

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina  
**Topološke grupe**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2019

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Preliminarna poglavja	4
2.1. Operacije na množicah	4
2.2. Teorija grup	4
2.3. Topološki prostori	5
3. Kaj je topološka grupa	6
3.1. Definicija topološke grupe	6
3.2. Primeri topoloških grup	7
3.3. Osnovne lastnosti topoloških grup	7
4. Topološke podgrupe in kvocientne grupe	10
4.1. Topološke podgrupe	10
4.2. Kvocienti topoloških grup	11
5. Izreki o izomorfizmih	12
5.1. Prvi izrek o izomorfizmih	12
5.2. Drugi izrek o izomorfizmih	12
5.3. Tretji izrek o izomorfizmih	13
6. Izreki tipa "2 od 3"	13
7. Metrizabilnost in povsem regularnost	13
7.1. Uniformni prostori	13
7.2. Metrizabilnost	14
7.3. Regularnost	15
7.4. Separacijski aksiom $T_{3\frac{1}{2}}$	16
7.5. Separacijski aksiom $T_4$	16
Slovar strokovnih izrazov	18
Literatura	18

## Topološke grupe

POVZETEK

povzetek HERE

## Topological groups

ABSTRACT

ABSTRACT HERE

**Math. Subj. Class. (2010):** 43-00

**Ključne besede:** grupa topologija

**Keywords:** group topology

## 1. UVOD

### 2. PRELIMINARNA POGLAVJA

V tem poglavju bomo ponovili že znane pojme iz algebre in splošne topologije, ki nam bodo kasneje prišli prav. Dogovorili se bomo tudi o zapisu operacij na množicah.

**2.1. Operacije na množicah.** Vse operacije na množicah, če ne bo drugače znamenovano, delujejo na elementih. Tako je na primer produkt množic  $U$  in  $V$  enak

$$U \cdot V = \{u \cdot v; u \in U, v \in V\},$$

inverz množice  $U$  pa je

$$U^{-1} = \{u^{-1}; u \in G\}.$$

Tukaj se v obeh primerih predpostavlja, da so množice vložene v neki grupi, kjer so operacije na elementih smiselno definirane. Grupno strukturo bomo bolj podrobno opisali v naslednjem podrazdelku.

Pomembnejša izjema temu pravilu so operacije na množicah v smislu relacij. Predpostavimo torej, da imamo množico  $X$  in nas zanimajo podmnožice kartezičnega produkta  $X \times X$ . Inverz take množice  $U$  je definiran kot

$$U^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in U\},$$

analogna operacija množenju pa je kompozitum množic

$$V \circ U = \{(x, z); \text{ obstaja tak element } y \in X, \text{ da je } (x, y) \in V \text{ in } (y, z) \in U\}.$$

Takšni notaciji operacij bosta vedno posebej označeni.

**2.2. Teorija grup.** V tem podpoglavju bomo ponovili nekaj osnovnih algebrskih pojmov, predvsem iz teorije grup.

Neprazna množica  $G$  z binarno operacijo  $*$  je *grupa*, če:

- (1) je množica  $G$  zaprta za operacijo  $*$ ,
- (2) je operacija  $*$  asociativna v množici  $G$ ,
- (3) v  $G$  obstaja tak element  $e$  (imenujemo ga *enota*), da za vsak element  $x$  množice  $G$  velja

$$x * e = e * x = x,$$

- (4) za vsak element  $x$  množice  $G$  obstaja element  $y$  tudi iz množice  $G$ , da velja

$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je  $(G, *)$  ali samo  $G$ , če je operacija znana ali drugače očitna. Od tukaj naprej bo zapis operacije vedno multiplikativen, razen če bo drugače poudarjeno. To pomeni, da bo grupna operacija označena s  $\cdot$  ali pa bo izpuščena.

Med grupami lahko definiramo nekaj tipov preslikav. Našteli bomo dva, ki ju bomo v nadaljevanju najbolj potrebovali. Preslikava  $f: G \rightarrow \tilde{G}$  je *homomorfizem* grup, če za vsaka dva elementa  $a, b \in G$  velja  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ . Preslikava je *izomorfizem* grup, če je bijektivna in homomorfizem grup.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj podstruktur grupe. Podmnožica  $H$  grupe  $G$  je *podgrupa*, če je tudi sama grupa za isto operacijo. Množicama  $aH = \{ah; h \in H\}$  in  $Ha = \{ha; h \in H\}$  zaporedoma pravimo *levi* in *desni odsek* grupe  $G$  elementa  $a \in G$  po podgrupi  $H$ .

Podgrupi  $H$  grupe  $G$  rečemo podgrupa *edinka*, če za vsak element  $a \in G$  velja

$$aHa^{-1} \subseteq H.$$

Množici  $G/H = \{aH; a \in G\}$  rečemo *kvocientna množica* grupe  $G$  po podgrupi  $H$ . Naravna preslikava na kvocientno množico  $G/H$  je preslikava  $\varphi : G \rightarrow G/H$ ,  $a \mapsto aH$ .

Če je  $N$  podgrupa edinka grupe  $G$ , je kvocientna množica  $G/N$  grupa za operacijo  $*$ , kjer je  $aH \cdot bH = (a \cdot b)H$ , naravna preslikava  $\varphi$  pa je homomorfizem grup in mu rečemo *naravni homomorfizem*.

**2.3. Topološki prostori.** V tem podpoglavju bomo ponovili nekaj pojmov iz splošne topologije, ki jih bomo kasneje podrobneje obravnavali na topoloških grupah.

*Topologija* na neprazni množici  $X$  je neprazna družina podmnožic  $\tau \subseteq 2^X$  z lastnostmi:

- (1)  $X \in \tau$ ,  $\emptyset \in \tau$ ,
- (2) za poljubni dve množici  $U, V \in \tau$  je tudi presek  $U \cap V \in \tau$ ,
- (3) za poljubno poddružino  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$  je tudi unija  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$ .

Množici  $X$ , opremljeni s topologijo  $\tau$ , rečemo *topološki prostor*, ki ga označimo z  $(X, \tau)$ . Množice v družini  $\tau$  imenujemo *odprte množice* v topološkem prostoru  $X$ , *zaprte množice* pa definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico  $X$ .

Družina  $B$  je *baza* za topologijo  $\tau$ , če je vsaka množica iz topologije  $\tau$  unija nekaterih množic iz  $B$ , družina  $P$  pa je *podbaza* za topologijo  $\tau$ , če je družina vseh končnih presekov množic iz  $P$  neka baza za topologijo  $\tau$ .

Množica  $U \subseteq X$  je *okolica za točko*  $x \in X$ , če obstaja taka odprta množica  $V \in \tau$ , da velja  $V \subseteq U$  in  $x \in V$ . Enako lahko definiramo okolico za množico. Množica  $U \subseteq X$  je *okolica* množice  $A \subseteq X$ , če obstaja taka odprta množica  $V \in \tau$ , da velja  $A \subseteq V \subseteq U$ . Družina okolic  $\mathcal{U}_x$  točke  $x \in X$  se imenuje *baza okolic* za  $x$ , če za poljubno okolico  $V$  točke  $x$  velja, da obstaja tak  $U \in \mathcal{U}_x$ , da je  $U \subseteq V$ .

Točka  $a \in A$  je *notranja točka* množice  $A$ , če je  $A$  okolica za točko  $a$ . *Notranjost* množice  $A$  je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z  $\text{int}(A)$ . Očitno velja  $\text{int}(A) \subseteq A$  in tudi  $\text{int}(A) = A \iff A \in \tau$ . *Zaprte množice*  $A$  je najmanjša zaprta množica v  $X$ , ki vsebuje  $A$ . Zaprte množice označimo z  $\bar{A}$ . Očitno velja  $A \subseteq \bar{A}$  in tudi  $\bar{A} = A \iff A$  je zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora  $X$  lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikave med dvema topološkima prostoroma ter pojem homeomorfizma.

Tako kot med grupami lahko tudi med topološkimi prostori definiramo nekaj tipov preslikav. Ogledali si bomo nekaj za nas najpomembnejših tipov. Naj bo  $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  preslikava med topološkima prostoroma. Preslikava  $f$  je *zvezna*, kadar je preslika vsake odprte množice v topološkem prostoru  $(Y, \tau_2)$  preslikave  $f$  odprta tudi v topološkem prostoru  $(X, \tau_1)$ . Preslikava  $f$  je *odprta*, kadar je slika vsake odprte množice v topološkem prostoru  $(X, \tau_1)$  preslikave  $f$  odprta tudi v topološkem prostoru  $(Y, \tau_2)$ . Preslikava  $f$  je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

Osnovna podstruktura topološkega prostora je topološki podprostor. Najprej vzemimo topološki prostor  $X$  s topologijo  $\tau$  in množico  $A \subseteq X$ . *Inducirana ali relativna topologija* na množici  $A$ , inducirana s  $\tau$ , je družina množic  $\{A \cap U; U \in \tau\}$ . Prostoru  $A$  rečemo *topološki podprostor* prostora  $X$ .

Oglejmo si še produkt topoloških prostorov. Naj bosta  $X$  in  $Y$  topološka prostora s topologijama  $\tau_1$  in  $\tau_2$ . *Produktna topologija* na kartezičnem produktu  $X \times Y$  je topologija, generirana z bazo  $\{U \times V; U \in \tau_1, V \in \tau_2\}$ . *Produkt* topoloških

prostorov  $X$  in  $Y$  je topološki prostor  $X \times Y$ , opremljen s produktno topologijo. Produkt topoloških prostorov je opremljen še z dvema projekcijskima preslikavama  $\text{pr}_x: X \times Y \rightarrow X$ ,  $\text{pr}_x(x, y) = x$  in  $\text{pr}_y: X \times Y \rightarrow Y$ ,  $\text{pr}_y(x, y) = y$ . Obe projekciji sta zvezni in odprti preslikavi glede na primerni topologiji.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj pojmov povezanih s kompaktnostjo topoloških prostorov, ki si jih bomo kasneje ogledali v kontekstu topoloških grup, definirali pa bomo tudi nove. Družini  $\mathcal{A}$  množic rečemo *pokritje* topološkega prostora  $X$ , če je  $X \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ , družini  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  pa rečemo *podpokritje* topološkega prostora  $X$ , če je  $\mathcal{B}$  tudi sama pokritje za  $X$ . Topološki prostor je *kompakten*, če vsako njegovo odprto pokritje, tj. pokritje z odprtimi množicami, vsebuje kakšno končno podpokritje. Topološki prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka  $x \in X$  kakšno kompaktno okolico.

Ponovimo še do sedaj obravnavane separacijske aksiome. Topološki prostor  $(X, \tau)$  zadošča separacijskemu aksiomu

- (1)  $T_0$ , če za poljubni različni točki  $a, b \in X$  obstaja okolica  $V$  za eno od točk  $a, b$ , ki ne vsebuje druge od točk  $a, b$ ;
- (2)  $T_1$ , če za poljubno točko  $a \in X$  in točko  $b \in X \setminus \{a\}$  obstaja okolica  $V$  točke  $a$ , ki ne vsebuje točke  $b$ ;
- (3)  $T_2$ , če za poljubni različni točki  $a, b \in X$  obstajata disjunktni okolici za točki  $a$  in  $b$ ;
- (4)  $T_3$ , če za poljubno zaprto množico  $A \subseteq X$  in točko  $b \in X \setminus A$  obstajata disjunktni okolici za množico  $A$  in točko  $b$ ;
- (5)  $T_4$ , če za poljubni disjunktni zaprti množici  $A, B \subseteq X$  obstajata disjunktni okolici za množici  $A$  in  $B$ .

Iz definicije je razvidno, da  $T_2 \implies T_1 \implies T_0$ . Topološkemu prostoru, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_2$ , pravimo *Hausdorffov* topološki prostor. Topološku prostoru, ki zadošča  $T_1$  in  $T_3$  pravimo *regularen* topološki prostor. Topološku prostoru, ki zadošča  $T_1$  in  $T_4$ , pravimo *normalen* topološki prostor.

Separacijske aksiome v povezavi z metrizabilnostjo na topoloških grupah si bomo podrobneje ogledali v kasnejših poglavjih.

### 3. KAJ JE TOPOLOŠKA GRUPA

V tem poglavju bomo združili pojem topološkega prostora s pojmom grupe in ju povezali v pojem topološke grupe. Ogledali si bomo nekaj primerov in temeljnih lastnosti.

**3.1. Definicija topološke grupe.** Iz definicije grupe je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje*  $\mu: G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ ,
- *invertiranje*  $\iota: G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto x^{-1}$ .

S pomočjo strukturnih preslikav bomo sedaj definiramo topološko grupo.

**Definicija 3.1.** *Topološka grupa* je grupa  $G$  opremljena s takšno topologijo  $\tau$ , da sta za  $\tau$  strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraino kot topološko strukturo.

**Definicija 3.2.** Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem in homeomorfizem.

### 3.2. Primeri topoloških grup.

**Primer 3.3.** Vsaka grupa  $G$  je za diskretno topologijo  $\tau_d = 2^G$  in trivialno topologijo  $\tau_t = \{\emptyset, G\}$  topološka grupa, saj je glede na njiju zvezna vsaka preslikava na  $G$  ali  $G \times G$ .  $\diamond$

**Primer 3.4.** Realna števila za operacijo  $+$  so topološka grupa z evklidsko topologijo.

Preverimo, da sta strukturni operaciji  $\mu(x, y) = x + y$  in  $\iota(x) = -x$  zvezni.

Po definiciji produktne topologije sta projekcijski preslikavi zvezni. Strukturna preslikava seštevanja  $\mu = pr_x + pr_y$  je zvezna kot vsota zveznih preslikav.

Zveznost invertiranja je dovolj preveriti na baznih množicah evklidske topologije. Vzemimo interval  $(a, b)$ . Tudi  $\iota^{-1}((a, b)) = \iota((a, b)) = (-b, -a)$  je bazna množica in zato odprta, torej je invertiranje zvezno.  $\diamond$

**Primer 3.5.** Enotska krožnica v kompleksni ravnini  $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  s pododanim množenjem je topološka grupa za relativno topologijo kot podprostor  $\mathbb{R}^2$  (spomnimo se, da je  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ).  $\diamond$

**Primer 3.6.** Realna števila za operacijo  $+$  niso topološka grupa s topologijo  $\tau = \{(a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$ . Vzemimo odprto množico  $(a, \infty)$  in si oglejmo njeno prasluko glede na preslikavo invertiranja. Res  $\iota((a, \infty)) = (-\infty, -a)$  ni odprta množica v topologiji  $\tau$ , torej prostor  $(\mathbb{R}, \tau)$  ni topološka grupa.  $\diamond$

### 3.3. Osnovne lastnosti topoloških grup.

**Trditev 3.7.** Naj bo  $G$  topološka grupa in  $a \in G$ .

- (1) Leva translacija  $l_a: x \mapsto ax$  in desna translacija  $r_a: x \mapsto xa$  za element  $a$  sta homeomorfizma iz  $G$  v  $G$ .
- (2) Invertiranje  $\iota: x \mapsto x^{-1}$  je homeomorfizem iz  $G$  v  $G$ .
- (3) Konjugiranje  $\gamma_a: x \mapsto axa^{-1}$  je homeomorfizem iz  $G$  v  $G$ .

*Dokaz.* Vemo že, da so leva translacija, desna translacija, invertiranje in konjugiranje avtomorfizmi grupe  $G$ , torej bijektivne preslikave. Dokazujemo še zveznost preslikave in njenega inverza.

Naj bo  $c_a: x \mapsto a$  konstantna preslikava. Vemo, da je konstantna preslikava zvezna.

Levo translacijo lahko zapišemo kot kompozitum zveznih preslikav

$$l_a(x) = \mu(c_a(x), x) = ax.$$

Kot kompozitum zveznih preslikav je leva translacija zvezna. Inverzna preslikava levi translaciji za element  $a$  je leva translacija za element  $a^{-1}$ , ki je tudi zvezna. Leva translacija je zato homeomorfizem.

Za dokaz zveznosti desne translacije najprej opazimo, da velja

$$r_a(x) = \mu(x, c_a(x)) = xa.$$

Nato sledimo zgornjemu dokazu.

Invertiranje je homeomorfizem, ker je zvezno po definiciji topološke grupe in samo sebi inverz.

Konjugiranje lahko zapišemo kot kompozitum homeomorfizmov

$$\gamma = r_{a^{-1}} \circ l_a,$$

nato pa uporabimo točko 1.  $\square$

**Trditev 3.8.** Naj bosta  $A$  in  $B$  podmnožici topološke grupe  $G$ . Če je  $A$  odprta množica, sta odprti tudi množici  $AB$  in  $BA$ .

*Dokaz.* Ker je  $A$  odprta množica, so po trditvi 3.7 odprte tudi vse množice  $Ax$  za vsak  $x \in G$ , saj je desna translacija homeomorfizem. Velja  $AB = \bigcup_{b \in B} \{Ab\}$ , zato je množica  $AB$  odprta kot unija odprtih množic.

Za dokaz odprtosti množice  $BA$  najprej oprazimo, da so po trditvi 3.7 odprte tudi vse množice  $xA$  za vsak  $x \in G$ , potem pa sledimo zgornjemu dokazu.  $\square$

Sledi nekaj trditev, ki se nanašajo na okolice enote topološke grupe.

**Trditev 3.9.** Za topološko grupo  $G$  in bazo  $\mathcal{U}$  odprtih okolic enote  $e$  veljajo naslednje trditve:

- (1) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V^2 \subset U$ ;
- (2) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V^{-1} \subset U$ ;
- (3) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  in vsak element  $x \in G$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $xV \subset U$ ;
- (4) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  in vsak element  $x \in G$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $xVx^{-1} \subset U$ .

*Dokaz.* Naj bo  $U \in \mathcal{U}$  odprta okolica enote  $e$ . Ker je množenje zvezno, obstaja v produktni topologiji na  $G \times G$  bazična okolica  $W = V_1 \times V_2$  elementa  $(e, e)$ , za katero velja  $V_1 V_2 \subset U$ . Po definiciji produktne topologije sta  $V_1$  in  $V_2$  odprti okolici enote  $e$  v  $G$ . Definiramo  $V' = V_1 \cap V_2$  okolico za  $e$ . Po definiciji baze okolic obstaja  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V \subseteq V'$ . Ker je  $V \subseteq V' \subseteq V_1$  in  $V \subseteq V' \subseteq V_2$ , velja

$$V^2 \subseteq V'^2 \subseteq V_1 V_2 \subset U.$$

To dokaže prvo trditev.

Ker je invertiranje zvezno, obstaja v  $G$  odprta okolica  $W$  enote  $e$ , za katero velja  $W^{-1} \subset U$ . Po definiciji baze okolic obstaja okolica  $V \in \mathcal{U}$ , za katero velja  $V \subseteq W$ . Potem je  $V^{-1} \subseteq W^{-1}$ . Velja

$$V^{-1} \subset W^{-1} \subset U.$$

To dokaže drugo trditev.

Vzemimo poljubno točko  $x \in G$ . Naj bo  $W = x^{-1}U$ . Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je  $W$  odprta okolica enote  $e$ . Vzemimo  $V \in \mathcal{U}$ ,  $V \subset W$  (obstaja po definiciji baze okolic). Velja

$$xV \subset xW = xx^{-1}U = U.$$

To dokaže tretjo trditev.

Naj bo  $x \in G$  poljubna točka. Ker je po trditvi 3.7 konjugiranje homeomorfizem, obstaja odprta okolica enote  $e$  oblike  $xVx^{-1} \subset U$ . To dokaže še četrto trditev.  $\square$

**Izrek 3.10.** Naj bo  $G$  grupa in  $\mathcal{U}$  družina podmnožic množice  $G$ , za katero veljajo vse štiri lastnosti iz trditve 3.9. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz  $\mathcal{U}$  neprazni. Tedaj je družina  $\{xU\}$ , kjer  $U \in \mathcal{U}$  in  $x \in G$  odprta podbaza za neko topologijo na  $G$ . S to topologijo je  $G$  topološka grupa. Družina  $\{Ux\}$  je podbaza za isto topologijo.

Če velja še, da za vsaki množici  $U, V \in \mathcal{U}$  obstaja množica  $W \in \mathcal{U}$ , da velja  $W \subset U \cap V$ , potem sta družini  $\{xU\}$  in  $\{Ux\}$  tudi bazi za to topologijo.

**Definicija 3.11.** Množici, za katero velja  $U = U^{-1}$ , rečemo *simetrična množica*.

**Trditev 3.12.** Vsaka topološka grupa ima bazo  $\mathcal{U}$  odprtih in simetričnih okolic enote.



*Dokaz.* Naj bo  $\mathcal{V}$  neka baza odprtih okolic enote. Za vsako okolico  $V \in \mathcal{V}$  definiramo množico  $U = V \cap V^{-1}$ . Kot presek dveh odprtih množic je  $U$  odprta. Ker je  $e \in V$  in  $e \in V^{-1}$ , je  $U$  odprta okolica enote, ki je po konstrukciji simetrična. Ker po definiciji preseka velja še  $U \subseteq V$ , je družina  $\mathcal{U} = \{V \cap V^{-1}; V \in \mathcal{V}\}$  res baza odprtih in simetričnih okolic enote  $e$ .  $\square$

**Posledica 3.13.** *Za vsako okolico  $U$  enote  $e$  topološke grupe  $G$  obstaja taka okolica  $V$  enote  $e$ , da velja  $\bar{V} \subset U$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $U$  neka okolica enote in naj bo  $\mathcal{V}$  baza odprtih in simetričnih okolic enote (obstaja po trditvi 3.12). Naj bo  $V \in \mathcal{V}$  takšna okolica, da velja  $V^2 \subset U$ . Takšna okolica obstaja po trditvi 3.9. Vzemimo  $x \in \bar{V}$ . Velja  $(xV) \cap V \neq \emptyset$ . Res: ker je  $V$  okolica enote, je  $xV$  okolica elementa  $x$ . Če je  $x \in V$ , zgornji presek ni prazen, ker je  $V$  odprta množica, če pa je  $x$  iz roba množice  $V$ , vsaka njegova okolica seka množico  $V$ .

Obstajata torej  $v_1, v_2 \in V$ , da velja  $xv_1 = v_2$ . Sledi

$$x = v_2v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subset U.$$

Torej res velja  $\bar{V} \subset U$ .  $\square$

**Trditev 3.14.** *Za topološko grupo  $G$  so si naslednje trditve ekvivalentne:*

- (1) *Topološka grupa  $G$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ .*
- (2) *Množica  $\{e\}$  je zaprta v  $G$ .*
- (3) *Topološka grupa  $G$  je Hausdorffov topološki prostor.*

*Dokaz.*  $1 \implies 2$ :

Implikacijo bomo dokazali tako, da bomo pokazali, da je množica  $G \setminus \{e\}$  okolica za vsako svojo točko, iz česar bo sledilo, da je odprta. Vzemimo točko  $x \in G \setminus \{e\}$ . Ker  $G$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , obstaja bodisi okolica za točko  $x$ , ki ne vsebuje enote  $e$ , bodisi okolica  $V$  za enoto  $e$ , ki ne vsebuje točke  $x$ . V prvem primeru sledi, da je  $G \setminus \{e\}$  okolica za točko  $x$ . Zato naj bo  $V$  okolica za enoto  $e$ , ki ne vsebuje točke  $x$ . Množica  $x^{-1}V$  je potem okolica za točko  $x^{-1}$ , ki ne vsebuje enote  $e$ , zato je  $\iota(x^{-1}V)$  okolica za točko  $x$ , ki ne vsebuje enote  $e$ . Ker velja  $\iota(x^{-1}V) \subseteq G \setminus \{e\}$ , je  $G \setminus \{e\}$  okolica za točko  $x$ .

Množica  $G \setminus \{e\}$  je torej okolica za vsako svojo točko in je zato odprta. Sledi, da je  $\{e\}$  zaprta množica.

$2 \implies 3$ :

Privzemimo, da je  $\{e\}$  zaprta množica. Oglejmo si preslikavo  $f: G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ . Preslikava  $f$  je zvezna kot kompozitum množenja in invertiranja, ki sta zvezni preslikavi po definiciji topološke grupe. Zato je  $f^{-1}(\{e\}) = \{(x, x); x \in G\}$  zaprta množica v  $G \times G$ , to pa je po izreku iz splošne topologije ekvivalentno temu, da je  $G$  Hausdorffova.

$3 \implies 1$ :

Sledi iz definicije separacijskega aksioma  $T_2$ .  $\square$

**Trditev 3.15.** *Za  $A$  in  $B$  podmnožici topološke grupe  $G$  veljajo naslednje trditve:*

- (1)  $\bar{A} \bar{B} \subset \overline{AB}$ ,
- (2)  $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$ ,
- (3)  $x\bar{A}y = \overline{xAy}$  za vsaka dva elementa  $x, y \in G$ .
- (4) Če  $G$  ustreza separacijskemu aksiomu  $T_0$  in za vsaka dva elementa  $a \in A$  in  $b \in B$  velja enakost  $ab = ba$ , potem velja enakost  $ab = ba$  tudi za vsaka dva elementa  $a \in \bar{A}$  in  $b \in \bar{B}$ .

*Dokaz.* Naj bosta  $A$  in  $B$  podmnožici topološke grupe  $G$ .

Za dokaz 1 vzemimo točki  $x \in \overline{A}$  in  $y \in \overline{B}$  ter neko okolico  $U$  enote  $e$ . Dokazali bomo, da je  $xy \in \overline{AB}$ . Ker je množenje zvezno, obstajata taki okolici  $V_1$  in  $V_2$  enote  $e$ , da je  $(xV_1)(yV_2) \subset xyU$ . Tedaj za okolico enote  $V = V_1 \cap V_2$  velja  $(xV)(yV) \subset xyU$ . Ker je sta množici  $xV$  in  $yV$  okolici za  $x$  in  $y$ , po definiciji zaprtja obstajata taka elementa  $a \in A$  in  $b \in B$ , da je  $a \in xV$  in  $b \in yV$ . Zato je  $ab \in (AB) \cap (xyU)$  in, ker je množica  $xyU$  okolica za  $xy$ , po definiciji zaprtja sledi  $xy \in \overline{AB}$ .

Enakost v 2 bo sledila iz tega, da je invertiranje po trditvi 3.7 homeomorfizem. Vzemimo množico  $A \subset G$ . Ker je invertiranje homeomorfizem, je  $\iota(\overline{A}) = \overline{\iota(A)}$ . Torej je  $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$ .

Enakost v 3 bo sledila iz tega, da sta leva in desna translacija po trditvi 3.7 homeomorfizma. Naj bosta  $x, y \in G$ . Tedaj je tudi  $f = r_y \circ l_x$  homeomorfizem. Ker je  $\overline{A}$  zaprta, je  $x\overline{A}y$  najmanjša zaprta množica, ki vsebuje množico  $xAy$ . Torej res velja  $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ .

Za dokaz 4 privzemimo še, da  $G$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$  in da velja  $ab = ba$  za vsaka dva elementa  $a \in A$  in  $b \in B$ . Preslikava  $f: (a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$  je zvezna, saj je kompozitum množenj in invertiranj:

$$f(a, b) = \mu(\mu(a, b), \mu(\iota(a), \iota(b))).$$

Ker je po izreku 3.14 množica  $\{e\}$  zaprta, je zaprta tudi množica  $H = \{(a, b) \in G \times G; aba^{-1}b^{-1} = e\}$ , saj je  $H = f^{-1}(\{e\})$ . Po predpostavki velja  $A \times B \subseteq H$ . Ker sta množici  $\overline{A}$  in  $\overline{B}$  zaprti v  $G$ , po definiciji produktne topologije velja, da je množica  $\overline{A} \times \overline{B}$  zaprta v  $G \times G$ , zato je  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ . Sledi, da je  $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq H$ , torej je  $ab = ba$  za vsaka dva elementa  $a \in \overline{A}$  in  $b \in \overline{B}$ .  $\square$

#### 4. TOPOLOŠKE PODGRUPE IN KVOCIENTNE GRUPE

##### 4.1. Topološke podgrupe.

**Trditev 4.1.** *Naj bo  $G$  topološka grupa in  $H$  njena podgrupa. Če  $H$  opremimo z relativno topologijo, potem je tudi  $H$  topološka grupa.*

*Dokaz.* Preslikavi  $\mu|_{H \times H}$  in  $\iota|_H$  sta zvezni glede na relativno topologijo na  $H$  kot zožitvi zveznih preslikav na topološki podprostor  $H$ , torej je  $H$  topološka grupa.  $\square$

**Trditev 4.2.** *Podgrupa  $H$  topološke grupe  $G$  je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa  $H$  topološke grupe  $G$  je tudi zaprta.*

*Dokaz.* Denimo, da obstaja element  $x \in \text{int}(H)$ . Potem obstaja okolica  $U$  enote  $e$ , da je  $xU \subset H$ . Dokazali bomo, da velja  $H \subseteq \text{int}(H)$ . Ker za poljuben  $y \in H$  velja

$$yU = yx^{-1}xU \subset yx^{-1}H = H,$$

je  $y \in \text{int}(H)$ . Torej je vsaka točka v podgrupi  $H$  notranja točka, kar pomeni, da je  $H$  odprta množica.

Obratno, če je  $H$  odprta, vsaka njena točka leži tudi v njeni notranjosti. Torej ima  $H$  neprazno notranjost.

Privzemimo, da je  $H$  odprta podgrupa grupe  $G$ . Ker je  $H$  podgrupa, je  $G \setminus H = \bigcup \{xH; x \notin H\}$ . Ker je  $H$  odprta in je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je tudi vsaka množica  $xH$  odprta. Potem je tudi  $G \setminus H$  odprta kot unija odprtih množic, torej je  $H$  zaprta množica.  $\square$

**Trditev 4.3.** *Naj bo  $U$  simetrična okolica enote  $e$  v topološki grupi  $G$ . Potem je  $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$  odprta in zaprta podgrupa topološke grupe  $G$ .*

*Dokaz.* Ker za  $x \in U^k$  in  $y \in U^l$  velja  $xy \in U^k U^l \subseteq U^{k+l}$ , je  $L$  zaprta za množenje. Ker je  $U$  simetrična, velja tudi  $x^{-1} \in (U^{-1})^k = U^k$ , torej je  $L$  zaprta za invertiranje. Sledi, da je  $L$  podgrupa topološke grupe  $G$ . V njeni notranjosti je zagotovo vsaj enota  $e$ , saj je  $U$  okolica za  $e$ . Po trditvi 4.2 je  $L$  odprta in zaprta podgrupa topološke grupe  $G$ .  $\square$

#### 4.2. Kvocienti topoloških grup.

**Izrek 4.4.** *Naj bo  $G$  topološka grupa,  $H$  njena podgrupa in  $\varphi: G \rightarrow G/H$  naravna preslikava. Definiramo  $\theta(G/H) = \{U; \varphi^{-1}(U) \text{ odprta v } G\}$ . Veljajo naslednje trditve:*

- (1) *družina  $\theta(G/H)$  je topologija na kvocientu  $G/H$ ,*
- (2) *glede na topologijo  $\theta(G/H)$  je  $\varphi$  zvezna preslikava,*
- (3) *družina  $\theta(G/H)$  je najmočnejša topologija na kvocientu  $G/H$ , glede na katero je  $\varphi$  zvezna preslikava,*
- (4)  *$\varphi: G \rightarrow G/H$  je odprta preslikava.*

*Dokaz.* Naj bo  $\theta(G/H) = \{uH; u \in U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  družina odprtih množic v  $G/H$ , kjer so  $U_\lambda$  odprte množice v  $G$ . Potem je njihova unija  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{uH; u \in U_\lambda\} = \{uH; u \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\}$  prav tako odprta v  $G/H$ , saj je  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  odprta v  $G$ . Presek dveh takih množic  $\{uH; u \in U_\lambda\} \cap \{uH; u \in U_\mu\} = \{uH; u \in U_\lambda \cap U_\mu\}$  je tudi odprt, saj je presek  $U_\lambda \cap U_\mu$  odprt v  $G$ . Velja tudi  $\emptyset \in \theta(G/H)$ , če vzamemo  $U_\lambda = \emptyset$ , ki je odprta v  $G$ . Če vzamemo  $U_\lambda = G$ , dobimo tudi  $G/H \in \theta(G/H)$ . Preverili smo, da je  $\theta(G/H)$  res topologija na kvocientu  $G/H$ .

Preslikava  $\varphi$  je zvezna po definiciji topologije  $\theta(G/H)$  in topologija  $\theta(G/H)$  je res najmočnejša topologija na kvocientu  $G/H$ , glede na katero je  $\varphi$  zvezna, po konstrukciji  $\theta(G/H)$ .

Za dokaz četrte trditve vzemimo odprto množico  $U \in G$ . Po trditvi 3.8 je množica  $UH$  odprta v  $G$ , torej je  $\varphi(U) = \{uH; u \in U\}$  odprta v  $G/H$ .  $\square$

Topologiji  $\theta(G/H)$  pravimo *kvocientna topologija*, kvocientu  $G/H$  pa *kvocientni prostor*.

**Trditev 4.5.** *Naj bo  $G$  topološka grupa,  $H$  njena podgrupa in  $U, V$  tako okolici enote  $e$  v  $G$ , da velja  $V^{-1}V \subset U$ . Naj bo  $\varphi: G \rightarrow G/H$  naravna preslikava. Potem velja  $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$ .*

*Dokaz.* Vzemimo odsek  $xH \in \overline{\varphi(V)}$ . Ker je  $V$  okolica enote, je množica  $\{vxH; v \in V\}$  okolica odseka  $xH$  in ima zato s  $\varphi(V)$  neprazen presek. Po definiciji naravne preslikave obstajata točki  $v_1, v_2 \in V$ , da je  $v_1xH = v_2H$ . Velja

$$xH = v_1^{-1}v_2H \in \{wH; w \in V^{-1}V\} \subset \{uH; u \in U\} = \varphi(U).$$

Torej je res  $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$ .  $\square$

**Izrek 4.6.** *Za topološko grupo  $G$  in njeno podgrupo  $H$  veljajo naslednje trditve:*

- (1) *kvocientni prostor  $G/H$  je diskreten natanko tedaj, ko je  $H$  odprta v  $G$ ,*
- (2) *če je  $H$  zaprta v  $G$ , potem je kvocient  $G/H$  regularen topološki prostor,*
- (3) *če kvocientni prostor  $G/H$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , potem je  $H$  zaprta v  $G$  in velja, da je kvocient  $G/H$  regularen topološki prostor.*

*Dokaz.* Za dokaz prve trditve privzemimo, da je  $H$  odprta v  $G$ . Ker je leva translacija homeomorfizem (trditev 3.7), je množica  $aH$  odprta množica za vsak element  $a \in G$  in zato tudi  $\varphi^{-1}(\{aH\}) = aH$  za vsak element  $aH \in G/H$ . Po izreku 4.4 je

$\varphi$  odprta preslikava, zato je vsaka točka v kvocientnem prostoru  $G/H$  odprta kot enoelementna množica in  $G/H$  je diskreten topološki prostor.

Obratno, če je  $G/H$  diskreten topološki prostor, potem je vsaka njegova točka odprta kot enoelementna množica, torej tudi  $\{H\}$ . Ker je naravna preslikava zvezna, je  $\varphi^{-1}(\{H\}) = H$  odprta množica v  $G$ .

Za dokaz druge trditve privzemimo, da je  $H$  zaprta v  $G$ . Ker je leva translacija homeomorfizem (trditve 3.7), je zaprta tudi množica  $aH$  za vsak element  $a \in G$ . Po definiciji zaprtosti je  $(aH)^c = \bigcup \{xH; xH \neq aH\}$  odprta v  $G$ . Ker je po izreku 4.4 naravna preslikava odprta, je zato komplement vsake točke  $\{aH\}$  odprt v  $G/H$ . Po definiciji zaprtosti je vsaka točka  $\{aH\}$  zaprta v  $G/H$ , kar je ekvivalentno separacijskemu aksiomu  $T_1$ . Naj bosta  $U$  in  $V$  okolici enote  $e$  iz trditve 4.5. Če za  $V$  vzamemo simetrično okolico (to lahko naredimo po trditvi 3.12), potem po trditvi 3.9 tak  $V$  obstaja za vsako okolico  $U$ , saj lahko vzamemo  $V^{-1}V = V^2 \subset U$ . Torej za vsako okolico  $\varphi(U)$  enote  $H$  obstaja takšna okolica  $\varphi(V)$  enote  $H$ , da  $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$ . Ker je leva translacija homeomorfizem, to velja za vsako točko  $aH \in G/H$ , kar pa je ekvivalentno separacijskemu aksiomu  $T_3$ . Kvocientni prostor  $G/H$  je res regularen.

Za dokaz tretje trditve privzemimo, da  $G/H$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ . Po izreku 7.15 je  $G/H$  regularna. Vse enoelementne množice v  $G/H$  so zaprte, zato tudi  $\{H\}$ . Ker je naravna preslikava zvezna, je množica  $\varphi^{-1}(\{H\}) = H$  zaprta v  $G$ .  $\square$

**Izrek 4.7.** *Naj bo  $H$  podgrupa edinka topološke grupe  $G$ . Naj bo kvocient  $G/H$  opremljen s kvocientno topologijo  $\theta$ . Veljajo naslednje trditve:*

- (1) *kvocient  $G/H$  je topološka grupa s topologijo  $\theta$ ,*
- (2) *naravni homomorfizem je odprta in zvezna preslikava,*
- (3) *kvocient  $G/H$  je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa  $H$  odprta v  $G$ ,*
- (4) *kvocient  $G/H$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$  natanko tedaj, ko je podgrupa  $H$  zaprta v  $G$ .*

## 5. IZREKI O IZOMORFIZMIH

**Trditev 5.1.** *Naj bo  $G$  topološka grupa in  $H$  njena podgrupa. Naj bo za vsak element  $a \in G$  na kvocientu  $G/H$  definirana preslikava  $\psi_a$  s predpisom  $\psi_a(xH) = (ax)H$ . Za vsak element  $a \in G$  je  $\psi_a$  homeomorfizem na prostoru  $G/H$ .*

**Trditev 5.2.** *Naj bo  $H$  podgrupa (lokalno) kompaktne topološke grupe  $G$ . Potem je tudi kvocientni prostor  $G/H$  (lokalno) kompakten.*

### 5.1. Prvi izrek o izomorfizmih.

**Izrek 5.3** (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). *Naj bosta  $G$  in  $\tilde{G}$  topološki grupi. Naj bo  $f : G \rightarrow \tilde{G}$  odprt, zvezen in surjektiven homomorfizem. Potem je  $\ker f$  podgrupa edinka v grupi  $G$  in množice  $f^{-1}(\tilde{x})$ , kjer je  $\tilde{x} \in \tilde{G}$ , so disjunktni odseki  $\ker f$  v grupi  $G$ . Preslikava  $\Phi : \tilde{G} \rightarrow G/\ker f$  s predpisom  $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$  je topološki izomorfizem.*

### 5.2. Drugi izrek o izomorfizmih.

**Izrek 5.4** (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). *Naj bo  $G$  topološka grupa,  $A$  njena podgrupa in  $H$  podgrupa edinka grupe  $G$ . Naj bo  $\tau$  izomorfizem iz kvocienta  $(AH)/H$  v kvocient  $A/(A \cap H)$  s predpisom  $\tau(aH) = a(A \cap H)$ , kjer je  $a \in A$ .*

- (1) Preslikava  $\tau$  slika odprte množice iz  $(AH)/H$  v odprte množice iz  $A/(A \cap H)$ .
- (2) Če je  $A$  še lokalno kompaktna in  $\sigma$ -kompaktna,  $H$  zaprta v  $G$  in  $AH$  lokalno kompaktna, potem je  $\tau$  homeomorfizem ter topološki grupi  $(AH)/H$  in  $A/(A \cap H)$  sta topološko izomorfni.

### 5.3. Tretji izrek o izomorfizmih.

**Izrek 5.5.** Naj bo  $f: G \rightarrow \tilde{G}$  odprt, zvezen homomorfizem topoloških grup in naj bo  $\tilde{H}$  podgrupa edinka v  $\tilde{G}$ . Potem so grupe  $(G/\ker f)/(f^{-1}(\tilde{H})/\ker f)$ ,  $G/f^{-1}(\tilde{H})$  in  $\tilde{G}/\tilde{H}$  topološko izomorfne.

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraični različici in ne vsebuje pomožne topološke grupe  $\tilde{G}$ .

**Izrek 5.6** (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe). Naj bo  $G$  topološka grupa in  $N \subseteq H$  njeni podgrupi edinki. Potem sta kvocientni topološki grupi  $G/H$  in  $(G/N)/(H/N)$  topološko izomorfni.

## 6. IZREKI TIPa "2 OD 3"

### 7. METRIZABILNOST IN POVSEM REGULARNOST

#### 7.1. Uniformni prostori.

**Definicija 7.1.** Naj bo  $X$  neprazna množica.

- (1) Neprazna poddružina  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  je *filter* množice  $X$ , če ima naslednje lastnosti:
  - (a) družina  $\mathcal{F}$  ne vsebuje prazne množice,
  - (b) za vsako množico  $F \in \mathcal{F}$  je vsaka množica  $E \in X$ , za katero velja  $F \subseteq E$ , tudi v družini  $\mathcal{F}$ ,
  - (c) presek  $E \cap F$  množic  $E, F \in \mathcal{F}$  je tudi v družini  $\mathcal{F}$ .
- (2) Filter  $\mathcal{U}$  na množici  $X \times X$  definira *uniformno strukturo* na množici  $X$ , če ima naslednje lastnosti:
  - (a) vsaka množica  $U \in \mathcal{U}$  vsebuje diagonalo  $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$ ,
  - (b) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  je tudi množica  $U^{-1} \in \mathcal{U}$ ,
  - (c) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V \circ V \subseteq U$ .

Množici z uniformno strukturo rečemo *uniformni prostor*.

**Opomba 7.2.** V zgornji definiciji so operacije na množicah mišljene v smislu relacij (glej podrazdelek 2.1).

**Definicija 7.3.** Naj bo  $X$  uniformni prostor z uniformno strukturo  $\mathcal{U}$ . Topologija, inducirana z  $\mathcal{U}$  je taka družina  $\tau$  množic  $T \subseteq X$ , za katere za vsako točko  $x \in T$  obstaja  $U \in \mathcal{U}$ , da velja  $U_x = \{y \in X; (x, y) \in U\} \subseteq T$ .

**Opomba 7.4.** V nadaljevanju bomo okolico nekega elementa  $x$  v topologiji, inducirani z uniformno strukturo  $\mathcal{U}$ , označevali kot  $U_x$ , kjer bo  $U \in \mathcal{U}$ .

**Definicija 7.5.** Naj bosta  $X$  in  $Y$  uniformna prostora z uniformnima strukturama  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{V}$ . Preslikava  $f: X \rightarrow Y$  je *enakomerno zvezna*, če za vsako množico  $V \in \mathcal{V}$  obstaja taka množica  $U \in \mathcal{U}$ , da za vsak par  $(x, y) \in U$  velja  $(f(x), f(y)) \in V$ .

**Trditev 7.6.** Vsaka enakomerno zvezna preslikava uniformnih prostorov je zvezna v topologiji, inducirani z uniformnima strukturama.

*Dokaz.* Naj bo  $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  enakomerno zvezna preslikava med uniformnima prostoroma. Vzemimo okolico  $V_{f(x)}$  elementa  $f(x)$  v topologiji na  $Y$  inducirani s  $\mathcal{V}$ . Ker je  $f$  enakomerno zvezna, obstaja  $U \in \mathcal{U}$ , da za vsak par  $(x, y) \in U$  velja  $(f(x), f(y)) \in V$ . To je v induciranih topologijah ekvivalentno temu, da za vsak  $y \in U_x$  velja  $f(y) \in V_{f(x)}$ , torej je  $f$  zvezna preslikava glede na topologiji, ki ju inducirata uniformni strukturi.  $\square$

**Definicija 7.7.** Naj bo  $\mathcal{U}$  baza odprtih okolic enote  $e$  topološke grupe  $G$ . Za vsako okolico  $U \in \mathcal{U}$  definiramo  $L_U = \{(x, y) \in G \times G; x^{-1}y \in U\}$  in  $R_U = \{(x, y) \in G \times G; yx^{-1} \in U\}$ . Družinama  $\mathcal{L}(G) = \{L_U\}_{U \in \mathcal{U}}$  in  $\mathcal{R}(G) = \{R_U\}_{U \in \mathcal{U}}$  pravimo leva in desna uniformna struktura na  $G$ .

**Trditev 7.8.** Vsaka topološka grupa je uniformni prostor.

*Dokaz.* Naj bo filter  $\mathcal{U}$  baza odprtih in simetričnih okolic enote  $e$  topološke grupe  $G$ . Oglejmo si levo in desno uniformno strukturo na  $G$ , definirani naj bosta s pomočjo  $\mathcal{U}$ .

Ker je enote  $e$  v vsaki okolici  $U \in \mathcal{U}$ , je diagonalna  $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$  vsebovana v  $L_U$  in  $R_U$  za vsako okolico  $U \in \mathcal{U}$ .

Velja

$$L_{U^{-1}} = \{(x, y) \in G \times G; x^{-1}y \in U^{-1}\} = \{(x, y) \in G \times G; y^{-1}x \in U\} = L_U^{-1}$$

in

$$R_{U^{-1}} = \{(x, y) \in G \times G; yx^{-1} \in U^{-1}\} = \{(x, y) \in G \times G; xy^{-1} \in U\} = R_U^{-1}.$$

Ker za vsako okolico  $U \in \mathcal{U}$  velja  $U = U^{-1}$ , je  $L_U^{-1} \in \mathcal{L}(G)$  in  $R_U^{-1} \in \mathcal{R}(G)$ .

Po trditvi 3.9 za vsako okolico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja okolica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V^2 \subset U$ . Velja torej, da je  $L_V \circ L_V \subset L_U$  in  $R_V \circ R_V \subset R_U$ .

Topološka grupa je z levo ali desno uniformno strukturo torej res uniformni prostor.  $\square$

## 7.2. Metrizabilnost.

**Definicija 7.9.** Pseudometrika na neprazni množici  $X$  je preslikava  $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , ki zadošča naslednjim pogojem:

- (1) za vsako točko  $x \in X$  velja  $\rho(x, x) = 0$ ;
- (2) za vsaki dve točki  $x, y \in X$  velja  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- (3) za vsake tri točke  $x, y, z \in X$  velja  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Če za preslikavo  $\rho$  velja še

- (4)  $\rho(x, y) = 0$  natanko tedaj, ko  $x = y$ ,

potem ji rečemo *metrika*.

**Definicija 7.10.** Pseudometrika na grupi  $G$  je levoinvariantna, če je invariantna na levo translacijo, torej če za vsaki dve točki  $x, y \in G$  in za vsak element  $a \in G$  velja  $\rho(ax, ay) = \rho(x, y)$ .

Podobno, pseudometrika je desnoinvariantna, če je invariantna na desno translacijo.

**Izrek 7.11.** Naj bo  $\{U_k\}_{k=1}^\infty$  tako zaporedje simetričnih okolic enote  $e$  v topološki grupi  $G$ , da za vsak  $k \in \mathbb{N}$  velja  $U_{k+1}^2 \subset U_k$ . Označimo  $H = \bigcap_{k=1}^\infty U_k$ . Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika  $\sigma$  na  $G$  z naslednjimi lastnostmi:

- (1)  $\sigma$  je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od  $G \times G$ ;

(2)  $\sigma(x, y) = 0$  natanko tedaj, ko  $y^{-1}x \in H$ ;

(3)  $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$ , če  $y^{-1}x \in U_k$ ;

(4)  $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$ , če  $y^{-1}x \notin U_k$ .

Če velja še  $xU_kx^{-1} = U_k$  za vsak  $x \in G$  in  $k \in \mathbb{N}$ , potem je  $\sigma$  tudi desnoinvariantna in velja

(5)  $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$  za vsaka dva elementa  $x, y \in G$ .

**Definicija 7.12.** Topološki prostor  $X$  je *metrizabilen*, če njegova topologija  $\tau$  izhaja iz kakšne metrike  $d$  na množici  $X$ .

**Opomba 7.13.** Baza topologije metrizablenega topološkega prostora  $X$  je družina odprtih krogel  $\{K(x, \epsilon); x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}\}$ .

**Izrek 7.14.** Topološka grupa  $G$ , ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je metrizablen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote.

*Dokaz.* Če je  $G$  metrizablen topološki prostor, lahko za števno bazo odprtih okolic enote  $e$  izberemo kar družino odprtih krogel s središčem v enoti  $\{K(e, 2^{-n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Naj bo  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$  števna baza odprtih okolic enote. Induktivno definiramo novo bazo okolic enote na sledeč način. Najprej definiramo okolico  $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$ , nato pa vsako naslednjo tako, da zadošča  $U_k \subset U_1 \cap \dots \cap U_{k-1} \cap V_k$ ,  $U_k = U_k^{-1}$  in  $U_k^2 \subset U_{k-1}$  za vsak  $k \geq 2$ . Tako zaporednje si lahko izberemo po trditvi 3.9. Ker  $G$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$  in je po izreku 7.15 regularna, je  $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \{e\}$ . Baza  $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$  zadošča predpostavkam izreka 7.11, zato na topološki grupi  $G$  obstaja psevdometrika  $\sigma$ .

Po drugi lastnosti psevdometrike  $\sigma$  je  $\sigma(x, y) = 0$  natansko tedaj, ko  $y^{-1}x \in H$ . Ker  $H = \{e\}$ , velja  $\sigma(x, y) = 0$  natanko tedaj, ko  $x = y$ . Preslikava  $\sigma$  je torej metrika na  $G$ . Preveriti moramo le še, da topologija  $\tau$  na  $G$  in topologija  $\tau_{\sigma}$ , inducirana z metriko  $\sigma$ , sovpadata.

Po tretji in četrti lastnosti metrike  $\sigma$  za vsak  $k \in \mathbb{N}$  velja

$$\{x \in G; \sigma(x, e) \leq 2^{-k}\} \subset U_k \subset \{x \in G; \sigma(x, e) \leq 2^{-k+1}\}.$$

Torej za vsak  $k \in \mathbb{N}$  velja

$$K(e, 2^{-k}) \subset U_k \subset K(e, 2^{-k+2}).$$

Vsaka okolica enote  $e$  v topologiji  $\tau$  torej vsebuje okolico enote  $e$  v topologiji  $\tau_{\sigma}$  in vsaka okolica enote  $e$  v topologiji  $\tau_{\sigma}$  vsebuje okolico enote  $e$  v topologiji  $\tau$ . Topologiji  $\tau$  in  $\tau_{\sigma}$  sta zato ekvivalentni in  $G$  je metrizablen topološki prostor.  $\square$

### 7.3. Regularnost.

**Izrek 7.15.** Vsaka topološka grupa  $G$ , ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je regularen topološki prostor.

*Dokaz.* Po trditvi 3.14 je  $G$  Hausdorffova in zato zadošča separacijskemu aksiomu  $T_1$ .

Po posledici 3.13 za vsako okolico  $U$  enote  $e$  obstaja okolica  $V$  enote  $e$ , da je  $\bar{V} \subset U$ . Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, to velja v vsaki točki, saj  $a\bar{V} \subset aU$ , kar pa je ekvivalentno separacijskemu aksiomu  $T_3$ . Topološka grupa  $G$  je res regularna.  $\square$

#### 7.4. Separacijski aksiom $T_{3\frac{1}{2}}$ .

**Definicija 7.16.** Topološki prostor  $X$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_{3\frac{1}{2}}$ , če za poljubno zaprto množico  $A \subseteq X$  in točko  $b \in X \setminus A$  obstaja taka zvezna realna funkcija  $\psi$ , definirana na  $G$ , da je  $\psi(b) = 0$  in  $\psi(x) = 1$  za vsak  $x \in A$ .

**Opomba 7.17.** Topološki prostoru, ki zadošča  $T_1$  in  $T_{3\frac{1}{2}}$ , pravimo *povsem regularen* topološki prostor.

**Trditev 7.18.** (1) Vsak povsem regularen topološki prostor je regularen.

(2) Vsak normalen topološki prostor je povsem regularen.

*Dokaz.* Naj bo  $F$  zaprta podmnožica povsem regularnega topološkega prostora  $X$  in točka  $a \in X \setminus F$ . Potem obstaja zvezna funkcija  $\psi: X \rightarrow [0, 1]$ , da je  $\psi(a) = 0$  in  $\psi(F) \equiv 1$ . Množici  $\psi^{-1}([0, \frac{1}{2}))$  in  $\psi^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$  sta disjunktni odprti okolici za točko  $a$  in množico  $F$ , saj je funkcija  $\psi$  zvezna, množici  $[0, \frac{1}{2})$  in  $(\frac{1}{2}, 1]$  pa sta odprti v inducirani evklidski topologiji na interval  $[0, 1]$ . Izpolnjen je separacijski aksiom  $T_3$  in  $X$  je regularen topološki prostor.

Naj bo  $X$  normalen topološki prostor. Po Urysohnovi karakterizaciji separacijskega aksioma  $T_4$  (glej [3]) za vsaki dve disjunktni zaprti množici  $A$  in  $B$  obstaja zvezna funkcija  $\psi: X \rightarrow [0, 1]$ , da je  $\psi(A) \equiv 0$  in  $\psi(B) \equiv 1$ . Ker  $X$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_1$ , so vse enoelementne množice zaprte. Če za množico  $A$  vzamemo enoelementno množico  $\{a\}$ , vidimo, da je  $X$  povsem regularen topološki prostor.  $\square$

**Izrek 7.19.** Topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je povsem regularen topološki prostor.

*Dokaz.* Vzemimo zaprto množico  $F$  in element  $a \in G \setminus \{a\}$ . Naj bo  $\mathcal{U}$  baza simetričnih okolic enote  $e$  in naj bo  $U_1 \in \mathcal{U}$  taka množica, da je  $(aU_1) \cap F = \emptyset$ . Taka množica  $U_1$  obstaja, saj je  $G \setminus \{a\}$  odprta množica,  $aU_1$  pa je odprta okolica elementa  $a$ . Izberemo okolice  $U_2, U_3, \dots \in \mathcal{U}$  take, da velja  $U_{k+1}^2 \subset U_k$  za vsak  $k \in \mathbb{Z}$  (obstajajo po trditvi 3.9). S tem smo zadostili predpostavkam izreka 7.11, zato obstaja na  $G$  psevdometrika  $\sigma$ . Definiramo funkcijo

$$\psi(x) = \min\{1, 2\sigma(x, a)\}.$$

Ker je psevdometrika  $\sigma$  enakomerno zvezna glede na levo uniformno strukturo na  $G$ , je po trditvi 7.6 zvezna, zato je  $\psi$  zvezna funkcija.

Očitno velja, da je  $\psi(a) = 0$ , saj je  $\sigma(a, a) = 0$  po definiciji psevdometrike.

Vzemimo element  $x \in F$ . Po konstrukciji množice  $U_1$  velja  $a^{-1}x \notin U_1$ . Po četrti lastnosti v izreku 7.11 je  $\sigma(x, a) \geq 2^{-1} = \frac{1}{2}$ . Sledi, da je  $\psi(x) = 1$  za vsak element  $x \in F$ .

Topološka grupa  $G$  s tem zadošča separacijskemu aksiomu  $T_{3\frac{1}{2}}$  in je povsem regularna.  $\square$

#### 7.5. Separacijski aksiom $T_4$ .

**Izrek 7.20.** Če je  $m$  katerokoli neštevno kardinalno število, potem je  $\mathbb{Z}^m$  povsem regularna topološka grupa, ki ni normalna.

**Definicija 7.21.** (1) Naj bosta  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{V}$  družini podmnožic topološkega prostora  $X$ . Družina  $\mathcal{V}$  je *pofinitev* družine  $\mathcal{U}$ , če za vsako množico  $V \in \mathcal{V}$  obstaja takšna množica  $U \in \mathcal{U}$ , da je  $V \subset U$ .



- (2) Družina podmnožic  $\mathcal{U}$  topološkega prostora  $X$  je *lokalno končna*, če ima vsaka točka  $x \in X$  okolico, ki seka samo končno mnogo množic iz družine  $\mathcal{U}$ .
- (3) Topološki prostor  $X$  je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora  $X$ .

**Definicija 7.22.** (1) Topološki prostor je  $\sigma$ -kompakten, če ga je možno zapisati kot števno unijo kompaktnih topoloških prostorov.

(2) Topološki prostor ima Lindelöfovo lastnost, če vsako njegovo odprto pokritje vsebuje kakšno števno podpokritje.

**Opomba 7.23.** Očitno je, da ima vsak kompakten prostor Lindelöfovo lastnost, saj vsako odprto pokritje vsebuje končno podpokritje, ki je trivialno števno. Velja pa tudi, da ima vsak  $\sigma$ -kompakten prostor Lindelöfovo lastnost, saj je števna unija končnih pokritij števno pokritje.

**Trditev 7.24.** Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.

*Dokaz.* Vzemimo  $A$  in  $B$  zaprti disjunktni podmnožici parakompaktnega Hausdorffovega prostora  $X$ . Zanju iščemo disjunktni okolici.

Predpostavimo najprej, da je  $B = \{b\}$  enoelementna množica za neko točko  $X \setminus A$ . Ker je prostor  $X$  Hausdorffov, sta vsaki dve točki ločeni z disjunktnima okolicama. Za vsako točko  $a \in A$  torej obstaja odprta množica  $Q_a \subset X$ , da je  $a \in Q_a$  in  $b \in X \setminus \overline{Q_a}$ . Ker je  $A$  zaprta, je  $X \setminus A$  odprta in velja, da je  $\mathcal{W} = (X \setminus A) \cup \{Q_a; a \in A\}$  odprto pokritje prostora  $X$ . Ker je  $X$  parakompakten topološki prostor, obstaja lokalno končno odprto pokritje  $\mathcal{W}'$  prostora  $X$ , ki je pofinitev pokritja  $\mathcal{W}$ .

Oglejmo si družino

$$\mathcal{Q} = \{W \in \mathcal{W}'; W \cap A \neq \emptyset\}.$$

Za vsako množico  $W \in \mathcal{Q}$  po definiciji pofinitve obstaja takšna točka  $a \in A$ , da je  $W \subset Q_a$ . Velja  $b \in X \setminus \overline{Q_a} \subset X \setminus \overline{W}$  za vsak  $W \in \mathcal{Q}$  (in primeren  $a$ ). Ker je  $\mathcal{W}'$  odprto pokritje prostora  $X$ , je  $S = \bigcup \mathcal{Q}$  odprta okolica množice  $A$  in ker je  $\mathcal{Q}$  lokalno končna družina, velja

$$b \in X \setminus \bigcup_{W \in \mathcal{Q}} \overline{W} = X \setminus \overline{S}.$$

Množica  $T = X \setminus \overline{S}$  je odprta okolica točke  $b$ , ki je disjunktna s  $S$ .

Naprej vzemimo poljubno zaprto podmnožico  $B$ , ki je disjunktna z množico  $A$ . Po prejšnjem argumentu za vsako točko  $b \in B$  obstaja odprta okolica  $T_b$  točke  $b$ , da je  $A \cap \overline{T_b} = \emptyset$ . Ponovno je  $\mathcal{U} = (X \setminus B) \cup \{T_b; b \in B\}$  odprto pokritje prostora  $X$ . Ker je  $X$  parakompakten topološki prostor, obstaja lokalno končno odprto pokritje  $\mathcal{U}'$ , ki je pofinitev pokritja  $\mathcal{U}$ . Naj bo

$$\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U}'; U \cap B \neq \emptyset\}.$$

Podobno kot prej za vsako množico  $U \in \mathcal{V}$  obstaja takšna točka  $b \in B$ , da je  $U \subset T_b$ , zato je  $A \cap \overline{U} \subset A \cap \overline{T_b} = \emptyset$ . Množica  $V = \bigcup \mathcal{V}$  je odprta okolica množice  $B$  in, ker je  $\mathcal{V}$  lokalno končna družina, velja

$$A \cap \overline{V} = A \cap \bigcup_{U \in \mathcal{V}} \overline{U} = \emptyset.$$

Množica  $X \setminus \overline{V}$  je torej odprta okolica množice  $A$ , ki je disjunktna z odprto okolico  $V$  množice  $B$ . Hausdorffov topološki prostor  $X$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_4$  in je zato normalen.  $\square$

**Izrek 7.25.** Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je normalen topološki prostor.

*Dokaz.* Naj bo  $G$  lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ . Po izreku 3.14 je  $G$  Hausdorffova. Zato po trditvi 7.24 zadošča pokazati, da je  $G$  parakompaktna topološka grupa.

Ker je  $G$  lokalno kompaktna, obstaja kompaktna okolica  $K$  enote  $e$ . Po posledici 3.13 obstaja takšna simetrična okolica  $U$  enote  $e$ , da je  $\overline{U} \subset K$ . Ker so zaprte podmnožice kompaktnih prostorov kompaktne, je  $\overline{U}$  tudi kompaktna okolica enote  $e$ .

Naj bo  $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ . Množica  $L$  je po trditvi 4.3 odprta in zaprta podgrupa topološke grupe  $G$ . HERE  $\square$

## SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

## LITERATURA

- [1] S. Bhowmik, *Introduction to Uniform Spaces*, 10.13140/RG.2.1.3743.8967, junij 2014, [ogled 1. 4. 2019], dostopno na [https://www.researchgate.net/publication/305196408\\_INTRODUCTION\\_TO\\_UNIFORM\\_SPACES](https://www.researchgate.net/publication/305196408_INTRODUCTION_TO_UNIFORM_SPACES).
- [2] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [3] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 44 DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.