UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina

Topološke grupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandič

Ljubljana, 2019

Kazalo

Topološke grupe

Povzetek

povzetek HERE

Topological groups

Abstract

ABSTRACT HERE

Math. Subj. Class. (2010): 43-00

Ključne besede: grupa topologija

Keywords: group topology

1. Uvod

Tukaj bom napisal kratek uvod o uporabi združene topološke in algebraične strukture, zgodovinske primere uporabe topoloških grup in nato na kratko opisal strukturo dela.

2. Kaj je topološka grupa

Definicija 2.1. Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

(1) je množica G zaprta za (ponavadi binarno) operacijo $*$,
(2) je operacija $*$ asociativna v množici G,
(3) v G obstaja tak element e (imenujemo ga *enota*), da za vsak element x množice G veljajo enakosti

$$x * e = e * x = x,$$

(4) za vsak element x množice G obstaja element y tudi iz množice G, da veljajo enakosti

$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je $(G, *)$ ali samo G, če je operacija znana ali drugače očitna.

Iz zgornje definicije je takoj razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje* $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x * y$,
- *invertiranje* $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

Definicija 2.2. *Topologija* na neprazni množici X je družina podmnožic $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:

(1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,
(2) za poljubni dve množici $U, V \in \tau$ je tudi presek $U \cap V \in \tau$,
(3) za poljubno poddružino $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ je tudi unija $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Množici X, opremljeni s topologijo τ, rečemo *topološki* prostor (X, τ) in množice v družini τ označimo za *odprte* množice v topološkem prostoru X. *Zaprte* množice definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico X.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora X lahko sedaj definiramo zveznost preslikave med dvema topološkima prostoroma.

Definicija 2.3. Preslikava $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ je *zvezna*, kadar je praslika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (Y, τ_2) odprta tudi v topološkem prostoru (X, τ_1).

Končno lahko strukturi združimo in povežemo ter definiramo pojem topološke grupe.

Definicija 2.4. *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ opremljena s tako topologijo τ na množici G, da sta za τ strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Nekaj osnovnih trditev, ki jih bom potreboval kasneje pri dokazovanju.

Trditev 2.5. *Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. Leva translacija $x \mapsto ax$ in desna translacija $x \mapsto xa$ za a sta homeomorfizma iz G v G. Prav tako je preslikava invertiranja homeomorfizem iz G v G.*

Trditev 2.6. *Naj bo G topološka grupa in $\mathcal{U}$ odprta baza okolic enote e. Tedaj veljajo naslednje trditve:*

(1) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$;
(2) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$;
(3) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in U$ obstaja množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$;
(4) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in G$ obstaja množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xVx^{-1} \subset U$.

Naj bo G sedaj grupa (ne topološka) in $\mathcal{U}$ družina podmnožic množice G, za katero veljajo zgornje štiri lastnosti. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz $\mathcal{U}$ neprazni. Tedaj je družina $\{xU\}$, kjer $U \in \mathcal{U}$ in $x \in G$ odprta podbaza za neko topologijo na G. S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux\}$ je odprta podbaza za isto topologijo.

Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ tudi odprti bazi za to topologijo.

Trditev 2.7. *Vsaka topološka grupa G ima odprto bazo okolic $\mathcal{U}$ enote e, da za vsako okolico U velja $U = U^{-1}$. Tej lastnosti množic pravimo simetričnost.*

Posledica 2.8. *Naj bo G topološka grupa. Za vsako okolico U enote e obstaja okolica V enote e, da velja $V^{-1} \subset U$.*

2.1. **Primeri topoloških grup.** Tukaj bom sistematično opisal nekaj osnovnih ali očitnih primerov topoloških grup in za nekaj primerov tudi dokazal, da ustrezajo definiciji.

3. Separacijski aksiomi in metrizabilnost

Opis poglavja, kaj me bo zanimalo in pomožne trditve, ki jih nisem navedel že v prejšnjem poglavju. Definicije aksiomov in metrizabilnosti ter nekaj privzetkov. Izrek za T3.

Izrek 3.1. *Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Tedaj je G regularna kot topološki prostor.*

3.1. **Metrizabilnost.**

Izrek 3.2. *Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje simetričnih okolic enote e v topološki grupi G, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$. Označimo $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Potem obstaja taka levoinvariantna pseudo-metrika σ na G z naslednjimi lastnostmi:*

(1) σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od $G \times G$;
(2) $\sigma(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko velja $y^{-1}x \in H$;
(3) $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če velja $y^{-1}x \in U_k$;
(4) $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če velja $y^{-1}x \notin U_k$.

Če velja še $xU_kx^{-1} = U_k$ za vsak $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, potem je σ tudi desnoinvariantna in velja

(5) $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka dva elementa $x, y \in G$.

Izrek 3.3. *Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Potem je G metrizabilna kot topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna odprta baza okolic enote e.*

3.2. **Separacijski aksiomi do $\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$.**

Izrek 3.4. *Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Naj bo $a \in G$ in F zaprta podmnožica v G, ki ne vsebuje a. Potem obstaja taka zvezna realna funkcija ψ definirana na G, da je $\psi(a) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in F$.*

Drugače: vsaka T_0 topološka grupa je popolnoma regularna.

3.3. **Separacijski aksiom $\mathbf{T}_4$.**

Izrek 3.5. *Če je m katerokoli neštevno kardinalno število, potem je $\mathbb{Z}^m$ nenormalna popolnoma regularna topološka grupa.*

Izrek 3.6. *Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je parakompaktna in zato normalna.*

4. Kvocienti topoloških grup

Opis poglavja, definicija top. kvocienta in rel. topologije ter dokaz, da teorija deluje tudi za kvociente. Nekaj osnovnih trditev oz. lem. Pomožne trditve za glavni izrek, ki povzame kvociente. Izrek + dokaz.

5. Izreki o izomorfizmih

Opis poglavja in naše želje o obliki analognih izrekov. Algebraični izreki o izomorfizmih (brez dokaza). Vsak analogen izrek posebej s pomožnimi trditvami v svojem podrazdelku.

6. Izreki tipa "2 od 3"

Kasneje.

Slovar strokovnih izrazov

Literatura