Topološke grupe

Avtor: Benjamin Benčina

Mentor: Marko Kandić

Fakulteta za matematiko in fiziko

29. avgust 2019

Vsebina

- Definicija topološke grupe,
- primeri,
- s čim sem se ukvarjal,
- metrizabilnost in višji separacijski aksiomi.

Definicija topološke grupe

Definicija: *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ s topologijo τ, glede na katero sta strukturni preslikavi zvezni.

Strukturni operaciji:

- Množenje: $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$.
- Invertiranje: $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

Primeri

Primer: Unitarna grupa $\mathfrak{U}(n)$ je topološka grupa za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Primer: Naj bo G poljubna neskončna grupa in naj bo τ topologija končnih komplementov na G. Topološki prostor (G, τ) ni topološka grupa za nobeno operacijo.

Teme

- Osnovne lastnost,
- kvocientni prostori topoloških grup,
- trije izreki o topoloških izomorfizmih,
- metrizabilnost in
- višji separacijski aksiomi.

Izrek o psevdometriki

Izrek: Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ družina simetričnih okolic enote e topološke grupe G z lastnostjo $U_{k+1}^2 \subset U_k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika σ, da velja:

- σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi na $G \times G$,
- $\sigma(x, y) = 0 \iff y^{-1}x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$,
- $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če je $y^{-1}x \in U_k$,
- $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če poleg tega velja še, da $xU_kx^{-1} = U_k$ za vse $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, je σ tudi desnoinvariantna in velja:

- $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka $x, y \in G$.

Metrizabilnost

Izrek: Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Tedaj je G metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote.

Povsem regularnost

<u>Definicija:</u> Topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$, če za vsako zaprto množico $F \subset X$ in točko $a \in X \setminus F$ obstaja zvezna funkcija $\psi : X \to \mathbb{R}$, da je $\psi(a) = 1$ in $\psi|_F = 0$.

Topološki prostor je *povsem regularen*, če zadošča separacijskima aksiomoma T_1 in $T_{3\frac{1}{2}}$.

<u>Izrek:</u> Vsaka topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je povsem regularen topološki prostor.

Parakompaktnost

Definicija:

Naj bo X topološki prostor. Družina podmnožic $\mathcal{V}$ je pofinitev družine podmnožic $\mathcal{U}$, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja takšna množica $U \in \mathcal{U}$, da je $V \subset U$.

Topološki prostor X je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora X.

Izrek: Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.

Normalnost

<u>Izrek:</u> Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je parakompakten topološki prostor.

<u>Posledica:</u> Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je normalna.