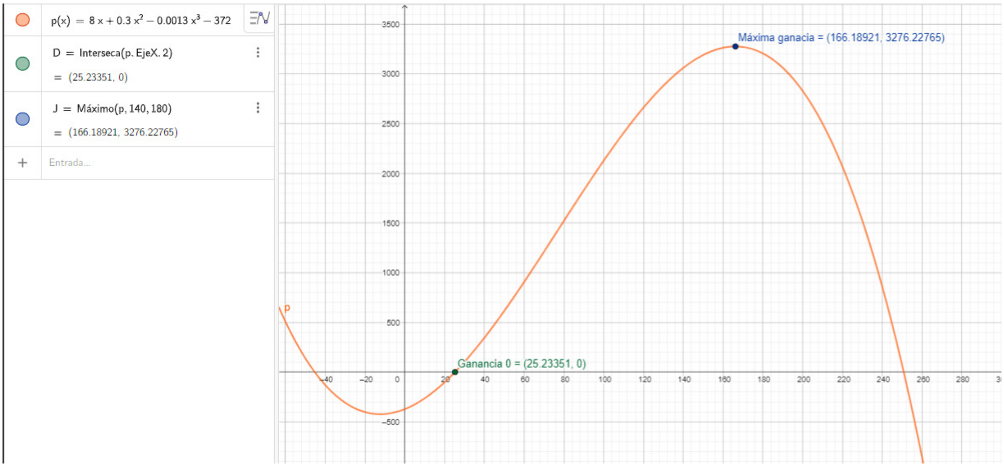
Esta situación se relaciona con los ceros reales, ya que estos implican la intersección con el eje x, que para este caso significa que la ganancia es 0, así como la pérdida es 0, y de acuerdo con la gráfica, corresponde al segundo cero real, de esta forma con GeoGebra se aplica el comando Interseca (p, Eje X, 2) dando como resultado 25.23, es decir que deben producirse y venderse al menos 25 batidoras para alcanzar el punto de equilibrio.

b. Entre más batidoras se produzcan y se vendan, ¿se incrementa infinitamente la ganancia? Si no es así, ¿cuál es la mayor ganancia posible que la fábrica puede tener?

En la figura se puede observar que no hay un incremento de la ganancia de manera infinita, ya que la misma llega a un punto máximo y posterior a ello la ganancia empieza a decaer, esto se asocia a un extremo local; en este caso un máximo local, y para determinarlo se aplica el comando Máximo(p, 140, 180) en GeoGebra, donde p es la función, 140 y 180 es el intervalo donde se aprecia el valor máximo.

Figura 28

Gráfica de la función P, donde se aprecia la ganancia 0, y la máxima utilidad



Nota. Cuenca, L., 2023.

En este caso se puede apreciar que la máxima ganancia se obtiene al vender 166 batidoras, lo cual genera una ganancia de aproximadamente $3276 dólares.

3.5. Ceros complejos y teorema fundamental del álgebra

En la sección anterior se ha estudiado al respecto de los ceros reales, ahora se requiere estudiar los ceros complejos, conociendo que un polinomio de grado n, tiene n ceros, entre los cuales al menos uno es complejo, dado que un número real es un número complejo, esto se cumple.

¿Cómo se puede determinar todos los ceros de un polinomio, tanto los reales como los complejos?

Para ello es necesario hacer uso del teorema de factorización completo, el cual indica que:

Si P(x) es un polinomio de grado n, considerando que n>1, entonces hay números complejos a, c_1, c_2, ..., cn con a distinto de 0 de forma que:

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

Ejemplo 1: factorizar un polinomio completamente.

Sea $P(x) = x^4 + x^2$.

Encuentre todos los ceros de P, y su factorización completa.

Se procede a sacar factor común del polinomio, $P(x) = x^4 + x^2$ en este caso sería x^2:

$$x^2(x^2 + 1)$$

Ahora para encontrar los ceros se iguala cada factor a 0:

$$x^2 = 0$$

En este caso, cuando x=0, se tiene un cero. Adicional se observa que este factor está elevado al cuadrado, lo cual implica que este cero es de multiplicidad 2, en otras palabras, este cero se cuenta por 2 ceros.

Ahora analicemos el factor: $x^2 + 1 = 0$

Como se puede observar dentro de los reales no hay un valor que, elevado al cuadrado, de un valor negativo, pero si se analiza desde los complejos se tiene que cuando la unidad imaginaria se eleva al cuadrado, el resultado es -1, es decir: $i^2 = -1$, así mismo si se tiene $(-i)^2 = -1$, entonces se tiene los ceros complejos en $x = i$ y $x = -i$

De esta forma se ha determinado todos los 4 ceros del polinomio P, siendo estos:

x = 0, con multiplicidad 2, x = *i y* x = -*i*.

De esta forma, la factorización completa del polinomio queda expresada como:

$$P(x) = x^2(x - i)(x + i)$$

Nótese que (x + *i*) resulta de (x - (- *i*))

> **Multiplicidad de un cero:** implica que cuando un factor está elevado a una potencia, esta indica la multiplicidad, por ejemplo, si se tiene un polinomio: $P(x) = (x + 2)^3\ (x - 2)^2\ (x + 5)$

Entonces se tiene:

X=-2 con multiplicidad 3, x=2 con multiplicidad 2 y x=-5 con multiplicidad 1, de esta forma se cuenta los 6 ceros de este polinomio P.

Ejemplo 2: factorizar un polinomio completamente.

Sea $P(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$

Encuentre todos los ceros de P, y su factorización completa.

En este caso, se parte de los posibles ceros del polinomio, en este caso serían: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ recuerde que estos posibles ceros se obtienen de dividir los factores del coeficiente independiente entre los factores del coeficiente principal.

Luego evaluamos cada uno de los posibles ceros, y cuando el resultado sea 0, se habrá determinado el cero.

$$\begin{gathered} P(1) = 20 \\ P(-1) = 0 \\ P(3) = 72 \\ P(-3) = -36 \\ P(9) = 900 \\ P(-9) = -720 \end{gathered}$$

En este caso se ha encontrado un cero que sería: x=-1, el cual representa un factor (x+1) del polinomio, esto implica que al dividir el polinomio P para el factor (x+1) se obtendrá el otro factor.

Entonces se procede a dividir $P(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$ entre $(x + 1)$

$$\begin{array}{ll} x^3 + x^2 + 9x + 9 & |\ x + 1 \\ -x^3 - x^2 & \quad x^2 + 9 \\ \qquad\qquad 9x + 9 & \\ \qquad\quad - 9x - 9 & \\ \qquad\qquad 0 - 0 & \end{array}$$

De esta forma se obtiene el factor $x^2 + 9$, y en este caso no se tiene un cero real, pero si ceros complejos, ya que cuando x=3i y x=-3i, el polinomio se hace cero.

Entonces, los ceros del polinomio son:

$$x = -1, x = 3i \text{ y } x = -3i$$

Factorizado el polinomio sería:

$$P(x) = (x + 1)(x - 3i)(x + 3i)$$

Ceros complejos conjugados

Cuando se trabaja con los ceros complejos, hay que considerar que se pueden presentar en pares conjugados, es decir, si se tiene un cero complejo de la forma, *a* + *bi*, entonces su conjugado *a* - *bi* también será un cero complejo.

Ejemplo 3: encuentre un polinomio P(x) de grado 3 con ceros -3 y 1+i.

Dado que 1 + i, es un cero, entonces por el teorema de ceros conjugados también lo es 1 - i.

Con esto, el polinomio P(x) que buscamos, tiene la forma:

$$P(x) = \big(x - (-3)\big)\big(x - (1 + i)\big)\big(x - (1 - i)\big)$$

Se reagrupa el segundo y tercer factor:

$$P(x) = (x + 3)\big((x - 1) + i\big)\big((x - 1) - i\big)$$

Se aplica diferencia de cuadrados:

$$P(x) = (x + 3)((x - 1)^2 - i^2)$$

Se resuelve y se recuerda que $i^2 = -1$:

$$P(x) = (x+3)(x^2 - 2x + 1 + 1) = (x+3)(x^2 - 2x + 2)$$
$$P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$$

Con lo cual se ha encontrado el polinomio que cumple con las condiciones dadas.

Para profundizar las gráficas de función, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson, (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 3.4 donde se explica sobre los ceros reales y teoremas y la sección 3.5 donde se aborda al respecto de los ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra, procedimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final de la sección 3.4 ejercicios y 3.5 ejercicios.

Se recomienda revisar el artículo sobre ceros y gráficas de polinomios disponibles en la plataforma Khan Academy, este artículo le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre los ceros reales de las funciones polinomiales.

Con la revisión de este artículo puede notar la relevancia que tienen los ceros reales para caracterizar las gráficas de las funciones, todo ello permite ver la importancia que tienen en la interpretación gráfica en problemas cotidianos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta semana once estudiamos sobre la gráfica de funciones, y como con la ayuda de los ceros reales se puede determinar la gráfica de la función, así mismo se revisó cómo determinar los ceros reales de una función; finalmente se indicó algunos comandos para identificar extremos locales mediante GeoGebra, para reforzar estos aprendizajes teóricos y prácticos es conveniente experimentarlos para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Identifique los posibles ceros reales, con la ayuda de GeoGebra obtenga todos los ceros reales y los extremos locales.

$$f(x) = x^5 - 9x^3$$

2. Determine todos los ceros (reales y complejos) del polinomio.

$$P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x + 12$$

3. Análisis de una población de conejos: Se observa que la población de conejos en una localidad de Ecuador está modelada por la función:

$$P(t) = 120t - 0.4t^4 + 1000$$

Donde t es el tiempo (en meses) desde que se iniciaron las observaciones de la localidad.

a. ¿Cuándo se alcanza la máxima población y cuál es la máxima población?
b. ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la localidad?

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

4. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: ceros de polinomios (con factorización) y Factoriza polinomios: números complejos.

Con el desarrollo de estas actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con la gráfica de funciones polinomiales, así mismo pudo evidenciar la importancia de los ceros reales y los extremos locales en la resolución de problemas de la vida real, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

5. Hemos concluido la semana once, es momento de autoevaluar nuestros conocimientos logrados hasta aquí. La presente autoevaluación le permitirá medir su aprendizaje, por lo cual es importante que la desarrolle, así mismo esta actividad le permitirá prepararse para la evaluación bimestral, para lo cual en cada pregunta seleccione el o los literales correctos.

Autoevaluación 3

1. La población de peces en cierta parte del océano (en miles de peces) como función de x, que representa la temperatura del agua (en grados Celsius) está modelada por:

$$p(x) = -2x^2 + 40x - 72$$

¿Qué temperatura dará lugar a la ausencia de peces (es decir, población 0)?

a. A los 5 grados.
b. A los -72 grados.
c. A los -2 grados.
d. A los 2 grados y a los 18 grados.

2. Altura de una pelota. Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 metros/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por:

$$a(t) = 40t - 16t^2$$

¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

3. Complete: La gráfica de $fx = 3(x - 2)^2 - 6$ es una parábola que abre hacia ..., con su vértice en (..., ...) y f(2) = ... es el valor (mínimo/máximo) ... de f

4. Al hablar del vértice de una parábola nos referimos a:

a. El punto donde corta con el eje X.
b. El punto donde corta con el eje Y.
c. La parte ascendente o descendente de la parábola.
d. El punto máximo o mínimo de la parábola.

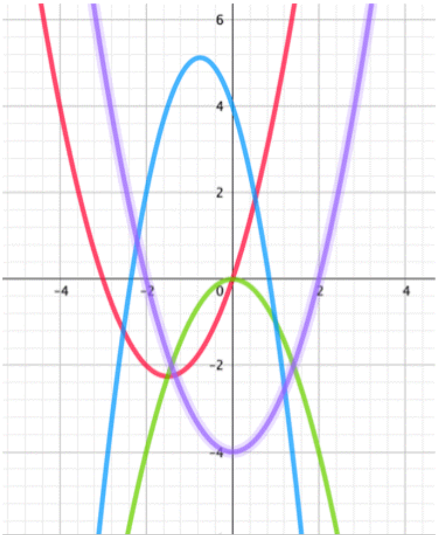
5. Verdadero o falso: si c, es un cero real del polinomio P, entonces todos los otros ceros de P son ceros de P(x)/(x - c).

a. Verdadero.
b. Falso.

6. Verdadero o falso: si el coeficiente principal de una función cuadrática es negativo, significa que abre hacia abajo, entonces se genera un mínimo.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

7. ¿Qué color tiene la parábola cuya expresión algebraica es: $y = -2x^2 - 3x + 4$?



   a. Verde.
   b. Azul.
   c. Morada.
   d. Roja.

8. Complete: el polinomio $P(x) = 5x^2(x - 4)^3 (x + 7)$ tiene grado …. Tiene ceros 0, 4 y …. El cero 0 tiene multiplicidad … , y el cero 4 tiene multiplicidad ….

9. Encuentre un polinomio que satisfaga las siguientes condiciones:

   El polinomio Q tiene grado 3 y ceros: 3 y 2-3i.

10. Verdadero o falso: un problema de aplicación de una función cuadrática puede involucrar la determinación del tiempo necesario para alcanzar la altura máxima de un objeto lanzado al aire.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

Verifique sus respuestas en el solucionario que se encuentra al final de la guía didáctica.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Ir al solucionario

Unidad 4. Funciones racionales

4.1. Funciones racionales

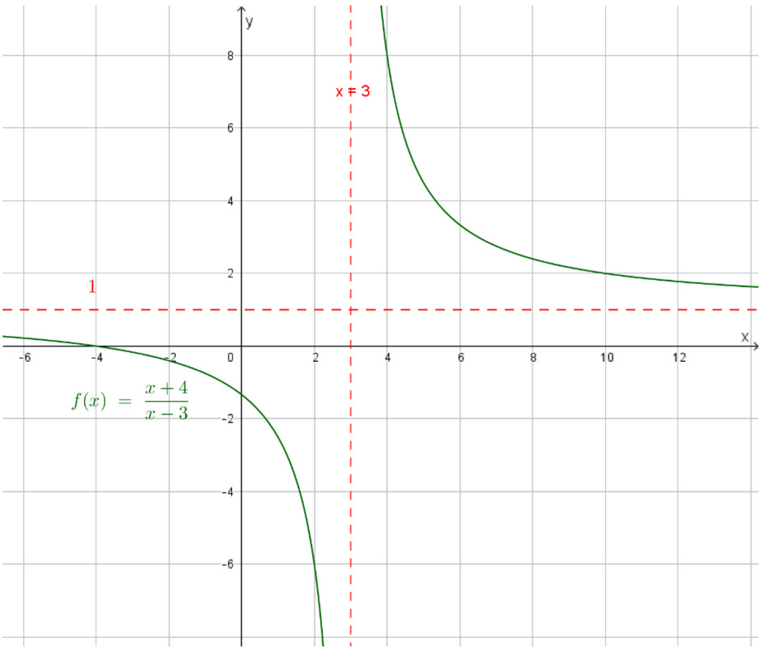
Las funciones racionales se expresan como el cociente de dos funciones polinomiales.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, dondeq(x) \neq 0$$

Se aprecia que q (x) debe ser distinto de 0, ya que la división para 0 no está definida, por lo que esta restricción, en la gráfica, se lo puede apreciar en lo que se conoce como asíntota vertical, tal como se ilustra en la siguiente figura de la función: $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$ (Cuenca Macas, Andrade Pazmiño, & Larrea Falconi, 2020).

Figura 29

Gráfica de la función $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$



Nota. Cuenca, L., 2023.

Se observa que la función no está definida en *x* = 3, por lo que se convierte en una restricción en el dominio de la función, en la gráfica se puede observar que se tienen valores que se aproximan a *x* = 3 tanto por la derecha (3^+) como por la izquierda (3^-), pero de ninguna manera x puede valer 3. Para este caso, cuando x se aproxima a 3 por la derecha, la función tiende al infinito positivo, mientras que x se aproxima a 3 por la izquierda, la función tiende al infinito negativo.

4.2. Asíntotas

Las funciones racionales pueden tener asíntotas que pueden ser: verticales, horizontales y oblicuas.

Asíntotas verticales: son aquellos valores de la variable que hacen que el denominador sea 0.

A continuación, realice la siguiente práctica con la herramienta GeoGebra.

Título: visualizar asíntotas verticales.

Instrucciones: en la aplicación GeoGebra, siga las instrucciones dadas y experimente la visualización de asíntotas verticales.

i. Seleccione Ejemplo 1, 2 o 3.
ii. Finalmente, podrá visualizar la función.

Applet de GeoGebra – Asíntotas verticales

En esta simulación puede apreciar 3 ejemplos de funciones racionales, en los cuales se presentan las asíntotas verticales, para el caso de la función $f(x) = \frac{x^3+2}{x+1}$, la asíntota se presenta en cuando x=-1, para la función $h(x) = \frac{3}{x^4+x^2}$, la asíntota se ubica en x=0 y en la función $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$, se presentan dos asíntotas una en x=-1 y la otra en x=1.

Puede haber casos de funciones racionales que no tienen asíntotas verticales como, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}; g(x) = \frac{3}{x^4+x^2+2}$$

Como puedo notar, esto sucede en los casos en los que el denominador no puede ser 0.

Asíntotas horizontales: considerando que una función polinomial es el resultado de dividir dos polinomios, entonces se tiene un grado ***n***, para el polinomio del numerador, y un grado ***d***, para el polinomio del denominador.

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_d x^d + b_{d-1} x^{d-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Estas asíntotas se presentan de acuerdo con las siguientes condiciones:

1. Si n < d, entonces se genera una asíntota horizontal en y = 0.
2. Si n = d, entonces se genera una asíntota horizontal en $y = \frac{a_n}{b_d}$.
3. Si n > d, entonces NO se genera una asíntota horizontal.

La importancia de las asíntotas horizontales es que nos permite analizar el comportamiento en los extremos de una función racional, es decir, nos permite ver cuál es la tendencia de la función en los extremos del dominio de la función.

Asíntotas oblicuas: este tipo de asíntotas se presentan en funciones racionales en las cuales el grado del polinomio del numerador es una unidad mayor que el grado del polinomio del denominador. Como, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-4}$$

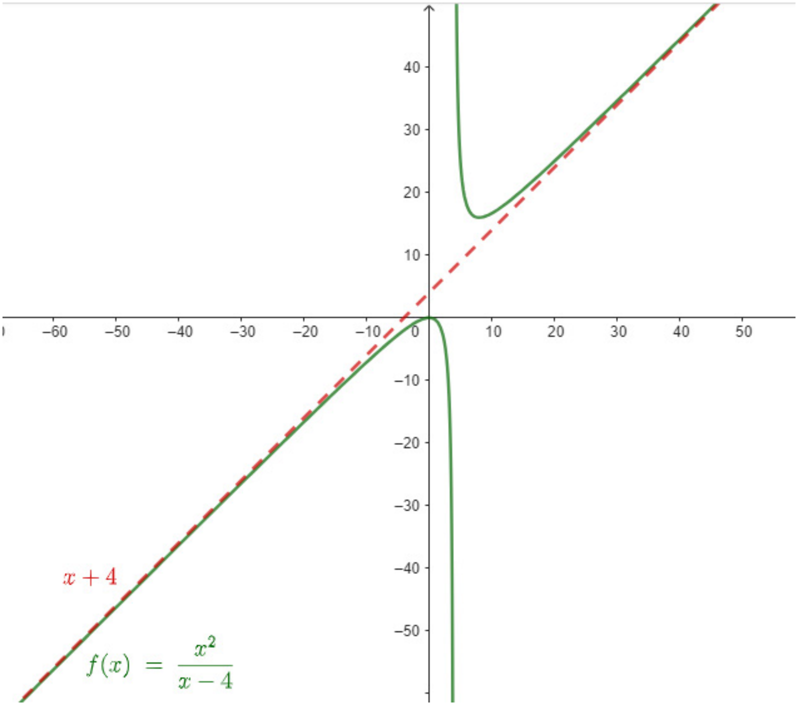
Entonces la asíntota oblicua se genera en la expresión lineal resultante de la división de los polinomios.

$$x^2 | x - 4 - x^2 + 4xx + 40 + 4x - 4x + 160 + 16$$

En este caso la asíntota oblicua está representada por la recta , tal como se puede apreciar en la figura siguiente.

Figura 30

Función racional $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$ con asíntota oblicua



Nota. Cuenca, L., 2023.

Para tener en cuenta es que únicamente en las asíntotas horizontales y oblicuas, la gráfica de la función SI las puede cortar, ya que en las asíntotas verticales de ninguna manera la gráfica puede cortar dicha asíntota.

4.3. Gráfica de funciones racionales

Para graficar una función racional es importante tener en consideración lo siguiente:

1. Determinar los puntos de intersección con el eje x, para lo cual se requiere encontrar los ceros del polinomio del numerador.

2. Determinar el punto de intersección con el eje y, para lo cual se evalúa la función en x=0.

3. Identificar la existencia de asíntotas verticales, horizontal y oblicua.

4. Analizar el comportamiento alrededor de las asíntotas verticales.

5. Finalmente, se realiza la gráfica ubicando cada uno de los elementos mencionados anteriormente.

A continuación, se presenta un ejemplo:

Realice la gráfica de la función racional: $f(x) = \frac{2x^2+2x-4}{x^2+x}$.

1. Se factoriza la función: $f(x) = \frac{2(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$.

2. Se identifican las intersecciones con el eje x, en este caso sería cuando x=-2 y x=1.

3. No hay intersección con el eje y, ya que existe una asíntota vertical en x=0, por lo que no se puede evaluar la función en x=0.

4. Para la función dada se presentan:

   2 asíntotas verticales en x=0 y x=-1, ya que en estos valores el denominador se hace 0.

   1 asíntota horizontal, que se encuentra en y=2, dado que tienen el mismo grado.

   No hay presencia de una asíntota oblicua.

5. Se analiza el comportamiento alrededor de las asíntotas verticales.

Como se mencionó anteriormente, alrededor de las asíntotas verticales la función puede tender al infinito positivo o negativo, para ello se analiza el signo resultante en la función en su forma factorizada (tabla 2).

Tabla 2

Comportamiento alrededor de las asíntotas verticales x=0 y x=-1

Cuando x tiende a	0^-	0^+	-1^-	-1^+
El signo de $\frac{2(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$	$\frac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)(-)}{(+)(+)}$	$\frac{(+)(-)}{(-)(-)}$	$\frac{(+)(-)}{(-)(+)}$

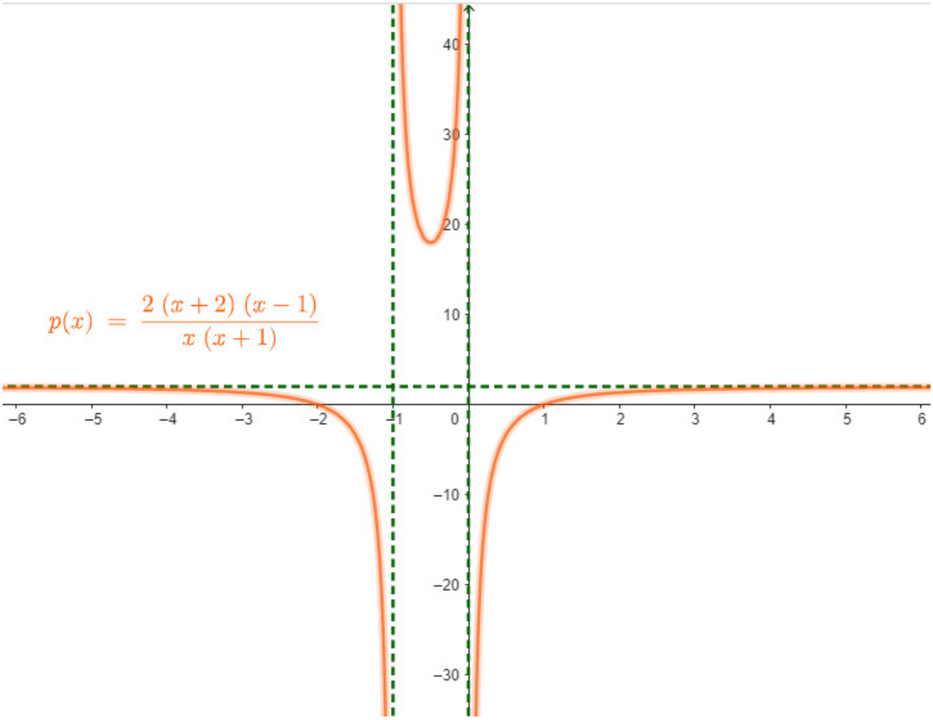
Entonces y tiende a	Infinito positivo	Infinito negativo	Infinito negativo	Infinito positivo

Nota. Cuenca, L., 2023.

6. Finalmente, se tiene la gráfica.

Figura 31

Gráfica de la función $p\left(x\right)=\frac{2x^2+2x-4}{x^2+x}$



Nota. Cuenca, L., 2023.

Como puede apreciar, las gráficas de funciones racionales proveen de información valiosa para comprender el comportamiento y las características de estas funciones, lo que facilita el análisis matemático y la resolución de problemas relacionados con ellas.

Para profundizar las gráficas de función, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson, (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 3.6 donde se explica con ejemplos ilustrativos las funciones racionales, cálculo de asíntotas y las gráficas, procedimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final de la sección 3.6 ejercicios

Se recomienda revisar el artículo sobre Introducción a las expresiones racionales disponibles en la plataforma Khan Academy, este artículo le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre las funciones racionales.

Con la revisión de este artículo se puede comprender de forma clara los distintos elementos presentes en las funciones racionales, sobre todo como las restricciones que se presentan en el dominio se representan como asíntotas verticales, todo ello permite ver la importancia que tienen en la aplicación en problemas cotidianos que se verán en la siguiente sección.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta semana doce estudiamos sobre las funciones racionales y sus gráficas, es decir, con las diferentes características de las funciones racionales son empleadas para tener una noción de cómo será la gráfica y por medio de ello analizar el comportamiento de la función; para reforzar estos aprendizajes teóricos y prácticos es conveniente experimentarlos para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Determine los puntos de intersección con los ejes x, y de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-6}$$
$$g(x) = \frac{x^2-9}{x^2}$$

2. Determine todas las asíntotas presentes en las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x-3}$$
$$g(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-4}$$

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word. Verifica lo realizado en GeoGebra.

3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Funciones racionales: ceros, asíntotas y puntos indefinidos y Gráficas de funciones racionales.

Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar la identificación de asíntotas, intersección con los ejes y sus gráficas, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 13

4.4. Aplicaciones de funciones racionales

Los elementos estudiados de las funciones racionales como las intersecciones con los ejes y asíntotas son de gran importancia a la hora de analizar modelos asociados a situaciones reales. A continuación, vamos a analizar los siguientes modelos.

Crecimiento poblacional. La población de conejos de una granja en el Ecuador se modela con la función racional:

$$p(t) = \frac{3000t}{t+1}$$

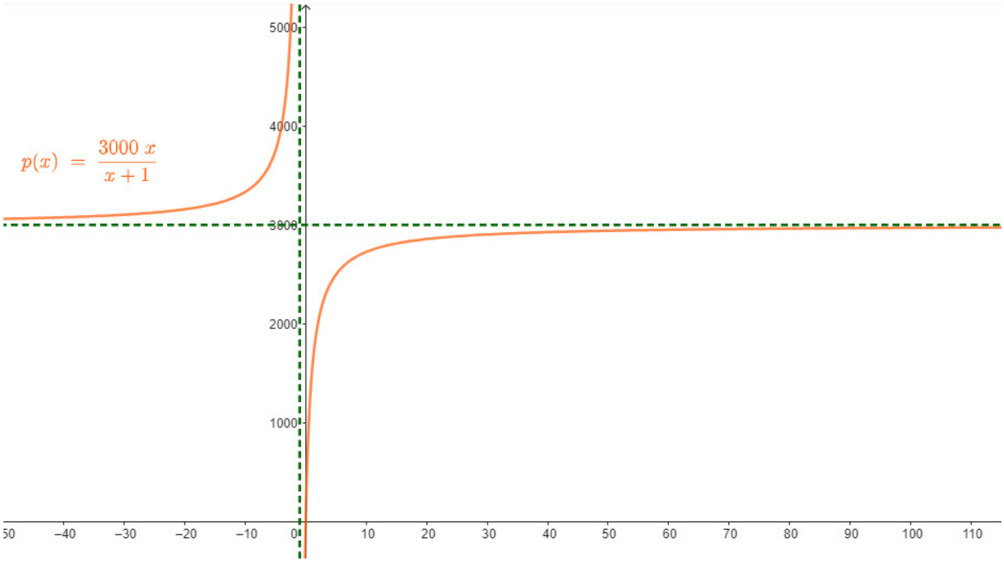
Donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde principios de año (Tan, 2018).

¿Qué le ocurre a la población de conejos a lo largo del tiempo?

Para responder esta interrogante se debe analizar que sucede en el extremo positivo del dominio de la función, lo cual se traduce en encontrar la asíntota horizontal, y en este caso de acuerdo al modelo se tiene que los grados de los polinomios del numerador y denominador son iguales, por lo que la asíntota horizontal se encuentra en y=3000; esto significa que la población de conejos de ninguna manera sobrepasará de 3000, ya que la función se aproximará a este valor, esto los podemos ver en la siguiente figura.

Figura 32

Gráfica de la función p



Nota. Cuenca, L., 2023.

Se puede apreciar que hay una asíntota vertical en t=-1, pero en el contexto del problema no tiene sentido este valor, ya que no hay tiempo negativo.

Así mismo se puede interpretar que al inicio la población es de 0, es decir, la intersección con el eje x indica el inicio del tiempo y la intersección con el eje y, indica la población inicial de conejos.

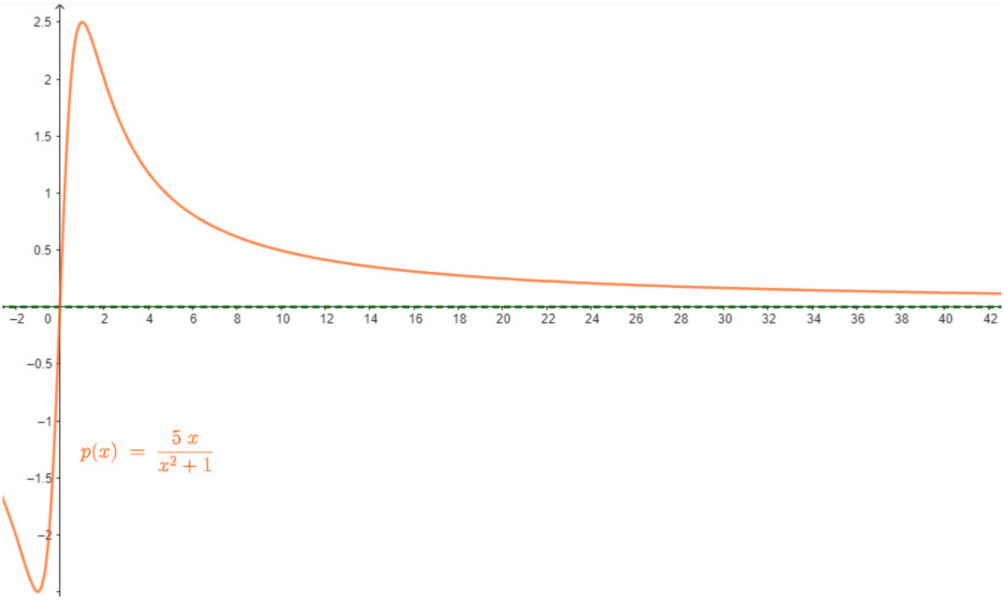
Concentración de medicamentos. Se administra un medicamento a un paciente y se vigila la concentración de este en su flujo sanguíneo. Al tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó el medicamento) la concentración (en mg/L) está dada por:

$$c(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

Realice la gráfica de la función c y responda a las interrogantes planteadas.

Figura 33

Gráfica de la función c



Nota. Cuenca, L., 2023.

En la figura se puede apreciar la presencia de una asíntota horizontal, no hay asíntota vertical, ya que no existe valor que haga 0 el denominador, finalmente se aprecia un valor máximo y mínimo.

¿Cuál es la concentración más alta de medicamento que se alcanza en el flujo sanguíneo del paciente?

La respuesta a esta interrogante está en el valor máximo presente en la gráfica, la cual representa a la concentración más alta que es de aproximadamente: 2.5 mg/L.

¿Qué le ocurre a la concentración de medicamento después de un tiempo prolongado?

Aquí se debe analizar el comportamiento en el extremo positivo del dominio, es decir la asíntota horizontal, en este caso como el grado del polinomio del numerador es menor al del denominador, entonces la asíntota horizontal está en y=0, lo que significa que con el pasar del tiempo la concentración tiende a desaparecer.

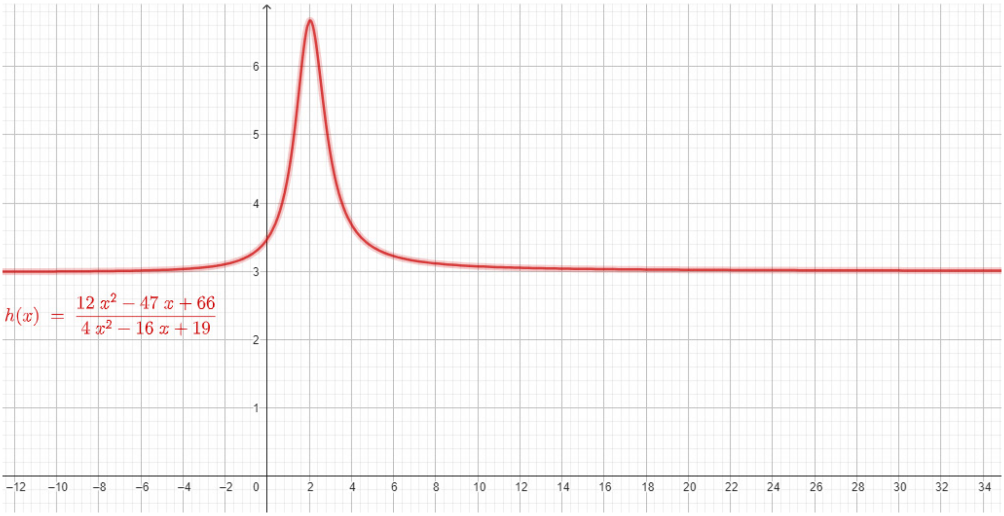
Tratamiento médico: un paciente recibe tratamiento para una enfermedad crónica. La concentración $C(x)$ (en $\frac{g}{mL}$) de un determinado medicamento en su flujo sanguíneo, dentro de x semanas, se aproxima por la siguiente función.

$$C(x) = \frac{12x^2 - 47x + 66}{4x^2 - 16x + 19}$$

Trace la gráfica de la función C, luego desarrolle las interrogantes planteadas.

Figura 34

Gráfica de la función C



Nota. Cuenca, L., 2023.

En la figura se puede observar una asíntota horizontal, un valor máximo, una intersección con el eje y.

¿En cuánto tiempo se obtiene la máxima concentración?

De acuerdo con la gráfica, aproximadamente a las dos semanas se tiene la máxima concentración.

2 Bimestre

¿Qué pasa con la concentración del medicamento con el pasar del tiempo?

Aquí analizamos la asíntota horizontal que en este caso está ubicada en y=3, lo cual implica que con el pasar del tiempo la concentración cada vez se irá aproximando a $3\frac{g}{mL}$.

¿Cuál es la concentración al inicio del tratamiento?

En este caso se debe hacer referencia a la intersección con el eje y, el cual representa la concentración al inicio del tratamiento, mismo que es aproximadamente $3.5\frac{g}{mL}$..

Las funciones racionales ofrecen flexibilidad en la modelización matemática debido a su capacidad para representar relaciones complejas entre variables. Su capacidad para capturar comportamientos asintóticos, límites y cambios abruptos los hace valiosos en la representación de una amplia gama de fenómenos en diversos campos científicos y de ingeniería.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta semana trece estudiamos sobre la aplicación de las funciones racionales, es decir, como las características presenten en las funciones racionales nos permiten analizar situaciones de la vida real, para reforzar estos aprendizajes prácticos es conveniente experimentarlos para ello se propone desarrollar y resolver el siguiente problema:

Concentración de medicamento: después de que se le inyecta cierto medicamento a un paciente, se vigila la concentración c del medicamento en el flujo sanguíneo. (Poblete, 2020) Al tiempo t ≥ 0 (en minutos desde que se inyectó), la concentración (en mg/L) está dada por

$$c(t) = \frac{30t}{t^2 + 2}$$

a. Trace una gráfica de la concentración del medicamento, identifique los distintos elementos de la función racional y analice lo que significa en el contexto del problema.

b. ¿Qué ocurre finalmente a la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo?

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de este problema, usted pudo practicar, aplicar y experimentar la aplicación de funciones racionales, lo cual le será muy útil a la hora de analizar modelos que representan situaciones reales.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 14

4.5. Desigualdades polinomiales y racionales

Las desigualdades polinomiales y racionales son expresiones matemáticas que involucran polinomios o funciones racionales con los cuales se establece una relación de orden (mayor que, menor que, mayor o igual, menor o igual).

Las desigualdades polinomiales: son expresiones algebraicas compuestas por una suma finita de términos, cada uno siendo el producto de una constante y una variable elevada a una potencia entera no negativa. Por ejemplo,

$$3x^2 + 2x - 5 > 0$$

Es una desigualdad polinomial, donde se busca el conjunto de valores de x que satisfacen esa desigualdad.

Las desigualdades racionales: son expresiones en las que hay una fracción de dos polinomios. Por ejemplo,

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} \geq 0$$

Es una desigualdad racional, donde se busca el conjunto de valores de x que hacen que la expresión sea mayor o igual a cero.

La resolución de desigualdades polinomiales o racionales implica encontrar los valores de la variable (o variables) que satisfacen la relación de orden especificada (mayor que, menor que, mayor o igual que, menor o igual que). Esto implica determinar los intervalos en los que la expresión se satisface la relación de orden.

La resolución de estas desigualdades puede implicar diferentes métodos dependiendo de la complejidad de los polinomios o funciones racionales involucradas. Estrategias comunes incluyen la identificación de ceros del polinomio, la ubicación de puntos críticos y el análisis de signos en intervalos específicos para determinar los rangos donde la desigualdad es verdadera.

A continuación, se muestran los pasos a seguir para la resolución de desigualdades polinomiales. De acuerdo con Stewart, Lothar, & Saleem, (2017) mencionan los siguientes pasos:

1. **Pasar todos los términos a un lado.** Reescriba la desigualdad de manera que todos los términos diferentes de cero se encuentren en un lado del símbolo de desigualdad.
2. **Factorizar el polinomio.** Factorice el polinomio en factores irreducibles y encuentre los ceros reales del polinomio.
3. **Encontrar los intervalos.** Haga una lista de los intervalos determinados por los ceros reales.
4. **Hacer una tabla o diagrama.** Utilice los valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. El último renglón de la tabla determina el signo del polinomio en ese intervalo.
5. **Resolver.** Determine las soluciones de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla. Verifique si los puntos finales de estos intervalos satisfacen la desigualdad. (Esto puede suceder si la desigualdad implica ≤ o ≥.)

Ejemplo 1: Resolver la desigualdad $3x^4 - x^2 - 4 < 2x^3 + 12x$.

Paso 1: pasar todos los términos al lado izquierdo.

$$3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 < 0$$

Paso 2: factorizar el polinomio (revise la sección 3.4 para obtener los ceros reales):

$$(x-2)(3x+1)(x^2+x+2) < 0$$

Los ceros reales que se identifican son:

$$x = 2, x = -\frac{1}{3}$$

Paso 3: determinar los intervalos, tomando de referencia los ceros reales.

Los intervalos son:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, 2\right), (2, \infty)$$

Paso 4: evaluar el signo de cada factor con los valores de los intervalos determinados (tabla 3).

Tabla 3

Evaluación de los intervalos

Intervalo	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$	$(2, \infty)$
Valor del intervalo a evaluar	-1	0	3
Signo de $(x-2)(3x+1)$ (x^2+x+2)	$(-)(-)(+) = +$	$(-)(+)(+) = -$	$(+)(+)(+) = +$

Nota. Adaptado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

Paso 5: Analizar y determinar la solución

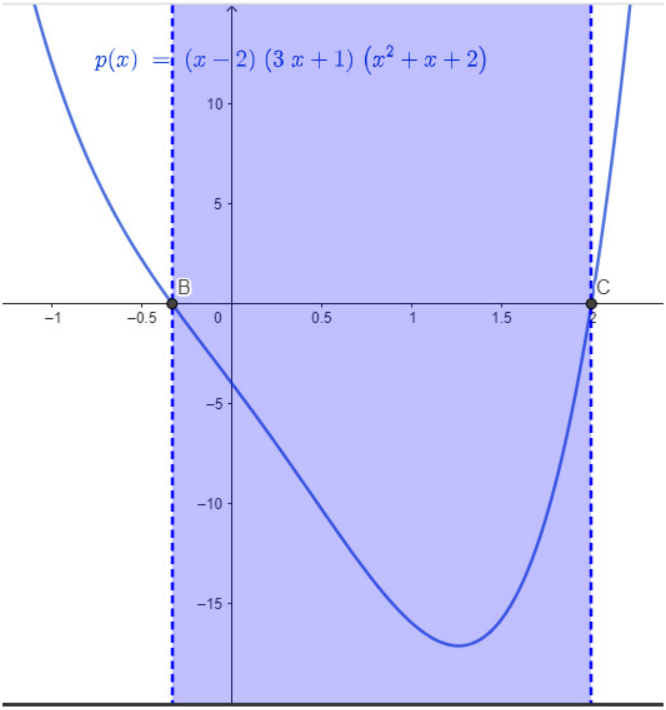
La solución a la desigualdad estará dada por el signo negativo, ya que la relación de orden que se debe comprobar es la menor que, de esta forma se puede observar que en el único intervalo donde se obtiene un signo negativo es en:

$$\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$$

Siendo esta la solución.

Figura 35

Solución gráfica de la desigualdad polinomial



Nota. Cuenca, L., 2023.

La región que se muestra pintada en la figura, representa a la solución, se emplean líneas entrecortadas para denotar que los extremos $-\frac{1}{3}$ y 2 no se incluyen dentro de la solución.

A continuación, se muestran los pasos a seguir para la resolución de una desigualdad racional, de acuerdo con Stewart, Lothar, & Saleem, (2017).

1. **Pasar todos los términos a un lado.** Reescriba la desigualdad de manera que todos los términos estén en un lado del símbolo de desigualdad. Ponga todos los cocientes con un denominador común.

2. **Factorizar el numerador y el denominador.** Factorice el numerador y el denominador en factores irreducibles y luego encuentre los puntos de corte.

3. **Encontrar los intervalos.** Haga una lista de los intervalos determinados por los puntos de corte.

4. **Crear una tabla o diagrama.** Utilice valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo de la función racional en ese intervalo.

5. **Resolver.** Determine la solución de la desigualdad del último renglón de la tabla. Verifique si los puntos finales de estos intervalos satisfacen la desigualdad. (Esto puede suceder si la desigualdad tiene ≤ o >).

Ejemplo 2: resolver la desigualdad $\frac{1-2x}{x^2-2x-3} \geq 1$.

Paso 1: pasar todos los términos al lado izquierdo y resolver para tener un denominador en común.

$$\frac{1-2x}{x^2-2x-3} - 1 \geq 0$$

$$\frac{1-2x-(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3} \geq 0$$

$$\frac{4-x^2}{x^2-2x-3} \geq 0$$

Paso 2: factorizar el polinomio del numerador y denominador:

$$\frac{(2+x)(2-x)}{(x-3)(x+1)} \geq 0$$

Los ceros reales que se identifican son:

$$x = 2, x = -2$$

También se identifican valores que deben restringirse en la solución que son:

$$x = 3, x = -1$$

Paso 3: determinar los intervalos, tomando de referencia los ceros reales y los valores que se restringen en la desigualdad.

Los intervalos son:

$$(-\infty,-2),(-2,-1),(-1,2),(2,3),(3,\infty)$$

Paso 4: evaluar el signo de cada factor con los valores de los intervalos determinados (tabla 4).

Tabla 4

Evaluación de los intervalos

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
Valor del intervalo a evaluar	-3	-1.5	0	2.5	4
Signo de $\frac{(2+x)(2-x)}{(x-3)(x+1)}$	$\frac{(-)(+)}{(-)(-)}=-$	$\frac{(+)(+)}{(-)(-)}=+$	$\frac{(+)(+)}{(-)(+)}=-$	$\frac{(+)(-)}{(-)(+)}=+$	$\frac{(+)(-)}{(+)(+)}=-$

Nota. Adaptado de *Precálculo Matemáticas para el Cálculo* [Ilustración], por Stewart, et al., 2017, México D.F.: Cengage, CC BY 2.0

Paso 5: analizar y determinar la solución.

La solución a la desigualdad estará dada por el signo positivo, ya que la relación de orden que se debe comprobar es la mayor o igual que, de esta forma se puede observar que los intervalos que satisfacen la desigualdad son:

$$(-2,-1)y(2,3)$$

Hay que considerar que se tienen restricciones en x=3 y x=-1, por lo que en el intervalo se debe excluir, y los valores x=-2 y x=2 se deben incluir, por lo que se emplea la siguiente notación en los intervalos.

$$[-2,-1)\cup[2,3)$$

Siendo esta la solución.

Aplicación de desigualdades polinomiales

A continuación, vamos a resolver problemas asociados a la vida real mediante las desigualdades.

Virus respiratorio: se ha establecido que el virus sincicial respiratorio que ataca preferentemente a los niños se debe a dos factores que son: la posibilidad de contagio.

$$C = 2x^2 - 5x + 4$$

Y la disminución de ciertas vitaminas en el organismo:

$$V = x^2 + 6x - 8$$

Ambas expresiones dependen de la edad x. Si se estima que los mayores trastornos producidos por este virus se producen cuando la diferencia entre ambos factores es menor que 12 ¿Cuáles son las edades de mayor riesgo para contraer esta enfermedad? (Poblete, 2020).

Como habla de diferencia entonces se debe restar las ecuaciones C y V, seguidamente usar la desigualdad < ya que indica "es menor que" de esta forma se tiene:

$$2x^2 - 5x + 4 - (x^2 + 6x - 8) < 12$$

$$2x^2 - 5x + 4 - x^2 - 6x + 8 - 12 < 0$$

$$x^2 - 11x < 0$$

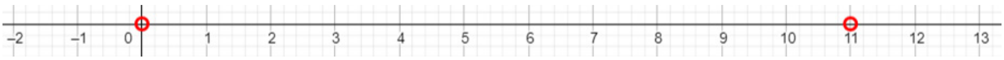
Luego factorizamos:

$$x(x - 11) < 0$$

Ubicamos en la recta real los puntos x=0 y x=11

Figura 36

Gráfico de recta lineal



Nota. Cuenca, L., 2023.

Y verificamos los intervalos solución, para ello probamos con un valor de los intervalos:

(-infinito, 0)

$$-1(-1-11)<0$$

En este intervalo de valores positivos, por lo que se descarta la solución.

(0, 11):

$$1(-1-11)<0$$

Aquí da valores negativos, por lo que se acepta este intervalo.

(11, infinito)

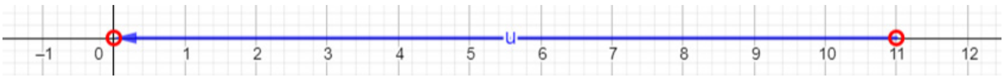
$$12(12-11)<0$$

En este intervalo de valores positivos, por lo que se descarta la solución.

De esta forma la solución se encuentra en el intervalo de 0 a 11.

Figura 37

Gráfico de intervalo 0 a 11



Nota. Cuenca, L., 2023.

Las edades de riesgo están entre 0 y 11 años.

Aplicación de desigualdades racionales

Ahora, veamos cómo se aplican las desigualdades racionales en un problema asociado a la vida real.

Fármacos y temperatura: un determinado fármaco que se usa para controlar la temperatura se inyecta vía intramuscular. Su efecto (en horas) es dado en función de x (mg de dosis) por:

$$E = \frac{72x}{6x+5}$$

¿Qué cantidad de dosis se debe inyectar para que el fármaco tenga efecto más de 4 horas y menos de 9 horas? (Poblete, 2020).

Se deben estructurar dos inecuaciones, las cuales se deben cumplir las dos.

La primera sería:

$$\frac{72x}{6x+5} > 4$$

Al resolver se tiene:

$$\frac{72x}{6x+5} - 4 > 0$$

$$\frac{72x - 4(6x+5)}{6x+5} > 0$$

$$\frac{72x - 24x - 20}{6x+5} > 0$$

$$\frac{48x - 20}{6x+5} > 0$$

Se determinan los puntos críticos, los cuales son aquellos que hacen el denominador y numerador 0.

48x-20=0

X=20/48=5/12

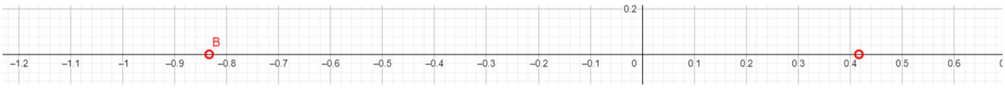
6x+5=0

X=-5/6

Ubicamos esos puntos en la recta numérica.

Figura 38

Puntos en la recta real



Nota. Cuenca, L., 2023.

Y verificamos los intervalos solución, para ello probamos con un valor de los intervalos:

(-infinito, -5/6)

$$\frac{48(-1)-20}{6(-1)+5}>0$$

Este intervalo de valores positivos, por lo que se acepta este intervalo

(-5/6, 5/12).

$$\frac{48(0)-20}{6(0)+5}>0$$

Aquí da valores negativos, por lo que se descarta la solución.

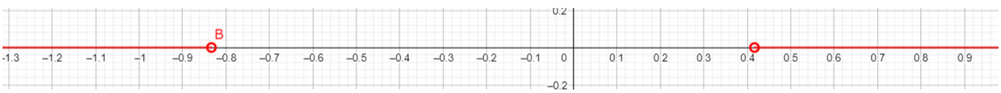
(5/12, infinito)

Este intervalo de valores positivos, por lo que se acepta este intervalo

La solución está dada por:

Figura 39

Solución de la desigualdad



Nota. Cuenca, L., 2023.

Y la segunda sería:

$$\frac{72x}{6x+5}<9$$

Al resolver se tiene:

$$\frac{72x}{6x+5} - 9 < 0$$

$$\frac{72x - 9(6x+5)}{6x+5} < 0$$

$$\frac{72x - 54x - 45}{6x+5} < 0$$

$$\frac{18x - 45}{6x+5} < 0$$

Se determinan los puntos críticos lo cuales son aquellos que hacen el denominador y numerador 0.

18x-45=0

X=45/18=5/2

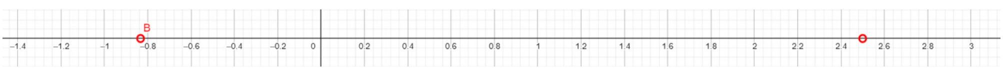
6x+5=0

X=-5/6

Ubicamos esos puntos en la recta numérica

Figura 40

Puntos dentro de la recta numérica



Nota. Cuenca, L., 2023.

Y verificamos los intervalos solución, para ello probamos con un valor de los intervalos:

(-infinito, -5/6)

$$\frac{18(-1) - 45}{6(-1)+5} < 0$$

Aquí da valores positivos, por lo que se descarta la solución.

(-5/6, 5/2)

$$\frac{18(0) - 45}{6(0) + 5} < 0$$

Este intervalo da valores negativos, por lo que se acepta este intervalo

(5/2, infinito).

$$\frac{18(0) - 45}{6(0) + 5} < 0$$

Aquí da valores positivos, por lo que se descarta la solución.

La solución está dada por:

Figura 41

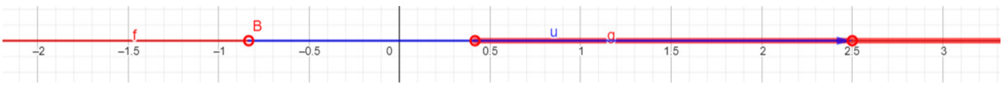
Solución de la desigualdad

Nota. Cuenca, L., 2023.

Ahora, como la solución debe incluir ambas inecuaciones, se sobreponen las dos gráficas solución.

Figura 42

Solución del problema



Nota. Cuenca, L., 2023.

Y la solución está dada por la intersección de las gráficas de la solución.

De esta forma, la cantidad de dosis que se debe inyectar para que el fármaco tenga efecto más de 4 horas y menos de 9 horas es desde 5/6 hasta 5/2 partes de dosis.

Para profundizar las gráficas de función, usted debe leer el **texto básico** James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson, (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo, la sección 3.7 donde se explica con ejemplos ilustrativos la resolución de desigualdades polinomiales y racionales, procedimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final de la sección 3.7 ejercicios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta semana catorce estudiamos sobre la resolución de desigualdades polinomiales y racionales, para reforzar estos aprendizajes teóricos y prácticos es conveniente experimentarlos, para ello se propone desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Resuelva la desigualdad polinomial:

$$x^3 + 4x^2 \geq 4x + 16$$

2. Resuelva la desigualdad racional:

$$\frac{x-3}{2x+5} \geq 1$$

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las dos actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar la resolución de desigualdades polinomiales y racionales, lo cual le será muy útil, ya que involucra la puesta en práctica de los temas estudiantes en las semanas previas.

3. Hemos concluido la semana catorce, es momento de autoevaluar nuestros conocimientos logrados hasta aquí. La presente autoevaluación le permitirá medir su aprendizaje, por lo cual es importante que la desarrolle, así mismo esta actividad le permitirá prepararse para la evaluación bimestral, para lo cual en cada pregunta seleccione el o los literales correctos.

Autoevaluación 4

1. Para una relación entre huésped-parásito, se estableció que cuando la densidad de huéspedes (cantidad de huéspedes por unidad de área) es x, la cantidad de parásitos es p, donde:

   $$p(x) = \frac{900x}{10+45x}$$

   ¿Qué sucede con la cantidad de parásitos cuando la densidad de huéspedes es muy grande?

2. Se realizará un scanner a enfermos crónicos del pulmón. Para esto se suministra a cada paciente un líquido de contraste, cuyo porcentaje residual en el cuerpo en función del tiempo medido en horas es:

   $$P = -2t^2 + 12t$$

   Se requiere una concentración mínima de un 16 % para poder realizar el examen. Si se le administra el contraste a las 16:00 horas. ¿A qué hora es posible realizar el examen?

3. Complete: las asíntotas ... son restricciones que se dan en el ... de una función racional.

4. ¿Cuál es la asíntota vertical en una función racional de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$?

   Donde c, b y d son reales.

   a. La recta $x = \frac{a}{c}$.

   b. La recta $x = \frac{a}{c}$.

   c. La recta $x = -\frac{c}{d}$.

   d. La recta $x = -\frac{c}{d}$.

5. Verdadero o falso: el dominio de la siguiente función $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ son todos los reales a excepción del -3.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

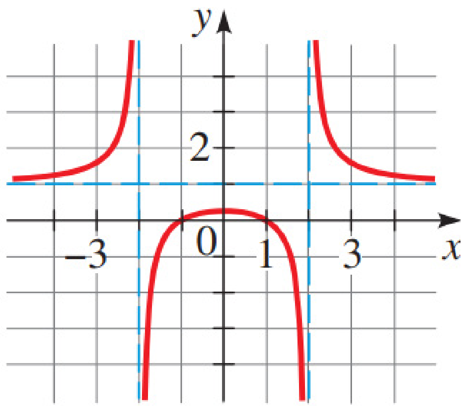
6. Verdadero o falso: todas las funciones racionales tienen al menos una asíntota vertical.

   a. Verdadero.
   b. Falso.

7. ¿Cuál es la asíntota horizontal en una función racional de la forma, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ Donde c, b y d son reales?

   a. La recta y=ac.
   b. La recta y=ac.
   c. La recta y=-cd.
   d. La recta y=-cb.

8. A partir de la siguiente gráfica



determine las asíntotas verticales y horizontales.

9. Pasados t minutos después de introducir un bactericida experimental en cierto cultivo, el número de bacterias está dado por:

$$N = \frac{10000}{t^2+1} + 2000$$

Determine el momento en que el número de bacterias está por debajo de 3000.

10. Verdadero o falso: para que exista una asíntota oblicua es necesario que el grado del numerador sea igual que el grado del denominador.

    a. Verdadero.
    b. Falso.

Verifique sus respuestas en el solucionario que se encuentra al final de la guía didáctica.

> ¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje! Estamos avanzando en la dirección correcta. Recuerde que dispone de diferentes canales como las sesiones síncronas, el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Ir al solucionario

Semana 15

Actividades finales del bimestre

Estimado estudiante, en estas dos últimas semanas de estudio se invita para que revise los contenidos del primer bimestre y con ello logre buenos resultados en la evaluación bimestral, para lo cual se sugiere las siguientes actividades.

- **Actividad 1:** realice una revisión de su diario de notas.
- **Actividad 2:** desarrolle las actividades recomendadas.
- **Actividad 3:** interactúe con los simuladores presentes en el curso.

Semana 16

La evaluación bimestral comprende los conocimientos adquiridos en la unidad 3 y 4 estudiadas en el segundo bimestre, revise cada uno de los conceptos y sus aplicaciones. Además, se sugieren las siguientes actividades.

- **Actividad 1: participe de la videoconferencia donde se realizará un repaso para el examen bimestral**

  Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las temáticas estudiadas, desarrollando las actividades recomendadas al final de cada semana.

- **Actividad 2: examen bimestral**

  Revise el horario de exámenes para que tenga claro el día y la hora de la evaluación.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje, hemos concluido este primer bimestre!

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	El dominio de una función es el conjunto de todos los valores que la variable independiente (usualmente x) puede tomar sin violar restricciones en la función. Es esencial para determinar qué valores están permitidos en la función y en qué contexto la función tiene sentido matemático. Así, cuando se habla del dominio, se hace referencia a los valores válidos para la variable independiente en la función dada.
2	a	En la gráfica, en el eje x, se muestra las horas del domingo y lunes, en el eje y la cantidad de vehículos en la vía.
3	b, c	Al trazar una recta vertical en las gráficas, se puede notar que en la gráfica A y D corta en más de un punto, lo cual hace que no sean funciones. En cambio, en las gráficas B y C la recta solo toca un punto, nótese que en la gráfica C está cortando un punto abierto y un cerrado.
4	b, d	Para que una relación sea función debe cumplir que todos los elementos del dominio deben tener una relación y que cada elemento del dominio tiene una única relación. Las relaciones A y C no son función debido a que en la relación A el elemento del dominio piedra y lápiz tienen dos relaciones, así mismo en la relación C el dominio 1 tiene 3 relaciones. Las relaciones B y D si son función, ya que cumplen con las condiciones, nótese que en la relación B todos los dominios apuntan a una misma salida, esto se conoce como función constante.
5	b	El dominio de una función racional puede incluir el número cero, siempre y cuando no cause una división por cero en el denominador.
6	a	Las funciones polinómicas están definidas para todos los números reales, por lo que su dominio incluye todos los números reales.
7	c	Se debe estructurar una función definida por partes en la cual se debe implementar las dos condiciones para modelar la situación planteada.

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
8	a	Un intervalo es creciente, cuando a medida que x crece, el valor de y también crece.
9	a, d	El 2 no pertenece, ya que se muestra un punto abierto, lo cual indica que no se incluye, de la misma forma el valor 4 en y no tiene asociado ningún valor en x.
10	b	El rango de una función se visualiza en el eje y. El rango de una función representa los valores posibles que puede tomar la variable dependiente (y) en la función. Es el conjunto de todos los valores de y que se obtienen al evaluar la función para los diferentes valores de x en su dominio. Al representar gráficamente una función en un plano cartesiano, el rango se extiende a lo largo del Eje y.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	I:B II:C III:D IV:A	Las rectas horizontales tienen pendiente 0, las ascendentes, pendiente positiva, las descendentes pendiente negativa y las rectas verticales no tienen definida su pendiente.
2	120	Para determinar cuánto gana Mariuxi en una semana si vende 24 libros, debemos evaluar la función A(b) = 96 + b para b = 24. A(b) = 96 + b A(24) = 96 + 24. Realizando la operación: A(24) = 96 + 24 A(24) = 120 Por lo tanto, Mariuxi ganará 120 dólares en una semana si vende 24 libros.

Solucionario

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
3	23	Para determinar la cantidad de semanas que Manuel debe hacer depósitos en la cuenta para ahorrar $1000, podemos usar la función dada S(t)=20t+540 y resolver la ecuación S(t)=1000. Sustituyendo S(t) por 1000 en la ecuación, obtenemos: 20t+540=1000 Restamos 540 de ambos lados de la ecuación: 20t=1000-540 Simplificamos: 20t=460 Dividimos por 20 en ambos lados: t=460/20 Realizamos la división: t=23. Por lo tanto, Manuel debe hacer depósitos en la cuenta durante 23 semanas para ahorrar $1000, asumiendo que no se hace ningún retiro.
4	c	Para determinar la utilidad se debe restar a las ventas los costos, quedando así: Utilidad=V(x)-C(x) Utilidad=260+1.2(10)-155-0.9(10)=260+12-155-9=108.
5	a	De acuerdo con la ecuación dada, 20x + 650 = y, donde x representa el número de semanas, y, y representa la cantidad total de dinero en la cuenta. Al observar la ecuación, podemos ver que cuando x = 0, la cantidad total de dinero en la cuenta, y, sería 650. Por lo tanto, la cantidad inicial de dinero en la cuenta sería de 650 dólares.
6	b	Si g(2) = 5, eso significa que cuando se evalúa la función g en x = 2, el resultado es 5. La función inversa de g intercambia los valores de x e y en la función original. De esta forma $g^{-1}(5)=2$.

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
7	a	Podemos usar la información dada para determinar una función lineal C que modele el costo de producir x sillas en un día. Sabemos que cuando se producen 100 sillas, el costo es de \$2200, y cuando se producen 300 sillas, el costo es de \$4800. Podemos establecer dos puntos utilizando esta información: Punto 1: (100, 2200). Punto 2: (300, 4800). Usaremos la fórmula de la pendiente de una recta para encontrar la pendiente (m) de la función lineal: m = (y2 - y1) / (x2 - x1) m = (4800 - 2200) / (300 - 100)m = 2600 / 200m = 13. Ahora que tenemos la pendiente, podemos usar la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta para encontrar la función lineal: y - y1 = m(x - x1). Utilizando el punto (100, 2200): y - 2200 = 13(x - 100) Simplificando: y - 2200 = 13x - 1300 y = 13x + 900 Por lo tanto, la función lineal C que modela el costo de producir x sillas en un día es: C(x) = 13x + 900.
8	d	Se debe realizar la multiplicación de las funciones E y U, resultando en: Estudiantes=E(10)U(10)

Solucionario

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
9	b	La descripción correcta de la función inversa f-1 en este caso sería: La cantidad de horas que emplea un investigador por sus honorarios. La función inversa f^{-1} nos permite determinar el valor de la variable independiente (en este caso, las horas trabajadas) a partir de un valor dado de la variable dependiente (la tarifa del investigador). En este contexto, si queremos encontrar cuántas horas trabaja el investigador en función de la tarifa cobrada, estamos buscando la variable independiente (horas) en relación con el valor dado de la variable dependiente (tarifa del investigador).
10	b	600 dólares representan al costo fijo que se tiene se publiquen o no copias del libro, el costo de cada copia de libro es de 20 dólares.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	d	Para determinar qué temperatura dará lugar a la ausencia de peces, debemos encontrar el valor de x cuando la población p(x) es igual a cero. Podemos resolver la ecuación $p(x) = -2x^2 + 40x - 72 = 0$ utilizando el método que prefieras, como factorización, completando el cuadrado o utilizando la fórmula general. Al resolver la ecuación, obtenemos dos posibles soluciones: x = 2 y x = 18. Por lo tanto, las temperaturas que darán lugar a la ausencia de peces son 2 grados Celsius y 18 grados Celsius.
2	25	Para encontrar la altura máxima alcanzada por la pelota, necesitamos determinar el vértice de la parábola que representa la altura en función del tiempo. La función que describe la altura en función del tiempo es $a(t) = 40t - 16t^2$ La altura máxima se alcanza en el punto más alto de la trayectoria, que corresponde al vértice de la parábola. La fórmula para encontrar el tiempo en el que se alcanza la altura máxima en una parábola es $\frac{-b}{2a}$ Entonces, el tiempo en el que la pelota alcanza la altura máxima es $t = \frac{5}{4}$ segundos. Ahora, para encontrar la altura máxima, sustituimos este valor de t en la ecuación de altura: $a(t) = 40t - 16t^2$ $a\left(\frac{5}{4}\right) = 40\left(\frac{5}{4}\right) - 16\left(\frac{5}{4}\right)^2$ $a\left(\frac{5}{4}\right) = 50 - 16\left(\frac{25}{16}\right) = 50 - 25 = 25$ Por lo tanto, la altura máxima alcanzada por la pelota es de 25 metros.
3	Arriba, 2, -6, mínimo	La gráfica de $f(x) = 3(x - 2)^2 - 6$ es una parábola que abre hacia arriba, con su vértice en (2, -6) y f(2) = -6 es el valor mínimo de f.

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
4	d	El vértice de una parábola se refiere al punto máximo o mínimo de la parábola. Es el punto en el que la parábola alcanza su valor máximo (si se abre hacia abajo) o su valor mínimo (si se abre hacia arriba).
5	a	Si c es un cero real del polinomio P(x), entonces se puede factorizar P(x) como (x−c)Q(x), donde Q(x) es otro polinomio de grado menor que P(x). En consecuencia, si dividimos P(x) por (x−c), obtenemos Q(x), que contiene los otros ceros (reales o complejos) de P(x). Así que todos los otros ceros de P(x) están contenidos en Q(x), que es el cociente de dividir P(x) por (x−c).
6	b	Si el coeficiente principal de una función cuadrática es negativo, la parábola resultante abre hacia abajo, lo cual significa que tiene un máximo en lugar de un mínimo.
7	b	La gráfica debe ser una parábola que abre hacia abajo, ya que el coeficiente principal es negativo. Así mismo se puede observar que la gráfica debe tener una intersección con el eje y en y=4.
8	6, -7, 2, 3	El polinomio $P(x) = 5x^2(x-4)^3(x+7)$ tiene grado 6. Tiene ceros 0, 4 y -7. El cero 0 tiene multiplicidad 2, y el cero 4 tiene multiplicidad 3
9	$Q(x) = x^3$	Si un polinomio tiene como ceros 3 y 2−3i, entonces también tendrá como cero conjugado a 2+3i, ya que los polinomios con coeficientes reales tienen raíces complejas conjugadas. Para construir un polinomio con estos ceros, podemos usar la forma factorizada del polinomio: Si c es una raíz, entonces (x−c) es un factor del polinomio. Entonces, con las raíces dadas: x=3 dá como factor a (x−3). x=2−3i da como factor a (x−(2−3i)) que es (x−2+3i). x=2+3i dará como factor a (x−(2+3i)) que es (x−2−3i). Multiplicando estos factores, obtendremos el polinomio deseado: $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 25x - 39$

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
10	a	En un problema de aplicación de una función cuadrática, puede ser necesario encontrar el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima de un objeto lanzado al aire, que es un punto crítico de la función.

Ir a la autoevaluación

Solucionario

<table>
<tr><th colspan="3">Autoevaluación 4</th></tr>
<tr><th>Pregunta</th><th>Respuesta</th><th>Retroalimentación</th></tr>
<tr><td>1</td><td>20</td><td>En este caso se debe analizar la asíntota horizontal, ya que nos permite analizar el comportamiento en los extremos de la función, y en este caso se debe analizar que sucede en el extremo positivo del dominio de la función:

$$p(x) = \frac{900x}{10+45x}$$

En este caso se tiene una asíntota en y=20, dado que los polinomios del numerador y denominador tiene grado similar.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Si se le administra el contraste a las 16:00 horas. La hora posible para realizar el examen es desde las 18:00 hasta las 20:00.</td><td>Se debe establecer la inecuación >=, ya que indica “concentración mínima” de esta forma se estructura la inecuación.

$$-2t^2 + 12t \geq 16$$

Note que se usa directamente el 16 como porcentaje, ya que la ecuación P proporciona el valor en %.
Ahora se procede a resolver:

$$-2t^2 + 12t \geq 16$$

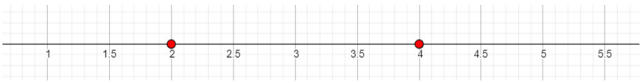
$$-2t^2 + 12t - 16 \geq 0$$

$$-2(t^2 - 6t + 8) \geq 0$$

Factorizamos:

$$-2(t-4)(t-2) \geq 0$$

Ubicamos en la recta real los puntos t=2 y t=4, nótese que se ubican puntos con relleno debido al símbolo >=



Y verificamos los intervalos solución, para ello probamos con un valor de los intervalos:
(-infinito, 2)

$$-2(0-4)(0-2) \geq 0$$

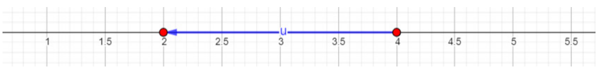
en este intervalo da valores negativos, por lo que se descarta la solución.
(2, 4)

$$-2(3-4)(3-2) \geq 0$$

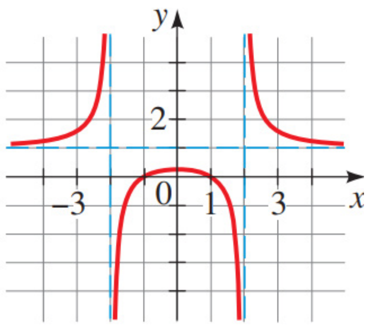
Aquí da valores positivos, por lo que se acepta este intervalo.
(4, infinito)

$$-2(5-4)(5-2) \geq 0$$

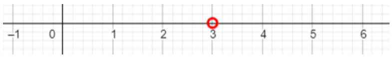
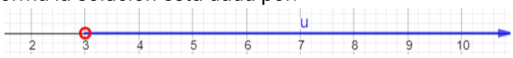
en este intervalo da valores negativos, por lo que se descarta la solución.
El mismo que se encuentra en el intervalo de 2 a 4, incluidos ambos entremos.



Si se le administra el contraste a las 16:00 horas. La hora posible para realizar el examen es desde las 18:00 hasta las 20:00.</td></tr>
</table>

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
3	Verticales, dominio	Las asíntotas verticales son restricciones que se dan en el dominio de una función racional.
4	c	La asíntota vertical en esta función racional se encuentra en $x = -\frac{c}{d}$, donde el denominador se hace cero
5	b	El dominio de la función dada es todos los números reales, excepto aquellos que hacen que el denominador sea igual a cero. En este caso, el denominador es x - 2, por lo tanto, la función no está definida cuando x = 2. Entonces, el dominio de la función es todos los números reales excepto x = 2.
6	b	No todas las funciones racionales tienen al menos una asíntota vertical. Una función racional puede no tener una asíntota vertical si no hay ningún valor de x que haga que el denominador sea igual a cero.
7	a	La asíntota horizontal en esta función racional se encuentra en $y = \frac{a}{c}$, dado que los grados de los polinomios del numerador y denominador tienen el mismo grado.
8	Asíntotas verticales x=-2 x=2 Asíntotas horizontales y=1	De acuerdo con la gráfica  Las asíntotas verticales están ubicadas en x=-2 y x=2. Las asíntotas horizontales están ubicadas y=1.

Solucionario

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
9	El momento en que el número de bacterias está por debajo de 3000 es a partir de la hora 3	Se debe aplicar la inecuación <, ya que indica "está por debajo de" $\frac{10000}{t^2+1}+2000<3000$ Se resuelve la inecuación: $\frac{10000}{t^2+1}+2000-3000<0$ $\frac{10000}{t^2+1}-1000<0$ $\frac{10000-1000(t^2+1)}{t^2+1}<0$ $\frac{10000-1000t^2-1000}{t^2+1}<0$ $\frac{-1000t^2+9000}{t^2+1}<0$ Encontramos los valores que hacen 0 el numerador y denominador. $-1000t^2+9000=0$ $t=3$ Se ubica en la recta numérica  Y se verifican los intervalos. (-infinito, 3) $\frac{-1000(0)+9000}{(0)+1}<0$ en este intervalo da valores positivos, por lo que se descarta la solución. (3, infinito) $\frac{-1000(4)^2+9000}{(4)^2+1}<0$ aquí da valores negativos, por lo que se acepta este intervalo. De esta forma la solución está dada por:  El momento en que el número de bacterias está por debajo de 3000 es a partir de la hora 3.
10	b	Para que exista una asíntota oblicua (también conocida como inclinada) en una función racional, el grado del numerador debe ser exactamente uno mayor que el grado del denominador. Si el grado del numerador es igual al grado del denominador, no habrá una asíntota oblicua, sino que habrá una asíntota horizontal. Cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador por más de uno, existirán otras características en la función, pero no necesariamente una asíntota oblicua

Ir a la autoevaluación

Solucionario

5. Referencias bibliográficas

Aguilar Márquez, A. (2015). *Matemáticas simplificadas.* México: Pearson educación.

Armijos Ordóñez, J. W. (2020). *Sistemas de Conocimiento de Funciones Polinomiales y Racionales y su Didáctica.* Loja: Ediloja.

Cattaneo, L., Lagreca, N., González, M. I., & Buschiazzo, N. (2011). *Didáctica de la Matemática: Enseñar Matemática.* Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Cuenca Macas, L. A., Andrade Pazmiño, E. G., & Larrea Falconi, P. (2020). *Texto Guía - Fundamentos Matemáticos.* Loja: EDILOJA.

Duval, R. (1999). Registros de representación comprensión y aprendizaje. *Semiosis y pensamiento humano*, págs. 25-80.

Ferreiro Gravié, R. F. (2016). *Pasión por la enseñanza: Las competencias profesionales didácticas del Método ELI.* Zapotan: UNISAN.

Ferreiro Gravié, R. F., & Vizoso, E. (2020). *Didáctica en tiempo de NEUROCIENCIA.* Florida: Aleandria Library Publishing House.

Poblete, V. (2020). *Matemática en la Salud.*

Stewart, J., Lothar, R., & Saleem, W. (2017). *Precálculo Matemáticas para el Cálculo.* México D.F.: Cengage.

Swokowski, E., Cole, J., Carril, P., Mora Reyes, L., Chávez Ochoa, A., & Santisteban., A. (2018). *Precálculo.* Mexico: Cengage Learning.

Tan, S. (2018). *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida.* CENGAGE.

6. Anexos

Anexo 1. Cálculo de impuesto a la renta

Tabla de cálculo del impuesto a la renta en el Ecuador para el año 2023.

Fracción Básica (USD)	Exceso hasta (USD)	Impuesto Fracción Básica (USD)	Impuesto Fracción Excedente (%)
0	11722	-	0%
11722	14935	-	5%
14935	18666	161	10%
18666	22418	534	12%
22418	32783	984	15%
32783	43147	2539	20%
43147	53512	4612	25%
53512	63876	7203	30%
63876	103644	10312	35%
103644	En adelante	24231	37%