UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina

Topološke grupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandič

Ljubljana, 2019

Kazalo

Topološke grupe

POVZETEK

povzetek HERE

Topological groups

ABSTRACT

ABSTRACT HERE

Math. Subj. Class. (2010): 43-00
Ključne besede: grupa topologija
Keywords: group topology

1. Uvod

Tukaj bom napisal kratek uvod o uporabi združene topološke in algebraične strukture, zgodovinske primere uporabe topoloških grup in nato na kratko opisal strukturo dela.

2. Kaj je topološka grupa

Definicija 2.1. Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

(1) je množica G zaprta za (ponavadi binarno) operacijo $*$,
(2) je operacija $*$ asociativna v množici G,
(3) v G obstaja tak element e (imenujemo ga *enota*), da za vsak element x množice G veljajo enakosti

$$x * e = e * x = x,$$

(4) za vsak element x množice G obstaja element y tudi iz množice G, da veljajo enakosti

$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je $(G, *)$ ali samo G, če je operacija znana ali drugače očitna.

Iz zgornje definicije je takoj razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje* $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x * y$,
- *invertiranje* $\iota : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

Definicija 2.2. *Topologija* na neprazni množici X je družina podmnožic $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:

(1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,
(2) za poljubni dve množici $U, V \in \tau$ je tudi presek $U \cap V \in \tau$,
(3) za poljubno poddružino $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau$ je tudi unija $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Množici X, opremljeni s topologijo τ, rečemo *topološki* prostor (X, τ) in množice v družini τ označimo za *odprte* množice v topološkem prostoru X. *Zaprte* množice definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico X.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora X lahko sedaj definiramo zveznost preslikave med dvema topološkima prostoroma.

Definicija 2.3. Preslikava $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ je *zvezna*, kadar je praslika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (Y, τ_2) oprta tudi v topološkem prostoru (X, τ_1).

Končno lahko strukturi združimo in povežemo ter definiramo pojem topološke grupe.

Definicija 2.4. *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ opremljena s tako topologijo τ na množici G, da sta za τ strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

2.1. Primeri topoloških grup.

Tukaj bom sistematično opisal nekaj osnovnih ali očitnih primerov topoloških grup in za nekaj primerov tudi dokazal, da ustrezajo definiciji.

3. Separacijsi aksiomi in metrizabilnost

Opis poglavja, kaj me bo zanimalo in pomožne trditve, ki jih nisem navedel že v prejšnjem poglavju. Definicije aksiomov in metrizabilnosti.

3.1. **Metrizabilnost.** Izrek o pseudo-metriki, karakterizacija metrizabilnosti top. grup.

3.2. **Separacijski aksiomi do $\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$.** Še dokaz izreka t0 -> t31/2.

3.3. **Separacijski aksiom $\mathbf{T}_4$.** Protiprimer za t0 -> t4. Kaj nam še manjka + dokaz.

4. Kvocienti topoloških grup

Opis poglavja, definicija top. kvocienta in rel. topologije ter dokaz, da teorija deluje tudi za kvociente. Nekaj osnovnih trditev oz. lem. Pomožne trditve za glavni izrek, ki povzame kvociente. Izrek + dokaz.

5. Izreki o izomorfizmih

Opis poglavja in naše želje o obliki analognih izrekov. Algebraični izreki o izomorfizmih (brez dokaza). Vsak analogen izrek posebej s pomožnimi trditvami v svojem podrazdelku.

6. Izreki tipa "2 od 3"

Kasneje.

Slovar strokovnih izrazov

Literatura