# Topološke grupe

Benjamin Benčina

Fakulteta za matematiko in fiziko

9. april 2019

DEFINICIJA: *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ s topologijo $\tau$, glede na katero sta strukturni operaciji zvezni.

Strukturni operaciji:

- Množenje: $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$.
- Invertiranje: $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

# Nekaj lastnosti

Izrek: Naj bo $G$ topološka grupa in $a \in G$ njen element. Leva translacija $x \mapsto ax$, desna translacija $x \mapsto xa$, invertiranje $x \mapsto x^{-1}$ in konjugiranje $x \mapsto axa^{-1}$ so homeomorfizmi na $G$.

Opomba: Vemo že, da so to avtomorfizmi grupe $G$.

# Nekaj lastnosti

Izrek: Naj bo $G$ topološka grupa in $\mathcal{U}$ baza odprtih okolic enote $e$. Veljajo naslednje trditve:

# Nekaj lastnosti

<u>Izrek:</u> Naj bo $G$ topološka grupa in $\mathcal{U}$ baza odprtih okolic enote $e$. Veljajo naslednje trditve:

- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$,

# Nekaj lastnosti

Izrek: Naj bo $G$ topološka grupa in $\mathcal{U}$ baza odprtih okolic enote $e$. Veljajo naslednje trditve:

- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$,
- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$,

# Nekaj lastnosti

Izrek: Naj bo $G$ topološka grupa in $\mathcal{U}$ baza odprtih okolic enote $e$. Veljajo naslednje trditve:

- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$,
- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$,
- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ in element $x \in U$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$,

# Nekaj lastnosti

<u>Izrek:</u> Naj bo $G$ topološka grupa in $\mathcal{U}$ baza odprtih okolic enote $e$. Veljajo naslednje trditve:

- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$,
- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$,
- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ in element $x \in U$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$,
- za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ in element $x \in U$ obstaja taka okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xVx^{-1} \subset U$.

# Nekaj lastnosti

TRDITEV: Vsaka topološka grupa ima odprto bazo okolic enote $e$, sestavljeno iz simetričnih množic $U = U^{-1}$.

POSLEDICA: Za vsako okolico $U$ enote $e$ topološke grupe $G$, obstaja taka okolica $V$ enote $e$, da velja $\overline{V} \subset U$.

# Regularnost

- Vemo: $T_2 \implies T_1 \implies T_0$.
- Za topološke grupe: $T_0 \iff T_2$.

# Regularnost

- Vemo: $T_2 \implies T_1 \implies T_0$.
- Za topološke grupe: $T_0 \iff T_2$.
- Še več:

Izrek: Vsaka topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu $T_0$, je regularen topološki prostor.

## Metrika in pseudometrika

Definicija: *Pseudometrika* na množici $X$ je funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$, ki zadošča pogojem:

- $d(x, x) = 0$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pseudometriki do metrike manjka: $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

# Izrek o pseudometriki

<u>Izrek:</u> Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ družina simetričnih okolic enote $e$ topološke grupe $G$ z lastnostjo $U_{k+1}^2 \subset U_k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika $\sigma$, da velja:

- $\sigma$ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi na $G \times G$,
- $\sigma(x, y) = 0 \iff y^{-1}x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$,
- $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če je $y^{-1}x \in U_k$,
- $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če poleg tega velja še, da $xU_kx^{-1} = U_k$ za vse $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, je $\sigma$ tudi desnoinvariantna in velja:

- $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka $x, y \in G$.

# Metrizabilnost

Izrek: Naj bo $G$ topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu $T_0$. Tedaj je $G$ metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote.

# Povsem regularnost

Definicija: Topološki prostor $X$ zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$, če za vsako zaprto množico $F \subset X$ in točko $a \in X \setminus F$ obstaja zvezna funkcija $\psi : X \to \mathbb{R}$, da je $\psi(a) = 0$ in $\psi|_F = 1$.

Topološki prostor je *povsem regularen*, če zadošča separacijskima aksiomoma $T_1$ in $T_{3\frac{1}{2}}$.

Izrek: Vsaka topološka grupa $G$, ki zadošča separacijskemu aksiomu $T_0$, je povsem regularen topološki prostor.

# Normalnost

- Ali velja tudi $T_0 \implies T_4$?

# Normalnost

- Ali velja tudi $T_0 \implies T_4$? Ne.

# Normalnost

- Ali velja tudi $T_0 \implies T_4$? Ne.
- Kaj manjka?

# Normalnost

- Ali velja tudi $T_0 \implies T_4$? Ne.
- Kaj manjka?

<u>Izrek:</u> Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa $G$, ki zadošča separacijskemu aksiomu $T_0$, je normalen topološki prostor.