Program w języku Python realizujący metodę eliminacji Gaussa.

Bartosz Beksa, Paweł Bukowski, Tomasz Domurad, Michalina Całus

maj 2021

1 Teoretyczny opis metody numerycznej

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa polega na przekształceniu danego układu $Ax = f$ do równoważnego układu trójkątnego. Dane układu zapisujemy w macierzy rozszerzonej

$$[A|f] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & | & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & | & f_2 \\ ... & & & & | & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & | & f_n \end{bmatrix}$$

i działając na wierszach przekształcamy tak, by macierz główną doprowadzić do macierzy trójkątnej górnej.
I krok - pierwszy wiersz mnożymy kolejno przez $(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$ i dodajemy do i-tego wiersza dla $i = 2, ..., n$, przez co otrzymamy nowy równoważny układ o macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} & | & f_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} & | & f_2^{(1)} \\ ... & & & & | & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & ... & a_{nn}^{(1)} & | & f_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}^{(1)} = a_{1j}, & f_1^{(1)} = f_1, \\ a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i > 1 & f_1^{(1)} = f_1 - f_1\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i > 1 \end{pmatrix}$$

II krok - drugi wiersz mnożymy kolejno przez $(-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}})$ i dodajemy do i-tego wiersza dla $i = 3, ..., n$, przez co otrzymamy nowy układ

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & ... & a_{1n}^{(2)} & | & f_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} & | & f_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & ... & a_{3n}^{(2)} & | & f_3^{(2)} \\ ... & & & & & | & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & ... & a_{nn}^{(2)} & | & f_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

itd.
W $(n-1)$**-szym kroku** otrzymamy układ $[A^{(n-1)}|f^{(n-1)}]$, gdzie $A^{(n-1} = [a_{ij}^{(n-1)}]_{i,j=1,...,n}$ jest macierzą trójkątną górną, tzn.

$$a_{ij}^{(n-1)} = 0 \text{ dla } i > j.$$

2 Przykład ilustrujący metodę

Gdy chcemy obliczyć rząd macierzy eliminacją Gaussa wystarczy poprzez elemantarne operacje sprowadzić macierz do postaci schodkowej. Wtedy wszystkie niezerowe wiersze są liniowo niezależne i można łatwo odczytać rząd macierzy.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

odjęcie wielokrotności pierwszego wiersza wszystkich pozostałych $\rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

zamiana drugiego i trzeciego wiersza $\rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

odjęcie drugiego wiersza od czwartego $\rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

odjęcie trzeciego wiersza od czwartego $\rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Patrzymy na ilość "schodków" w macierzy, który jest równy rzędowi macierzy. A zatem rząd macierzy A jest równy 3.

$$\begin{cases} x + y - z = 9 \\ y + 3z = 3 \\ -x - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2 + R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{6}R_3 \to R_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + y - z = 9 \\ y + 3z = 3 \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 9 \\ y + 3(-\frac{4}{3}) = 3 \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 9 \\ y - 4 = 3 \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x + 7 - \frac{4}{3} = 9 \\ y = 7 \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 7 \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Rozwiązanie: $\left(\frac{2}{3}, 7, -\frac{4}{3}\right)$

Rysunek 1: Przykład obliczeń "ręcznych"

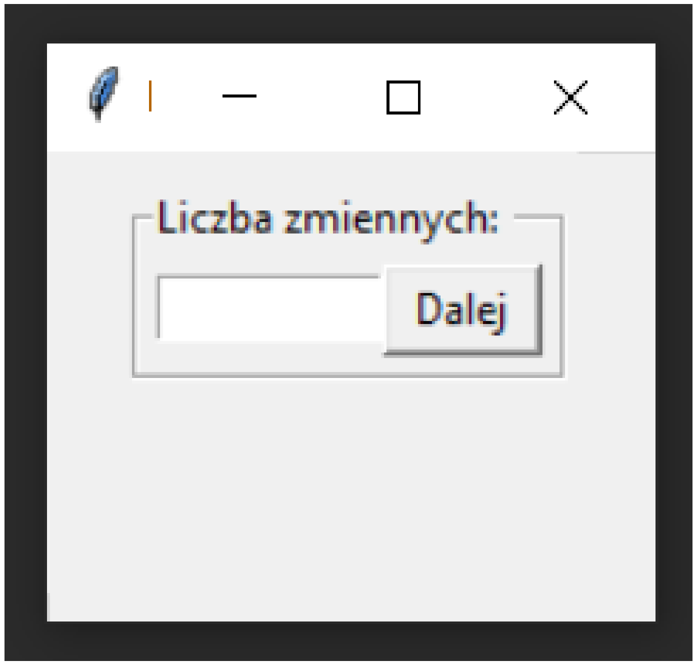
3 Opis implementacji algorytmu realizującego metodę

Program pobiera od użytkownika liczbę zmiennych i układ równań dla nich.
Zwraca rozwiązanie układu jako wartość każdej zmiennej w postaci zmiennoprzecinkowej.
Program wykorzystuje funkcje pomocnicze do obliczeń:

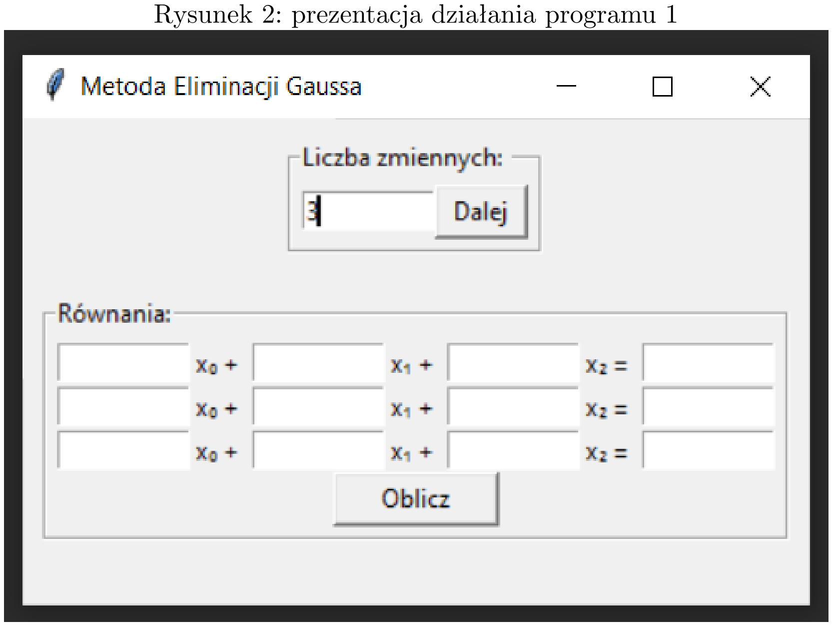
gauss_elimination(a, n)
: "a" to tablica dwuwymiarowa reprezentująca układ równań w postaci macierzowej
"n" to ilość zmiennych
Funkcja przekształca podany układ w równoważny układ trójkątny (macierz a doprowadzić do postaci macierzy trójkątnej górnej), zczytuje odpowiedzi i zwraca wektor z nimi.

4 Dokładniejszy opis programu

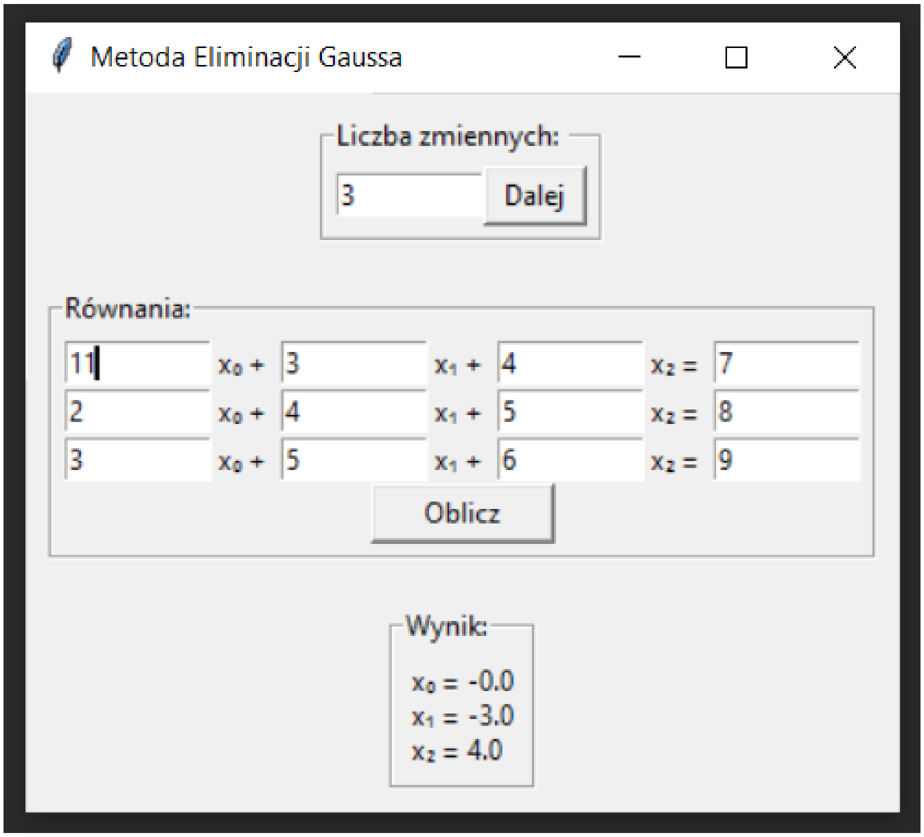
Program używa wbudowanej w pythona biblioteki tkinter używanej do stworzenia interfejsu graficznego.
Program po uruchomieniu prosi użytkownika o podanie ilości zmiennych, a następnie układu równań, n razy $x_0 + x_1 + ... + x_{n-1} = x_n$. Zwraca rozwiązania $x_0, ..., x_n$ w postaci liczb zmiennoprzecinkowych.
Zabespieczeniem przed wprowadzeniem niepoprawnych danych jest m.in.
komunikat: "Dzielenie przez 0." lub
komunikat: "Sprawdź poprawność wpisanych danych.
Pamiętaj aby wypełnić wszystkie pola."



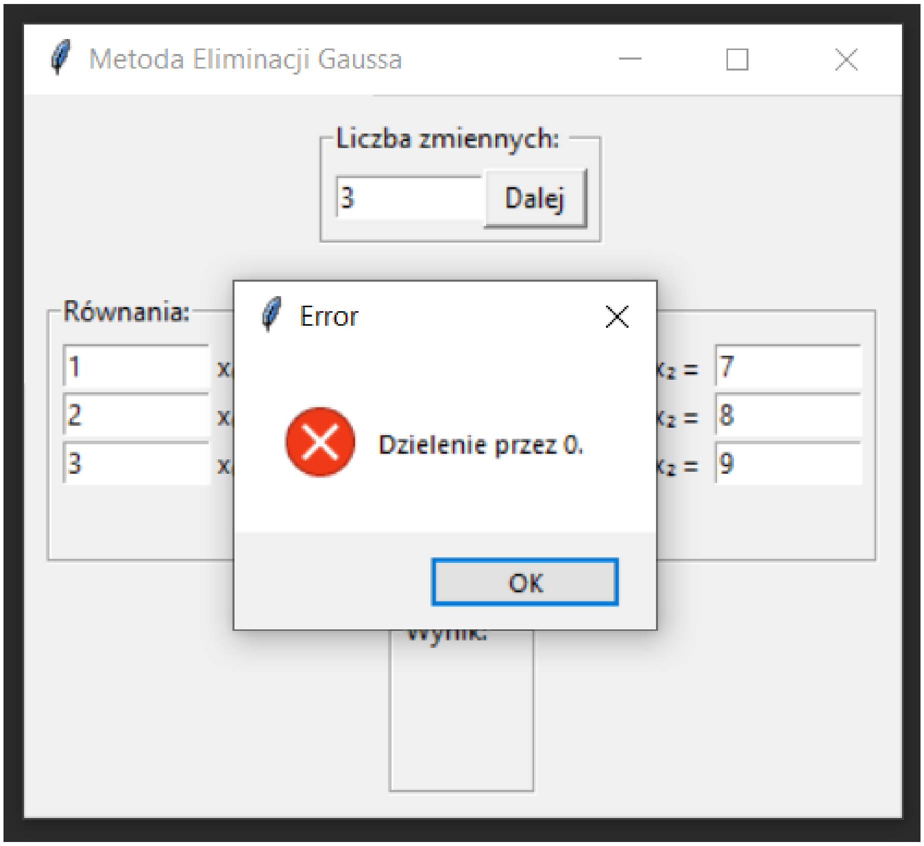
Rysunek 2: prezentacja działania programu 1



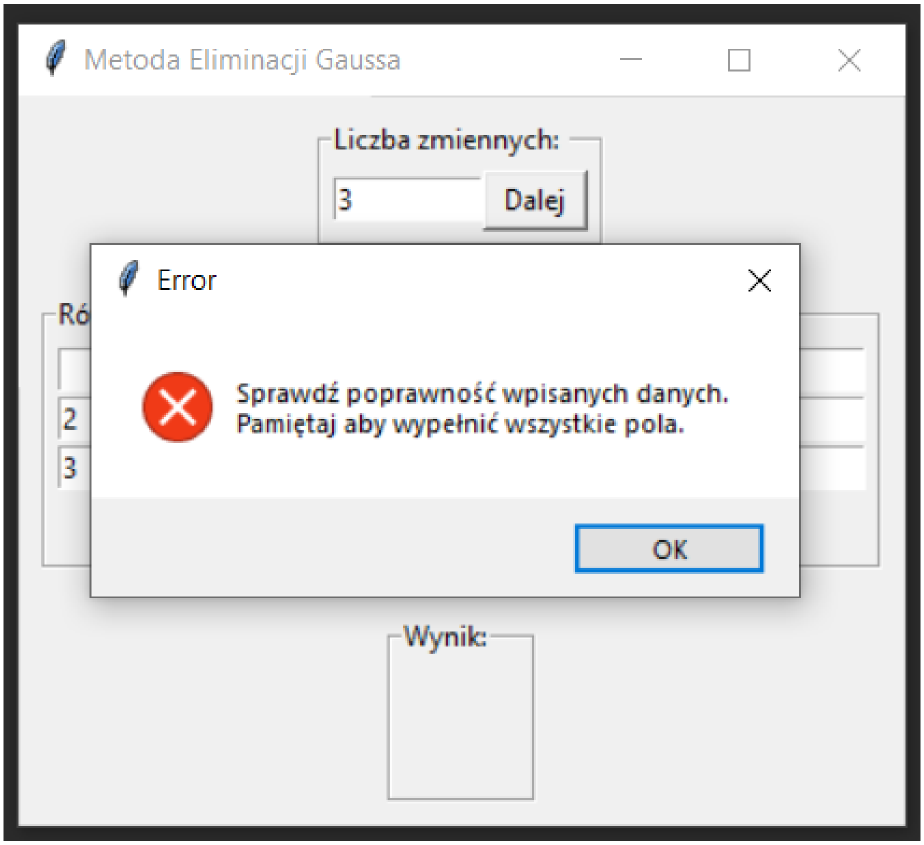
Rysunek 3: prezentacja działania programu 2



Rysunek 4: prezentacja działania programu 3



Rysunek 5: prezentacja działania programu 4



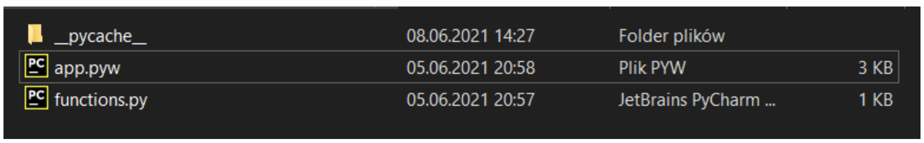
Rysunek 6: prezentacja działania programu 5

5 Kod programu

Kod załączony w archiwum razem z dokumentacją.

6 Uruchomienie programu

Do uruchomienia programu potrzebny będzie zainstalowany Python najlepiej w wersji 3.8.0. Należy umieścić wszystkie plik w jednym miejscu i uruchomić app.pyw przy pomocy pythona.



Rysunek 7: Uruchomienie 1