UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina

Topološke grupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2019

Kazalo

Topološke grupe

Povzetek

povzetek HERE

Topological groups

Abstract

ABSTRACT HERE

Math. Subj. Class. (2010): 43-00
Ključne besede: grupa topologija
Keywords: group topology

1. Uvod

2. Preliminarna poglavja

V tem poglavju bomo ponovili že znane pojme iz algebre in splošne topologije, ki nam bodo kasneje prišli prav. Dogovorili se bomo tudi o zapisu operacij na množicah. Navedli bomo nekaj definicij in trditev, za katere privzemamo, da so bralcu že poznane.

2.1. **Operacije na množicah.** Vse operacije na množicah, če ne bo drugače zaznamovano, delujejo na elementih. Tako je na primer produkt množic U in V enak

$$U \cdot V = \{u \cdot v; u \in U, v \in V\},$$

inverz množice U pa je

$$U^{-1} = \{u^{-1}; u \in G\}.$$

Tukaj se v obeh primerih predpostavlja, da so množice vložene v neki grupi, kjer so operacije na elementih smiselno definirane. Grupno strukturo bomo bolj podrobno opisali v naslednjem podrazdelku.

Pomembnejša izjema temu pravilu so operacije na množicah v smislu relacij. Predpostavimo torej, da imamo množico X in nas zanimajo podmnožice kartezičnega produkta $X \times X$. Inverz take množice U je definiran kot

$$U^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in U\},$$

analogna operacija množenju pa je kompozitum množic

$$V \circ U = \{(x, z);\ \text{obstaja tak element } y \in X,\ \text{da je } (x, y) \in V \text{ in } (y, z) \in U\}.$$

Takšni notaciji operacij bosta vedno posebej označeni.

2.2. **Teorija grup.** V tem podpoglavju bomo ponovili nekaj osnovnih algebraičnih pojmov, predvsem iz teorije grup.

Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

(1) je množica G zaprta za operacijo $*$,
(2) je operacija $*$ asociativna v množici G,
(3) v G obstaja tak element e (imenujemo ga *enota*), da za vsak element x množice G velja
$$x * e = e * x = x,$$
(4) za vsak element x množice G obstaja element y tudi iz množice G, da velja
$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je $(G, *)$ ali samo G, če je operacija znana ali drugače očitna. Od tukaj naprej bo zapis operacije vedno multiplikativen, razen če bo drugače povdarjeno. To pomeni, da bo grupna operacija označena s $\cdot$ ali pa bo izpuščena.

Med grupami lahko definiramo nekaj tipov preslikav. Našteli bomo dva, ki ju bomo v nadaljevanju najbolj potrebovali. Preslikava $f\colon G \to \widetilde{G}$ je *homomorfizem* grup, če za vsaka dva elementa $a, b \in G$ velja $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. Preslikava je *izomorfizem* grup, če je bijektivna in homomorfizem grup.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj podstruktur grupe. Podmnožica H grupe G je *podgrupa*, če je tudi sama grupa za isto operacijo. Množicama $aH = \{ah; h \in H\}$ in $Ha = \{ha; h \in H\}$ zaporedoma pravimo *levi* in *desni odsek* grupe G elementa $a \in G$ po podgrupi H.

Podgrupi H grupe G rečemo podgrupa *edinka*, če za vsak element $a \in G$ velja

$$aHa^{-1} \subseteq H.$$

Množici $G/H = \{aH; a \in G\}$ rečemo *kvocientna množica* grupe G po podgrupi H. *Naravna preslikava* na kvocientno množico G/H je preslikava $\varphi : G \to G/H$, $a \mapsto aH$. Kvocientna množica v splošnem ni grupa, razen v primeru, ko je H podgrupa edinka. Če je N podgrupa edinka grupe G, je kvocientna množica G/N grupa za operacijo $*$, kjer je $aH * bH = (a \cdot b)H$, naravna preslikava φ pa je homomorfizem grup in ji rečemo *naravni homomorfizem*.

2.3. **Topološki prostori.** V tem podpoglavju bomo ponovili nekaj pojmov iz splošne topologije, ki jih bomo kasneje podrobneje obravnavali na topoloških grupah.

Topologija na neprazni množici X je neprazna družina podmnožic $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:

(1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,
(2) za poljubni dve množici $U, V \in \tau$ je tudi presek $U \cap V \in \tau$,
(3) za poljubno poddružino $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau$ je tudi unija $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Množici X, opremljeni s topologijo τ, rečemo *topološki* prostor, ki ga označimo z (X, τ). Množice v družini τ imenujemo *odprte* množice v topološkem prostoru X, *zaprte* množice pa definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico X.

Družina B je *baza* za topologijo τ, če je vsaka množica iz topologije τ unija nekaterih množic iz B, družina P pa je *podbaza* za topologijo τ, če je družina vseh končnih presekov množic iz P neka baza za topologijo τ.

Množica $U \subseteq X$ je *okolica za točko* $x \in X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $x \in V$. Enako lahko definiramo okolico za množico. Množica $U \subseteq X$ je *okolica* množice $A \subseteq X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $A \subseteq V \subseteq U$. Družina okolic $\mathcal{U}_x$ točke $x \in X$ se imenuje *baza okolic* za x, če za poljubno okolico V točke x velja, da obstaja tak $U \in \mathcal{U}_x$, da je $U \subseteq V$.

Točka $a \in A$ je *notranja točka* množice A, če je A okolica za točko a. *Notranjost* množice A je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z $\mathrm{int}(A)$. Očitno velja $\mathrm{int}(A) \subseteq A$ in tudi $\mathrm{int}(A) = A \iff A \in \tau$. *Zaprtje* množice A je najmanjša zaprta množica v X, ki vsebuje A. Zaprtje množice označimo z $\overline{A}$. Očitno velja $A \subseteq \overline{A}$ in tudi $\overline{A} = A \iff A$ je zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora X lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikave med dvema topološkima prostoroma ter pojem homeomorfizma.

Tako kot med grupami lahko tudi med topološkimi prostori definiramo nekaj tipov preslikav. Ogledali si bomo nekaj za nas najpomembnejših tipov. Naj bo $f\colon (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ preslikava med topološkima prostoroma. Preslikava f je *zvezna*, kadar je praslika vsake odprte množice v topološkem prostoru (Y, τ_2) preslikave f odprta tudi v topološkem prostoru (X, τ_1). Preslikava f je *odprta*, kadar je slika vsake odprte množice v topološkem prostoru (X, τ_1) preslikave f odprta tudi v topološkem prostoru (Y, τ_2). Preslikava f je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

Osnovna podstruktura topološkega prostora je topološki podprostor. Najprej vzemimo topološki prostor X s topologijo τ in množico $A \subseteq X$. *Inducirana* ali *relativna topologija* na množici A, inducirana s topologijo τ, je družina množic $\{A \cap U; U \in \tau\}$. Prostoru A rečemo *topološki podprostor* prostora X.

Oglejmo si še produkt topoloških prostorov. Naj bosta X in Y topološka prostora s topologijama τ_1 in τ_2. *Produktna topologija* na kartezičnemu produktu $X \times Y$ je topologija, generirana z bazo $\{U \times V; U \in \tau_1, V \in \tau_2\}$. *Produkt* topoloških prostorov X in Y je topološki prostor $X \times Y$, opremljen s produktno topologijo. Produkt topoloških prostorov je opremljen še z dvema projekcijskima preslikavama $\mathrm{pr}_x\colon X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_x(x,y) = x$ in $\mathrm{pr}_y\colon X \times Y \to Y$, $\mathrm{pr}_y(x,y) = y$. Obe projekciji sta zvezni in odprti preslikavi glede na primerne topologije.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj pojmov povezanih s kompaktnostjo topoloških prostorov, ki si jih bomo kasneje ogledali v kontekstu topoloških grup, definirali pa bomo tudi nove. Družini $\mathcal{A}$ množic rečemo *pokritje* topološkega prostora X, če je $X \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, družini $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ pa rečemo *podpokritje* topološkega prostora X, če je $\mathcal{B}$ tudi sama pokritje za X. Topološki prostor je *kompakten*, če vsako njegovo odprto pokritje, tj. pokritje z odprtimi množicami, vsebuje kakšno končno podpokritje. Topološki prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka $x \in X$ kakšno kompaktno okolico.

Ponovimo še do sedaj obravnavane separacijske aksiome. Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu

(1) T_0, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstaja okolica V za eno od točk a, b, ki ne vsebuje druge od točk a, b;
(2) T_1, če za poljubno točko $a \in X$ in točko $b \in X \setminus \{a\}$ obstaja okolica V točke a, ki ne vsebuje točke b;
(3) T_2, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstajata disjunktni okolici za točki a in b;
(4) T_3, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \setminus A$ obstajata disjunktni okolici za množico A in točko b;
(5) T_4, če za poljubni disjunktni zaprti množici $A, B \subseteq X$ obstajata disjunktni okolici za množici A in B.

Iz zgornje definicije je razvidno, da $T_2 \implies T_1 \implies T_0$. Topološkemu prostoru, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_2, pravimo *Hausdorffov* topološki prostor. Topološkemu prostoru, ki zadošča T_1 in T_3 pravimo *regularen* topološki prostor. Topološkemu prostoru, ki zadošča T_1 in T_4, pravimo *normalen* topološki prostor.

Separacijske aksiome v povezavi z metrizabilnostjo na topoloških grupah si bomo podrobneje ogledali v kasnejših poglavjih.

3. Kaj je topološka grupa

V tem poglavju bomo združili pojem topološkega prostora s pojmom grupe in ju povezali v pojem topološke grupe. Ogledali si bomo nekaj primerov in temeljnih lastnosti.

3.1. **Definicija topološke grupe.** Iz definicije grupe je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje* $\mu\colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$,
- *invertiranje* $\iota\colon G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

S pomočjo strukturnih preslikav bomo sedaj definirali topološko grupo.

Definicija 3.1. *Topološka grupa* je grupa G opremljena s takšno topologijo τ, da sta glede na τ strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraično kot topološko strukturo.

Definicija 3.2. Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem in homeomorfizem.

3.2. **Primeri topoloških grup.**

Primer 3.3. Vsaka grupa G je za diskretno topologijo $\tau_d = 2^G$ in trivialno topologijo $\tau_t = \{\emptyset, G\}$ topološka grupa, saj je glede na njiju zvezna vsaka preslikava na G ali $G \times G$. ♢

Primer 3.4. Realna števila za operacijo $+$ so topološka grupa z evklidsko topologijo.

Preverimo, da sta strukturni operaciji $\mu(x, y) = x + y$ in $\iota(x) = -x$ zvezni.

Po definiciji produktne topologije sta projekcijski preslikavi zvezni. Strukturna preslikava seštevanja $\mu = pr_x + pr_y$ je zvezna kot vsota zveznih preslikav.

Zveznost invertiranja je dovolj preveriti na baznih množicah evklidske topologije. Vzemimo interval (a, b). Tudi $\iota^{-1}((a, b)) = \iota((a, b)) = (-b, -a)$ je bazna množica in zato odprta, torej je invertiranje zvezno. ♢

Primer 3.5. Enotska krožnica v kompleksni ravnini $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ s podedovanim množenjem je topološka grupa za relativno topologijo kot podprostor $\mathbb{R}^2$ (spomnimo se, da je $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$). ♢

Primer 3.6. Realna števila za operacijo $+$ niso topološka grupa s topologijo $\tau = \{(a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Vzemimo odprto množico (a, ∞) in si oglejmo njeno prasliko glede na preslikavo invertiranja. Res $\iota((a, \infty)) = (-\infty, -a)$ ni odprta množica v topologiji τ, torej prostor $(\mathbb{R}, \tau)$ ni topološka grupa. Kasneje bomo pokazali, da realna števila s to topologijo niso topološka grupa za nobeno operacijo. ♢

3.3. **Osnovne lastnosti topoloških grup.**

Trditev 3.7. *Naj bo G topološka grupa in $a \in G$.*

(1) Leva translacija $l_a \colon x \mapsto ax$ in desna translacija $r_a \colon x \mapsto xa$ za element a sta homeomorfizma iz G v G.
(2) Invertiranje $\iota \colon x \mapsto x^{-1}$ je homeomorfizem iz G v G.
(3) Konjugiranje $\gamma_a \colon x \mapsto axa^{-1}$ je homeomorfizem iz G v G.

Dokaz. Vemo že, da so leva translacija, desna translacija, invertiranje in konjugiranje avtomorfizmi grupe G, torej bijektivne preslikave. Dokazujemo še zveznost preslikave in njenega inverza.

Naj bo $\mathrm{c}_a \colon x \mapsto a$ konstantna preslikava. Vemo, da je konstantna preslikava zvezna.

Levo translacijo lahko zapišemo kot kompozitum zveznih preslikav

$$l_a(x) = \mu(\mathrm{c}_a(x), x) = ax.$$

Kot kompozitum zveznih preslikav je leva translacija zvezna. Inverzna preslikava levi translaciji za element a je leva translacija za element a^{-1}, ki je tudi zvezna. Leva translacija je zato homeomorfizem.

Za dokaz zveznosti desne translacije najprej opazimo, da velja

$$r_a(x) = \mu(x, \mathrm{c}_a(x)) = xa.$$

Nato sledimo zgornjemu dokazu.

Invertiranje je homeomorfizem, ker je zvezno po definiciji topološke grupe in samo sebi inverz.

Konjugiranje lahko zapišemo kot kompozitum homeomorfizmov

$$\gamma = r_{a^{-1}} \circ l_a,$$

nato pa uporabimo točko 1. $\square$

Trditev 3.8. *Naj bosta A in B podmnožici topološke grupe G. Če je A odprta množica, sta odprti tudi množici AB in BA.*

Dokaz. Ker je A odprta množica, so po trditvi 3.7 odprte tudi vse množice Ax za vsak $x \in G$, saj je desna translacija homeomorfizem. Velja $AB = \bigcup_{b \in B}\{Ab\}$, zato je množica AB je odprta kot unija odprtih množic.

Za dokaz odprtosti množice BA najprej oprazimo, da so po trditvi 3.7 odprte tudi vse množice xA za vsak $x \in X$, potem pa sledimo zgornjemu dokazu. $\square$

Trditev 3.9. *Za kompaktni podmnožici A in B topološke grupe G velja, da je množica AB kompaktna.*

Dokaz. Iz splošne topologije vemo, da je kompaktnost multiplikativna lastnost. Množica $A \times B$ je zato kompaktna podmnožica v prostoru $G \times G$. Ker je množenje zvezna preslikava, je tudi množica $\mu(A \times B) = AB$ kompaktna v prostoru G. $\square$

Sledi nekaj trditev, ki se nanašajo na okolice enote topološke grupe.

Trditev 3.10. *Za topološko grupo G in bazo $\mathcal{U}$ odprtih okolic enote e veljajo naslednje trditve:*

(1) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$;
(2) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$;
(3) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in U$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$;
(4) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in G$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xVx^{-1} \subset U$.

Dokaz. Naj bo $U \in \mathcal{U}$ odprta okolica enote e. Ker je množenje zvezno, obstaja v produktni topologiji na $G \times G$ bazična okolica $W = V_1 \times V_2$ elementa (e, e), za katero velja $V_1V_2 \subset U$. Po definiciji produktne topologije sta V_1 in V_2 odprti okolici enote e v G. Definiramo $V' = V_1 \cap V_2$ okolico za e. Po definiciji baze okolic obstaja $V \in \mathcal{U}$, da velja $V \subseteq V'$. Ker je $V \subseteq V' \subseteq V_1$ in $V \subseteq V' \subseteq V_2$, velja

$$V^2 \subseteq V'^2 \subseteq V_1V_2 \subset U.$$

To dokaže prvo trditev.

Ker je invertiranje zvezno, obstaja v G odprta okolica W enote e, za katero velja $W^{-1} \subset U$. Po definiciji baze okolic obstaja okolica $V \in \mathcal{U}$, za katero velja $V \subseteq W$. Potem je $V^{-1} \subseteq W^{-1}$. Velja

$$V^{-1} \subset W^{-1} \subset U.$$

To dokaže drugo trditev.

Vzemimo poljubno točko $x \in U$. Naj bo $W = x^{-1}U$. Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je W odprta okolica enote e. Vzemimo $V \in \mathcal{U}$, $V \subset W$ (obstaja po definiciji baze okolic). Velja

$$xV \subset xW = xx^{-1}U = U.$$

To dokaže tretjo trditev.

Naj bo $x \in U$ poljubna točka. Ker je po trditvi 3.7 konjugiranje homeomorfizem, obstaja odprta okolica enote e oblike $xVx^{-1} \subseteq U$. To dokaže še četrto trditev. □

Izrek 3.11. *Naj bo G grupa in $\mathcal{U}$ družina podmnožic množice G, za katero veljajo vse štiri lastnosti iz trditve 3.10. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz $\mathcal{U}$ neprazni. Tedaj je družina $\{xU\}$, kjer $U \in \mathcal{U}$ in $x \in G$ odprta podbaza za neko topologijo na G. S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux\}$ je podbaza za isto topologijo.*

Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ tudi bazi za to topologijo.

Dokaz. Za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$. Ker je $V \in \mathcal{U}$, obstaja množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W^{-1} \subset V$. Ker velja $V \cap W \neq \emptyset$, velja

$$e \in VW^{-1} \subset V^2 \subset U.$$

Vsaka množica $U \in \mathcal{U}$ torej vsebuje enoto e. Družina $\{xU; x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ je torej res podbaza prostora G, saj je pokritje za G.

Za vsako množico $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ obstajajo množice $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{U}$, da velja $V_k^2 \subset U_k$ za $k = 1, \ldots, n$. Potem velja

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)^2 \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_k^2 \subset \bigcap_{k=1}^{n} U_k.$$

Za družino $\widetilde{\mathcal{U}}$ torej velja lastnost 1 trditve 3.10. Ker je

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)^{-1} = \bigcap_{k=1}^{n} V_k^{-1},$$

za družino $\widetilde{\mathcal{U}}$ velja lastnost 2 trditve 3.10. Ker velja

$$x\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} (xV_k)$$

in

$$x\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)x^{-1} = \bigcap_{k=1}^{n} (xV_k x^{-1}),$$

za družino $\widetilde{\mathcal{U}}$ veljata tudi lastnosti 3 in 4 trditve 3.10.

Po definiciji podbaze, neprazne množice $\bigcap_{k=1}^{n}(x_k U_k)$, kjer je $x_k \in G$ in $U_k \in \mathcal{U}$, tvorijo bazo za neko topologijo na prostoru G. Vzemimo nek element $y \in \bigcap_{k=1}^{n}(x_k U_k)$. Naj bo $V_k \in \mathcal{U}$ tista množica, ki zadošča lastnosti 3 za element $x_k^{-1}y$, torej da velja $x_k^{-1}yV_k \subset U_k$. Potem velja

$$y\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} (yV_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} (x_k U_k).$$

Torej množice oblike $y\widetilde{U}$, kjer je $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$ tvorijo odprto bazo za element y za vsak element $y \in G$.

Da pokažemo, da je G res topološka grupa, vzemimo poljubna elementa $a, b \in G$ in poljubno množico $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$. Ker družina množic $\widetilde{\mathcal{U}}$ zadošča lastnostima 1 in 4 trditve 3.10, obstajata takšni množici $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja $(b^{-1}\widetilde{W}b)\widetilde{V} \subset \widetilde{U}$. Od tod sledi, da je $(a\widetilde{W})(b\widetilde{V}) \subset ab\widetilde{U}$, torej je množenje zvezna preslikava. Ker družina množic $\widetilde{\mathcal{U}}$ zadošča lastnostima 2 in 4 trditve 3.10, obstaja takšna množica $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja

$(b\widetilde{V}b^{-1})^{-1} \subset \widetilde{U}$. Od tod sledi, da je $b^{-1}(b\widetilde{V}b^{-1})^{-1} = b^{-1}b(b\widetilde{V})^{-1} = (bV)^{-1} \subset b^{-1}\widetilde{U}$, torej je invertiranje zvezna preslikava. Topološki prostor G je torej topološka grupa.

Iz lastnosti 4 trditve 3.10 je tudi razvidno, da družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ porodita ekvivalentno topologijo na G, saj lahko vsako množico oblike Ux dobimo s konjugiranjem množice xU z elementom x^{-1}, konjugiranje pa je po trditvi 3.7 homeomorfizem. □

Definicija 3.12. Množici, za katero velja $U = U^{-1}$, rečemo *simetrična* množica.

Trditev 3.13. *Vsaka topološka grupa ima bazo $\mathcal{U}$ odprtih in simetričnih okolic enote.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{V}$ neka baza odprtih okolic enote. Za vsako okolico $V \in \mathcal{V}$ definiramo množico $U = V \cap V^{-1}$. Kot presek dveh odprtih množic je U odprta. Ker je $e \in V$ in $e \in V^{-1}$, je U odprta okolica enote, ki je po konstrukciji simetrična. Ker po definiciji preseka velja še $U \subseteq V$, je družina $\mathcal{U} = \{V \cap V^{-1}; V \in \mathcal{V}\}$ res baza odprtih in simetričnih okolic enote e. □

Trditev 3.14. *Za topološko grupo G so si naslednje trditve ekvivalentne:*

(1) Topološka grupa G zadošča separacijskemu aksiomu T_0.
(2) Množica $\{e\}$ je zaprta v G.
(3) Topološka grupa G je Hausdorffov topološki prostor.

Dokaz. $1 \implies 2$:

Implikacijo bomo dokazali tako, da bomo pokazali, da je množica $G \setminus \{e\}$ okolica za vsako svojo točko, iz česar bo sledilo, da je odprta. Vzemimo točko $x \in G \setminus \{e\}$. Ker G zadošča separacijskemu aksiomu T_0, obstaja bodisi okolica za točko x, ki ne vsebuje enote e, bodisi okolica V za enoto e, ki ne vsebuje točke x. V prvem primeru sledi, da je $G \setminus \{e\}$ okolica za točko x. Zato naj bo V okolica za enoto e, ki ne vsebuje točke x. Množica $x^{-1}V$ je potem okolica za točko x^{-1}, ki ne vsebuje enote e, zato je $\iota(x^{-1}V)$ okolica za točko x, ki ne vsebuje enote e. Ker velja $\iota(x^{-1}V) \subseteq G \setminus \{e\}$, je $G \setminus \{e\}$ okolica za točko x.

Množica $G \setminus \{e\}$ je torej okolica za vsako svojo točko in je zato odprta. Sledi, da je $\{e\}$ zaprta množica.

$2 \implies 3$:

Privzemimo, da je $\{e\}$ zaprta množica. Oglejmo si preslikavo $f\colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$. Preslikava f je zvezna kot kompozitum množenja in invertiranja, ki sta zvezni preslikavi po definiciji topološke grupe. Zato je $f^{-1}(\{e\}) = \{(x, x); x \in G\}$ zaprta množica v $G \times G$, to pa je po izreku iz splošne topologije ekvivalentno temu, da je G Hausdorffova.

$3 \implies 1$:

Sledi iz definicije separacijskega aksioma T_2. □

Trditev 3.15. *Za A in B podmnožici topološke grupe G veljajo naslednje trditve:*

(1) $\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{AB}$,
(2) $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$,
(3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ za vsaka dva elementa $x, y \in G$.
(4) Če G ustreza separacijskemu aksiomu T_0 in za vsaka dva elementa $a \in A$ in $b \in B$ velja enakost $ab = ba$, potem velja enakost $ab = ba$ tudi za vsaka dva elementa $a \in \overline{A}$ in $b \in \overline{B}$.

Dokaz. Naj bosta A in B podmnožici topološke grupe G.

Za dokaz 1 vzemimo točki $x \in \overline{A}$ in $y \in \overline{B}$ ter neko okolico U enote e. Dokazali bomo, da je $xy \in \overline{AB}$. Ker je množenje zvezno, obstajata taki okolici V_1 in V_2 enote e, da je $(xV_1)(yV_2) \subset xyU$. Tedaj za okolico enote $V = V_1 \cap V_2$ velja $(xV)(yV) \subset xyU$. Ker je sta množici xV in yV okolici za x in y, po definiciji zaprtja obstajata taka elementa $a \in A$ in $B \in B$, da je $a \in xV$ in $b \in yV$. Zato je $ab \in (AB) \cap (xyU)$ in, ker je množica xyU okolica za xy, po definiciji zaprtja sledi $xy \in \overline{AB}$.

Enakost v 2 bo sledila iz tega, da je invertiranje po trditvi 3.7 homeomorfizem. Vzemimo množico $A \subset G$. Ker je invertiranje homeomorfizem, je $\iota(\overline{A}) = \overline{\iota(A)}$. Torej je $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

Enakost v 3 bo sledila iz tega, da sta leva in desna translacija po trditvi 3.7 homeomorfizma. Naj bosta $x, y \in G$. Tedaj je tudi $f = r_y \circ l_x$ homeomorfizem. Ker je $\overline{A}$ zaprta, je $x\overline{A}y$ najmanjša zaprta množica, ki vsebuje množico xAy. Torej res velja $x\overline{A}y = \overline{xAy}$.

Za dokaz 4 privzemimo še, da G zadošča separacijskemu aksiomu T_0 in da velja $ab = ba$ za vsaka dva elementa $a \in A$ in $b \in B$. Preslikava $f\colon (a,b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$ je zvezna, saj je kompozitum množenj in invertiranj:

$$f(a,b) = \mu(\mu(a,b), \mu(\iota(a), \iota(b))).$$

Ker je po izreku 3.14 množica $\{e\}$ zaprta, je zaprta tudi množica $H = \{(a,b) \in G \times G; aba^{-1}b^{-1} = e\}$, saj je $H = f^{-1}(\{e\})$. Po predpostavki velja $A \times B \subseteq H$. Ker sta množici $\overline{A}$ in $\overline{B}$ zaprti v G, po definiciji produktne topologije velja, da je množica $\overline{A} \times \overline{B}$ zaprta v $G \times G$, zato je $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Sledi, da je $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq H$, torej je $ab = ba$ za vsaka dva elementa $a \in \overline{A}$ in $b \in \overline{B}$. $\square$

Primer 3.16. Nadaljujmo s primerom 3.6. Zgoraj smo pokazali, da strukturna preslikava invertiranja ni zvezna, lahko pa se prepričamo tudi drugače.

Po trditvi 3.14 za vsako topološko grupo velja, da zadošča separacijskemu aksiomu T_0 natanko tedaj, ko je Hausdorffova. Topološki prostor $(\mathbb{R}, +, \tau)$ zadošča separacijskemu aksiomu T_0, saj je za vsaki dve točki $a < b$ množica $(\frac{a+b}{2}, \infty)$ okolica za točko b, ki ne vsebuje točke a. Hkrati pa je očitno, da ta prostor ni Hausdorffov, saj se vsaki dve neprazni odprti množici sekata. Topološki prostor $(\mathbb{R}, +, \tau)$ torej ne more biti topološka grupa. Še več, topološki prostor $(\mathbb{R}, \tau)$ ni topološka grupa za nobeno operacijo, saj informacije o operaciji v zgornjem premisleku sploh nismo uporabili. $\diamondsuit$

Primer 3.17. Naj bo G poljubna neskončna grupa in naj bo topologija τ topologija končnih komplementov, tj. $\tau = \{U \subseteq G; |G \setminus U| < \infty\}$. Iz splošne topologije vemo, da je to najšibkejša topologija na G, da topološki prostor G zadošča separacijskemu aksiomu T_1, ne pa tudi T_2. Od tod po enakem razmisleku kot v primeru 3.16 sledi, da topološki prostor (G, τ) ni topološka grupa za nobeno operacijo. $\diamondsuit$

4. Topološke podgrupe in kvocientne grupe

4.1. Topološke podgrupe.

Trditev 4.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Če H opremimo z relativno topologijo, potem je tudi H topološka grupa.*

Dokaz. Preslikavi $\mu|_{H\times H}$ in $\iota|_H$ sta zvezni glede na relativno topologijo na H kot zožitvi zveznih preslikav na topološki podprostor H, torej je H topološka grupa. $\square$

Trditev 4.2. *Podgrupa H topološke grupe G je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa H topološke grupe G je tudi zaprta.*

Dokaz. Denimo, da obstaja element $x \in \text{int}(H)$. Potem obstaja okolica U enote e, da je $xU \subset H$. Dokazali bomo, da velja $H \subseteq \text{int}(H)$. Ker za poljuben $y \in H$ velja

$$yU = yx^{-1}xU \subset yx^{-1}H = H,$$

je $y \in \text{int}(H)$. Torej je vsaka točka v podgrupi H notranja točka, kar pomeni, da je H odprta množica.

Obratno, če je H odprta, vsaka njena točka leži tudi v njeni notranjosti. Torej ima H neprazno notranjost.

Privzemimo, da je H odprta podgrupa grupe G. Ker je H podgrupa, je $G \setminus H = \bigcup\{xH; x \notin H\}$. Ker je H odprta in je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je tudi vsaka množica xH odprta. Potem je tudi $G \setminus H$ odprta kot unija odprtih množic, torej je H zaprta množica. □

Trditev 4.3. *Naj bo U simetrična okolica enote e v topološki grupi G. Potem je $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G.*

Dokaz. Ker za $x \in U^k$ in $y \in U^l$ velja $xy \in U^kU^l \subseteq U^{k+l}$, je L zaprta za množenje. Ker je U simetrična, velja tudi $x^{-1} \in (U^{-1})^k = U^k$, torej je L zaprta za invertiranje. Sledi, da je L podgrupa topološke grupe G. V njeni notranjosti je zagotovo vsaj enota e, saj je U okolica za e. Po trditvi 4.2 je L odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G. □

4.2. **Kvocienti topoloških grup.**

Izrek 4.4. *Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in $\varphi\colon G \to G/H$ naravna preslikava. Definiramo $\theta(G/H) = \{U; \varphi^{-1}(U)$ odprta v $G\}$. Veljajo naslednje trditve:*

(1) družina $\theta(G/H)$ je topologija na kvocientni množici G/H,
(2) družina $\theta(G/H)$ je najmočnejša topologija na kvocientni množici G/H, glede na katero je φ zvezna preslikava,
(3) $\varphi : G \to G/H$ je odprta preslikava.

Dokaz. Naj bo $\theta(G/H) = \{uH; u \in U\}_{U\in\tau}$ družina odprtih množic v G/H, kjer so U odprte množice v G. Potem je njihova unija $\bigcup_{U\in\tau}\{uH; u \in U\} = \{uH; u \in \bigcup_{U\in\tau} U\}$ prav tako odprta v G/H, saj je $\bigcup_{U\in\tau} U$ odprta v G. Presek dveh takih množic $\{uH; u \in U\} \cap \{uH; u \in V\} = \{uH; u \in U \cap V\}$ je tudi odprt, saj je presek $U \cap V$ odprt v G. Velja tudi $\emptyset \in \theta(G/H)$, če vzamemo $U = \emptyset$, ki je odprta v G. Če vzamemo $U = G$, dobimo tudi $G/H \in \theta(G/H)$. Preverili smo, da je $\theta(G/H)$ res topologija na kvocientni množici G/H.

Preslikava φ je zvezna po definiciji topologije $\theta(G/H)$ in topologija $\theta(G/H)$ je res najmočnejpa topologija na kvocientu G/H, glede na katero je φ zvezna, po konstrukciji $\theta(G/H)$.

Za dokaz odprtosti naravne preslikave vzemimo odprto množico $U \in G$. Po trditvi 3.8 je množica UH odprta v G, torej je $\varphi(U) = \{uH; u \in U\}$ odprta v G/H. □

Topologiji $\theta(G/H)$ pravimo *kvocientna topologija*, topološkemu prostoru G/H pa *kvocientni prostor*. Od tukaj naprej bo kvocientni topološki prostor vedno opremljen s kvocientno topologijo.

Trditev 4.5. *Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in U, V taki okolici enote e v G, da velja $V^{-1}V \subset U$. Naj bo $\varphi : G \to G/H$ naravna preslikava. Potem velja $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$.*

Dokaz. Vzemimo odsek $xH \in \overline{\varphi(V)}$. Ker je V okolica enote, je množica $\{vxH; v \in V\}$ okolica odseka xH in ima zato s $\varphi(V)$ neprazen presek. Po definiciji naravne preslikave obstajata točki $v_1, v_2 \in V$, da je $v_1 xH = v_2 H$. Velja

$$xH = v_1^{-1} v_2 H \in \{wH; w \in V^{-1}V\} \subset \{uH; u \in U\} = \varphi(U).$$

Torej je res $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$. □

Posledica 4.6. *Za vsako okolico U enote e topološke grupe G obstaja taka okolica V enote e, da velja $\overline{V} \subset U$.*

Dokaz. Naj bo U poljubna okolica enote e in naj bo $\mathcal{V}$ baza simetričnih okolic enote e iz trditve 3.13. Vzemimo tako okolico $V \in \mathcal{V}$, da velja $V^2 \subset U$. Takšna okolica obstaja po trditvi 3.10. Velja $V^2 = V^{-1}V \subset U$. Naj bo podgrupa $H = \{e\}$. Po trditvi 4.5 je $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$. Ker je H trivialna podgrupa, je kvocientna množica $G/H = G$ in naravna preslikava je identična preslikava na topološki grupi G. Torej velja $\overline{V} \subset U$. □

S pomočjo zgornje posledice lahko pokažemo, da sta separacijski aksiom T_0 in regularnost za topološke grupe ekvivalentna pojma. Kasneje bomo pokazali, da sledi iz separacijskega aksioma T_0 sledi še več - povsem regularnost.

Izrek 4.7. *Vsaka topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je regularen topološki prostor.*

Dokaz. Po trditvi 3.14 je G Hausdorffova in zato zadošča separacijskemu aksiomu T_1.

Vzemimo poljuben element $a \in G$ in njegovo okolico U. Množica $a^{-1}U$ je potem okolica enote e, saj je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem. Po posledici 4.6 obstaja takšna okolica V enote e, da je $\overline{V} \subset a^{-1}U$. Ker je leva translacija homeomorfizem, je množica aV okolica elementa a, za katero velja $aV \subset \overline{aV} \subset U$. Topološka grupa G zadošča separacijskemu aksiomu T_3 in je zato regularna. □

Izrek 4.8. *Za topološko grupo G in njeno podgrupo H veljajo naslednje trditve:*

(1) kvocientni prostor G/H je diskreten natanko tedaj, ko je H odprta v G,
(2) če je H zaprta v G, potem je kvocient G/H regularen topološki prostor,
(3) če kvocientni prostor G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0, potem je H zaprta v G in velja, da je kvocient G/H regularen topološki prostor.

Dokaz. Za dokaz 1 privzemimo, da je H odprta v G. Ker je leva translacija po trditvi 3.7 homeomorfizem, je množica aH odprta množica za vsak element $a \in G$ in zato tudi $\varphi^{-1}(aH) = \{aH\}$ za vsak element $aH \in G/H$. Ker je po izreku 4.4 preslikava φ odprta, je vsaka enoelementna množica $\{aH\} = \varphi(aH)$ odprta v G/H, torej je G/H diskreten topološki prostor.

Obratno, če je G/H diskreten topološki prostor, potem so vse njegove enoelementne podmnožice odprte. V posebnem primeru je tudi $\{H\}$ odprta v G/H. Ker je naravna preslikava zvezna, je $H = \varphi^{-1}(\{H\})$ odprta množica v G.

Za dokaz 2 privzemimo, da je H zaprta v G. Ker je leva translacija po trditvi 3.7 homeomorfizem, je zaprta tudi množica aH za vsak element $a \in G$. Po definiciji zaprtosti je $G \setminus aH = \bigcup\{xH; xH \neq aH\}$ odprta v G. Ker je po izreku 4.4 naravna preslikava odprta, je zato komplement vsake točke $\{aH\}$ odprt v G/H. Po definiciji zaprtosti je vsaka točka $\{aH\}$ zaprta v G/H, kar je ekvivalentno separacijskemu aksiomu T_1. Naj bosta U in V okolici enote e iz trditve 4.5. Če za V vzamemo simetrično okolico (to lahko naredimo po trditvi 3.13), potem po trditvi 3.10 tak V obstaja za vsako okolico U, saj lahko vzamemo $V^{-1}V = V^2 \subset \overline{U}$. Torej za vsako okolico $\varphi(U)$ enote H obstaja takšna okolica $\varphi(V)$ enote H, da $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$. Ker je leva translacija homeomorfizem, to velja za vsako točko $aH \in G/H$, kar pa je ekvivalentno separacijskemu aksiomu T_3. Kvocientni prostor G/H je res regularen.

Za dokaz 3 privzemimo, da G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Po izreku 3.14 je G/H Hausdorffova. Vse enoelementne množice v G/H so zaprte, zato tudi $\{H\}$. Po definiciji kvocientne topologije je $\{H\}$ zaprta v G/H natanko tedaj, ko je $\varphi^{-1}(\{H\}) = H$ zaprta v G. Po točki 2 je G/H regularen topološki prostor. □

Izrek 4.9. *Naj bo H podgrupa edinka topološke grupe G in naj bo G/H kvocientni topološki prostor. Veljajo naslednje trditve:*

(1) kvocient G/H je topološka grupa s topologijo θ,
(2) naravni homomorfizem je odprta in zvezna preslikava,
(3) kvocient G/H je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa H odprta v G,
(4) kvocient G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0 natanko tedaj, ko je podgrupa H zaprta v G.

Dokaz. Za dokaz 1 bomo uporabili izrek 3.11. Preverili bomo, da za družino vseh okolic enote H v grupi G/H s kvocientno topologijo veljajo lastnosti 1-4 trditve 3.10 in zadostili pogojem izreka.

Naj bo $\{uH; u \in U\}$ poljubna okolica enote H v grupi G/H, kjer je U okolica enote e v topološki grupi G. Po lastnosti 1 trditve 3.10 obstaja taka okolica V enote e, da velja $V^2 \subset U$. Po definiciji kvocientne topologije je množica $\{vH; v \in V\}$ odprta v G/H in velja $\{vH; v \in V\}^2 = \{yH; y \in V^2\} \subset \{uH; u \in U\}$. Torej za grupo G/H s kvocientno topologijo drži lastnost 1 trditve 3.10. Naprej, po lastnosti 2 trditve 3.10 obstaja taka okolica V enote e, da velja $V^{-1} \subset U$. Po definiciji kvocientne topologije je množica $\{vH; v \in V^{-1}\}$ odprta in velja $\{vH; v \in V\}^{-1} = \{yH; y \in V^{-1}\} \subset \{uH; u \in U\}$. Torej za grupo G/H s kvocientno topologijo drži lastnost 2 trditve 3.10.

Za dokaz lastnosti 3 vzemimo še poljuben element $u_0H \in \{uH; u \in U\}$. Po lastnosti 3 trditve 3.10 obstaja taka okolica V enote e, da velja $u_0V \subset U$. Potem je $\{vH; v \in V\}$ okolica enote H v G/H in velja $u_0H \cdot \{vH; v \in V\} = \{u_0vH; v \in V\} \subset uH; u \in U\}$. Torej za grupo G/H s kvocientno topologijo drži lastnost 3 trditve 3.10. Po lastnosti 4 trditve 3.10 obstaja taka okolica V enote e, da velja $u_0Vu_0^{-1} \subset U$. Potem je $\{vH; v \in V\}$ okolica enote H v G/H in velja $u_0H \cdot \{vH; v \in V\}(u_0H)^{-1} = \{u_0vu_0^{-1}H; v \in V\} \subset uH; u \in U\}$. Torej za grupo G/H s kvocientno topologijo drži lastnost 4 trditve 3.10.

Družina vseh okolic enote H v G/H torej zadošča lastnostim 1-4 trditve 3.10. Očitno so vsi končni preseki teh okolic neprazni, saj vse okolice vsebujejo enoto H. Ker je presek odprtih množic po definiciji topologije odprt in po prejšnji lastnosti neprazen, obstaja za vsaki dve okolici $\{uH; u \in U\}$ in $\{vH; v \in V\}$ enote H neka okolica $W \subset U \cap V$ enote H. Po izreku 3.11 je grupa G/H res topološka grupa s kvocientno topologijo.

Trditev 2 sledi direktno iz izreka 4.4. Trditev 3 sledi direktno iz točke 1 izreka 4.8, trditev 4 pa iz točk 2 in 3 izreka 4.8. □

Trditev 5.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Naj bo za vsak element $a \in G$ na kvocientu G/H definirana preslikava ψ_a s predpisom $\psi_a(xH) = (ax)H$. Za vsak element $a \in G$ je ψ_a homeomorfizem na prostoru G/H.*

Dokaz. Preslikava ψ_a je očitno bijektivna za vsak $a \in G$, saj je preslikava $\psi_{a^{-1}}$ njen inverz. Pokazali bomo, da je za vsak $a \in G$ preslikava ψ_a odprta. Od tod bo sledilo, da je preslikava $\psi_{a^{-1}}$ zvezna. Ker je tudi $\psi_{a^{-1}}$ odprta preslikava, je tudi ψ_a zvezna preslikava. Torej je ψ_a homeomorfizem.

Vzemimo odprto podmnožico $\{uH; u \in U\}$ prostora G/H, kjer je $U \subset G$ odprta množica. Potem velja, da je

$$\psi_a(\{uH; u \in U\}) = \{auH; u \in U\} = \{vH; v \in aU\}$$

odprta množica, saj je množica aU odprta v G, ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem. Preslikava ψ_a je torej odprta. □

Trditev 5.2. *Naj bo H podgrupa (lokalno) kompaktne topološke grupe G. Potem je tudi kvocientni prostor G/H (lokalno) kompakten.*

Dokaz. Če je G kompaktna topološka grupa, je tudi G/H kompakten prostor, saj je prostor G/H slika množice G z naravno preslikavo, ki je po izreku 4.4 zvezna.

Naj bo topološka grupa G lokalno kompaktna in naj bo množica K kompaktna okolica poljubnega elementa $a \in G$. Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je množica $a^{-1}K$ kompaktna okolica enote e. Ker je po izreku 4.4 naravna preslikava zvezna, je množica $\varphi(a^{-1}K)$ kompaktna okolica enote H v prostoru G/H. Po trditvi 5.1 je potem $\psi_a(\varphi(a^{-1}K))$ kompaktna okolica elementa aH. Kvocientni prostor G/H je torej lokalno kompakten. □

Opomba 5.3. *Števno kompakten* prostor je tak topološki prostor, pri katerem za vsako števno odprto pokritje obstaja končno podpokritje, v *lokalno števno kompaktnem* topološkem prostoru pa ima vsaka točka števno kompaktno okolico.

Trditev 5.4. *Lokalno števno kompakten, regularen topološki prostor X ni unija števno zaprtih množic s prazno notranjostjo.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s protislovjem. Naj bo topološki prostor X enak uniji zaprtih množic s prazno notranjostjo, torej $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kjer je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica A_n zaprta in velja $\operatorname{int} A = \emptyset$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo $D_n = X \setminus A_n$. Očitno je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica D_n odprta. Ker ima za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica A_n prazno notranjost, torej ne vsebuje nobene neprazne odprte množice, vsaka odprta množica v topološkem prostoru X seka množico D_n. Množica D_n je torej gosta v prostoru X. Pokazali bomo, da velja $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$, kar pomeni, da obstaja nek element prostora X, ki ni v nobeni množici A_n, torej topološki prostor X ne more biti unija množic A_n.

Vzemimo poljuben element $x_0 \in X$. Naj bo množica K njegova števno kompaktna okolica. Ker je prostor X regularen, obstaja takšna odprta okolica U_0 elementa x_0, da je $U_0 \subset \overline{U_0} \subset K$. Tudi množica $\overline{U_0}$ je števno kompaktna. Ker je množica D_1 gosta v regularnem topološkem prostoru X, ima z vsako odprto množico neprazen presek, torej obstaja takšna neprazna odprta množica U_1, da je $U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_0 \cap D_1$. Induktivno za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo množico U_n na naslednji način. Če smo že definirali množice U_i za $i = 1, \ldots, n-1$, naj bo množica U_n takšna neprazna odprta množica, da velja $U_n \subset \overline{U_n} \subset U_{n-1} \cap D_n$. Tako kot pri definiciji množice U_1

upoštevamo, da je množica D_n gosta za vsak $n \in \mathbb{N}$ in da je topološki prostor X regularen. Ker je množica $\overline{U_0}$ števno kompaktna in je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica $\overline{U_n}$ neprazna, je tudi presek $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_n}$ neprazen. Elementi tega preseka morajo po zgornji konstrukciji ležati v preseku $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$, torej res velja $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$. □

Trditev 5.5. *Naj bo G lokalno kompaktna, σ-kompaktna topološka grupa in naj bo $f\colon G \to \widetilde{G}$ zvezen in surjektiven homomorfizem v lokalno števno kompaktno topološko grupo $\widetilde{G}$, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Tedaj je f odprta preslikava.*

Dokaz. Pišimo $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kjer je A_n kompaktna množica za vsak $n \in \mathbb{N}$. Naj bo $\mathcal{U}$ družina vseh simetričnih okolic enote e topološke grupe G in naj bo $\widetilde{\mathcal{U}}$ družina vseh okolic enote $\tilde{e}$ topološke grupe $\widetilde{G}$. Dokazali bomo, da za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja okolica $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja $\widetilde{\mathcal{U}} \subset f(U)$. Potem lahko vzamemo poljubno odprto podmnožico $B \subset G$. Za vsak $x \in B$ obstaja taka okolica $U \in \mathcal{U}$, da je xU okolica elementa x in velja $xU \subset B$. Ker obstaja $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja $\widetilde{\mathcal{U}} \subset f(U)$, imamo

$$f(x) \in f(x)\widetilde{U} \subset f(x)f(U) = f(xU) \subset f(B),$$

torej je množica $f(B)$ okolica za vsako svojo točko in po definiciji odprta v topološki grupi $\widetilde{G}$. Ker je množica B poljubna, je f odprta preslikava.

Dokažimo torej, da za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja okolica $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja $\widetilde{\mathcal{U}} \subset f(U)$. Vzemimo poljubno okolico $U \in \mathcal{U}$. Po trditvi 3.10 obstaja takšna množica $V_1 \in \mathcal{U}$, da velja $V_1^2 \subset U$. Po posledici 4.6 obstaja takšna množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $\overline{V} \subset V_1$. Upoštevamo še trditev 3.15 in dobimo

$$U \supset V_1^2 \supset \overline{VV} = \overline{V^{-1}V} = \overline{V}^{-1}\overline{V}.$$

Ker je topološka grupa G lokalno kompaktna, lahko vzamemo tako množico V, da je množica $\overline{V}$ kompaktna. Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je družina množic $\{xV; x \in G\}$ odprto pokritje topološke grupe G in zato tudi množice A_n za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je množica A_n za vsak $n \in \mathbb{N}$ kompaktna, jo pokrije le končno množic oblike xV, kjer je $x \in G$. Množic A_n je števno, torej topološko grupo G pokrije števno množic oblike xV, kjer je $x \in G$. Naj bo to števno pokritje družina $\{x_n V\}_{n=1}^{\infty}$. Potem velja $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n V = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \overline{V}$. Ker je preslikava f surjektivna, velja tudi $\widetilde{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n\overline{V}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n)f(\overline{V})$.

Pokažimo, da ima množica $f(\overline{V})$ neprazno notranjost. Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica $x_n V$ kompaktna v topološki grupi G. Ker je preslikava f zvezna, je množica $f(x_n)f(\overline{V})$ kompaktna v topološki grupi $\widetilde{G}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Topološka grupa $\widetilde{G}$ zadošča separacijskemu aksiomu T_0, zato je po trditvi 3.14 Hausdorffova, torej so vse kompaktne množice $f(x_n)f(\overline{V})$ zaprte v $\widetilde{G}$. Če predpostavimo, da ima množica $f(\overline{V})$ prazno notranjost, imajo tudi množice $f(x_n)f(\overline{V})$ prazno notranjost za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj je leva translacija po trditvi 3.7 homeomorfizem. Potem je topološka grupa $\widetilde{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n)f(\overline{V})$ unija števno zaprtih množic s prazno notranjostjo. Po drugi strani je topološka grupa $\widetilde{G}$ lokalno števno kompakten topološki prostor, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 in je zato po izreku 4.7 regularen. Po trditvi 5.4 je to nemogoče, zato ima množica $f(\overline{V})$ neprazno notranjost, torej vsebuje neko neprazno odprto množico $\widetilde{V} \subset G$.

Izberimo poljubni točki $\tilde{x} \in \widetilde{V}$ in $x \in f^{-1}(\tilde{x}) \cap \overline{V}$. Po konstrukciji množice V potem velja $x^{-1}\overline{V} \subset U$. Ker je f zvezna preslikava, dobimo

$$f(U) \supset f(x^{-1}\overline{B}) = f(x)^{-1}f(\overline{V}) \supset \tilde{x}^{-1}\widetilde{V}.$$

Množica $\tilde{x}^{-1}\widetilde{V}$ je okolica enote $\tilde{e}$ in je zato vsebovana v družini $\widetilde{\mathcal{U}}$. S tem smo dokazali zgornjo izjavo in s tem izrek. $\square$

5.1. **Prvi izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.6 (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bosta G in $\widetilde{G}$ topološki grupi. Naj bo $f\colon G \to \widetilde{G}$ odprt, zvezen in surjektiven homomorfizem. Potem je* $\ker f$ *podgrupa edinka v grupi G in množice $f^{-1}(\tilde{x})$, kjer je $\tilde{x} \in \widetilde{G}$, so disjunktni odseki* $\ker f$ *v grupi G. Preslikava $\Phi\colon \widetilde{G} \to G/\ker f$ s predpisom $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$ je topološki izomorfizem.*

Dokaz. Upoštevajoč izrek (prvi izrek o izomorfizmih) moramo pokazati le, da je preslikava Φ homeomorfizem. Vzemimo odprto podmnožico $\widetilde{U} \subset \widetilde{G}$. Množica $\Phi(\widetilde{U}) = \{f^{-1}(\tilde{x}); \tilde{x} \in \widetilde{U}\}$ je potem odprta v G/H, saj je množica $\cup\{f^{-1}(\tilde{x}); \tilde{x} \in \widetilde{U}\} = f^{-1}(\widetilde{U})$ odprta v G, ker je preslikava f zvezna. Torej je preslikava Φ odprta, od koder sledi, da je Φ^{-1} zvezna preslikava.

Vzemimo $\{uH; u \in U\}$ odprto množico v G/H, kjer je množica $U \subset G$ odprta. Potem velja

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(\{uH; u \in U\}) &= \{\tilde{x} \in \widetilde{G}; f^{-1}(\tilde{x}) = uH \text{ za nek element } u \in U\}\\ &= \{f(u); u \in U\} = f(U).\end{aligned}$$

Ker je preslikava f po predpostavki odprta, je $f(U)$ odprta množica v $\widetilde{G}$. Torej je preslikava Φ^{-1} odprta, od koder sledi, da je Φ zvezna preslikava. Sledi, da je Φ homeomorfizem. $\square$

5.2. **Drugi izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.7 (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bo G topološka grupa, A njena podgrupa in H podgrupa edinka grupe G. Naj bo $\tau\colon (AH)/H \to A/(A \cap H)$ izomorfizem s predpisom $\tau(aH) = a(A \cap H)$, kjer je $a \in A$.*

(1) Preslikava τ slika odprte množice iz $(AH)/H$ v odprte množice iz $A/(A\cap H)$.

(2) Če je A še lokalno kompaktna in σ-kompaktna, H zaprta v G in AH lokalno kompaktna, potem je τ homeomorfizem ter topološki grupi $(AH)/H$ in $A/(A \cap H)$ sta topološko izomorfni.

Dokaz. Najprej dokažimo 1. Odprta množica v prostoru $(AH)/H$ je množica $\{xH; x \in X\}$, kjer je $X \subset A$ taka množica, da je XH odprta v podprostoru AH topološke grupe G. Ker je $\tau(\{xH; x \in X\}) = \{x(A \cap H); x \in X\}$ in velja $X(A \cap H) = (XH) \cap A$, sledi, da je množica $X(A \cap H)$ odprta v podprostoru A topološke grupe G. Zato je po definiciji kvocientne topologije je množica $\{x(A \cap H); x \in X\}$ odprta v prostoru $A/(A \cap H)$.

Za dokaz 2 moreamo upoštevajoč izrek (drugi izrek o izomorfizmih) in točko 1 tega izreka dokazati le, da je tudi preslikava τ^{-1} odprta. Oglejmo si naravno preslikavo $\varphi\colon G \to G/H$. Za njeno zožitev na podgrupo A velja, da preslika podgrupo A surjektivno v podgrupo $(AH)/H$ topološke grupe G/H. Ker je po predpostavki množica AH lokalno kompaktna in podgrupa edinka H zaprta v G, je po trditvi 5.2 $(AH)/H$ lokalno kompaktna in po izreku 4.8 zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Preslikava $\varphi|_A$ je torej surjektiven in odprt homomorfizem iz lokalno kompaktne, σ-kompaktne grupe A v lokalno kompaktno grupo $(AH)/H$, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Po trditvi 5.5 je $\varphi|_A$ odprta preslikava.

Vzemimo odprto podmnožico $\{y(A \cap H); y \in Y\} \subset A/(A \cap H)$, kjer je $Y \subset A$, tj. množica $Y(A \cap H)$ je odprta v A. Velja $\varphi(Y(A \cap H)) = \{yH; y \in Y\} \subset (AH)/H$. Ker je $\varphi|_A$ odprta preslikava, je množica $\{yH; y \in Y\}$ odprta v $(AH)/H$. Po definiciji preslikave τ velja $\{yH; y \in Y\} = \tau^{-1}(\{y(A \cap H); y \in Y\})$. Od tod sledi, da je preslikava τ^{-1} odprta. □

5.3. **Tretji izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.8. *Naj bo $f\colon G \to \widetilde{G}$ odprt, zvezen homomorfizem topoloških grup in naj bo $\widetilde{H}$ podgrupa edinka v $\widetilde{G}$. Potem so grupe $(G/\ker f)/(f^{-1}(\widetilde{H})/\ker f)$, $G/f^{-1}(\widetilde{H})$ in $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ topološko izomorfne.*

Dokaz. Naj bo $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{G} \to \widetilde{G}/\widetilde{H}$ naravna preslikava. Po izreku 4.9 je $\tilde{\varphi}$ odprt in zvezen homomorfizem. Ker je preslikava f odprt in zvezen homomorfizem, je zato preslikava $\tilde{\varphi} \circ f\colon G \to \widetilde{G}/\widetilde{H}$ odprt in zvezen homomorfizem z jedrom $H = f^{-1}(\widetilde{H})$. Po izreku 5.6 sta topološki grupi G/H in $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ topološko izomorfni. Naj bo $N = \ker f$. Ker je po izreku 5.6 preslikava $f^{-1}\colon \widetilde{G} \to G/N$, $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$, topološki izomorfizem in je slika podgrupe $\widetilde{H}$ so to preslikavo enaka H/N, je topološka grupa $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ topološko izomorfna $(G/N)/(H/N)$. □

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraični različici in ne vsebuje pomožne topološke grupe $\widetilde{G}$.

Izrek 5.9 (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bo G topološka grupa in $N \subseteq H$ njeni podgrupi edinki. Potem sta kvocientni topološki grupi G/H in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfni.*

6. Izreki tipa "2 od 3"

7. Metrizabilnost in povsem regularnost

7.1. **Uniformni prostori.**

Definicija 7.1. Naj bo X neprazna množica.

(1) Neprazna poddružina $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ je *filter* množice X, če ima naslednje lastnosti:
   (a) družina $\mathcal{F}$ ne vsebuje prazne množice,
   (b) za vsako množico $F \in \mathcal{F}$ je vsaka množica $E \in X$, za katero velja $F \subseteq E$, tudi v družini $\mathcal{F}$,
   (c) presek $E \cap F$ množic $E, F \in \mathcal{F}$ je tudi v družini $\mathcal{F}$.
(2) Filter $\mathcal{U}$ na množici $X \times X$ definira *uniformno strukturo* na množici X, če ima naslednje lastnosti:
   (a) vsaka množica $U \in \mathcal{U}$ vsebuje diagonalo $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$,
   (b) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ je tudi množica $U^{-1} \in \mathcal{U}$,
   (c) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V \circ V \subseteq U$.

   Množici z uniformno stukturo rečemo *uniformni prostor*.

Opomba 7.2. V zgornji definiciji so operacije na množicah mišljene v smislu relacij.

Definicija 7.3. Naj bo X uniformni prostor z uniformno strukturo $\mathcal{U}$. Topologija, inducirana z $\mathcal{U}$ je taka družina τ množic $T \subseteq X$, za katere za vsako točko $x \in T$ obstaja $U \in \mathcal{U}$, da velja $U_x = \{y \in X; (x, y) \in U\} \subseteq T$.

Opomba 7.4. V nadaljevanju bomo okolico nekega elementa x v topologiji, inducirani z uniformno strukturo $\mathcal{U}$, označevali kot U_x, kjer bo $U \in \mathcal{U}$.

Definicija 7.5. Naj bosta X in Y uniformna prostora z uniformnima strukturama $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$. Preslikava $f : X \to Y$ je *enakomerno zvezna*, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja taka množica $U \in \mathcal{U}$, da za vsak par $(x, y) \in U$ velja $(f(x), f(y)) \in V$.

Trditev 7.6. *Vsaka enakomerno zvezna preslikava uniformnih prostorov je zvezna v topologiji, inducirani z uniformnima strukturama.*

Dokaz. Naj bo $f: (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ enakomerno zvezna preslikava med uniformnima prostoroma. Vzemimo okolico $V_{f(x)}$ elementa $f(x)$ v topologiji na Y inducirani z $\mathcal{V}$. Ker je f enakomerno zvezna, obstaja tak $U \in \mathcal{U}$, da za vsak par $(x, y) \in U$ velja $(f(x), f(y)) \in V$. Po definiciji inducirane topologije za vsak $y \in U_x$ torej velja $f(y) \in V_{f(x)}$, kar pomeni, da je f zvezna preslikava glede na topologiji, ki ju inducirata uniformni strukturi. □

Definicija 7.7. Naj bo $\mathcal{U}$ baza odprtih okolic enote e topološke grupe G. Za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ definiramo

$$L_U = \{(x, y) \in G \times G; x^{-1}y \in U\}$$

in analogno

$$R_U = \{(x, y) \in G \times G; yx^{-1} \in U\}.$$

Družinama $\mathcal{L}(G) = \{L_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ in $\mathcal{R}(G) = \{R_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ pravimo leva in desna uniformna struktura na G.

Trditev 7.8. *Vsaka topološka grupa je uniformni prostor.*

Dokaz. Naj bo filter $\mathcal{U}$ baza odprtih in simetričnih okolic enote e topološke grupe G. Oglejmo si levo in desno uniformno strukturo na G, ki sta definirani z $\mathcal{U}$. Pokazali bomo, da ustrezata definiciji uniformne strukture na množici G.

Ker je enote e v vsaki okolici $U \in \mathcal{U}$, je diagonala $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$ vsebovana v L_U in R_U za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$.

Velja

$$L_{U^{-1}} = \{(x, y) \in G \times G; x^{-1}y \in U^{-1}\} = \{(x, y) \in G \times G; y^{-1}x \in U\} = L_U^{-1}$$

in

$$R_{U^{-1}} = \{(x, y) \in G \times G; yx^{-1} \in U^{-1}\} = \{(x, y) \in G \times G; xy^{-1} \in U\} = R_U^{-1}.$$

Ker za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ velja $U = U^{-1}$, je $L_U^{-1} \in \mathcal{L}(G)$ in $R_U^{-1} \in \mathcal{R}(G)$.

Po trditvi 3.10 za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$. Velja torej, da je $L_V \circ L_V \subset L_U$ in $R_V \circ R_V \subset R_U$.

Topološka grupa je z levo ali desno uniformno strukturo torej res uniformni prostor. □

7.2. **Metrizabilnost.**

Definicija 7.9. *Psevdometrika* na neprazni množici X je preslikava $\rho: X \times X \to [0, \infty)$, ki zadošča naslednjim pogojem:

(1) za vsako točko $x \in X$ velja $\rho(x, x) = 0$;
(2) za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
(3) za vsake tri točke $x, y, z \in X$ velja $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Če za preslikavo ρ velja še

(4) $\rho(x,y)=0$ natanko tedaj, ko $x=y$,
potem ji rečemo *metrika.*

Definicija 7.10. Topološki prostor X je *metrizabilen*, če njegova topologija τ izhaja iz kakšne metrike d na množici X.

Opomba 7.11. Baza topologije metrizabilnega topološkega prostora X je družina odprtih krogel $\{K(x,\epsilon); x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}\}$.

Definicija 7.12. Psevdometrika na grupi G je levoinvariantna, če za vsaki dve točki $x,y \in G$ in za vsak element $a \in G$ velja $\rho(ax,ay)=\rho(x,y)$.

Opomba 7.13. V dokazu spodnjega izreka bomo potrebovali pojem *diadičnega* racionalnega števila, tj. racionalno število z imenovalcem je v okrajšani obliki enakim 2^n, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Vsota in produkt dveh diadičnih števil je prav tako diadično število. Opazimo tudi, da lahko s končno vsoto števil oblike 2^{-n}, kjer je $n \in \mathbb{N}$, dobimo vsako diadično število med 0 in 1.

Izrek 7.14. *Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje simetričnih okolic enote e v topološki grupi G, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$. Potem obstaja taka levoinvariantna psevdometrika σ na G z naslednjimi lastnostmi:*

(1) σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od $G \times G$;
(2) $\sigma(x,y)=0$ natanko tedaj, ko $y^{-1}x \in H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$;
(3) $\sigma(x,y) \leq 2^{-k+2}$, če $y^{-1}x \in U_k$;
(4) $2^{-k} \leq \sigma(x,y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če velja še $xU_kx^{-1}=U_k$ za vsak $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, potem je σ tudi desnoinvariantna in velja

(5) $\sigma(x^{-1},y^{-1})=\sigma(x,y)$ za vsaka dva elementa $x,y \in G$.

Dokaz. Najprej preimenujmo družino okolic $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$. Naj bo za vsak $k \in \mathbb{N}$ okolica $V_{2^{-k}}=U_k$. Za vsako diadično racionalno število $r \in (0,1)$ definiramo množico V_r na naslednji način. Za

$$r = 2^{-l_1}+\cdots+2^{-l_n}, 0<l_1<\cdots<l_n$$

naj bo množica

$$V_r = V_{2^{-l_1}}\cdots V_{2^{-l_n}}.$$

Za vsa diadična racionalna števila $r \geq 1$ definiramo množico $V_r=G$.

Pokažimo najprej, da iz $r<s$ sledi $V_r \subset V_s$. Privzamemo lahko, da je $s<1$, v nasprotnem primeru je implikacija očitna, saj je $V_s=G$. Naj bo število r definirano tako kot zgoraj in naj bo

$$s = 2^{-m_1}+\cdots+2^{-m_p}, 0<m_1<\cdots<m_p.$$

Ker je $r<s$, obstaja enolično določeno število $k \in \mathbb{N}$, da je $l_j=m_j$ za vsak $j<k$ in $l_k>m_k$. Naj bo $W=V_{2^{-l_1}}\cdots V_{2^{-l_{k-1}}}$. Potem, upoštevajoč $U_{k+1}^2 \subset U_k$, velja

$$\begin{aligned}
V_r &= WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_{k+1}}}V_{2^{-l_{k+2}}}\cdots V_{2^{-l_n}}\\
&\subset WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_k-1}}V_{2^{-l_k-2}}\cdots V_{2^{-l_n+1}}V_{2^{-l_n}}V_{2^{-l_n}}\\
&\subset WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_k-1}}V_{2^{-l_k-2}}\cdots V_{2^{-l_n+1}}V_{2^{-l_n+1}} \subset \cdots\\
&\subset WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_k}} \subset WV_{2^{-l_k+1}} \subset WV_{2^{-m_k}}\\
&= V_{2^{-l_1}}V_{2^{-l_2}}\cdots V_{2^{-l_{k-1}}}V_{2^{-m_k}}\\
&\subset V_{2^{-m_1}}V_{2^{-m_2}}\cdots V_{2^{-m_{k-1}}}V_{2^{-m_k}}V_{2^{-m_{k+1}}}\cdots V_{2^{-m_p}} = V_s
\end{aligned}$$

Nato pokažimo, da za vsak zgoraj definirani r in vsak $l \in \mathbb{N}$ velja $V_r V_{2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}$. Privzemimo, da je $r + 2^{-l+2} < 1$, saj je v nasprotnem primeru inkluzija očitna, ker je $V_{r+2^{-l+2}} = G$. Če je $l > l_n$, je po konstrukciji množic $V_r V_{2^{-l}} = V_{r+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}$. Če je $l \leq l_n$, naj bo $k \in \mathbb{N}$ tako število, da je $l_{k-1} < l \leq l_k$, kjer označimo $l_0 = 0$. Definiramo $r_1 = 2^{-l+1} - 2^{-l_k} - 2^{-l_{k+1}} - \cdots - 2^{-l_n}$ in $r_2 = r + r_1$. Opazimo, da velja $r < r_2 < r + 2^{-l+1}$. Od tod sledi

$$V_r V_{2^l} \subset V_{r_2} V_{2^{-l}} = V_{r_2 + 2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+1}+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}.$$

Na topološki grupi G bomo konstruirali psevdometriko. Za vsak $x \in G$ naj bo $\varphi(x) = \inf\{r; x \in V_r\}$. Očitno je $\varphi(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $x \in H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{2^{-k}}$. Na prostoru $G \times G$ definiramo preslikavo

$$\sigma(x, y) = \sup\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)|; z \in G\}.$$

Zaradi simetričnosti absolutne vrednosti je $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ za vsaka elementa $x, y \in G$ in očitno je $\sigma(x, x) = 0$. Trikotniška neenakost velja, saj za poljubne $x, y, w \in G$ velja

$$\begin{aligned}
\sigma(x, w) &= \sup\{|\varphi(zx) - \varphi(zw)|; z \in G\} \\
&= \sup\{|\varphi(zx) - \varphi(zy) + \varphi(zy) - \varphi(zw)|; z \in G\} \\
&\leq \sup\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)| + |\varphi(zy) - \varphi(zw)|; z \in G\} \\
&\leq \sup\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)|; z \in G\} + \sup\{|\varphi(zy) - \varphi(zw)|; z \in G\} \\
&= \sigma(x, y) + \sigma(y, w).
\end{aligned}$$

Ker velja še

$$\begin{aligned}
\sigma(ax, ay) &= \sup\{|\varphi(azx) - \varphi(azy)|; z \in G\} \\
&= \sup\{|\varphi(azx) - \varphi(azy)|; az \in G\} = \sigma(x, y),
\end{aligned}$$

je preslikava $\sigma\colon G \times G \to [0, \infty)$ res levoinvariantna psevdometrika na topološki grupi G.

Najprej dokažimo lastnost 3. Naj bo $l \in \mathbb{N}$, $u \in V_{2^{-l}}$ in $z \in G$. Če je $z \in V_r$, potem je po zgoraj dokazanem $zu \in V_r V_{2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}$. Po definiciji preslikave φ torej sledi $\varphi(zu) \leq \varphi(z) + 2^{-l+2}$. Naprej, če je $zu \in V_r$, potem je $z \in V_r V_{2^{-l}}^{-1} = V_r V_{2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}$, saj je okolica $V_{2^{-l}} = U_l$ simetrična. Po definiciji preslikave φ torej sledi $\varphi(z) \leq \varphi(zu) + 2^{-l+2}$. Od tod sledi $|\varphi(z) - \varphi(zu)| \leq 2^{-l+2}$ za vsak $u \in V_{2^{-l}}$ in $z \in G$, kar po definiciji preslikave σ pomeni $\sigma(u, e) \leq 2^{-l+2}$ za vsak $u \in V_{2^{-l}}$. Ker je preslikava σ levoinvariantna, sledi da je $\sigma(x, y) \leq 2^{-l+2}$, če je $y^{-1}x \in V_{2^{-l}} = U_l$.

Nato dokažimo lastnost 1. Vzemimo $(x, y), (x_1, y_1) \in G \times G$. Uporabimo levoinvariantnost, trikotniško neenakost in lastnost 3 ter dobimo

$$\begin{aligned}
&|\sigma(x, y) - \sigma(x_1, y_1)| = |\sigma(x_1^{-1}x, x_1^{-1}y) - \sigma(x_1^{-1}y, e) + \sigma(e, y^{-1}x_1) - \sigma(y^{-1}x_1, y^{-1}y_1)| \\
&\leq |\sigma(x_1^{-1}x, x_1^{-1}y) - \sigma(x_1^{-1}y, e)| + |\sigma(e, y^{-1}x_1) - \sigma(y^{-1}x_1, y^{-1}y_1)| \\
&\leq |\sigma(x_1^{-1}x, e)| + |\sigma(e, y^{-1}y_1)| \leq 2^{-l+2} + 2^{-l+2} = 2^{-l+3}
\end{aligned}$$

Zadnja neenakost velja, če sta $x_1^{-1}x, y_1^{-1}y \in U_k$. Po definiciji leve uniformne strukture na topološki grupi G, je psevdometrika σ enakomerno zvezna.

Dokažimo lastnost 4. Naj velja $y^{-1}x \notin U_l = V_{2^{-l}}$. Po definiciji preslikave φ velja $\varphi(y^{-1}x) \geq 2^{-l}$. Upoštevamo levoinvariantnost in dobimo

$$\sigma(x, y) = \sigma(y^{-1}x, e) \geq |\varphi(ey^{-1}x) - \varphi(ee)| = \varphi(y^{-1}x) \geq 2^{-l}.$$

Lastnost 2 sledi iz lastnosti 3 in 4. Če velja $\sigma(x,y)=\sigma(y^{-1}x,e)=0$, mora veljati $y^{-1}x\in U_k$ za vsak $k\in\mathbb{N}$, sicer bi po lastnosti 4 obstajal $k_0\in\mathbb{N}$, da bi veljajo $\sigma(x,y)\geq 2^{-k_0}>0$. Torej je $y^{-1}x\in H=\bigcap_{k=1}^{\infty}U_k$. Če pa je $y^{-1}x\in H=\bigcap_{k=1}^{\infty}U_k$, je po lastnosti 3 $\sigma(x,y)\leq 2^{-k}$ za vsak $k\in\mathbb{N}$. Ker je $\lim_{k\to\infty}2^{-k}=0$, je res $\sigma(x,y)=0$.

Dokažimo še dodatek. Privzemimo, da velja $xU_kx^{-1}=U_k$ za vsak $x\in G$ in $k\in\mathbb{N}$. Potem za vsako diadično racionalno število $r>0$ velja

$$\begin{aligned}xV_rx^{-1}&=xV_{2^{-l_1}}V_{2^{-l_2}}\cdots V_{2^{-l_n}}x^{-1}=xV_{2^{-l_1}}x^{-1}xV_{2^{-l_2}}x^{-1}\cdots xV_{2^{-l_n}}x^{-1}\\&=xU_1x^{-1}xU_2x^{-1}\cdots xU_nx^{-1}=U_1U_2\cdots U_n\\&=V_{2^{-l_1}}V_{2^{-l_2}}\cdots V_{2^{-l_n}}=V_r.\end{aligned}$$

Zato za vsaka $x,y\in G$ velja $\varphi(xyx^{-1})=\inf\{r;xyx^{-1}\in V_r\}=\inf\{r;y\in x^{-1}V_rx\}=\inf\{r;y\in V_r\}=\varphi(y)$. Za vsake elemente $x,y,a\in G$ od tod sledi

$$\begin{aligned}\sigma(xa,ya)&=\sup\{|\varphi(zxa)-\varphi(zya)|;z\in G\}\\&=\sup\{|\varphi(azx)-\varphi(azy)|;z\in G\}\\&=\sup\{|\varphi(zx)-\varphi(zy)|;z\in G\}=\sigma(x,y),\end{aligned}$$

torej je psevdometrika σ tudi desnoinvariantna. Lastnost 5 sledi iz levo in desnoinvariantnosti. Velja

$$\sigma(x^{-1},y^{-1})=\sigma(e,y^{-1}x)=\sigma(y,x))=\sigma(x,y).$$

□

Izrek 7.15. *Topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote.*

Dokaz. Če je G metrizabilen topološki prostor, lahko za števno bazo odprtih okolic enote e izberemo kar družino odprtih krogel $\{K(e,2^{-n})\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Za dokaz obratne trditve predpostavimo, da je $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ števna baza odprtih okolic enote. Induktivno bomo konstruirali novo bazo okolic enote na naslednji način. Najprej definiramo okolico $U_1=V_1\cap V_1^{-1}$. Recimo, da smo že konstruirali okolice $U_1,\ldots,U_{k-1}$. Izberemo tako okolico U_k, da zanjo velja $U_k\subset U_1\cap\cdots\cap U_{k-1}\cap V_k$, $U_k=U_k^{-1}$ in $U_k^2\subset U_{k-1}$ za vsak $k\geq 2$. Tako okolico lahko izberemo po trditvah 3.10 in 3.13.

Ker G zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je po trditvi 3.14 $\{e\}$ zaprta množica in G je Hausdorffova. Po posledici 4.6 ima enota e poljubno majhne zaprte okolice. Ker je $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ padajoča baza okolic enote, lahko najdemo tako podzaporedje

$$\{U_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N},k_i<k_{i+1}},$$

da velja $\overline{U_{k_{i+1}}}\subset U_{k_i}$. Ker je G Hausdorffova, ima vsako zaporedje največ eno limito in velja

$$H=\bigcap_{k=1}^{\infty}U_k=\lim_{k\to\infty}U_k=\lim_{i\to\infty}\overline{U_{k_i}}=\{e\}.$$

Baza $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ zadošča predpostavkam izreka 7.14, zato na topološki grupi G obstaja psevdometrika σ.

Po lastnosti 2 psevdometrike σ je $\sigma(x,y)=0$ natanko tedaj, ko $y^{-1}x\in H$. Ker je $H=\{e\}$, velja $\sigma(x,y)=0$ natanko tedaj, ko $x=y$. Preslikava σ je torej metrika na G. Preveriti moramo le še, da topologija τ na G in topologija τ_σ, inducirana z metriko σ, sovpadata.

Po lastnostiih 3 in 4 metrike σ za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\{x \in G; \sigma(x,e) \leq 2^{-k}\} \subset U_k \subset \{x \in G; \sigma(x,e) \leq 2^{-k+1}\}.$$

Torej za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja

$$K(e, 2^{-k}) \subset U_k \subset K(e, 2^{-k+2}).$$

Vsaka okolica enote e v topologiji τ torej vsebuje okolico enote e v topologiji τ_σ in vsaka okolica enote e v topologiji τ_σ vsebuje okolico enote e v topologiji τ. Ker sta topologiji τ in τ_σ po trditvi 3.11 translacijsko invariantni, sta ekvivalentni in G je metrizabilen topološki prostor. □

7.3. **Separacijski aksiom $T_{3\frac{1}{2}}$.**

Definicija 7.16. Topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in poljubno točko $b \in X \backslash A$ obstaja taka zvezna funkcija $\psi \colon G \to [0,1]$, da je $\psi(b) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in A$.

Opomba 7.17. Topološku prostoru, ki zadošča T_1 in $T_{3\frac{1}{2}}$, pravimo *povsem regularen* topološki prostor.

Trditev 7.18. *(1) Vsak povsem regularen topološki prostor je regularen.*
(2) Vsak normalen topološki prostor je povsem regularen.

Dokaz. Za dokaz 1 za dano zaprto množico $F \subset X$ izberemo poljubno točko $a \in X \setminus F$. Potem obstaja taka zvezna funkcija $\psi \colon X \to [0,1]$, da je $\psi(a) = 0$ in $\psi(F) \equiv 1$. Ker sta množici $[0, \frac{1}{2})$ in $(\frac{1}{2}, 1]$ odprti glede na inducirano evklidsko topologijo na intervalu $[0,1]$ in je funkcija ψ zvezna, sta množici $\psi^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ in $\psi^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ disjunktni odprti okolici za točko a in množico F. S tem smo dokazali, da topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu T_3.

Za dokaz 2 naj bo X normalen topološki prostor. Po Urysohnovi karakterizaciji separacijskega aksioma T_4 (glej [3]) za vsaki dve disjunktni zaprti množici A in B obstaja zvezna funkcija $\psi \colon X \to [0,1]$, da je $\psi(A) \equiv 0$ in $\psi(B) \equiv 1$. Ker X zadošča separacijskemu aksiomu T_1, so vse enoelementne množice zaprte. Če za množico A vzamemo enoelementno množico $\{a\}$, vidimo, da je X povsem regularen topološki prostor. □

Izrek 7.19. *Topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je povsem regularen topološki prostor.*

Dokaz. Za dano zaprto množico F vzemimo poljuben element $a \in G \setminus F$. Naj bo $\mathcal{U}$ baza simetričnih okolic enote e in naj bo $U_1 \in \mathcal{U}$ taka množica, da je $(aU_1) \cap F = \emptyset$. Taka množica U_1 obstaja, saj je $G \setminus F$ odprta množica, aU_1 pa je odprta okolica elementa a. Izberemo okolice $U_2, U_3, ... \in \mathcal{U}$ take, da velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$ (obstajajo po trditvi 3.10). S tem smo zadostili predpostavkam izreka 7.14, zato obstaja na G psevdometrika σ. Definiramo funkcijo

$$\psi(x) = \min\{1, 2\sigma(x,a)\}.$$

Ker je psevdometrika σ po lastnosti 1 v izreku 7.14 enakomerno zvezna glede na levo uniformno strukturo na G, je po trditvi 7.6 zvezna, zato je ψ zvezna funkcija.

Ker je po definiciji prevdometrike $\sigma(a,a) = 0$, velja, da je $\psi(a) = 0$. Vzemimo element $x \in F$. Ker po konstrukciji množice U_1 velja $a^{-1}x \notin U_1$, po lastnosti 4 v izreku 7.14, $\sigma(x,a) \geq 2^{-1} = \frac{1}{2}$, od tod sledi, da je $\psi(x) = 1$ za vsak element $x \in F$.

Topološka grupa G s tem zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$ in je povsem regularna. □

7.4. **Separacijski aksiom $\mathbf{T}_4$.** Za dokaz izreka o obstoju povsem regularne topološke grupe, ki ni normalna, potrebujemo pojem *proste grupe*. Vzemimo neprazno množico X. *Beseda* je bodisi prazna (pišemo e) bodisi končni formalni produkt $x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$ elementov iz X, kjer je $\delta_k \in \{-1, 1\}$ za $k = 1, \ldots, n$. Beseda je *reducirana*, če je prazna ali pa je $\delta_k = \delta_{k+1}$, kadar je $x_k = x_{k+1}$. Naj bo F množica vseh reduciranih besed nad množico X. Na množici F definiramo operacijo na naslednji način: $xy =$ besedi x in y najprej staknemo, nato pa rekurzivno okrajšamo vse pare x_k, x_{k+1}, za katere velja $x_n = y_1$ in $\delta_n^x \neq \delta_1^y$, dokler ne dobimo okrajšane besede. Trdimo, da je množica F s tako definirano operacijo grupa. Res, če za enoto e vzamemo prazno besedo, inverz pa definiramo kot $(x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n})^{-1} = x_n^{-\delta_n} \cdots x_1^{-\delta_1}$, dobimo grupno strukturo.

Izrek 7.20. *Za vsak povsem regularen topološki prostor X obstaja taka topološka grupa F, da velja:*

(1) topološki prostor X je zaprt podprostor v F,
(2) topološka grupa F je prosta grupa nad prostorom X,
(3) za vsako zvezno preslikavo $\varphi\colon X \to G$, kjer je G poljubna topološka grupa, obstaja zvezen homomorfizem $\Phi\colon F \to G$, da je $\Phi(x) = \varphi(x)$ za vsak $x \in X$.

Izrek 7.21. *Naj bo X povsem regularen topološki prostor, F prosta topološka grupa nad X, konstruirana v izreku 7.20, in naj bo $\widetilde{F}$ taka topološka grupa, da zanjo velja:*

(1) topološki prostor X je topološki podprostor v $\widetilde{F}$,
(2) topološka grupa $\widetilde{F}$ je najmanjša zaprta podgrupa v $\widetilde{F}$, ki vsebuje X,
(3) za vsako zvezno preslikavo $\varphi\colon X \to G$, kjer je G poljubna topološka grupa, obstaja zvezen homomorfizem $\Phi\colon \widetilde{F} \to G$, da je $\Phi(x) = \varphi(x)$ za vsak $x \in X$.

Tedaj obstaja topološki izomorfizem $\tau\colon F \to \widetilde{F}$, da je $\tau(x) = x$ za vsak $x \in X$.

Izrek 7.22. *Obstaja povsem regularna topološka grupa, ki ni normalna.*

Oglejmo si še konkreten primer topološke grupe, ki je povsem regularna, vendar ni normalna.

Izrek 7.23. *Če je m neštevno kardinalno število, potem je $\mathbb{Z}^m$ povsem regularna topološka grupa, ki ni normalna.*

Dokaz. Ker topološka grupa $\mathbb{Z}$ glede na inducirano evklidsko topologijo zadošča separacijskemu aksiomu T_0 in je separacijski aksiom T_0 multiplikativna lastnost, je tudi $\mathbb{Z}^m$ topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Po izreku 7.19 je zato $\mathbb{Z}^m$ povsem regularna topološka grupa. Za dokaz nenormalnosti pišimo $\mathbb{Z}^m$ raje kot kartezični produkt $\Pi_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}_\lambda$, kjer je $|\Lambda| = m$ in $\mathbb{Z}_\lambda \lambda \cong \mathbb{Z}$ za vsak $\lambda \in \Lambda$. Definirajmo množici

$$A = \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m;\ \text{za vsak } n \neq 0 \text{ obstaja največ en indeks } \lambda, \text{ da velja } x_\lambda = n\}$$

in

$$B = \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m;\ \text{za vsak } n \neq 1 \text{ obstaja največ en indeks } \lambda, \text{ da velja } x_\lambda = n\}.$$

Če $(x_\lambda) \notin A$, potem obstajata različna indeksa $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$, da velja $x_{\lambda_0} = x_{\lambda_1} = n$ za nek $n \in \mathbb{Z}$ in $n \neq 0$. Ker so vse projekcijske preslikave $\mathrm{pr}_x \lambda\colon Z^m \to Z_\lambda$ zvezne, je $\{(y_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; y_{\lambda_0} = y_{\lambda_1} = n\}$ odprta množica, ki vsebuje (x_λ) in je disjunktna množici A. Vsaka točka iz $\mathbb{Z}^m \setminus A$ ima torej odprto okolico, ki je disjunktna množici A. To pomeni, da je $\mathbb{Z}^m \setminus A$ odprta množica, in množica A je posledično zaprta. Z analognim premislekom utemeljimo, da je tudi množica B zaprta. Množici A in B

sta očitno disjunktni. Res, vsak element $(x_\lambda) \in A$ ima po konstrukciji množice A na neštevno indeksih vrednost 0 in zato $(x_\lambda) \notin B$. Obrat je analogen.

Vzemimo poljubni dve odprti okolici U in V zaporedoma za množici A in B. Pokazali bomo, da velja $U \cap V \neq \emptyset$.

Naj ima $(x_\lambda^{(1)}) \in \mathbb{Z}^m$ vrednost 0 za vsak indeks $\lambda \in \Lambda$. Očitno je $(x_\lambda^{(1)}) \in A \subset U$, zato obstajajo taki različni indeksi $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1} \in \Lambda$, da velja

$$(x_\lambda^{(1)}) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_{\lambda_k} = 0 \text{ za } k = 1, \ldots, m_1\} \subset U.$$

Naj ima $(x_\lambda^{(2)}) \in \mathbb{Z}^m$ vrednost k na indeksih λ_k, kjer je $1 \leq k \leq m_1$, in vrednost 0 sicer. Ker je $(x_\lambda^{(2)}) \in A \subset U$, obstajajo taki indeksi $\lambda_{m_1+1}, \ldots, \lambda_{m_2} \in \Lambda$, ki so različni med sabo in od vseh indeksov $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}$, da velja

$$\begin{aligned}(x_\lambda^{(2)}) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_{\lambda_k} = k \text{ za } k = 1, \ldots, m_1 \text{ in}\\ x_{\lambda_k} = 0 \text{ za } k = m_1 + 1, \ldots, m_2\} \subset U.\end{aligned}$$

Tako nadaljujemo in induktivno definiramo zaporedje $\{(x_\lambda^{(n)})\}_{n=1}^\infty$ elementov topološke grupe $\mathbb{Z}^m$, zaporedje indeksov$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ in strogo naraščajoče zaporedje števil $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ na naslednji način. Če smo že definirali $(x_\lambda^{(n-1)})$ in različne indekse $\lambda_{m_{n-2}+1}, \ldots, \lambda_{m_{n-1}}$, naj ima $(x_\lambda^{(n)})$ vrednost k na indeksih λ_k, kjer je $1 \leq k \leq m_{n-1}$, in vrednost 0 sicer. Ker je $(x_\lambda^{(n)}) \in A \subset U$, obstajajo taki indeksi $\lambda_{m_{n-1}+1}, \ldots, \lambda_{m_n}$, ki so različni med sabo in od vseh prej tako definiranih indeksov, da velja

$$\begin{aligned}(x_\lambda^{(n)}) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_{\lambda_k} = k \text{ za } k = 1, \ldots, m_{n-1} \text{ in}\\ x_{\lambda_k} = 0 \text{ za } k = m_{n-1} + 1, \ldots, m_n\} \subset U.\end{aligned}$$

Definirajmo še $(y_\lambda) \in \mathbb{Z}^m$. Naj bo $(y_\lambda) = k$, če je $\lambda = \lambda_k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ in naj bo $(y_\lambda) = 1$ sicer. Očitno je $(y_\lambda) \in B$, zato za neko končno podmnožico $K \subset \Lambda$ velja

$$\{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_\lambda = y_\lambda \text{ za vse } \lambda \in K\} \subset V.$$

Ker je množica K končna, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da $\lambda_k \notin K$ za vse $k > m_{n_0}$.

Definiramo $(z_\lambda) \in \mathbb{Z}^m$ na naslednji način:

$$\begin{aligned}&z_\lambda = k, \text{ če je } \lambda = \lambda_k \text{ in } k \leq m_{n_0};\\ &z_\lambda = 0, \text{ če je } \lambda = \lambda_k \text{ in } m_{n_0} + 1 \leq k \leq m_{n_0+1};\\ &z_\lambda = 1 \text{ sicer.}\end{aligned}$$

Potem je $(z_\lambda) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_\lambda = y_\lambda \text{ za vse } \lambda \in K\} \subset V$ in hkrati

$$\begin{aligned}(z_\lambda) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_{\lambda_k} = k \text{ za } k = 1, \ldots, m_{n_0} \text{ in}\\ x_{\lambda_k} = 0 \text{ za } k = m_{n_0} + 1, \ldots, m_{n_0+1}\} \subset U.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da $U \cap V \neq \emptyset$. □

V nadaljevanju bomo dokazali, da je ključni pogoj, ki manjka do normalnosti, lokalna kompaktnost.

Definicija 7.24. (1) Naj bosta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ družini podmnožic topološkega prostora X. Družina $\mathcal{V}$ je *pofinitev* družine $\mathcal{U}$, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja takšna množica $U \in \mathcal{U}$, da je $V \subset U$.

(2) Družina podmnožic $\mathcal{U}$ topološkega prostora X je *lokalno končna*, če ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki seka samo končno mnogo množic iz družine $\mathcal{U}$.

(3) Topološki prostor X je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora X.

Opomba 7.25. Iz splošne topologije vemo, da za lokalno končno družino $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ velja

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{C_\lambda}.$$

Definicija 7.26. (1) Topološki prostor je σ-kompakten, če ge je možno zapisati kot števno unijo kompaktnih topoloških prostorov.

(2) Topološki prostor ima Lindelöfovo lastnost, če vsako njegovo odprto pokritje vsebuje kakšno števno podpokritje.

Očitno ima vsak kompakten prostor Lindelöfovo lastnost, saj vsako odprto pokritje vsebuje končno podpokritje, ki je trivialno števno. Velja pa tudi, da ima vsak σ-kompakten prostor Lindelöfovo lastnost. Res, ker je σ-kompakten prostor unija števno kompaktnih prostorov, vsako odprto pokritje vsakega od njih pa vsebuje končno podpokritje, vsako odprto pokritje σ-kompaktnega prostora vsebuje podpokritje, ki je sestavljeno iz števno končnih pokritji. Ker je števna unija končnih množic števna množica, je to podpokritje števno.

Trditev 7.27. *Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.*

Dokaz. Vzemimo zaprti disjunktni podmnožici A in B parakompaktnega Hausdorffovega prostora X.

Vzemimo najprej poljubno točko $b \in B$. Ker je prostor X Hausdorffov, sta vsaki dve točki ločeni z disjunktnima okolicama. Za vsako točko $a \in A$ torej obstaja odprta množica $Q_a \subset X$, da je $a \in Q_a$ in $b \in X \setminus \overline{Q_a}$. Ker je A zaprta, je $X \setminus A$ odprta, iz česar sledi, da je $\mathcal{W} = (X \setminus A) \cup \{Q_a\}_{a\in A}$ odprto pokritje prostora X. Ker je X parakompakten topološki prostor, obstaja lokalno končno odprto pokritje $\mathcal{W}'$ prostora X, ki je pofinitev pokritja $\mathcal{W}$.

Oglejmo si družino množic

$$\mathcal{Q} = \{W \in \mathcal{W}'; W \cap A \neq \emptyset\}.$$

Ker je pofinitev $\mathcal{W}'$ lokalno končna, je tudi družina množic $\mathcal{Q}$ lokalno končna. Za vsako množico $W \in \mathcal{Q}$ po definiciji pofinitve obstaja takšna točka $a \in A$, da je $W \subset Q_a$. Potem velja $b \in X \setminus \overline{Q_a} \subset X \setminus \overline{W}$. Ker je $\mathcal{W}'$ odprto pokritje prostora X, je $S = \cup\mathcal{Q}$ odprta okolica množice A, in ker je $\mathcal{Q}$ lokalno končna družina, po opombi 7.25 velja

$$b \in X \setminus \bigcup_{W\in\mathcal{Q}} \overline{W} = X \setminus \overline{S}.$$

Množica $T = X \setminus \overline{S}$ je odprta okolica točke b, ki je disjunktna s S.

Po zgoraj dokazanem torej za vsako točko $b \in B$ obstaja odprta okolica T_b točke b, da je $A \cap \overline{T_b} = \emptyset$. Zato je $\mathcal{U} = (X \setminus B) \cup \{T_b\}_{b\in B}$ odprto pokritje prostora X. Ker je X parakompakten topološki prostor, obstaja lokalno končno odprto pokritje $\mathcal{U}'$, ki je pofinitev pokritja $\mathcal{U}$. Naj bo

$$\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U}'; U \cap B \neq \emptyset\}.$$

Za vsako množico $U \in \mathcal{V}$ obstaja takšna točka $b \in B$, da je $U \subset T_b$, zato je $A \cap \overline{U} \subset A \cap \overline{T_b} = \emptyset$. Množica $V = \bigcup\mathcal{V}$ je odprta okolica množice B in, ker je $\mathcal{V}$ lokalno končna družina, po opombi 7.25 velja

$$A \cap \overline{V} = A \cap \bigcup_{U\in\mathcal{V}} \overline{U} = \emptyset.$$

Množica $X \setminus \overline{V}$ je torej odprta okolica množice A, ki je disjunktna z odprto okolico V množice B. Hausdorffov topološki prostor X s tem zadošča separacijskemu aksiomu T_4 in je zato normalen. $\square$

Izrek 7.28. *Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je normalen topološki prostor.*

Dokaz. Naj bo G lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Po izreku 3.14 je G Hausdorffova. Zato po trditvi 7.27 zadošča pokazati, da je G parakompaktna topološka grupa.

Ker je G lokalno kompaktna, obstaja kompaktna okolica K enote e. Po posledici 4.6 obstaja takšna simetrična okolica U enote e, da je $\overline{U} \subset K$. Ker so zaprte podmnožice kompaktnih prostorov kompaktne, je $\overline{U}$ tudi kompaktna okolica enote e.

Naj bo $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. Množica L je po trditvi 4.3 odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G. Ker je $\overline{U} \subset U^2$ in zato po indukciji $\overline{U}^i \subset U^{i+1}$ za vsak $i > 0$, je $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}^n$. Podgrupa L je enaka števni uniji kompaktov, saj je po trditvi 3.9 za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica $\overline{U}^n$ kompaktna, torej je podgrupa L σ-kompaktna in ima Lindelöfovo lastnost. Velja tudi, da ima vsak levi odsek xL, kjer je $x \in G$, Lindelöfovo lastnost, saj je leva translacija po trditvi 3.7 homeomorfizem.

Vzemimo poljubno odprto pokritje $\mathcal{V}$ topološke grupe G. Ker je $\mathcal{V}$ tudi pokritje za vsak levi odsek $xL \subset G$, za vsak levi odsek xL, kjer je $x \in G$, obstaja števno podpokritje $\{V_{xL}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ pokritja $\mathcal{V}$, da je $xL \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{xL}^{(n)}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo družino množic $\mathcal{W}_n = \{V_{xL}^{(n)} \cap (xL); xL \in G/L\}$. Tedaj je družina množic $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$ pofinitev pokritja $\mathcal{V}$. Res, za vsako množico $(V_{xL}^{(n)} \cap (xL)) \in \mathcal{W}$, kjer je $x \in G$ in $n \in \mathbb{N}$, velja

$$V_{xL}^{(n)} \cap (xL) \subseteq V_{xL}^{(n)} \in \mathcal{V}.$$

Ker ima vsak $x \in G$ kompaktno okolico, je $\mathcal{W}$ lokalno končna družina.

Topološka grupa G je torej parakompakten topološki prostor in zato po trditvi 7.27 normalen topološki prostor. $\square$

Slovar strokovnih izrazov

Literatura

[1] S. Bhowmik, *Introduction to Uniform Spaces*, 10.13140/RG.2.1.3743.8967, junij 2014, [ogled 1. 4. 2019], dostopno na `https://www.researchgate.net/publication/305196408_INTRODUCTION_TO_UNIFORM_SPACES`.

[2] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstact Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[3] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44** DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.