

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina  
**Topološke grupe**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2019

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Preliminarna poglavja	4
2.1. Operacije na množicah	4
2.2. Teorija grup	4
2.3. Topološki prostori	5
3. Kaj je topološka grupa	6
3.1. Primeri topoloških grup	7
4. Kvocienti topoloških grup	7
5. Izreki o izomorfizmih	8
5.1. Prvi izrek o izomorfizmih	8
5.2. Drugi izrek o izomorfizmih	9
5.3. Tretji izrek o izomorfizmih	9
6. Izreki tipa "2 od 3"	9
7. Separacijski aksiomi in metrizabilnost	9
7.1. Metrizabilnost	9
7.2. Separacijski aksiomi do $T_{3\frac{1}{2}}$	10
7.3. Separacijski aksiom $T_4$	10
Slovar strokovnih izrazov	11
Literatura	11

## Topološke grupe

POVZETEK

povzetek HERE

## Topological groups

ABSTRACT

ABSTRACT HERE

**Math. Subj. Class. (2010):** 43-00

**Ključne besede:** grupa topologija

**Keywords:** group topology

## 1. UVOD

### 2. PRELIMINARNA POGLAVJA

**2.1. Operacije na množicah.** Vse operacije na množicah, če ne bo drugače znamenovano, delujejo na elementih. Tako je na primer produkt množic  $U$  in  $V$  enak

$$U * V = \{u * v; u \in U, v \in V\},$$

inverz množice  $U$  pa je

$$U^{-1} = \{u^{-1}; u \in G\}.$$

Tukaj se v obeh primerih predpostavlja, da so množice vložene v neki grupi, kjer so operacije na elementih smiselno definirane. Grupno strukturo bom bolj podrobno opisal v naslednjem podrazdelku.

Pomembnejša izjema temu pravilu so operacije na množicah v smislu relacij. Predpostavimo torej, da imamo množico  $X$  in nas zanimajo podmnožice kartezičnega produkta  $X \times X$ . Inverz take množice  $U$  je potem

$$U^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in U\},$$

analogna operacija množenju pa je tukaj kompozitum množic

$$V \circ U = \{(x, z); \text{ obstaja element } y \in X, \text{ da je } (x, y) \in V \text{ in } (y, z) \in U\}.$$

Takšno dojetje operacij bo vedno posebej označeno.

### 2.2. Teorija grup.

**Definicija 2.1.** Neprazna množica  $G$  z binarno operacijo  $*$  je *grupa*, če:

- (1) je množica  $G$  zaprta za (ponavadi binarno) operacijo  $*$ ,
- (2) je operacija  $*$  asociativna v množici  $G$ ,
- (3) v  $G$  obstaja tak element  $e$  (imenujemo ga *enota*), da za vsak element  $x$  množice  $G$  veljajo enakosti

$$x * e = e * x = x,$$

- (4) za vsak element  $x$  množice  $G$  obstaja element  $y$  tudi iz množice  $G$ , da veljajo enakosti

$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je  $(G, *)$  ali samo  $G$ , če je operacija znana ali drugače očitna.

Iz zgornje definicije je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje*  $\mu : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x * y,$
- *invertiranje*  $\iota : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}.$

Definiramo lahko nekaj tipov preslikav med grupami.

**Definicija 2.2.** Naj bo  $f : (G, *) \rightarrow (\tilde{G}, \star)$  preslikava med dvema grupama.

- (1) Preslikava  $f$  je *homomorfizem*, če za vsaka dva elementa  $a, b \in G$  velja  $f(a * b) = f(a) \star f(b)$ .
- (2) Preslikava  $f$  je *izomorfizem*, če je bijektivni homomorfizem.

**Definicija 2.3.** Naj bo  $G$  grupa za operacijo  $*$ .

- (1) Podmnožica  $H$  grupe  $G$  je *podgrupa*, če je tudi sama grupa za operacijo  $*$ .
- (2) Množici  $aH = \{a * h; h \in H\}$  pravimo *levi odsek* grupe  $G$  elementa  $a \in G$  po podgrupi  $H$ . Na enak način definiramo *desne odseke*  $Ha$ .

- (3) Podgrupi  $H$  grupe  $G$  rečemo podgrupa *edinka*, če za vsak element  $a \in G$  velja, da je levi odsek enak desnemu.
- (4) Množici  $G/H = \{aH; a \in G\}$  rečemo *kvocient* grupe  $G$  po podgrupi  $H$ .
- (5) *Naravna preslikava* na kvocient  $G/H$  je preslikava  $\varphi : G \rightarrow G/H$ ,  $a \mapsto aH$ .

**Trditev 2.4.** Če je podgrupa  $N$  grupe  $G$  podgrupa edinka, je kvocient  $G/N$  grupa za operacijo  $*$ , kjer je  $aH * bH = (a * b)H$ , naravna preslikava  $\varphi$  pa je homomorfizem grup.

### 2.3. Topološki prostori.

**Definicija 2.5.** Topologija na neprazni množici  $X$  je družina podmnožic  $\tau \subseteq 2^X$  z lastnostmi:

- (1)  $X \in \tau$ ,  $\emptyset \in \tau$ ,
- (2) za poljubni dve množici  $U, V \in \tau$  je tudi presek  $U \cap V \in \tau$ ,
- (3) za poljubno poddružino  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$  je tudi unija  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$ .

Množici  $X$ , opremljeni s topologijo  $\tau$ , rečemo *topološki prostor*  $(X, \tau)$  in množice v družini  $\tau$  označimo za *odprte* množice v topološkem prostoru  $X$ . *Zaprte* množice definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico  $X$ .

**Definicija 2.6.** Naj bo  $(X, \tau)$  topološki prostor.

- (1) Podmnožica  $B \subset \tau$  je *baza* za topologijo  $\tau$ , če je vsaka množica iz topologije  $\tau$  unija nekaterih množic iz  $B$ .
- (2) Podmnožica  $P$  je *podbaza* za topologijo  $\tau$ , če je družina vseh presekov končno mnogo množic iz  $P$  neka baza za topologijo  $\tau$ .

**Definicija 2.7.** Naj bo  $(X, \tau)$  topološki prostor.

- (1) Množica  $U \subseteq X$  je *okolica za točko*  $x \in X$ , če obstaja taka odprta množica  $V \in \tau$ , da velja  $V \subseteq U$  in  $x \in V$ .
- (2) Množica  $U \subseteq X$  je *okolica* množice  $A \subseteq X$ , če obstaja taka odprta množica  $V \in \tau$ , da velja  $V \subseteq U$  in  $A \subseteq V$ .
- (3) Če je okolica  $U$  iz zgornjih dveh primerov tudi sama odprta množica, jo imenujemo *odprta okolica*.
- (4) Družina okolic  $\mathcal{U}_x = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$  za točko  $x \in X$  se imenuje *baza okolic* za  $x$ , če za poljubno okolico  $V$  za točko  $x$  velja, da obstaja tak  $\lambda \in \Lambda$ , da je  $U_\lambda \subseteq V$ .

**Definicija 2.8.** Naj bo  $(X, \tau)$  topološki prostor in  $A \subseteq X$ .

- (1) Točka  $a \in A$  je *notranja točka* množice  $A$ , če je  $A$  okolica za točko  $a$ .
- (2) *Notranjost* množice  $A$  je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z  $\text{int}(A)$ . Očitno velja  $\text{int}(A) \subseteq A$  in tudi  $\text{int}(A) = A \iff A \in \tau$ .
- (3) *Zaprte* množice  $A$  je najmanjša zaprta množica v  $X$ , ki vsebuje  $A$ . Zaprtje množice označimo z  $\overline{A}$ . Očitno velja  $A \subseteq \overline{A}$  in tudi  $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \iff A$  je zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora  $X$  lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikave med dvema topološkima prostoroma ter pojem homeomorfizma.

**Definicija 2.9.** Naj bo  $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  preslikava med topološkima prostoroma.

- (1) Preslikava  $f$  je *zvezna*, kadar je praslika preslikave  $f$  vsake odprte množice v topološkem prostoru  $(Y, \tau_2)$  odprta tudi v topološkem prostoru  $(X, \tau_1)$ .
- (2) Preslikava  $f$  je *odprta*, kadar je slika preslikave  $f$  vsake odprte množice v topološkem prostoru  $(X, \tau_1)$  odprta tudi v topološkem prostoru  $(Y, \tau_2)$ .
- (3) Preslikava  $f$  je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

**Definicija 2.10.** Naj bo  $X$  topološki prostor.

- (1) Družini  $\mathcal{A}$  množic rečemo *pokritje* topološkega prostora  $X$ , če je  $X \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ .
- (2) Družini  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  rečemo *podpokritje* topološkega prostora  $X$ , če je  $\mathcal{B}$  tudi sama pokritje za  $X$ .
- (3) Topološki prostor je *kompakten*, če vsako njegovo odprto pokritje, tj. pokritje z odprtimi množicami, vsebuje kakšno končno podpokritje.
- (4) Topološki prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka  $x \in X$  kakšno kompaktno okolico.

**Definicija 2.11.** (1) Naj bosta  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{V}$  družini podmnožic topološkega prostora  $X$ . Družina  $\mathcal{V}$  je *pofinitev* družine  $\mathcal{U}$ , če za vsako množico  $V \in \mathcal{V}$  obstaja takšna množica  $U \in \mathcal{U}$ , da je  $V \subset U$ .

- (2) Družina podmnožic  $\mathcal{U}$  topološkega prostora  $X$  je *lokalno končna*, če ima vsaka točka  $x \in X$  okolico, ki seka samo končno mnogo množic iz družine  $\mathcal{U}$ .
- (3) Topološki prostor  $X$  je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora  $X$ .

**Definicija 2.12.** Topološki prostor  $(X, \tau)$  zadošča separacijskemu aksiomu

- (1)  $T_0$ , če za poljubni različni točki  $a, b \in X$  obstaja okolica  $V$  za eno od točk  $a, b$ , ki ne vsebuje druge od točk  $a, b$ ;
- (2)  $T_1$ , če za poljubno točko  $a \in X$  in različno točko  $b \in X$  obstaja okolica  $V$  za točko  $a$ , ki ne vsebuje točke  $b$ ;
- (3)  $T_2$ , če za poljubni različni točki  $a, b \in X$  obstajata disjunktni okolici za točki  $a$  in  $b$ ;
- (4)  $T_3$ , če za poljubno zaprto množico  $A \subseteq X$  in točko  $b \in X \setminus A$  obstajata disjunktni okolici za množico  $A$  in točko  $b$ ;
- (5)  $T_4$ , če za poljubni disjunktni zaprti množici  $A, B \subseteq X$  obstajata disjunktni okolici za množici  $A$  in  $B$ .

**Opomba 2.13.** (1) Iz definicije je razvidno, da  $T_2 \implies T_1 \implies T_0$ .

- (2) Topološkemu prostoru, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_2$ , pravimo *Hausdorffov* topološki prostor.
- (3) Topološkemu prostoru, ki zadošča  $T_1 + T_3$  pravimo *regularen* topološki prostor.
- (4) Topološkemu prostoru, ki zadošča  $T_1 + T_4$ , pravimo *normalen* topološki prostor.

### 3. KAJ JE TOPOLOŠKA GRUPA

Končno lahko strukturi združimo in povežemo ter definiramo pojem topološke grupe.

**Definicija 3.1.** *Topološka grupa* je grupa  $(G, *)$  opremljena s tako topologijo  $\tau$  na množici  $G$ , da sta za  $\tau$  strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo le še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraično kot topološko strukturo.

**Definicija 3.2.** Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem in homeomorfizem.

**Trditev 3.3.** Naj bo  $G$  topološka grupa in  $a \in G$ . Leva translacija  $x \mapsto ax$  in desna translacija  $x \mapsto xa$  za  $a$  sta homeomorfizma iz  $G$  v  $G$ . Prav tako je preslikava invertiranja homeomorfizem iz  $G$  v  $G$ .

**Trditev 3.4.** Za topološko grupo  $G$  in odprto bazo okolice  $\mathcal{U}$  enote  $e$  veljajo naslednje trditve:

- (1) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V^2 \subset U$ ;
- (2) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V^{-1} \subset U$ ;
- (3) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  in vsak element  $x \in U$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $xV \subset U$ ;
- (4) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  in vsak element  $x \in G$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $xVx^{-1} \subset U$ .

Naj bo  $G$  sedaj grupa (ne topološka) in  $\mathcal{U}$  družina podmnožic množice  $G$ , za katero veljajo zgornje štiri lastnosti. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz  $\mathcal{U}$  neprazni. Tedaj je družina  $\{xU\}$ , kjer  $U \in \mathcal{U}$  in  $x \in G$  odprta podbaza za neko topologijo na  $G$ . S to topologijo je  $G$  topološka grupa. Družina  $\{Ux\}$  je podbaza za isto topologijo.

Če velja še, da za vsaki množici  $U, V \in \mathcal{U}$  obstaja množica  $W \in \mathcal{U}$ , da velja  $W \subset U \cap V$ , potem sta družini  $\{xU\}$  in  $\{Ux\}$  tudi bazi za to topologijo.

**Trditev 3.5.** Vsaka topološka grupa  $G$  ima bazo odprtih okolice  $\mathcal{U}$  enote  $e$ , da za vsako okolico  $U$  velja  $U = U^{-1}$ .

**Opomba 3.6.** Lastnosti množic iz trditve 3.5 pravimo simetričnost.

**Posledica 3.7.** Za vsako okolico  $U$  enote  $e$  topološke grupe  $G$  obstaja taka okolica  $V$  enote  $e$ , da velja  $V^{-1} \subset U$ .

### 3.1. Primeri topoloških grup.

## 4. KVOCIENTI TOPOLOŠKIH GRUP

**Trditev 4.1.** Naj bo  $G$  topološka grupa in  $H$  njena podgrupa. Če  $H$  opremimo z relativno topologijo, potem je tudi  $H$  topološka grupa.

**Trditev 4.2.** Naj bosta  $A$  in  $B$  podmnožici topološke grupe  $G$ . Veljajo naslednje trditve:

- (1)  $\overline{A} \overline{B} \subset \overline{AB}$ ,
- (2)  $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$ ,
- (3)  $x\overline{A}y = \overline{xAy}$  za vsaka dva  $x, y \in G$ .

Če  $G$  ustreza še separacijskemu aksiomu  $T_0$ , velja tudi:

- (4) če za vsaka dva elementa  $a \in A$  in  $b \in B$  velja enakost  $ab = ba$ , potem velja enakost  $ab = ba$  tudi za vsaka dva elementa  $a \in \overline{A}$  in  $b \in \overline{B}$ .

**Trditev 4.3.** Naj bo  $G$  topološka grupa in  $H$  njena podgrupa.  $H$  je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa  $H$  topološke grupe  $G$  je tudi zaprta.

**Trditev 4.4.** Naj bo  $U$  simetrična okolica enote  $e$  v topološki grupi  $G$ . Potem je  $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$  odprta in zaprta podgrupa topološke grupe  $G$ .

**Izrek 4.5.** Naj bo  $G$  topološka grupa,  $H$  njena podgrupa in  $\varphi : G \rightarrow G/H$  naravna preslikava. Definiramo  $\theta(G/H) = \{U; \varphi^{-1}(U) \text{ odprta v } G\}$ . Veljajo naslednje trditve:

- (1) družina  $\theta(G/H)$  je topologija na kvocientu  $G/H$ ,
- (2) glede na topologijo  $\theta(G/H)$  je  $\varphi$  zvezna preslikava,
- (3) družina  $\theta(G/H)$  je najmočnejša topologija na kvocientu  $G/H$ , glede na katero je  $\varphi$  zvezna preslikava,
- (4)  $\varphi : G \rightarrow G/H$  je odprta preslikava.

Družini  $\theta(G/H)$  pravimo kvocientna topologija, kvocientu  $G/H$  pa kvocientni prostor.

**Trditev 4.6.** Naj bo  $G$  topološka grupa,  $H$  njena podgrupa in  $U, V$  tako okolici enote  $e$  v  $G$ , da velja  $V^{-1}V \subset U$ . Naj bo  $\varphi : G \rightarrow G/H$  naravna preslikava. Potem velja  $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$ .

**Izrek 4.7.** Za topološko grupo  $G$  in njeno podgrupo  $H$  veljajo naslednje trditve:

- (1) kvocientni prostor  $G/H$  je diskreten natanko tedaj, ko je  $H$  odprta v  $G$ ,
- (2) če je  $H$  zaprta v  $G$ , potem je kvocient  $G/H$  regularen topološki prostor,
- (3) če kvocientni prostor  $G/H$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , potem je  $H$  zaprta v  $G$  in velja, da je kvocient  $G/H$  regularen topološki prostor.

**Izrek 4.8.** Naj bo  $H$  podgrupa edinka topološke grupe  $G$ . Naj bo kvocient  $G/H$  opremljen s kvocientno topologijo  $\theta$ . Veljajo naslednje trditve:

- (1) kvocient  $G/H$  je topološka grupa s topologijo  $\theta$ ,
- (2) naravni homomorfizem je odprta in zvezna preslikava,
- (3) kvocient  $G/H$  je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa  $H$  odprta v  $G$ ,
- (4) kvocient  $G/H$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$  natanko tedaj, ko je podgrupa  $H$  zaprta v  $G$ .

## 5. IZREKI O IZOMORFIZMIH

**Trditev 5.1.** Naj bo  $G$  topološka grupa in  $H$  njena podgrupa. Naj bo za vsak element  $a \in G$  na kvocientu  $G/H$  definirana preslikava  $\psi_a$  s predpisom  $\psi_a(xH) = (ax)H$ . Za vsak element  $a \in G$  je  $\psi_a$  homeomorfizem na prostoru  $G/H$ .

**Opomba 5.2.** Če za vsaki dve točki  $x, y$  topološkega prostora  $X$  velja, da na prostoru  $X$  obstaja homeomorfizem, ki preslika točko  $x$  v točko  $y$ , rečemo, da je  $X$  homogen topološki prostor. Zgornja trditev pravi, da je kvocientni prostor  $G/H$  homogen topološki prostor.

**Trditev 5.3.** Naj bo  $G$  (lokalno) kompaktna topološka grupa in naj bo  $H$  njena podgrupa. Potem je tudi kvocientni prostor  $G/H$  (lokalno) kompakten.

### 5.1. Prvi izrek o izomorfizmih.

**Izrek 5.4** (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). Naj bosta  $G$  in  $\tilde{G}$  topološki grupi. Naj bo  $f : G \rightarrow \tilde{G}$  odprt, zvezen homomorfizem. Potem je  $H := \ker f$  podgrupa edinka v grupi  $G$  in množice  $f^{-1}(\tilde{x})$ , kjer je  $\tilde{x} \in \tilde{G}$ , so disjunktne odseki podgrupe  $H$  v grupi  $G$ . Preslikava  $\Phi : \tilde{G} \rightarrow G/H$  s predpisom  $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$  je topološki izomorfizem.



## 5.2. Drugi izrek o izomorfizmih.

**Izrek 5.5.** *Naj bo  $G$  topološka grupa,  $A$  njena podgrupa in  $H$  podgrupa edinka grupe  $G$ . Naj bo  $\tau$  izomorfizem iz kvocienta  $(AH)/H$  v kvocient  $A/(A \cap H)$  s predpisom  $\tau(aH) = a(A \cap H)$ , kjer je  $a \in A$ . Potem  $\tau$  slika odprte množice iz  $(AH)/H$  v odprte množice iz  $A/(A \cap H)$ .*

**Izrek 5.6** (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). *Naj bodo objekti  $G, A, H$  in  $\tau$  isti kakor v izreku 5.5. Naj bo podgrupa  $A$  še lokalno kompaktna in  $\sigma$ -kompaktna, naj bo  $H$  zaprta v  $G$  in  $AH$  lokalno kompaktna. Tedaj je  $\tau$  homeomorfizem ter topološki grupi  $(AH)/H$  in  $A/(A \cap H)$  sta topološko izomorfni.*

## 5.3. Tretji izrek o izomorfizmih.

**Izrek 5.7.** *Naj bo  $G$  topološka grupa z enoto  $e$  in naj bo  $\tilde{G}$  topološka grupa z enoto  $\tilde{e}$ . Naj bo  $f$  odprt, zvezen homomorfizem iz grupe  $G$  v grupo  $\tilde{G}$ . Naj bo  $\tilde{H}$  podgrupa edinka grupe  $\tilde{G}$ . Označimo  $H = f^{-1}(\tilde{H})$  in  $N = f^{-1}(\tilde{e})$  ( $N$  je jedro homomorfizma  $f$ ). Potem so grupe  $G/H, \tilde{G}/\tilde{H}$  in  $(G/N)/(H/N)$  topološko izomorfne.*

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraini različici in ne vsebuje pomožne topološke grupe  $\tilde{G}$ .

**Izrek 5.8** (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe). *Naj bo  $G$  topološka grupa in  $H, N$  taki njeni podgrupi edinki, da velja  $N \subset H$ . Potem sta kvocientni topološki grupi  $G/H$  in  $(G/N)/(H/N)$  topološko izomorfni.*

## 6. IZREKI TIPA “2 OD 3”

### 7. SEPARACIJSKI AKSIOMI IN METRIZABILNOST

**Definicija 7.1.** Topološki prostor  $X$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_{3\frac{1}{2}}$ , če za poljubno zaprto množico  $A \subseteq X$  in točko  $b \in X \setminus A$  obstaja zvezna realna funkcija  $\psi$  definirana na  $G$ , da je  $\psi(b) = 0$  in  $\psi(x) = 1$  za vsak  $x \in A$ .

**Opomba 7.2.** Topološki prostoru, ki zadošča  $T_1 + T_{3\frac{1}{2}}$ , pravimo *povsem regularen* topološki prostor.

**Trditev 7.3.** (1) *Vsak povsem regularen topološki prostor je regularen.*  
(2) *Vsak normalen topološki prostor je povsem regularen.*

**Izrek 7.4.** *Vsaka topološka grupa  $G$ , ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$  je regularen topološki prostor.*

### 7.1. Metrizabilnost.

**Definicija 7.5.** *Pseudometrika na neprazni množici  $X$  je preslikava  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , ki zadošča naslednjim pogojem:*

- (1) za vsaki dve točki  $x, y \in X$  velja  $\rho(x, y) \geq 0$  in  $\rho(x, x) = 0$ ;
- (2) za vsaki dve točki  $x, y \in X$  velja  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- (3) za vsake tri točke  $x, y, z \in X$  velja  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Če za preslikavo  $d$  velja še

- (4)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,

potem ji rečemo *metrika*.

**Definicija 7.6.** Naj bo  $X$  neprazna množica.

- (1) Neprazna poddružina  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  je *filter* množice  $X$ , če ima naslednje lastnosti:
  - (a) družina  $\mathcal{F}$  ne vsebuje prazne množice,
  - (b) za vsako množico  $F \in \mathcal{F}$  je vsaka taka množica  $E \in X$ , za katero velja  $F \subseteq E$ , tudi v družini  $\mathcal{F}$ ,
  - (c) če sta množici  $E$  in  $F$  v družini  $\mathcal{F}$ , je tudi množica  $E \cap F$  v družini  $\mathcal{F}$ .
- (2) Filter  $\mathcal{U}$  na množici  $X \times X$  definira *uniformno strukturo* na množici  $X$ , če ima naslednje lastnosti:
  - (a) vsaka množica  $U \in \mathcal{U}$  ima diagonalno množico  $X \Delta = \{(x, x); x \in X\}$  za svojo podmnožico,
  - (b) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  je tudi množica  $U^{-1} \in \mathcal{U}$ ,
  - (c) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V \circ V \subseteq U$ .

Množici z uniformno stukturo rečemo tudi *uniformni prostor*.

**Opomba 7.7.** V zgornji definiciji so operacije na množicah mišljene v smislu relacij (glej podrazdelek 2.1).

**Trditev 7.8.** Vsaka topološka grupa je uniformni prostor.

**Izrek 7.9.** Naj bo  $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$  tako zaporedje simetričnih okolic enote  $e$  v topološki grupi  $G$ , da za vsak  $k \in \mathbb{N}$  velja  $U_{k+1}^2 \subset U_k$ . Označimo  $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ . Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika  $\sigma$  na  $G$  z naslednjimi lastnostmi:

- (1)  $\sigma$  je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od  $G \times G$ ;
- (2)  $\sigma(x, y) = 0$  natanko tedaj, ko  $y^{-1}x \in H$ ;
- (3)  $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$ , če  $y^{-1}x \in U_k$ ;
- (4)  $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$ , če  $y^{-1}x \notin U_k$ .

Če velja še  $xU_kx^{-1} = U_k$  za vsak  $x \in G$  in  $k \in \mathbb{N}$ , potem je  $\sigma$  tudi desnoinvariantna in velja

- (5)  $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$  za vsaka dva elementa  $x, y \in G$ .

**Definicija 7.10.** Topološki prostor  $X$  je *metrizabilen*, če njegova topologija  $\tau$  izhaja iz kakšne metrike  $d$  na množici  $X$ , tj. baza topologije  $\tau$  je družina odprtih krogel  $\{K(x, \epsilon); x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}\}$ .

**Izrek 7.11.** Topološka grupa  $G$ , ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote  $e$ .

## 7.2. Separacijski aksiomi do $T_{3\frac{1}{2}}$ .

**Izrek 7.12.** Naj bo  $G$  topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ . Naj bo  $a \in G$  točka in  $F$  zaprta podmnožica v  $G$ , ki ne vsebuje  $a$ . Potem obstaja taka zvezna realna funkcija  $\psi$  definirana na  $G$ , da je  $\psi(a) = 0$  in  $\psi(x) = 1$  za vsak  $x \in F$ .

Drugače: vsaka  $T_0$  topološka grupa je povsem regularna.

## 7.3. Separacijski aksiom $T_4$ .

**Izrek 7.13.** Če je  $m$  katerokoli neštevno kardinalno število, potem je  $\mathbb{Z}^m$  nenormalna povsem regularna topološka grupa.

**Trditev 7.14.** Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.

**Izrek 7.15.** Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je normalen topološki prostor.

## SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

### LITERATURA

- [1] S. Bhowmik, *Introduction to Uniform Spaces*, 10.13140/RG.2.1.3743.8967, junij 2014, [ogled 1. 4. 2019], dostopno na [https://www.researchgate.net/publication/305196408\\_INTRODUCTION\\_TO\\_UNIFORM\\_SPACES](https://www.researchgate.net/publication/305196408_INTRODUCTION_TO_UNIFORM_SPACES).
- [2] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [3] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44** DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.