

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina
Topološke grupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2019

KAZALO

1. Uvod	4
2. Kaj je topološka grupa	4
2.1. Primeri topoloških grup	6
3. Kvocienti topoloških grup	6
4. Izreki o izomorfizmih	7
4.1. Prvi izrek o izomorfizmih	7
4.2. Drugi izrek o izomorfizmih	7
4.3. Tretji izrek o izomorfizmih	7
5. Izreki tipa “2 od 3”	8
6. Separacijski aksiomi in metrizabilnost	8
6.1. Metrizabilnost	8
6.2. Separacijski aksiomi do $T_{3\frac{1}{2}}$	9
6.3. Separacijski aksiom T_4	9
Slovar strokovnih izrazov	9
Literatura	9

Topološke grupe

POVZETEK

povzetek HERE

Topological groups

ABSTRACT

ABSTRACT HERE

Math. Subj. Class. (2010): 43-00

Ključne besede: grupa topologija

Keywords: group topology

1. UVOD

2. KAJ JE TOPOLOŠKA GRUPA

Definicija 2.1. Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

- (1) je množica G zaprta za (ponavadi binarno) operacijo $*$,
- (2) je operacija $*$ asociativna v množici G ,
- (3) v G obstaja tak element e (imenujemo ga *enota*), da za vsak element x množice G veljajo enakosti

$$x * e = e * x = x,$$

- (4) za vsak element x množice G obstaja element y tudi iz množice G , da veljajo enakosti

$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je $(G, *)$ ali samo G , če je operacija znana ali drugače očitna.

Iz zgornje definicije je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje* $\mu : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x * y$,
- *invertiranje* $\iota : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$.

Definiramo lahko nekaj tipov preslikav med grupami.

Definicija 2.2. Naj bo $f : (G, *) \rightarrow (\tilde{G}, \star)$ preslikava med dvema grupama.

- (1) Preslikava f je *homomorfizem*, če za vsaka dva elementa $a, b \in G$ velja $f(a * b) = f(a) \star f(b)$.
- (2) Preslikava f je *izomorfizem*, če je bijektivni homomorfizem.

Definicija 2.3. *Topologija* na neprazni množici X je družina podmnožic $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:

- (1) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$,
- (2) za poljubni dve množici $U, V \in \tau$ je tudi presek $U \cap V \in \tau$,
- (3) za poljubno poddružino $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ je tudi unija $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Množici X , opremljeni s topologijo τ , rečemo *topološki prostor* (X, τ) in množice v družini τ označimo za *odprte* množice v topološkem prostoru X . *Zaprte* množice definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico X .

Definicija 2.4. Naj bo (X, τ) topološki prostor.

- (1) Podmnožica $B \subset \tau$ je *baza* za topologijo τ , če je vsaka množica iz topologije τ unija nekaterih množic iz B .
- (2) Podmnožica P je *podbaza* za topologijo τ , če je družina vseh presekov končno mnogo množic iz P neka baza za topologijo τ .

Definicija 2.5. Naj bo (X, τ) topološki prostor.

- (1) Množica $U \subseteq X$ je *okolica* za točko $x \in X$, če obstaja odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $x \in V$.
- (2) Množica $U \subseteq X$ je *okolica* za množico $A \subseteq X$, če obstaja odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $A \subseteq V$.
- (3) Če je okolica U iz zgornjih dveh primerov tudi sama odprta množica, jo imenujemo *odprta okolica*.
- (4) Družina okolic $\mathcal{U}_x = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ za točko $x \in X$ se imenuje *baza okolic* za x , če za poljubno okolico V za točko x velja, da obstaja $\lambda \in \Lambda$, da je $U_\lambda \subseteq V$.

Definicija 2.6. Naj bo (X, τ) topološki prostor in $A \subseteq X$.

- (1) Točka $a \in A$ je *notranja točka* množice A , če je A okolica za točko a .
- (2) *Notranjost* množice A je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z $\text{int}(A)$. Očitno velja $\text{int}(A) \subseteq A$ in tudi $\text{int}(A) = A \iff A \in \tau$.
- (3) *Zaprte* množice A je najmanjša zaprta množica v X , ki vsebuje A . Zaprtje množice označimo z \overline{A} . Očitno velja $A \subseteq \overline{A}$ in tudi $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \iff A$ je zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora X lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikave med dvema topološkima prostoroma ter pojem homeomorfizma.

Definicija 2.7. Naj bo $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ preslikava med topološkima prostoroma.

- (1) Preslikava f je *zvezna*, kadar je praslika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (Y, τ_2) odprta tudi v topološkem prostoru (X, τ_1) .
- (2) Preslikava f je *odprta*, kadar je slika vsake odprte množice v topološkem prostoru (X, τ_1) odprta tudi v topološkem prostoru (Y, τ_2) .
- (3) Preslikava f je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

Končno lahko strukturi združimo in povežemo ter definiramo pojem topološke grupe.

Definicija 2.8. *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ opremljena s tako topologijo τ na množici G , da sta za τ strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo le še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraino kot topološko strukturo.

Definicija 2.9. Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem in homeomorfizem.

Trditev 2.10. Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. Leva translacija $x \mapsto ax$ in desna translacija $x \mapsto xa$ za a sta homeomorfizma iz G v G . Prav tako je preslikava invertiranja homeomorfizem iz G v G .

Trditev 2.11. Za topološko grupo G in odprto bazo okolice \mathcal{U} enote e veljajo naslednje trditve:

- (1) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$;
- (2) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$;
- (3) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in U$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$;
- (4) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in G$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xVx^{-1} \subset U$.

Naj bo G sedaj grupa (ne topološka) in \mathcal{U} družina podmnožic množice G , za katero veljajo zgornje štiri lastnosti. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz \mathcal{U} neprazni. Tedaj je družina $\{xU\}$, kjer $U \in \mathcal{U}$ in $x \in G$ odprta podbaza za neko topologijo na G . S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux\}$ je podbaza za isto topologijo.

Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ tudi bazi za to topologijo.

Trditev 2.12. Vsaka topološka grupa G ima bazo odprtih okolic \mathcal{U} enote e , da za vsako okolico U velja $U = U^{-1}$.

Opomba 2.13. Lastnosti množic iz trditve 2.12 pravimo simetričnost.

Posledica 2.14. Za vsako okolico U enote e topološke grupe G obstaja taka okolica V enote e , da velja $V^{-1} \subset U$.

2.1. Primeri topoloških grup.

3. KVOCIENTI TOPOLOŠKIH GRUP

Trditev 3.1. Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Če H opremimo z relativno topologijo, potem je tudi H topološka grupa.

Trditev 3.2. Naj bo sta A in B podmnožici topološke grupe G . Veljajo naslednje trditve:

- (1) $\overline{A} \overline{B} \subset \overline{AB}$,
- (2) $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$,
- (3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ za vsaka dva $x, y \in G$.

Če G ustreza še separacijskemu aksiomu T_0 , velja tudi:

- (4) če za vsaka dva elementa $a \in A$ in $b \in B$ velja enakost $ab = ba$, potem velja enakost $ab = ba$ tudi za vsaka dva elementa $a \in \overline{A}$ in $b \in \overline{B}$.

Trditev 3.3. Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. H je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa H topološke grupe G je tudi zaprta.

Trditev 3.4. Naj bo U simetrična okolica enote e v topološki grupi G . Potem je $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G .

Izrek 3.5. Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in $\varphi : G \rightarrow G/H$ naravna preslikava. Definiramo $\theta(G/H) = \{U; \varphi^{-1}(U) \text{ odprta v } G\}$. Veljajo naslednje trditve:

- (1) družina $\theta(G/H)$ je topologija na kvocientu G/H ,
- (2) glede na topologijo $\theta(G/H)$ je φ zvezna preslikava,
- (3) družina $\theta(G/H)$ je najmočnejša topologija na kvocientu G/H , glede na katero je φ zvezna preslikava,
- (4) $\varphi : G \rightarrow G/H$ je odprta preslikava.

Družini $\theta(G/H)$ pravimo kvocientna topologija, kvocientu G/H pa kvocientni prostor.

Trditev 3.6. Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in U, V tako okolici enote e v G , da velja $V^{-1}V \subset U$. Naj bo $\varphi : G \rightarrow G/H$ naravna preslikava. Potem velja $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$.

Izrek 3.7. Za topološko grupo G in njeno podgrupo H veljajo naslednje trditve:

- (1) kvocientni prostor G/H je diskreten natanko tedaj, ko je H odprta v G ,
- (2) če je H zaprta v G , potem je kvocient G/H regularen topološki prostor,
- (3) če kvocientni prostor G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0 , potem je H zaprta v G in velja, da je kvocient G/H regularen topološki prostor.

Izrek 3.8. Naj bo H podgrupa edinka topološke grupe G . Naj bo kvocient G/H opremljen s kvocientno topologijo θ . Veljajo naslednje trditve:

- (1) kvocient G/H je topološka grupa s topologijo θ ,
- (2) naravni homomorfizem φ iz G v G/H je odprt in zvezen homomorfizem,
- (3) kvocient G/H je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa H odprta v G ,
- (4) kvocient G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0 (in je zato tudi regularen) natanko tedaj, ko je podgrupa H zaprta v G .

4. IZREKI O IZOMORFIZMIH

Trditev 4.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Naj bo za vsak element $a \in G$ na kvocientu G/H definirana preslikava ψ_a s predpisom $\psi_a(xH) = (ax)H$. Za vsak element $a \in G$ je ψ_a homeomorfizem na prostoru G/H .*

Opomba 4.2. Če za vsaki dve točki x, y topološkega prostora X velja, da na prostoru X obstaja homeomorfizem, ki preslika točko x v točko y , rečemo, da je X kot topološki prostor *homogen*. Zgornja trditev pravi, da je kvocientni prostor G/H homogen topološki prostor.

Trditev 4.3. *Naj bo G (lokalno) kompaktna topološka grupa in naj bo H njena podgrupa. Potem je tudi kvocientni prostor G/H (lokalno) kompakten.*

4.1. Prvi izrek o izomorfizmih.

Izrek 4.4 (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). *Naj bosta G in \tilde{G} topološki grupi. Naj bo $f : G \rightarrow \tilde{G}$ odprt, zvezen homomorfizem. Potem je $H := \ker f$ podgrupa edinka v grupi G in množice $f^{-1}(\tilde{x})$, kjer je $\tilde{x} \in \tilde{G}$, so disjunktni odseki podgrupe H v grupi G . Preslikava $\Phi : \tilde{G} \rightarrow G/H$ s predpisom $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$ je topološki izomorfizem.*

4.2. Drugi izrek o izomorfizmih.

Izrek 4.5. *Naj bo G topološka grupa, A njena podgrupa in H podgrupa edinka grupe G . Naj bo τ izomorfizem iz kvocienta $(AH)/H$ v kvocient $A/(A \cap H)$ s predpisom $\tau(aH) = a(A \cap H)$, kjer je $a \in A$. Potem τ slika odprte množice iz $(AH)/H$ v odprte množice iz $A/(A \cap H)$.*

Izrek 4.6 (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). *Naj bodo objekti G, A, H in τ isti kakor v izreku 4.5. Naj bo podgrupa A še lokalno kompaktna in σ -kompaktna, naj bo H zaprta v G in AH lokalno kompaktna. Tedaj je τ homeomorfizem ter topološki grupi $(AH)/H$ in $A/(A \cap H)$ sta topološko izomorfni.*

4.3. Tretji izrek o izomorfizmih.

Izrek 4.7. *Naj bo G topološka grupa z enoto e in naj bo \tilde{G} topološka grupa z enoto \tilde{e} . Naj bo f odprt, zvezen homomorfizem iz grupe G v grupo \tilde{G} . Naj bo \tilde{H} podgrupa edinka grupe \tilde{G} . Označimo $H = f^{-1}(\tilde{H})$ in $N = f^{-1}(\tilde{e})$ (N je jedro homomorfizma f). Potem so grupe G/H , \tilde{G}/\tilde{H} in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfne.*

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraini različici in ne vsebuje posredne topološke grupe \tilde{G} .

Izrek 4.8 (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe). *Naj bo G topološka grupa in H, N taki njeni podgrupi edinki, da velja $N \subset H$. Potem sta kvocientni topološki grupi G/H in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfni.*

5. IZREKI TIPA “2 OD 3”

6. SEPARACIJSKI AKSIOMI IN METRIZABILNOST

Definicija 6.1. Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu

- (1) T_0 , če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstaja okolica V za eno od točk a, b , ki ne vsebuje druge od točk a, b ;
- (2) T_1 , če za poljubno točko $a \in X$ in različno točko $b \in X$ obstaja okolica V za točko a , ki ne vsebuje točke b ;
- (3) T_2 , če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstajata disjunktni okolici za točki a in b ;
- (4) T_3 , če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \setminus A$ obstajata disjunktni okolici za množico A in točko b ;
- (5) $T_{3\frac{1}{2}}$, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \setminus A$ obstaja zvezna realna funkcija ψ definirana na G , da je $\psi(b) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in A$;
- (6) T_4 , če za poljubni disjunktni zaprti množici $A, B \subseteq X$ obstajata disjunktni okolici za množici A in B .

Opomba 6.2. (1) Iz definicije je razvidno, da separacijski aksiom T_2 implicira T_1 in da separacijski aksiom T_1 implicira T_0 .

- (2) Topološkemu prostoru X , ki zadošča separacijskemu aksiomu T_2 , pravimo tudi *Hausdorffov* topološki prostor.
- (3) Topološkemu prostoru X , ki zadošča separacijskima aksiomoma T_1 in T_3 , pravimo *regularen* topološki prostor.
- (4) Topološkemu prostoru X , ki zadošča separacijskima aksiomoma T_1 in $T_{3\frac{1}{2}}$, pravimo *povsem regularen* topološki prostor.
- (5) Topološkemu prostoru X , ki zadošča separacijskima aksiomoma T_1 in T_4 , pravimo *normalen* topološki prostor.

Trditev 6.3 (Karakterizacija separacijskega aksioma T_1). *Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu T_1 natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in X$ velja, da je množica $\{x\}$ zaprta v X glede na topologijo τ .*

Posledica 6.4. (1) *Vsak regularen topološki prostor je Hausdorffov.*

(2) *Vsak povsem regularen topološki prostor je regularen in zato Hausdorffov.*

(3) *Vsak normalen topološki prostor je regularen in zato Hausdorffov.*

Trditev 6.5 (Karakterizacija separacijskega aksioma T_3). *Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu T_3 natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in X$ in vsako okolico W za točko x obstaja taka odprta okolica V za točko x , za katero velja $\overline{V} \subseteq W$.*

Izrek 6.6. *Vsaka topološka grupa G , ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 je regularen topološki prostor.*

6.1. Metrizabilnost.

Definicija 6.7. *Pseudometrika na neprazni množici X je preslikava $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, ki zadošča naslednjim pogojem:*

- (1) za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) \geq 0$ in $\rho(x, x) = 0$;
- (2) za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- (3) za vsake tri točke $x, y, z \in X$ velja $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Če za preslikavo d velja še

$$(4) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

potem ji rečemo *metrika*.

Izrek 6.8. Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje simetričnih okolic enote e v topološki grupi G , da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$. Označimo $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika σ na G z naslednjimi lastnostmi:

- (1) σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od $G \times G$;
- (2) $\sigma(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko $y^{-1}x \in H$;
- (3) $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če $y^{-1}x \in U_k$;
- (4) $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če velja še $xU_kx^{-1} = U_k$ za vsak $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, potem je σ tudi desnoinvariantna in velja

$$(5) \quad \sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y) \text{ za vsaka dva elementa } x, y \in G.$$

Izrek 6.9. Topološka grupa G , ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 , je metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote e .

6.2. Separacijski aksiomi do $T_{3\frac{1}{2}}$.

Izrek 6.10. Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 . Naj bo $a \in G$ točka in F zaprta podmnožica v G , ki ne vsebuje a . Potem obstaja taka zvezna realna funkcija ψ definirana na G , da je $\psi(a) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in F$.

Drugeče: vsaka T_0 topološka grupa je povsem regularna.

6.3. Separacijski aksiom T_4 .

Izrek 6.11. Če je m katerokoli neštevno kardinalno število, potem je \mathbb{Z}^m nenormalna popolnoma regularna topološka grupa.

Izrek 6.12. Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 , je parakompaktna in zato normalna.

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

LITERATURA

- [1] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.