Topološke grupe

Benjamin Benčina

Fakulteta za matematiko in fiziko

26. november 2018

DEFINICIJA: Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

- je množica G zaprta za (binarno) operacijo $*$,
- je operacija $*$ asociativna v množici G,
- obstaja tak element $e \in G$, da za vsak element $x \in G$ velja enakost
$$x * e = e * x = x,$$
- za vsak element $x \in G$ obstaja element $y \in G$, da velja enakost
$$x * y = y * x = e.$$

Označimo: $(G, *)$ ali včasih samo G.

Definicija: *Topologija* na neprazni množici X je družina $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:

- $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,
- $U \in \tau$ in $V \in \tau \implies U \cap V \in \tau$,
- $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.

DEFINICIJA: *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ s topologijo τ, glede na katero sta strukturni operaciji zvezni.

Strukturni operaciji:

- Množenje: $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$.
- Invertiranje: $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

Primeri

- poljubna grupa z diskretno ali trivialno topologijo,

Primeri

- poljubna grupa z diskretno ali trivialno topologijo,
- aditivna grupa realnih števil z običajno topologijo τ_e,

Primeri

- poljubna grupa z diskretno ali trivialno topologijo,
- aditivna grupa realnih števil z običajno topologijo τ_e,
- enotska krožnica v $\mathbb{R}^n$ s podedovanim množenjem in relativno topologijo,

Primeri

- poljubna grupa z diskretno ali trivialno topologijo,
- aditivna grupa realnih števil z običajno topologijo τ_e,
- enotska krožnica v $\mathbb{R}^n$ s podedovanim množenjem in relativno topologijo,
- grupa linarnih izomorfizmov $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ z matričnim množenjem, gledana kot podprostor n^2-razsežnega Evklidskega prostora

Motivacija

- Zanimive so same po sebi,

Motivacija

- Zanimive so same po sebi,
- uporabne so v harmonični analizi (Fourierjeve vrste, integrali...),

Motivacija

- Zanimive so same po sebi,
- uporabne so v harmonični analizi (Fourierjeve vrste, integrali...),
- pojavijo se v teoriji Liejevih grup,

Motivacija

- Zanimive so same po sebi,
- uporabne so v harmonični analizi (Fourierjeve vrste, integrali...),
- pojavijo se v teoriji Liejevih grup,
- povezane so z nekaterimi proglemi v fiziki itd.

Kvocientni prostori

<u>Definicija:</u> Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Kot podprostor H prostora G z relativno topologijo je H topološka grupa.

Kvocientni prostori

Definicija: Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Kot podprostor H prostora G z relativno topologijo je H topološka grupa.

Definicija: Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Naj bo φ naravni homomorfizem $x \mapsto xH$. Definiramo topologijo $\tau(G/H)$ na G/H tako: $\{xH | x \in X\}$ je v G/H odprta natanko tedaj, ko je $\varphi^{-1}(\{xH | x \in X\})$ odprta v G.

Kvocientni prostori

Definicija: Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Kot podprostor H prostora G z relativno topologijo je H topološka grupa.

Definicija: Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Naj bo φ naravni homomorfizem $x \mapsto xH$. Definiramo topologijo $\tau(G/H)$ na G/H tako: $\{xH | x \in X\}$ je v G/H odprta natanko tedaj, ko je $\varphi^{-1}(\{xH | x \in X\})$ odprta v G.

Izrek: Naj bo G topološka grupa in N njena podgrupa edinka. Grupa G/N z zgoraj definirano topologijo je topološka grupa.

Izreki o izomorfizmih

Izrek: Naj bosta G in H grupi ter $\varphi : G \to H$ homomorfizem. Tedaj $G/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$.
Če je φ še surjektiven, potem $G/Ker(\varphi) \cong H$.

Izrek: Naj bo G grupa, H njena podgrupa in N njena podgrupa edinka. Tedaj $(HN)/N \cong H/(H \cap N)$.

Izrek: Naj bo G grupa, N in K njeni podgrupi edinki in naj velja $N \subseteq K \subseteq G$. Tedaj $(G/N)/(K/N) \cong G/K$.

Izreki o izomorfizmih na kvocientnih prostorih

Izrek: Naj bosta G in H topološki grupi in $f : G \to H$ zvezen homomorfizem in kvocientna preslikava (surjektiven in V odprta v $H \iff f^{-1}(V)$ odprta v G). Tedaj $G/Ker(f) \cong H$.

Izrek: Naj bo G topološka grupa, N njena podgrupa edinka in H njena podgrupa. Denimo, da je N zaprta v G, H lokalno kompaktna in unija največ števno mnogo kompaktnih podprostorov (σ-kompaktna) in HN tudi lokalno kompaktna. Tedaj $(HN)/N \cong H/(H \cap N)$.

Izrek: Naj bo G topološka grupa, N in K njeni podgrupi edinki in naj velja $N \subseteq K \subseteq G$. Tedaj $(G/N)/(K/N) \cong G/K$.

Metrizabilnost

Definicija: *Metrika* na množici X je nenegativna funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$, ki zadošča pogojem:

- $d(x, y) \geq 0$,
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

Metrizabilnost

Definicija: *Metrika* na množici X je nenegativna funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$, ki zadošča pogojem:

- $d(x, y) \geq 0$,
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

Definicija: *Pseudo-metrika* na množici X je nenegativna funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$, ki zadošča pogojem:

- $d(x, y) \geq 0$,
- $d(x, x)$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

Metrizabilnost

<u>Izrek:</u> Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ družina simetričnih okolic enote e topološke grupe G z lastnostjo $U_{k+1}^2 \subset U_k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Potem obstaja taka levoinvariantna pseudo-metrika σ, da velja:

- σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi na $G \times G$,
- $\sigma(x, y) = 0 \iff y^{-1}x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$,
- $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če je $y^{-1}x \in U_k$,
- $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če poleg tega velja še, da $xU_kx^{-1} = U_k$ za vse $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, je σ tudi desnoinvariantna in velja:

- $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka $x, y \in G$.

Metrizabilnost

Izrek: Topološka grupa $G \in T_0$ je metrizabilna natanko tedaj, ko obstaja števna, odprta baza okolic za enoto e. V tem primeru lahko za metriko vzamemo kar levoinvariantno pseudo-metriko iz prejšnjega izreka.

Separacijski aksiomi

- T_0, T_1, T_2, T_3, T_4,

Separacijski aksiomi

- T_0, T_1, T_2, T_3, T_4,

Definicija: Naj bo X topološki prostor in $A, B \subset X$ njegovi disjunktni podmnožici. *Urisonova funkcija* za množici A in B je zvezna funkcija $\varphi : X \to [0, 1]$, za katero velja $\varphi|_A \equiv 0$ in $\varphi|_B \equiv 1$.

Separacijski aksiomi

- T_0, T_1, T_2, T_3, T_4,

Definicija: Naj bo X topološki prostor in $A, B \subset X$ njegovi disjunktni podmnožici. *Urisonova funkcija* za množici A in B je zvezna funkcija $\varphi : X \to [0,1]$, za katero velja $\varphi|_A \equiv 0$ in $\varphi|_B \equiv 1$.

Definicija: Topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$ natanko tedaj, ko za vsako zaprto podmnožico $A \subset X$ in vsako točko $y \notin A$ obstaja Urisonova funkcija.
Če $X \in T_1$ in $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, rečemo, da je X *povsem regularen* topološki prostor.

Separacijski aksiomi

- Vemo: $X \in T_2 \implies X \in T_1 \implies X \in T_0$.

Separacijski aksiomi

- Vemo: $X \in T_2 \implies X \in T_1 \implies X \in T_0$.

Izrek: Naj bo G topološka grupa, $a \in G$ in $F \subset G$ zaprta podmnožica, ki ne vsebuje a. Naj bo $G \in T_0$. Tedaj za F in a obstaja Urisonova funkcija in $G \in T_{3\frac{1}{2}}$.

Separacijski aksiomi

- Vemo: $X \in T_2 \implies X \in T_1 \implies X \in T_0$.

Izrek: Naj bo G topološka grupa, $a \in G$ in $F \subset G$ zaprta podmnožica, ki ne vsebuje a. Naj bo $G \in T_0$. Tedaj za F in a obstaja Urisonova funkcija in $G \in T_{3\frac{1}{2}}$.

Z drugimi besedami, T_0 zadošča za povsem regularnost.

Separacijski aksiomi

- Vemo: $X \in T_2 \implies X \in T_1 \implies X \in T_0$.

IZREK: Naj bo G topološka grupa, $a \in G$ in $F \subset G$ zaprta podmnožica, ki ne vsebuje a. Naj bo $G \in T_0$. Tedaj za F in a obstaja Urisonova funkcija in $G \in T_{3\frac{1}{2}}$.

Z drugimi besedami, T_0 zadošča za povsem regularnost.

Nas topološko grupna struktura lahko pripelje še dlje (do T_4)?

Cilji:

- pokazati, da na kvocientnih topoloških grupah veljajo analogni izreki o izomorfizmih (homeomorfizmih);

Cilji:

- pokazati, da na kvocientnih topoloških grupah veljajo analogni izreki o izomorfizmih (homeomorfizmih);
- karakterizirati metrizabilnost na topoloških grupah;

Cilji:

- pokazati, da na kvocientnih topoloških grupah veljajo analogni izreki o izomorfizmih (homeomorfizmih);
- karakterizirati metrizabilnost na topoloških grupah;
- študirati separacijske aksiome na topoloških grupah in dokazati, da lahko iz T_0 pridemo do $T_{3\frac{1}{2}}$;

Cilji:

- pokazati, da na kvocientnih topoloških grupah veljajo analogni izreki o izomorfizmih (homeomorfizmih);
- karakterizirati metrizabilnost na topoloških grupah;
- študirati separacijske aksiome na topoloških grupah in dokazati, da lahko iz T_0 pridemo do $T_{3\frac{1}{2}}$;
- najti protiprimer za $T_0 \implies T_4$;

Cilji:

- pokazati, da na kvocientnih topoloških grupah veljajo analogni izreki o izomorfizmih (homeomorfizmih);
- karakterizirati metrizabilnost na topoloških grupah;
- študirati separacijske aksiome na topoloških grupah in dokazati, da lahko iz T_0 pridemo do $T_{3\frac{1}{2}}$;
- najti protiprimer za $T_0 \implies T_4$;
- študirati separacijske aksiome in metrizabilnost na kvocientnih topoloških grupah (izreki tipa "2 od 3").