UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina

Topološke grupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2019

Kazalo

Topološke grupe

POVZETEK

povzetek HERE

Topological groups

ABSTRACT

ABSTRACT HERE

Math. Subj. Class. (2010): 43-00
Ključne besede: grupa topologija
Keywords: group topology

1. Uvod

2. Preliminarna poglavja

2.1. **Operacije na množicah.** Vse operacije na množicah, če ne bo drugače zaznamovano, delujejo na elementih. Tako je na primer produkt množic U in V enak

$$U * V = \{u * v; u \in U, v \in V\},$$

inverz množice U pa je

$$U^{-1} = \{u^{-1}; u \in G\}.$$

Tukaj se v obeh primerih predpostavlja, da so množice vložene v neki grupi, kjer so operacije na elementih smiselno definirane. Grupno strukturo bom bolj podrobno opisal v naslednjem podrazdelku.

Pomembnejša izjema temu pravilu so operacije na množicah v smislu relacij. Predpostavimo torej, da imamo množico X in nas zanimajo podmnožice kartezičnega produkta $X \times X$. Inverz take množice U je potem

$$U^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in U\},$$

analogna operacija množenju pa je tukaj kompozitum množic

$$V \circ U = \{(x, z);\ \text{obstaja element } y \in X,\ \text{da je } (x, y) \in V \text{ in } (y, z) \in U\}.$$

Takšno dojemanje operacij bo vedno posebej označeno.

2.2. **Teorija grup.**

Definicija 2.1. Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

(1) je množica G zaprta za (ponavadi binarno) operacijo $*$,
(2) je operacija $*$ asociativna v množici G,
(3) v G obstaja tak element e (imenujemo ga *enota*), da za vsak element x množice G veljajo enakosti

$$x * e = e * x = x,$$

(4) za vsak element x množice G obstaja element y tudi iz množice G, da veljajo enakosti

$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je $(G, *)$ ali samo G, če je operacija znana ali drugače očitna.

Iz zgornje definicije je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje* $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x * y$,
- *invertiranje* $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

Definiramo lahko nekaj tipov preslikav med grupami.

Definicija 2.2. Naj bo $f : (G, *) \to (\widetilde{G}, \star)$ preslikava med dvema grupama.

(1) Preslikava f je *homomorfizem*, če za vsaka dva elementa $a, b \in G$ velja $f(a * b) = f(a) \star f(b)$.
(2) Preslikava f je *izomorfizem*, če je bijektivni homomorfizem.

Definicija 2.3. Naj bo G grupa za operacijo $*$.

(1) Podmnožica H grupe G je *podgrupa*, če je tudi sama grupa za operacijo $*$.
(2) Množici $aH = \{a * h; h \in H\}$ pravimo *levi odsek* grupe G elementa $a \in G$ po podgrupi H. Na enak način definiramo definiramo *desne odseke* Ha.

(3) Podgrupi H grupe G rečemo podgrupa *edinka*, če za vsak element $a \in G$ velja, da je levi odsek enak desnemu.
(4) Množici $G/H = \{aH; a \in G\}$ rečemo *kvocient* grupe G po podgrupi H.
(5) *Naravna preslikava* na kvocient G/H je preslikava $\varphi : G \to G/H$, $a \mapsto aH$.

Trditev 2.4. *Če je podgrupa N grupe G podgrupa edinka, je kvocient G/N grupa za operacijo $*$, kjer je $aH * bH = (a * b)H$, naravna preslikava φ pa je homomorfizem grup.*

2.3. **Topološki prostori.**

Definicija 2.5. *Topologija* na neprazni množici X je družina podmnožic $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:
(1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,
(2) za poljubni dve množici $U, V \in \tau$ je tudi presek $U \cap V \in \tau$,
(3) za poljubno poddružino $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau$ je tudi unija $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Množici X, opremljeni s topologijo τ, rečemo *topološki* prostor (X, τ) in množice v družini τ označimo za *odprte* množice v topološkem prostoru X. *Zaprte* množice definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico X.

Definicija 2.6. Naj bo (X, τ) topološki prostor.
(1) Podmnožica $B \subset \tau$ je *baza* za topologijo τ, če je vsaka množica iz topologije τ unija nekaterih množic iz B.
(2) Podmnožica P je *podbaza* za topologijo τ, če je družina vseh presekov končno mnogo množic iz P neka baza za topologijo τ.

Definicija 2.7. Naj bo (X, τ) topološki prostor.
(1) Množica $U \subseteq X$ je *okolica za točko* $x \in X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $x \in V$.
(2) Množica $U \subseteq X$ je *okolica* množice $A \subseteq X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $A \subseteq V$.
(3) Če je okolica U iz zgornjih dveh primerov tudi sama odprta množica, jo imenujemo *odprta okolica*.
(4) Družina okolic $\mathcal{U}_x = \{U_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ za točko $x \in X$ se imenuje *baza okolic* za x, če za poljubno okolico V za točko x velja, da obstaja tak $\lambda \in \Lambda$, da je $U_\lambda \subseteq V$.

Definicija 2.8. Naj bo (X, τ) topološki prostor in $A \subseteq X$.
(1) Točka $a \in A$ je *notranja točka* množice A, če je A okolica za točko a.
(2) *Notranjost* množice A je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z $int(A)$. Očitno velja $int(A) \subseteq A$ in tudi $int(A) = A \iff A \in \tau$.
(3) *Zaprtje* množice A je najmanjša zaprta množica v X, ki vsebuje A. Zaprtje množice označimo z $\overline{A}$. Očitno velja $A \subseteq \overline{A}$ in tudi $\overline{A} = A \iff A$ je zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora X lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikave med dvema topološkima prostoroma ter pojem homeomorfizma.

Definicija 2.9. Naj bo $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ preslikava med topološkima prostoroma.

(1) Preslikava f je *zvezna*, kadar je praslika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (Y, τ_2) odprta tudi v topološkem prostoru (X, τ_1).
(2) Preslikava f je *odprta*, kadar je slika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (X, τ_1) odprta tudi v topološkem prostoru (Y, τ_2).
(3) Preslikava f je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

V svojem delu bom uporabljal še dve posebni topologiji.

Definicija 2.10. Naj bo X topološki prostor s topologijo τ in $A \subseteq X$. *Inducirana* ali *relativna topologija* na množici A, inducirana s τ, je družina množic $\{A \cap U; U \in \tau\}$. Množici A rečemo *topološki podprostor* prostora X.

Definicija 2.11. Naj bosta X in Y topološka prostora s topologijama τ_1 in τ_2. *Produktna topologija* na kartezičnemu produktu $X \times Y$ je družina množic $\{U \times V; U \in \tau_1, V \in \tau_2\}$.

Definicija 2.12. Naj bo X topološki prostor.

(1) Družini $\mathcal{A}$ množic rečemo *pokritje* topološkega prostora X, če je $X \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.
(2) Družini $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ rečemo *podpokritje* topološkega prostora X, če je $\mathcal{B}$ tudi sama pokritje za X.
(3) Topološki prostor je *kompakten*, če vsako njegovo odprto pokritje, tj. pokritje z odprtimi množicami, vsebuje kakšno končno podpokritje.
(4) Topološki prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka $x \in X$ kakšno kompaktno okolico.

Definicija 2.13. (1) Naj bosta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ družini podmnožic topološkega prostora X. Družina $\mathcal{V}$ je *pofinitev* družine $\mathcal{U}$, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja takšna množica $U \in \mathcal{U}$, da je $V \subset U$.
(2) Družina podmnožic $\mathcal{U}$ topološkega prostora X je *lokalno končna*, če ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki seka samo končno mnogo množic iz družine $\mathcal{U}$.
(3) Topološki prostor X je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora X.

Definicija 2.14. Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu

(1) T_0, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstaja okolica V za eno od točk a, b, ki ne vsebuje druge od točk a, b;
(2) T_1, če za poljubno točko $a \in X$ in različno točko $b \in X$ obstaja okolica V za točko a, ki ne vsebuje točke b;
(3) T_2, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstajata disjunktni okolici za točki a in b;
(4) T_3, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \backslash A$ obstajata disjunktni okolici za množico A in točko b;
(5) T_4, če za poljubni disjunktni zaprti množici $A, B \subseteq X$ obstajata disjunktni okolici za množici A in B.

Opomba 2.15. (1) Iz definicije je razvidno, da $T_2 \implies T_1 \implies T_0$.
(2) Topološkemu prostoru, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_2, pravimo *Hausdorffov* topološki prostor.
(3) Topološku prostoru, ki zadošča $T_1 + T_3$ pravimo *regularen* topološki prostor.
(4) Topološku prostoru, ki zadošča $T_1 + T_4$, pravimo *normalen* topološki prostor.

3. Kaj je topološka grupa

Končno lahko strukturi združimo in povežemo ter definiramo pojem topološke grupe.

Definicija 3.1. *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ opremljena s tako topologijo τ na množici G, da sta za τ strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo le še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraično kot topološko strukturo.

Definicija 3.2. Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem in homeomorfizem.

Trditev 3.3. *Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. Leva translacija $x \mapsto ax$ in desna translacija $x \mapsto xa$ za a sta homeomorfizma iz G v G. Prav tako je preslikava invertiranja homeomorfizem iz G v G.*

Trditev 3.4. *Za topološko grupo G in odprto bazo okolic $\mathcal{U}$ enote e veljajo naslednje trditve:*

(1) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$;
(2) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$;
(3) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in U$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$;
(4) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in G$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xVx^{-1} \subset U$.

Naj bo G sedaj grupa (ne topološka) in $\mathcal{U}$ družina podmnožic množice G, za katero veljajo zgornje štiri lastnosti. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz $\mathcal{U}$ neprazni. Tedaj je družina $\{xU\}$, kjer $U \in \mathcal{U}$ in $x \in G$ odprta podbaza za neko topologijo na G. S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux\}$ je podbaza za isto topologijo.

Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ tudi bazi za to topologijo.

Trditev 3.5. *Vsaka topološka grupa G ima bazo odprtih okolic $\mathcal{U}$ enote e, da za vsako okolico U velja $U = U^{-1}$.*

Opomba 3.6. Lastnosti množic iz trditve 3.5 pravimo simetričnost.

Posledica 3.7. *Za vsako okolico U enote e topološke grupe G obstaja taka okolica V enote e, da velja $V^{-1} \subset U$.*

3.1. **Primeri topoloških grup.**

4. Kvocienti topoloških grup

Trditev 4.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Če H opremimo z relativno topologijo, potem je tudi H topološka grupa.*

Trditev 4.2. *Naj bosta A in B podmnožici topološke grupa G. Veljajo naslednje trditve:*

(1) $\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{AB}$,
(2) $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$,
(3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ za vsaka dva $x, y \in G$.

Če G ustreza še separacijskemu aksiomu T_0, velja tudi:

(4) če za vsaka dva elementa $a \in A$ in $b \in B$ velja enakost $ab = ba$, potem velja enakost $ab = ba$ tudi za vsaka dva elementa $a \in \overline{A}$ in $b \in \overline{B}$.

Trditev 4.3. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. H je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa H topološke grupa G je tudi zaprta.*

Trditev 4.4. *Naj bo U simetrična okolica enote e v topološki grupi G. Potem je $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G.*

Izrek 4.5. *Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in $\varphi : G \to G/H$ naravna preslikava. Definiramo $\theta(G/H) = \{U; \varphi^{-1}(U)$ odprta v $G\}$. Veljajo naslednje trditve:*

(1) družina $\theta(G/H)$ je topologija na kvocientu G/H,
(2) glede na topologijo $\theta(G/H)$ je φ zvezna preslikava,
(3) družina $\theta(G/H)$ je najmočnejša topologija na kvocientu G/H, glede na katero je φ zvezna preslikava,
(4) $\varphi : G \to G/H$ je odprta preslikava.

Družini $\theta(G/H)$ pravimo *kvocientna topologija*, kvocientu G/H pa *kvocientni prostor*.

Trditev 4.6. *Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in U, V tako okolici enote e v G, da velja $V^{-1}V \subset U$. Naj bo $\varphi : G \to G/H$ naravna preslikava. Potem velja $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$.*

Izrek 4.7. *Za topološko grupo G in njeno podgrupo H veljajo naslednje trditve:*

(1) kvocientni prostor G/H je diskreten natanko tedaj, ko je H odprta v G,
(2) če je H zaprta v G, potem je kvocient G/H regularen topološki prostor,
(3) če kvocientni prostor G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0, potem je H zaprta v G in velja, da je kvocient G/H regularen topološki prostor.

Izrek 4.8. *Naj bo H podgrupa edinka topološke grupe G. Naj bo kvocient G/H opremljen s kvocientno topologijo θ. Veljajo naslednje trditve:*

(1) kvocient G/H je topološka grupa s topologijo θ,
(2) naravni homomorfizem je odprta in zvezena preslikava,
(3) kvocient G/H je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa H odprta v G,
(4) kvocient G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0 natanko tedaj, ko je podgrupa H zaprta v G.

5. Izreki o izomorfizmih

Trditev 5.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Naj bo za vsak element $a \in G$ na kvocientu G/H definirana preslikava ψ_a s predpisom $\psi_a(xH) = (ax)H$. Za vsak element $a \in G$ je ψ_a homeomorfizem na prostoru G/H.*

Opomba 5.2. Če za vsaki dve točki x, y topološkega prostora X velja, da na prostoru X obstaja homeomorfizem, ki preslika točko x v točko y, rečemo, da je X *homogen* topološki prostor. Zgornja trditev pravi, da je kvocientni prostor G/H homogen topološki prostor.

Trditev 5.3. *Naj bo G (lokalno) kompaktna topološka grupa in naj bo H njena podgrupa. Potem je tudi kvocietni prostor G/H (lokalno) kompakten.*

5.1. **Prvi izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.4 (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bosta G in $\widetilde{G}$ topološki grupi. Naj bo $f : G \to \widetilde{G}$ odprt, zvezen homomorfizem. Potem je $H := \ker f$ podgrupa edinka v grupi G in množice $f^{-1}(\tilde{x})$, kjer je $\tilde{x} \in \widetilde{G}$, so disjunktni odseki podgrupe H v grupi G. Preslikava $\Phi : \widetilde{G} \to G/H$ s predpisom $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$ je topološki izomorfizem.*

5.2. **Drugi izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.5. *Naj bo G topološka grupa, A njena podgrupa in H podgrupa edinka grupe G. Naj bo τ izomorfizem iz kvocienta $(AH)/H$ v kvocient $A/(A \cap H)$ s predpisom $\tau(aH) = a(A \cap H)$, kjer je $a \in A$. Potem τ slika odprte množice iz $(AH)/H$ v odprte množice iz $A/(A \cap H)$.*

Izrek 5.6 (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bodo objekti G, A, H in τ isti kakor v izreku 5.5. Naj bo podgrupa A še lokalno kompaktna in σ-kompaktna, naj bo H zaprta v G in AH lokalno kompaktna. Tedaj je τ homeomorfizem ter topološki grupi $(AH)/H$ in $A/(A \cap H)$ sta topološko izomorfni.*

5.3. **Tretji izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.7. *Naj bo G topološka grupa z enoto e in naj bo $\widetilde{G}$ topološka grupa z enoto $\tilde{e}$. Naj bo f odprt, zvezen homomorfizem iz grupe G v grupo $\widetilde{G}$. Naj bo $\widetilde{H}$ podgrupa edinka grupe $\widetilde{G}$. Označimo $H = f^{-1}(\widetilde{H})$ in $N = f^{-1}(\tilde{e})$ (N je jedro homomorfizma f). Potem so grupe G/H, $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfne.*

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraični različici in ne vsebuje pomožne topološke grupe $\widetilde{G}$.

Izrek 5.8 (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bo G topološka grupa in H, N taki njeni podgrupi edinki, da velja $N \subset H$. Potem sta kvocientni topološki grupi G/H in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfni.*

6. Izreki tipa "2 od 3"

7. Separacijski aksiomi in metrizabilnost

Definicija 7.1. Topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \setminus A$ obstaja zvezna realna funkcija ψ definirana na G, da je $\psi(b) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in A$.

Opomba 7.2. Topološku prostoru, ki zadošča $T_1 + T_{3\frac{1}{2}}$, pravimo *povsem regularen* topološki prostor.

Trditev 7.3. *(1) Vsak povsem regularen topološki prostor je regularen.*
(2) Vsak normalen topološki prostor je povsem regularen.

Izrek 7.4. *Vsaka topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je regularen topološki prostor.*

7.1. **Metrizabilnost.**

Definicija 7.5. *Pseudometrika* na neprazni množici X je preslikava $d : X \times X \to [0, \infty)$, ki zadošča naslednjim pogojem:

(1) za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) \geq 0$ in $\rho(x, x) = 0$;

(2) za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
(3) za vsake tri točke $x, y, z \in X$ velja $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Če za preslikavo d velja še

(4) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

potem ji rečemo *metrika*.

Definicija 7.6. Naj bo X neprazna množica.

(1) Neprazna poddružina $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ je *filter* množice X, če ima naslednje lastnosti:
  (a) družina $\mathcal{F}$ ne vsebuje prazne množice,
  (b) za vsako množico $F \in \mathcal{F}$ je vsaka taka množica $E \in X$, za katero velja $F \subseteq E$, tudi v družini $\mathcal{F}$,
  (c) če sta množici E in F v družini $\mathcal{F}$, je tudi množica $E \cap F$ v družini $\mathcal{F}$.

(2) Filter $\mathcal{U}$ na množici $X \times X$ definira *uniformno strukturo* na množici X, če ima naslednje lastnosti:
  (a) vsaka množica $U \in \mathcal{U}$ ima diagonalo množice X $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$ za svojo podmnožico,
  (b) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ je tudi množica $U^{-1} \in \mathcal{U}$,
  (c) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V \circ V \subseteq U$.

  Množici z uniformno stukturo rečemo tudi *uniformni prostor*.

Opomba 7.7. V zgornji definiciji so operacije na množicah mišljene v smislu relacij (glej podrazdelek 2.1).

Definicija 7.8. Naj bo X uniformni prostor z uniformno strukturo $\mathcal{U}$. Topologija, inducirana z $\mathcal{U}$ je taka družina množic $T \subseteq X$, za katere za vsako točko $x \in T$ obstaja $U \in \mathcal{U}$, da velja $\{y \in X; (x, y) \in U\} \subseteq T$.

Definicija 7.9. Naj bosta X in Y uniformna prostora z uniformnima strukturama $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$. Preslikava $f : X \to Y$ je *enakomerno zvezna*, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja taka množica $U \in \mathcal{U}$, da za vsak par $(x, y) \in U$ velja $(f(x), f(y)) \in V$.

Trditev 7.10. *Vsaka enakomerno zvezna preslikava uniformnih prostorov je zvezna v topologiji, inducirani z uniformnima strukturama.*

Trditev 7.11. *Vsaka topološka grupa je uniformni prostor.*

Izrek 7.12. *Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje simetričnih okolic enote e v topološki grupi G, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$. Označimo $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika σ na G z naslednjimi lastnostmi:*

(1) σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od $G \times G$;
(2) $\sigma(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko $y^{-1}x \in H$;
(3) $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če $y^{-1}x \in U_k$;
(4) $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če velja še $xU_kx^{-1} = U_k$ za vsak $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, potem je σ tudi desnoinvariantna in velja

(5) $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka dva elementa $x, y \in G$.

Definicija 7.13. Topološki prostor X je *metrizabilen*, če njegova topologija τ izhaja iz kakšne metrike d na množici X, tj. baza topologije τ je družina odprtih krogel $\{K(x, \epsilon); x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}\}$.

Izrek 7.14. *Topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote e.*

7.2. Separacijski aksiomi do $\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$.

Izrek 7.15. *Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Naj bo $a \in G$ točka in F zaprta podmnožica v G, ki ne vsebuje a. Potem obstaja taka zvezna realna funkcija ψ definirana na G, da je $\psi(a) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in F$.*

Drugače: vsaka T_0 topološka grupa je povsem regularna.

7.3. Separacijski aksiom $\mathbf{T}_4$.

Izrek 7.16. *Če je m katerokoli neštevno kardinalno število, potem je $\mathbb{Z}^m$ nenormalna povsem regularna topološka grupa.*

Trditev 7.17. *Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.*

Izrek 7.18. *Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je normalen topološki prostor.*

Slovar strokovnih izrazov

Literatura

[1] S. Bhowmik, *Introduction to Uniform Spaces*, 10.13140/RG.2.1.3743.8967, junij 2014, [ogled 1. 4. 2019], dostopno na `https://www.researchgate.net/publication/305196408_INTRODUCTION_TO_UNIFORM_SPACES`.

[2] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstact Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[3] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44** DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.