Topološke grupe

Avtor: Benjamin Benčina

Mentor: Marko Kandić

Fakulteta za matematiko in fiziko

2. september 2019

Vsebina

- definicija topološke grupe
- primeri
- s čim sem se ukvarjal
- metrizabilnost in višji separacijski aksiomi

Definicija topološke grupe

Definicija: *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ s topologijo τ, glede na katero sta strukturni preslikavi zvezni.

Strukturni preslikavi:

- Množenje: $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$.
- Invertiranje: $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

Primeri

Primer: Grupa $\mathbb{R}^n$ je topološka grupa za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Primer: Naj bo G poljubna neskončna grupa in naj bo τ topologija končnih komplementov na G. Topološki prostor (G, τ) ni topološka grupa za nobeno operacijo.

Teme

- osnovne lastnost
- kvocientni prostori topoloških grup
- trije izreki o topoloških izomorfizmih
- metrizabilnost
- višji separacijski aksiomi

Okolice

Trditev: Za topološko grupo G in bazo $\mathcal{U}$ odprtih okolic enote e veljajo naslednje trditve:

(1) za vsako $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka $V \in \mathcal{U}$, da je $V^2 \subset U$,

(2) za vsako $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka $V \in \mathcal{U}$, da je $V^{-1} \subset U$,

(3) za vsako $U \in \mathcal{U}$ in vsak $x \in U$ obstaja taka $V \in \mathcal{U}$, da je $xV \subset U$,

(4) za vsako $U \in \mathcal{U}$ in vsak $x \in U$ obstaja taka $V \in \mathcal{U}$, da je $xVx^1 \subset U$.

Okolice

<u>Izrek:</u> Naj bo G grupa in $\mathcal{U}$ družina podmnožic grupe G, za katero veljajo lastnosti (1)-(4). Naj bodo poljubni končni preseki množic iz $\mathcal{U}$ neprazni. Tedaj je družina $\{xU;\ x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ odprta podbaza za neko topologijo na G. S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux;\ x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ je podbaza za isto topologijo. Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $W \in \mathcal{U}$, da je $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU;\ x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ in $\{Ux;\ x \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ tudi bazi za to topologijo.

Kvocientni prostori topoloških grup

- kvocientna topologija
- lastnosti kvocientnega prostora topoloških grup
- kvocientna topološka grupa

Izreki o topoloških izomorfizmih

- topološki izomorfizem
- trije izreki o izomorfizmih
- dodatne topološke predpostavke na preslikave in podgrupe

Izrek o psevdometriki

<u>Izrek:</u> Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ družina simetričnih okolic enote e topološke grupe G z lastnostjo $U_{k+1}^2 \subset U_k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Potem obstaja taka levoinvariantna psevdometrika σ, da velja:

- σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi na $G \times G$,
- $\sigma(x, y) = 0 \iff y^{-1}x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$,
- $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če je $y^{-1}x \in U_k$,
- $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če poleg tega velja še, da $xU_kx^{-1} = U_k$ za vse $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, je σ tudi desnoinvariantna in velja:

- $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka $x, y \in G$.

Metrizabilnost

Izrek: Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Tedaj je G metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote.

Povsem regularnost

<u>Definicija:</u> Topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$, če za vsako zaprto množico $F \subset X$ in točko $a \in X \setminus F$ obstaja zvezna funkcija $\psi : X \to [0,1]$, da je $\psi(a) = 1$ in $\psi|_F = 0$.

Topološki prostor je *povsem regularen*, če zadošča separacijskima aksiomoma T_1 in $T_{3\frac{1}{2}}$.

<u>Izrek:</u> Vsaka topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je povsem regularen topološki prostor.

Parakompaktnost

Definicija:

Naj bo X topološki prostor. Družina podmnožic $\mathcal{V}$ je pofinitev družine podmnožic $\mathcal{U}$, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja takšna množica $U \in \mathcal{U}$, da je $V \subset U$.

Topološki prostor X je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora X.

Izrek: Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.

Normalnost

<u>Izrek:</u> Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je parakompakten topološki prostor.

<u>Posledica:</u> Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je normalna.

Hvala za vašo pozornost!