UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina

Topološke grupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandič

Ljubljana, 2019

Kazalo

Topološke grupe

POVZETEK

povzetek HERE

Topological groups

ABSTRACT

ABSTRACT HERE

Math. Subj. Class. (2010): 43-00
Ključne besede: grupa topologija
Keywords: group topology

1. Uvod

2. Kaj je topološka grupa

Definicija 2.1. Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

(1) je množica G zaprta za (ponavadi binarno) operacijo $*$,
(2) je operacija $*$ asociativna v množici G,
(3) v G obstaja tak element e (imenujemo ga *enota*), da za vsak element x množice G veljajo enakosti
$$x * e = e * x = x,$$
(4) za vsak element x množice G obstaja element y tudi iz množice G, da veljajo enakosti
$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je $(G, *)$ ali samo G, če je operacija znana ali drugače očitna.

Iz zgornje definicije je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje* $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x * y$,
- *invertiranje* $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

Definiramo lahko nekaj tipov preslikav med grupami.

Definicija 2.2. Naj bo $f : (G, *) \to (\widetilde{G}, \star)$ preslikava med dvema grupama.

(1) Preslikava f je *homomorfizem*, če za vsaka dva elementa $a, b \in G$ velja $f(a * b) = f(a) \star f(b)$.
(2) Preslikava f je *izomorfizem*, če je bijektivni homomorfizem.

Definicija 2.3. *Topologija* na neprazni množici X je družina podmnožic $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:

(1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,
(2) za poljubni dve množici $U, V \in \tau$ je tudi presek $U \cap V \in \tau$,
(3) za poljubno poddružino $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau$ je tudi unija $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Množici X, opremljeni s topologijo τ, rečemo *topološki* prostor (X, τ) in množice v družini τ označimo za *odprte* množice v topološkem prostoru X. *Zaprte* množice definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico X.

Definicija 2.4. Naj bo (X, τ) topološki prostor.

(1) Podmnožica $B \subset \tau$ je *baza* za topologijo τ, če je vsaka množica iz topologije τ unija nekaterih množic iz B.
(2) Podmnožica P je *podbaza* za topologijo τ, če je družina vseh presekov končno mnogo množic iz P neka baza za topologijo τ.

Definicija 2.5. Naj bo (X, τ) topološki prostor.

(1) Množica $U \subseteq X$ je *okolica za točko* $x \in X$, če obstaja odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $x \in V$.
(2) Množica $U \subseteq X$ je *okolica za množico* $A \subseteq X$, če obstaja odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $A \subseteq V$.
(3) Če je okolica U iz zgornjih dveh primerov tudi sama odprta množica, jo imenujemo *odprta okolica*.
(4) Družina okolic $\mathcal{U}_x = \{U_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ za točko $x \in X$ se imenuje *baza okolic* za x, če za poljubno okolico V za točko x velja, da obstaja $\lambda \in \Lambda$, da je $U_\lambda \subseteq V$.

Definicija 2.6. Naj bo (X, τ) topološki prostor in $A \subseteq X$.

(1) Točka $a \in A$ je *notranja točka* množice A, če je A okolica za točko a.
(2) *Notranjost* množice A je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z $int(A)$. Očitno velja $int(A) \subseteq A$ in tudi $int(A) = A \iff A \in \tau$.
(3) *Zaprtje* množice A je najmanjša zaprta množica v X, ki vsebuje A. Zaprtje množice označimo z $\overline{A}$. Očitno velja $A \subseteq \overline{A}$ in tudi $\overline{A} = A \iff A$ je zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora X lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikave med dvema topološkima prostoroma ter pojem homeomorfizma.

Definicija 2.7. Naj bo $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ preslikava med topološkima prostoroma.

(1) Preslikava f je *zvezna*, kadar je praslika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (Y, τ_2) odprta tudi v topološkem prostoru (X, τ_1).
(2) Preslikava f je *odprta*, kadar je slika vsake odprte množice v topološkem prostoru (X, τ_1) odprta tudi v topološkem prostoru (Y, τ_2).
(3) Preslikava f je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

Končno lahko strukturi združimo in povežemo ter definiramo pojem topološke grupe.

Definicija 2.8. *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ opremljena s tako topologijo τ na množici G, da sta za τ strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo le še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraično kot topološko strukturo.

Definicija 2.9. Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem in homeomorfizem.

Trditev 2.10. *Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. Leva translacija $x \mapsto ax$ in desna translacija $x \mapsto xa$ za a sta homeomorfizma iz G v G. Prav tako je preslikava invertiranja homeomorfizem iz G v G.*

Trditev 2.11. *Naj bo G topološka grupa in $\mathcal{U}$ baza odprtih okolic enote e. Tedaj veljajo naslednje trditve:*

(1) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$;
(2) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$;
(3) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in U$ obstaja množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$;
(4) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in G$ obstaja množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xVx^{-1} \subset U$.

Naj bo G sedaj grupa (ne topološka) in $\mathcal{U}$ družina podmnožic množice G, za katero veljajo zgornje štiri lastnosti. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz $\mathcal{U}$ neprazni. Tedaj je družina $\{xU\}$, kjer $U \in \mathcal{U}$ in $x \in G$ odprta podbaza za neko topologijo na G. S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux\}$ je podbaza za isto topologijo.

Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ tudi bazi za to topologijo.

Trditev 2.12. *Vsaka topološka grupa G ima bazo odprtih okolic $\mathcal{U}$ enote e, da za vsako okolico U velja $U = U^{-1}$.*

Opomba 2.13. Lastnosti množic iz trditve 2.12 pravimo simetričnost.

Posledica 2.14. *Naj bo G topološka grupa. Za vsako okolico U enote e obstaja okolica V enote e, da velja $V^{-1} \subset U$.*

2.1. **Primeri topoloških grup.**

3. Separacijski aksiomi in metrizabilnost

Definicija 3.1. Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu

(1) T_0, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstaja okolica V za eno od točk a, b, ki ne vsebuje druge od točk a, b;
(2) T_1, če za poljubno točko $a \in X$ in različno točko $b \in X$ obstaja okolica V za točko a, ki ne vsebuje točke b;
(3) T_2, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstajata disjunktni okolici za točki a in b;
(4) T_3, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \backslash A$ obstajata disjunktni okolici za množico A in točko b;
(5) $T_{3\frac{1}{2}}$, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \backslash A$ obstaja zvezna realna funkcija ψ definirana na G, da je $\psi(b) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in A$;
(6) T_4, če za poljubni disjunktni zaprti množici $A, B \subseteq X$ obstajata disjunktni okolici za množici A in B.

Opomba 3.2. (1) Iz definicije je razvidno, da separacijski aksiom T_2 implicira T_1 in da separacijski aksiom T_1 implicira T_0.
(2) Topološkemu prostoru X, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_2, pravimo tudi *Hausdorffov* topološki prostor.
(3) Topološku prostoru X, ki zadoška separacijskima aksiomoma T_1 in T_3, pravimo *regularen* topološki prostor.
(4) Topološku prostoru X, ki zadoška separacijskima aksiomoma T_1 in $T_{3\frac{1}{2}}$, pravimo *popolnoma regularen* topološki prostor.
(5) Topološku prostoru X, ki zadoška separacijskima aksiomoma T_1 in T_4, pravimo *normalen* topološki prostor.

Trditev 3.3 (Karakterizacija separacijskega aksioma T_1)**.** *Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu T_1 natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in X$ velja, da je množica $\{x\}$ zaprta v X glede na topologijo τ.*

Posledica 3.4. *(1) Vsak regularen topološki prostor je Hausdorffov.*
(2) Vsak popolnoma regularen topološki prostor je regularen in zato Hausdorffov.
(3) Vsak normalen topološki prostor je regularen in zato Hausdorffov.

Trditev 3.5 (Karakterizacija separacijskega aksioma T_3)**.** *Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu T_3 natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in X$ in vsako okolico W za točko x obstaja odprta okolica V za točko x, za katero velja $\overline{V} \subseteq W$.*

Izrek 3.6. *Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Tedaj je G regularna kot topološki prostor.*

3.1. **Metrizabilnost.**

Definicija 3.7. Naj bo X neprazna množica.

(1) *Metrika* na množici X je nenegativna preslikava $d : X \times X \to [0, \infty)$, ki zadošča naslednjim pogojem:
- za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $d(x, y) \geq 0$ in $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $d(x, y) = d(y, x)$;
- za vsake tri točke $x, y, z \in X$ velja $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(2) *Pseudo-metrika* na množici X je nenegativna funkcija $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, ki zadošča naslednjim pogojem:
- za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) \geq 0$ in $\rho(x, x) = 0$;
- za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- za vsake tri točke $x, y, z \in X$ velja $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Izrek 3.8. *Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje simetričnih okolic enote e v topološki grupi G, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$. Označimo $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Potem obstaja taka levoinvariantna pseudo-metrika σ na G z naslednjimi lastnostmi:*

(1) σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od $G \times G$;
(2) $\sigma(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko velja $y^{-1}x \in H$;
(3) $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če velja $y^{-1}x \in U_k$;
(4) $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če velja $y^{-1}x \notin U_k$.

Če velja še $xU_kx^{-1} = U_k$ za vsak $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, potem je σ tudi desnoinvariantna in velja

(5) $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka dva elementa $x, y \in G$.

Izrek 3.9. *Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Potem je G metrizabilna kot topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote e.*

3.2. **Separacijski aksiomi do $\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$.**

Izrek 3.10. *Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Naj bo $a \in G$ točka in F zaprta podmnožica v G, ki ne vsebuje a. Potem obstaja taka zvezna realna funkcija ψ definirana na G, da je $\psi(a) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in F$.*

Drugače: vsaka T_0 topološka grupa je popolnoma regularna.

3.3. **Separacijski aksiom $\mathbf{T}_4$.**

Izrek 3.11. *Če je m katerokoli neštevno kardinalno število, potem je $\mathbb{Z}^m$ nenormalna popolnoma regularna topološka grupa.*

Izrek 3.12. *Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je parakompaktna in zato normalna.*

4. Kvocienti topoloških grup

Trditev 4.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Z relativno topologijo podprostora H topološkega prostora G je tudi H topološka grupa.*

Trditev 4.2. *Naj bo sta A in B podmnožici topološke grupa G. Veljajo naslednje trditve:*

(1) $\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{AB}$,
(2) $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$,

(3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ *za vsaka dva* $x, y \in G$.

Če G *ustreza še separacijskemu aksiomu* T_0*, velja tudi:*

(4) *če za vsaka dva elementa* $a \in A$ *in* $b \in B$ *velja enakost* $ab = ba$*, potem velja enakost* $ab = ba$ *tudi za vsaka dva elementa* $a \in \overline{A}$ *in* $b \in \overline{B}$.

Trditev 4.3. *Naj bo* G *topološka grupa in* H *njena podgrupa.* H *je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa* H *topološke grupa* G *je tudi zaprta.*

Trditev 4.4. *Naj bo* U *simetrična okolica enote* e *v topološki grupi* G*. Potem je* $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ *odprta in zaprta podgrupa topološke grupe* G.

Definicija 4.5. Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa.Naj bo φ naravni homomorfizem $x \mapsto xH$ iz G v kvocient $G/H = \{xH;\ x \in G\}$. Na kvocientu G/H lahko definiramo *kvocientno topologijo* θ s pomočjo naravnega homomorfizma: podmnožica kvocienta $\{aH;\ a \in A,\ A \subseteq G\}$ je v kvocientu odprta natanko tedaj, ko je $\varphi^{-1}(\{aH;\ a \in A,\ A \subseteq G\})$ odprta množica v G.

Opomba 4.6. Z drugimi besedami to pomeni, da je $\{aH;\ a \in A,\ A \subseteq G\}$ v kvocientu odprta natanko tedaj, ko je AH odprta v G. Ker je H podgrupa grupe G, velja enakost $\{aH; a \in A\} = \{aH; a \in AH$. Torej so odprte množice v kvocientu G/H oblike $\{uH;\ u \in U\}$, kjer je U odprta podmnožica v G.

Izrek 4.7. *Kvocientna topologija* θ *je res topologija na množici* G/H*. Glede topologijo* θ *je naravni homomorfizem* φ *zvezen in* θ *je najmočnejša topologija na kvocientu* G/H*, glede na katero je naravni homomorfizem* φ *zvezen.*

Kvocientu G/H s kvocientno topologijo θ rečemo *kvocientni prostor*.

Trditev 4.8. *Naravni homomorfizem* φ *iz* G *v kvocient* G/H *je odprta preslikava.*

Trditev 4.9. *Naj bo* G *topološka grupa,* H *njena podgrupa in* U, V *tako okolici enote* e *v* G*, da velja* $V^{-1}V \subset U$*. Naj bo* φ *naravni homomorfizem iz grupe* G *v kvocient* G/H*. Potem velja* $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$.

Izrek 4.10. *Naj bo* G *topološka grupa in* H *njena podgrupa. Veljajo naslednje trditve:*

(1) *kvocientni prostor* G/H *je diskreten natanko tedaj, ko je* H *odprta v* G*,*
(2) *če je* H *zaprta v* G*, potem je kvocient* G/H *regularen topološki prostor,*
(3) *če kvocientni prostor* G/H *zadošča separacijskemu aksiomu* T_0*, potem je* H *zaprta v* G *in velja, da je kvocient* G/H *regularen topološki prostor.*

Izrek 4.11. *Naj bo* G *topološka grupa in naj bo* H *njena podgrupa edinka. Naj bo kvocient* G/H *opremljen s kvocientno topologijo* θ*. Veljajo naslednje trditve:*

(1) *kvocient* G/H *je topološka grupa s topologijo* θ*,*
(2) *naravni homomorfizem* φ *iz* G *v* G/H *je odprt in zvezen homomorfizem,*
(3) *kvocient* G/H *je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa* H *odprta v* G*,*
(4) *kvocient* G/H *zadošča separacijskemu aksiomu* T_0 *(in je zato tudi regularen) natanko tedaj, ko je podgrupa* H *zaprta v* G.

5. Izreki o izomorfizmih

Trditev 5.1. *Naj bo* G *topološka grupa in* H *njena podgrupa. Naj bo za vsak element* $a \in G$ *na kvocientu* G/H *definirana preslikava* ψ_a *s predpisom* $\psi_a(xH) = (ax)H$*. Za vsak element* $a \in G$ *je* ψ_a *homeomorfizem na prostoru* G/H.

Opomba 5.2. Če za vsaki dve točki x, y topološkega prostora X velja, da na prostoru X obstaja homeomorfizem, ki preslika točko x v točko y, rečemo, da je X kot topološki prostor *homogen.* Zgornja trditev pravi, da je kvocientni prostor G/H homogen topološki prostor.

Trditev 5.3. *Naj bo G (lokalno) kompaktna topološka grupa in naj bo H njena podgrupa. Potem je tudi kvocietni prostor G/H (lokalno) kompakten.*

5.1. **Prvi izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.4 (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bo G topološka grupa z enoto e in $\widetilde{G}$ topološka grupa z enoto $\tilde{e}$. Naj bo preslikava f odprt, zvezen homomorfizem iz G v $\widetilde{G}$. Potem je jedro preslikave f $\ker f = f^{-1}(\tilde{e}) = H$ podgrupa edinka v topološki grupi G in množice $f^{-1}(\tilde{x})$, kjer je $\tilde{x} \in \widetilde{G}$ so disjunktni odseki podgrupe H v grupi G. Preslikava Φ iz $\widetilde{G}$ v G s predpisom $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$ je homeomorfizem in izomorfizem iz $\widetilde{G}$ v topološko grupo G/H s kvocientno topologijo $\theta(G/H)$.*

5.2. **Drugi izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.5. *Naj bo G topološka grupa, A njena podgrupa in H podgrupa edinka grupe G. Naj bo τ izomorfizem iz kvocienta $(AH)/H$ v kvocient $A/(A \cap H)$ s predpisom $\tau(aH) = a(A \cap H)$, kjer je $a \in A$. Potem τ slika odprte množice iz $(AH)/H$ v odprte množice iz $A/(A \cap H)$.*

Izrek 5.6 (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bodo objekti G, A, H in τ isti kakor v izreku 5.5. Naj bo podgrupa A še lokalno kompaktna in σ-kompaktna, naj bo H zaprta v G in AH lokalno kompaktna. Tedaj je τ homeomorfizem ter topološki grupi $(AH)/H$ in $A/(A \cap H)$ sta topološko izomorfni.*

5.3. **Tretji izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.7. *Naj bo G topološka grupa z enoto e in naj bo $\widetilde{G}$ topološka grupa z enoto $\tilde{e}$. Naj bo f odprt, zvezen homomorfizem iz grupe G v grupo $\widetilde{G}$. Naj bo $\widetilde{H}$ podgrupa edinka grupe $\widetilde{G}$. Označimo $H = f^{-1}(\widetilde{H})$ in $N = f^{-1}(\tilde{e})$ (N je jedro homomorfizma f). Potem so grupe G/H, $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfne.*

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraični različici in ne vsebuje posredne topološke grupe $\widetilde{G}$.

Izrek 5.8 (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bo G topološka grupa in H, N taki njeni podgrupi edinki, da velja $N \subset H$. Potem sta kvocientni topološki grupi G/H in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfni.*

6. Izreki tipa "2 od 3"

Slovar strokovnih izrazov

Literatura

[1] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstact Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.