UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina

Topološke grupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2019

Kazalo

Topološke grupe

Povzetek

povzetek HERE

Topological groups

Abstract

ABSTRACT HERE

Math. Subj. Class. (2010): 22A05, 43-00, 54D15, 54D20, 54D45, 54E35

Ključne besede: topološka grupa, metrizabilnost, povsem regularnost, parakompaktnost, separacijski aksiomi

Keywords: topological group, separation axioms, metrizability, complete regularity, paracompactness

1. Uvod

2. Preliminarna poglavja

V tem poglavju bomo ponovili že znane pojme iz algebre in splošne topologije, ki nam bodo kasneje prišli prav. Dogovorili se bomo tudi o zapisu operacij na množicah. Navedli bomo nekaj definicij in trditev, za katere privzemamo, da so bralcu že poznane.

2.1. Operacije na množicah.

2.1. Operacije na množicah. Vse operacije na množicah, če ne bo drugače zaznamovano, delujejo na elementih. Tako je na primer produkt množic U in V enak

$$U \cdot V = \{u \cdot v; u \in U, v \in V\},$$

inverz množice U pa je

$$U^{-1} = \{u^{-1}; u \in G\}.$$

Tukaj se v obeh primerih predpostavlja, da so množice vložene v neki grupi, kjer so operacije na elementih smiselno definirane. Grupno strukturo bomo bolj podrobno opisali v naslednjem podrazdelku.

Pomembnejša izjema temu pravilu so operacije na množicah v smislu relacij. Predpostavimo torej, da imamo množico X in nas zanimajo podmnožice kartezičnega produkta $X \times X$. Inverz take množice U je definiran kot

$$U^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in U\},$$

analogna operacija množenju pa je kompozitum množic

$$V \circ U = \{(x, z);\ \text{obstaja tak element } y \in X,\ \text{da je } (x, y) \in V \text{ in } (y, z) \in U\}.$$

Takšni notaciji operacij bosta vedno posebej označeni.

2.2. Teorija grup. V tem podpoglavju bomo ponovili nekaj osnovnih algebraičnih pojmov, predvsem iz teorije grup.

Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

(1) je zaprta za operacijo $*$,
(2) je operacija $*$ asociativna na množici G,
(3) v G obstaja tak element e (imenujemo ga *enota*), da za vsak element x množice G velja
$$x * e = e * x = x,$$
(4) za vsak element x množice G obstaja tak element $y \in G$, da velja
$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je $(G, *)$ ali samo G, če je operacija znana ali drugače očitna. Od tukaj naprej bo zapis operacije vedno multiplikativen, razen če bo drugače povdarjeno. To pomeni, da bo grupna operacija označena s $\cdot$ ali pa bo izpuščena.

Med grupami lahko definiramo nekaj tipov preslikav. Našteli bomo dva, ki ju bomo v nadaljevanju najbolj potrebovali. Preslikava $f\colon G \to \widetilde{G}$ je *homomorfizem* grup, če za vsaka dva elementa $a, b \in G$ velja $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. Preslikava je *izomorfizem* grup, če je bijektivna in homomorfizem grup.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj podstruktur grupe. Podmnožica H grupe G je *podgrupa*, če je tudi sama grupa za isto operacijo. Množicama $aH = \{ah; h \in H\}$ in $Ha = \{ha; h \in H\}$ zaporedoma pravimo *levi* in *desni odsek* grupe G elementa $a \in G$ po podgrupi H.

Podgrupi H grupe G rečemo podgrupa *edinka*, če za vsak element $a \in G$ velja

$$aHa^{-1} \subseteq H.$$

Množici $G/H = \{aH; a \in G\}$ rečemo *kvocientna množica* grupe G po podgrupi H. *Naravna preslikava* na kvocientno množico G/H je preslikava $\varphi\colon G \to G/H$, definirana s predpisom $a \mapsto aH$. Kvocientna množica v splošnem ni grupa, razen v primeru, ko je H podgrupa edinka. Če je N podgrupa edinka grupe G, je kvocientna množica G/N grupa za operacijo $*$, kjer je $aH * bH = (a \cdot b)H$, naravna preslikava φ pa je homomorfizem grup, ki ji rečemo *naravni homomorfizem*.

2.3. **Topološki prostori.** V tem podpoglavju bomo ponovili nekaj pojmov iz splošne topologije, ki jih bomo kasneje podrobneje obravnavali na topoloških grupah.

Topologija na neprazni množici X je neprazna družina podmnožic $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:

(1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,
(2) za poljubni dve množici $U, V \in \tau$ je tudi presek $U \cap V \in \tau$,
(3) za poljubno poddružino $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau$ je tudi unija $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Množici X, opremljeni s topologijo τ, rečemo *topološki* prostor, ki ga označimo z (X, τ). Množice v družini τ imenujemo *odprte* množice v topološkem prostoru X, *zaprte* množice pa definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico X.

Družina $\mathcal{B}$ je *baza* za topologijo τ, če je vsaka množica iz topologije τ unija nekaterih množic iz $\mathcal{B}$, družina $\mathcal{P}$ pa je *podbaza* za topologijo τ, če je družina vseh končnih presekov množic iz $\mathcal{P}$ baza za topologijo τ.

Množica $U \subseteq X$ je *okolica* za točko $x \in X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $x \in V \subseteq U$. Na podoben način lahko definiramo okolico dane množice. Množica $U \subseteq X$ je okolica množice $A \subseteq X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $A \subseteq V \subseteq U$. Družina okolic $\mathcal{U}_x$ točke $x \in X$ se imenuje *baza okolic* za x, če za poljubno okolico V točke x velja, da obstaja tak $U \in \mathcal{U}_x$, da je $U \subseteq V$.

Točka $a \in A$ je *notranja točka* množice A, če je A okolica za točko a. *Notranjost* množice A je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z $\mathrm{int}(A)$. Očitno velja $\mathrm{int}(A) \subseteq A$ in da je $\mathrm{int}(A) = A$ natanko tedaj, ko je $A \in \tau$. *Zaprtje* množice A je najmanjša zaprta množica v X, ki vsebuje A. Zaprtje množice označimo z $\overline{A}$. Očitno velja $A \subseteq \overline{A}$ in da je $\overline{A} = A$ natanko tedaj, ko je A zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora X lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikav med topološkimi prostori ter pojem homeomorfizma.

Naj bo $f\colon (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ preslikava med topološkima prostoroma. Preslikava f je *zvezna*, kadar je praslika vsake odprte množice v topološkem prostoru (Y, τ_2) s preslikavo f odprta tudi v topološkem prostoru (X, τ_1). Preslikava f je *odprta*, kadar je slika vsake odprte množice v topološkem prostoru (X, τ_1) s preslikavo f odprta tudi v topološkem prostoru (Y, τ_2). Preslikava f je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

Osnovna podstruktura topološkega prostora je topološki podprostor. Najprej vzemimo topološki prostor X s topologijo τ in množico $A \subseteq X$. *Inducirana* ali *relativna topologija* na množici A, inducirana s topologijo τ, je družina množic $\{A \cap U; U \in \tau\}$. Prostoru A rečemo *topološki podprostor* prostora X.

Oglejmo si še produkt topoloških prostorov. Naj bosta X in Y topološka prostora s topologijama τ_1 in τ_2. *Produktna topologija* na kartezičnemu produktu $X \times Y$ je topologija, generirana z bazo $\{U\times V; U\in\tau_1, V\in\tau_2\}$. *Produkt* topoloških prostorov X in Y je topološki prostor $X\times Y$, opremljen s produktno topologijo. Na produktu topoloških prostorov lahko definiramo projekcijski preslikavi $\mathrm{pr}_x\colon X\times Y\to X$, $\mathrm{pr}_x(x,y)=x$ in $\mathrm{pr}_y\colon X\times Y\to Y$, $\mathrm{pr}_y(x,y)=y$, ki sta zvezni in odprti preslikavi glede na primerne topologije.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj pojmov povezanih s kompaktnostjo topoloških prostorov, ki si jih bomo kasneje ogledali v kontekstu topoloških grup, definirali pa bomo tudi nove. Družini $\mathcal{A}$ množic rečemo *pokritje* topološkega prostora X, če je $X=\bigcup\mathcal{A}$, družini $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ pa rečemo *podpokritje* topološkega prostora X, če je $\mathcal{B}$ tudi sama pokritje za X. Topološki prostor je *kompakten*, če vsako njegovo odprto pokritje, tj. pokritje z odprtimi množicami, vsebuje kakšno končno podpokritje. Topološki prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka $x\in X$ kakšno kompaktno okolico.

Ponovimo še do sedaj obravnavane separacijske aksiome. Topološki prostor (X,τ) zadošča separacijskemu aksiomu

T_0, če za poljubni različni točki $a,b\in X$ obstaja okolica V za eno od točk a,b, ki ne vsebuje druge.

T_1, če za poljubno točko $a\in X$ in točko $b\in X\setminus\{a\}$ obstaja okolica V točke a, ki ne vsebuje točke b.

T_2, če za poljubni različni točki $a,b\in X$ obstajata disjunktni okolici za točki a in b.

T_3, če za poljubno zaprto množico $A\subseteq X$ in točko $b\in X\backslash A$ obstajata disjunktni okolici za množico A in točko b.

T_4, če za poljubni disjunktni zaprti množici $A,B\subseteq X$ obstajata disjunktni okolici za množici A in B.

Topološkemu prostoru, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_2, pravimo *Hausdorffov* topološki prostor. Iz zgornje definicije je razvidno, da vsak Hausdorffov topološki prostor zadošča separacijskemu aksiomu T_1 in s tem tudi T_0. Topološkemu prostoru, ki zadošča T_1 in T_3 pravimo *regularen*, topološkemu prostoru, ki zadošča T_1 in T_4, pa *normalen* topološki prostor.

Separacijske aksiome v povezavi z metrizabilnostjo na topoloških grupah si bomo podrobneje ogledali v kasnejših poglavjih.

3. Kaj je topološka grupa

V tem poglavju bomo združili pojem topološkega prostora s pojmom grupe in ju povezali v pojem topološke grupe. Ogledali si bomo nekaj primerov in temeljnih lastnosti.

3.1. Definicija topološke grupe.

Iz definicije grupe je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje* $\mu\colon G\times G\to G$, $(x,y)\mapsto xy$,
- *invertiranje* $\iota\colon G\to G$, $x\mapsto x^{-1}$.

S pomočjo strukturnih preslikav bomo sedaj definirali topološko grupo.

Definicija 3.1. *Topološka grupa* je grupa G opremljena s takšno topologijo τ, da sta glede na τ strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraično kot topološko strukturo.

Definicija 3.2. Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem grup in homeomorfizem topoloških prostorov.

3.2. **Primeri topoloških grup.**

Primer 3.3. Vsaka grupa G je za diskretno topologijo $\tau_d = 2^G$ in trivialno topologijo $\tau_t = \{\emptyset, G\}$ topološka grupa, saj je glede na njiju zvezna vsaka preslikava na G ali $G \times G$. $\diamondsuit$

Primer 3.4. Realna števila za operacijo $+$ so topološka grupa z evklidsko topologijo.

Preverimo, da sta strukturni operaciji $\mu(x, y) = x + y$ in $\iota(x) = -x$ zvezni. Po definiciji produktne topologije sta projekcijski preslikavi zvezni. Strukturna preslikava seštevanja $\mu = \mathrm{pr}_x + \mathrm{pr}_y$ je zvezna kot vsota zveznih preslikav.

Zveznost invertiranja je dovolj preveriti na baznih množicah evklidske topologije. Vzemimo interval (a, b). Tudi $\iota^{-1}((a, b)) = \iota((a, b)) = (-b, -a)$ je bazična množica in zato odprta. Torej je invertiranje zvezna preslikava. $\diamondsuit$

Primer 3.5. Spomnimo se, da je $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, zato je enotska krožnica v kompleksni ravnini $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ s podedovanim množenjem topološka grupa za relativno topologijo kot podprostor $\mathbb{R}^2$. $\diamondsuit$

Primer 3.6. Realna števila za operacijo $+$ niso topološka grupa s topologijo $\tau = \{(a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Vzemimo odprto množico (a, ∞) in si oglejmo njeno prasliko glede na preslikavo invertiranja. Ker $\iota((a, \infty)) = (-\infty, -a)$ ni odprta množica v topologiji τ, prostor $(\mathbb{R}, \tau)$ ni topološka grupa. Kasneje bomo pokazali, da realna števila s to topologijo niso topološka grupa za nobeno operacijo. $\diamondsuit$

3.3. **Osnovne lastnosti topoloških grup.** Najprej ponovimo nekaj preslikav iz teorije grup, ki jih bomo skozi celotno delo pogosto uporabljali. *Leva* in *desna translacija* za element $a \in G$ sta zaporedoma definirani s predpisoma $l_a \colon x \mapsto ax$ in $r_a \colon x \mapsto xa$. *Konjugiranje* z elementom $a \in G$ je definirano s predpisom $\gamma_a \colon x \mapsto axa^{-1}$. Naslednja trditev nam pove, zakaj bomo te preslikave v nadaljevanju veliko uporabljali.

Trditev 3.7. *Naj bo G topološka grupa in $a \in G$.*

(1) Leva in desna translacija za element a sta homeomorfizma iz G v G.
(2) Invertiranje je homeomorfizem iz G v G.
(3) Konjugiranje je homeomorfizem iz G v G.

Dokaz. Vemo že, da so leva translacija, desna translacija, invertiranje in konjugiranje bijektivne preslikave. Dokazujemo še zveznost preslikave in njenega inverza.

Ker je konstantna preslikava $\mathrm{c}_a \colon x \mapsto a$ zvezna in ker lahko levo translacijo zapišemo kot kompozitum zveznih preslikav

$$l_a(x) = \mu(\mathrm{c}_a(x), x) = ax,$$

je leva translacija zvezna. Inverzna preslikava levi translaciji za element a je leva translacija za element a^{-1}, ki je tudi zvezna. Leva translacija je zato homeomorfizem.

Za dokaz zveznosti desne translacije najprej opazimo, da velja

$$r_a(x) = \mu(x, \mathrm{c}_a(x)) = xa,$$

nato pa sledimo zgornjemu dokazu.

Invertiranje je homeomorfizem, ker je zvezno po definiciji topološke grupe in samo sebi inverz.

Konjugiranje lahko zapišemo kot kompozitum homeomorfizmov

$$\gamma = r_{a^{-1}} \circ l_a,$$

nato pa uporabimo točko (1). $\square$

Trditev 3.8. *Naj bo A odprta podmnožica topološke grupe G. Tedaj sta za vsako množico $B \subseteq G$ množici AB in BA odprti.*

Dokaz. Ker je po trditvi 3.7 desna translacija homeomorfizem, so odprte tudi vse množice Ax za vsak $x \in G$. Ker je $AB = \bigcup_{b \in B}\{Ab\}$, je množica AB odprta kot unija odprtih množic.

Za dokaz odprtosti množice BA opazimo, da so po trditvi 3.7 odprte tudi vse množice xA za vsak $x \in X$, potem pa sledimo zgornjemu dokazu. $\square$

Trditev 3.9. *Za kompaktni podmnožici A in B topološke grupe G velja, da je množica AB kompaktna.*

Dokaz. Iz splošne topologije vemo, da je kompaktnost končno multiplikativna lastnost. Množica $A \times B$ je zato kompaktna podmnožica v prostoru $G \times G$. Ker je operacija množenja μ zvezna preslikava, je množica $\mu(A \times B) = AB$ kompaktna v prostoru G. $\square$

Sledi nekaj trditev, ki se nanašajo na okolice enote topološke grupe. Dokazali bomo nekaj lastnosti baze odprtih okolic enote topološke grupe, nato pa pokazali kaj mora veljati, da je družina podmnožic topološke grupe baza njene topologije.

Trditev 3.10. *Za topološko grupo G in bazo $\mathcal{U}$ odprtih okolic enote e veljajo naslednje trditve:*

(1) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$;
(2) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$;
(3) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in U$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$;
(4) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in G$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xVx^{-1} \subset U$.

Dokaz. Naj bo $U \in \mathcal{U}$ odprta okolica enote e. Ker je množenje zvezno, obstaja v produktni topologiji na $G \times G$ bazična okolica $W = V_1 \times V_2$ elementa (e, e), za katero velja $V_1V_2 \subset U$. Po definiciji produktne topologije sta V_1 in V_2 odprti okolici enote e v G. Tedaj je $V' = V_1 \cap V_2$ okolica za e. Po definiciji baze okolic obstaja $V \in \mathcal{U}$, da velja $V \subseteq V'$. Ker je $V \subseteq V' \subseteq V_1$ in $V \subseteq V' \subseteq V_2$, velja

$$V^2 \subseteq V'^2 \subseteq V_1V_2 \subset U.$$

To dokaže prvo trditev.

Ker je invertiranje zvezno, obstaja v G odprta okolica W enote e, za katero velja $W^{-1} \subset U$. Po definiciji baze okolic obstaja okolica $V \in \mathcal{U}$, za katero velja $V \subseteq W$. Potem je $V^{-1} \subseteq W^{-1}$. Velja

$$V^{-1} \subset W^{-1} \subset U.$$

To dokaže drugo trditev.

Vzemimo poljubno točko $x \in U$. Naj bo $W = x^{-1}U$. Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je W odprta okolica enote e. Če vzamemo $V \in \mathcal{U}$, $V \subset W$, ki obstaja po definiciji baze okolic, velja

$$xV \subset xW = xx^{-1}U = U,$$

kar dokaže tretjo trditev.

Naj bo $x \in U$ poljubna točka. Ker je po trditvi 3.7 konjugiranje homeomorfizem, je množica $W = x^{-1}Ux$ odprta okolica enote e. Če vzamemo $V \in \mathcal{U}$, $V \subset W$, ki obstaja po definiciji baze okolic, velja

$$xVx^{-1} \subset xWx^{-1} = xx^{-1}Uxx^{-1} = U,$$

kar dokaže še četrto trditev. □

Izrek 3.11. *Naj bo G grupa in $\mathcal{U}$ družina podmnožic množice G, za katero veljajo vse štiri lastnosti iz trditve 3.10. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz $\mathcal{U}$ neprazni. Tedaj je družina $\{xU\}$, kjer $U \in \mathcal{U}$ in $x \in G$, odprta podbaza za neko topologijo na G. S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux\}$ je podbaza za isto topologijo.*

Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ tudi bazi za to topologijo.

Dokaz. Za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$. Ker je $V \in \mathcal{U}$, obstaja taka množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W^{-1} \subset V$. Ker velja $V \cap W \neq \emptyset$, je

$$e \in VW^{-1} \subset V^2 \subset U.$$

Vsaka množica $U \in \mathcal{U}$ torej vsebuje enoto e. Družina $\{xU; x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ je torej res podbaza neke topologije na G, saj je pokritje za G.

Za vsako izbiro množic $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ obstajajo take množice $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{U}$, da velja $V_k^2 \subset U_k$ za $k = 1, \ldots, n$. Potem velja

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)^2 \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} V_k^2 \subset \bigcap_{k=1}^{n} U_k.$$

Za družino $\widetilde{\mathcal{U}}$ torej velja lastnost (1) trditve 3.10. Ker je

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)^{-1} = \bigcap_{k=1}^{n} V_k^{-1},$$

za družino $\widetilde{\mathcal{U}}$ velja lastnost (2) trditve 3.10. Ker velja

$$x\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} (xV_k)$$

in

$$x\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)x^{-1} = \bigcap_{k=1}^{n} (xV_kx^{-1}),$$

za družino $\widetilde{\mathcal{U}}$ veljata tudi lastnosti (3) in (4) trditve 3.10.

Po definiciji podbaze vse neprazne množice oblike $\bigcap_{k=1}^{n}(x_kU_k)$, kjer je $x_k \in G$ in $U_k \in \mathcal{U}$, tvorijo bazo za neko topologijo na prostoru G. Vzemimo nek element $y \in \bigcap_{k=1}^{n}(x_kU_k)$. Naj bo $V_k \in \mathcal{U}$ tista množica, ki zadošča lastnosti (3) za element $x_k^{-1}y$, torej da velja $x_k^{-1}yV_k \subset U_k$. Potem velja

$$y\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} (yV_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} (x_kU_k).$$

Torej množice oblike $y\widetilde{U}$, kjer je $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$ tvorijo odprto bazo za element y za vsak element $y \in G$.

Da pokažemo, da je G res topološka grupa, vzemimo poljubna elementa $a, b \in G$ in poljubno množico $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$. Ker družina množic $\widetilde{\mathcal{U}}$ zadošča lastnostma (1) in (4) trditve 3.10, obstajata takšni množici $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja $(b^{-1}\widetilde{W}b)\widetilde{V} \subset \widetilde{U}$. Od tod sledi, da je $(a\widetilde{W})(b\widetilde{V}) \subset ab\widetilde{U}$, iz česar sledi, da je operacija množenja zvezna preslikava. Ker družina množic $\widetilde{\mathcal{U}}$ zadošča lastnostma (2) in (4) trditve 3.10, obstaja takšna množica $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja $(b\widetilde{V}b^{-1})^{-1} \subset \widetilde{U}$. Od tod sledi, da je $b^{-1}(b\widetilde{V}b^{-1})^{-1} = b^{-1}b(b\widetilde{V})^{-1} = (bV)^{-1} \subset b^{-1}\widetilde{U}$, torej je invertiranje zvezna preslikava. Topološki prostor G je torej topološka grupa.

Iz lastnosti (4) trditve 3.10 je tudi razvidno, da družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ porodita ekvivalentno topologijo na G, saj lahko vsako množico oblike Ux dobimo s konjugiranjem množice xU z elementom x^{-1}, konjugiranje pa je po trditvi 3.7 homeomorfizem. □

Definicija 3.12. Množici, za katero velja $U = U^{-1}$, rečemo *simetrična* množica.

Trditev 3.13. *Vsaka topološka grupa ima bazo $\mathcal{U}$ odprtih in simetričnih okolic enote.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{V}$ neka baza odprtih okolic enote. Za vsako okolico $V \in \mathcal{V}$ definiramo množico $U = V \cap V^{-1}$. Kot presek dveh odprtih množic je U odprta. Ker je $e \in V$ in $e \in V^{-1}$, je U odprta okolica enote, ki je po konstrukciji simetrična. Ker po definiciji preseka velja še $U \subseteq V$, je družina $\mathcal{U} = \{V \cap V^{-1}; V \in \mathcal{V}\}$ res baza odprtih in simetričnih okolic enote e. □

Trditev 3.14. *Za topološko grupo G so naslednje trditve ekvivalentne:*

(1) Topološka grupa G zadošča separacijskemu aksiomu T_0.
(2) Množica $\{e\}$ je zaprta v G.
(3) Topološka grupa G je Hausdorffov topološki prostor.

Dokaz. (1) ⇒ (2): Implikacijo bomo dokazali tako, da bomo pokazali, da je množica $G\setminus\{e\}$ okolica za vsako svojo točko, iz česar bo sledilo, da je odprta. Vzemimo točko $x \in G \setminus \{e\}$. Ker G zadošča separacijskemu aksiomu T_0, obstaja bodisi okolica za točko x, ki ne vsebuje enote e, bodisi okolica V za enoto e, ki ne vsebuje točke x. V prvem primeru sledi, da je $G \setminus \{e\}$ okolica za točko x. Zato lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da obstaja okolica V enote e, ki ne vsebuje točke x. Množica $x^{-1}V$ je potem okolica za točko x^{-1}, ki ne vsebuje enote e, zato je $\iota(x^{-1}V)$ okolica za točko x, ki ne vsebuje enote e. Ker velja $\iota(x^{-1}V) \subseteq G \setminus \{e\}$, je $G \setminus \{e\}$ okolica za točko x. Množica $G \setminus \{e\}$ je torej okolica za vsako svojo točko in je zato odprta. Sledi, da je $\{e\}$ zaprta množica.

(2) ⇒ (3): Privzemimo, da je $\{e\}$ zaprta množica. Oglejmo si preslikavo $f\colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$. Preslikava f je zvezna kot kompozitum množenja in invertiranja, ki sta zvezni preslikavi po definiciji topološke grupe. Zato je $f^{-1}(\{e\}) = \{(x, x); x \in G\}$ zaprta množica v $G \times G$. Po izreku iz splošne topologije je G Hausdorffov topološki prostor.

(3) ⇒ (1): Sledi iz definicije separacijskega aksioma T_2. □

Trditev 3.15. *Za podmnožici A in B topološke grupe G veljajo naslednje trditve:*

(1) $\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{AB}$,
(2) $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$,
(3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ za vsaka dva elementa $x, y \in G$.
(4) Če G ustreza separacijskemu aksiomu T_0 in za vsaka dva elementa $a \in A$ in $b \in B$ velja enakost $ab = ba$, potem velja enakost $ab = ba$ tudi za vsaka dva elementa $a \in \overline{A}$ in $b \in \overline{B}$.

Dokaz. Naj bosta A in B podmnožici topološke grupe G. Spomnimo se, da je poljubna preslikava f zvezna natanko tedaj, ko velja $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Če je preslikava homeomorfizem, velja enačaj.

Za dokaz točke (1) upoštevamo le, da je operacija množenja zvezna preslikava po definiciji topološke grupa. Potem po zgornjem velja

$$\overline{A}\,\overline{B} = \mu(\overline{A} \times \overline{B}) \subseteq \overline{\mu(A \times B)} = \overline{AB}$$

Enakost v točki (2) bo sledila iz tega, da je invertiranje po trditvi 3.7 homeomorfizem. Vzemimo množico $A \subset G$. Ker je invertiranje homeomorfizem, je $\iota(\overline{A}) = \overline{\iota(A)}$. Torej je $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

Enakost v točki (3) bo sledila iz tega, da sta leva in desna translacija po trditvi 3.7 homeomorfizma. Naj bosta $x, y \in G$. Tedaj je tudi $f = r_y \circ l_x$ homeomorfizem. Velja torej

$$x\overline{A}y = f(\overline{A}) = \overline{f(A)} = \overline{xAy}.$$

Za dokaz točke (4) privzemimo še, da G zadošča separacijskemu aksiomu T_0 in da velja $ab = ba$ za vsaka dva elementa $a \in A$ in $b \in B$. Preslikava $f\colon (a,b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$ je zvezna, saj je kompozitum množenj in invertiranj:

$$f(a,b) = \mu(\mu(a,b), \mu(\iota(a), \iota(b))).$$

Ker je po trditvi 3.14 množica $\{e\}$ zaprta, je zaprta tudi množica $H = f^{-1}(\{e\}) = \{(a,b) \in G \times G; aba^{-1}b^{-1} = e\}$. Po predpostavki velja $A \times B \subseteq H$. Ker je $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$ in po predpostavki velja $A \times B \subseteq H$, je $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq H$, torej velja $ab = ba$ za vsaka dva elementa $a \in \overline{A}$ in $b \in \overline{B}$. □

Še enkrat si oglejmo primer 3.6.

Primer 3.16. Zgoraj smo pokazali, da strukturna preslikava invertiranja ni zvezna, v kar pa se lahko prepričamo tudi drugače.

Po trditvi 3.14 za vsako topološko grupo velja, da zadošča separacijskemu aksiomu T_0 natanko tedaj, ko je Hausdorffova. Topološki prostor $(\mathbb{R}, +, \tau)$ zadošča separacijskemu aksiomu T_0, saj je za vsaki dve točki $a < b$ množica $(\frac{a+b}{2}, \infty)$ okolica za točko b, ki ne vsebuje točke a. Hkrati pa je očitno, da ta prostor ni Hausdorffov, saj se vsaki dve neprazni odprti množici sekata. Topološki prostor $(\mathbb{R}, +, \tau)$ torej ne more biti topološka grupa. Še več, topološki prostor $(\mathbb{R}, \tau)$ ni topološka grupa za nobeno operacijo, saj informacije o operaciji v zgornjem premisleku sploh nismo uporabili. ♢

Primer 3.17. Naj bo G poljubna neskončna grupa in naj bo topologija τ topologija končnih komplementov, tj. $\tau = \{U \subseteq G; |G \setminus U| < \infty\}$. Iz splošne topologije vemo, da je to najšibkejša topologija na G, da topološki prostor G zadošča separacijskemu aksiomu T_1, ne pa tudi T_2. Od tod po enakem razmisleku kot v primeru 3.16 sledi, da topološki prostor (G, τ) ni topološka grupa za nobeno operacijo. ♢

4. Topološke podgrupe in kvocientne grupe

4.1. **Topološke podgrupe.**

Trditev 4.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Če H opremimo z relativno topologijo, potem je tudi H topološka grupa.*

Dokaz. Preslikavi $\mu|_{H \times H}$ in $\iota|_H$ sta zvezni glede na relativno topologijo na H kot zožitvi zveznih preslikav na topološki podprostor H. Zato je H topološka grupa. □

Trditev 4.2. *Podgrupa H topološke grupe G je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa H topološke grupe G je tudi zaprta.*

Dokaz. Denimo, da obstaja element $x \in \text{int}(H)$. Potem obstaja taka okolica U enote e, da je $xU \subset H$. Dokazali bomo, da velja $H \subseteq \text{int}(H)$. Ker za poljuben $y \in H$ velja

$$yU = yx^{-1}xU \subset yx^{-1}H = H,$$

je $y \in \text{int}(H)$. Torej je vsaka točka v podgrupi H notranja točka, kar pomeni, da je H odprta množica.

Obratno, če je H odprta, vsaka njena točka leži tudi v njeni notranjosti. Torej ima H neprazno notranjost.

Privzemimo, da je H odprta podgrupa grupe G. Ker je H podgrupa, je $G \setminus H = \bigcup\{xH; x \notin H\}$. Ker je H odprta in je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je tudi vsaka množica xH odprta. Potem je tudi $G \setminus H$ odprta kot unija odprtih množic, torej je H zaprta množica. $\square$

Trditev 4.3. *Naj bo U simetrična okolica enote e v topološki grupi G. Potem je $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G.*

Dokaz. Ker za $x \in U^k$ in $y \in U^l$ velja $xy \in U^kU^l \subseteq U^{k+l}$, je L zaprta za množenje. Ker je U simetrična, velja tudi $x^{-1} \in (U^{-1})^k = U^k$, torej je L zaprta za invertiranje. Sledi, da je L podgrupa topološke grupe G. V njeni notranjosti je zagotovo vsaj enota e, saj je U okolica za e. Po trditvi 4.2 je L odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G. $\square$

Trditev 4.4. *Naj bo C komponenta za povezanost topološke grupe G, ki vsebuje enoto e. Potem je C zaprta podgrupa edinka topološke grupe G.*

Dokaz. Ker je po trditvi 3.7 invertiranje homeomorfizem, je C^{-1} povezana množica, ki vsebuje enoto e. Ker je C komponenta za povezanost, je $C^{-1} \subseteq C$. Od tod sledi, da je za vsak $a \in C$ tudi $a^{-1} \in C$, zato je množica aC povezana množica, ki vsebuje enoto e, in velja $aC \subseteq C$. Ker to velja za vsak $a \in C$, je $C^2 \subseteq C$. Množica C je zaprta za invertiranje in množenje ter vsebuje enoto e, zato je C podgrupa topološke grupe G. Ker je C komponenta za povezanost, vemo, da je zaprta v G. Preverimo še, da je C podgrupa edinka. Vzemimo poljuben $a \in G$. Ker je konjugiranje po trditvi 3.7 homeomorfizem, je množica aCa^{-1} povezana množica, ki vsebuje enoto e. Od tod sledi, da je $aCa^{-1} \subseteq C$, torej je C podgrupa edinka topološke grupe G. $\square$

4.2. **Kvocienti topoloških grup.** V tem podrazdelku bomo na kvocientni množici G/H vpeljali kvocientno topologijo in pokazali nekaj njenih lastnosti. S pomočjo kvocientnih prostorov bomo nato pokazali, da sta za topološko grupo separacijski aksiom T_0 in regularnost ekvivalentna pojma.

Izrek 4.5. *Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in $\varphi\colon G \to G/H$ naravna preslikava. Za družino*

$$\theta(G/H) = \{U; \varphi^{-1}(U) \text{ odprta v } G\}$$

veljajo naslednje trditve:

(1) *družina $\theta(G/H)$ je topologija na kvocientni množici G/H,*
(2) *družina $\theta(G/H)$ je najmočnejša topologija na kvocientni množici G/H, glede na katero je φ zvezna preslikava,*
(3) *$\varphi : G \to G/H$ je odprta preslikava.*

Dokaz. Družina $\theta(G/H)$ vsebuje prazno množico, ker je množica $\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ odprta v G. Vsebuje tudi množico G/H, ker je množica $\varphi^{-1}(G/H) = G$ odprta v G. Vzemimo poljubno unijo odprtih množic $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{uH; u \in U_\lambda, U_\lambda \text{ odprta v } G\}$. Ker je $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ odprta v G in velja $\varphi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{uH; u \in U_\lambda, U_\lambda \text{ odprta v } G\}) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, je tudi unija $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{uH; u \in U_\lambda, U_\lambda \text{ odprta v } G\} \in \theta(G/H)$. Ker je za vsaki množici U in V, ki sta odprti v G, tudi presek $U \cap V$ odprt v G, in ker je $\varphi^{-1}(\{uH; u \in U\} \cap \{vH; v \in V\}) = \varphi^{-1}(\{uH; u \in U \cap V\}) = (U \cap V)H$, je tudi presek $\{uH; u \in U\} \cap \{vH; v \in V\}$ odprt v G/H.

Topologije $\theta(G/H)$ je po definiciji najmočnejša topologija na kvocientni množici G/H, glede na katero je φ zvezna.

Za dokaz odprtosti naravne preslikave vzemimo odprto množico $U \in G$. Po trditvi 3.8 je množica UH odprta v G. Ker velja $\varphi^{-1}(\{uH; u \in U\}) = UH$, je $\varphi(U) = \{uH; u \in U\}$ odprta v G/H. □

Topologiji $\theta(G/H)$ pravimo *kvocientna topologija*, topološkemu prostoru G/H pa *kvocientni prostor*. Od tukaj naprej bo kvocientni topološki prostor vedno opremljen s kvocientno topologijo.

Trditev 4.6. *Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in U, V taki okolici enote e v G, da velja $V^{-1}V \subset U$. Naj bo $\varphi : G \to G/H$ naravna preslikava. Potem velja $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$.*

Dokaz. Vzemimo odsek $xH \in \overline{\varphi(V)}$. Ker je V okolica enote, je množica $\{vxH; v \in V\}$ okolica odseka xH, in ima zato s $\varphi(V)$ neprazen presek. Po definiciji naravne preslikave obstajata točki $v_1, v_2 \in V$, da je $v_1xH = v_2H$. Ker je

$$xH = v_1^{-1}v_2H \in \{wH; w \in V^{-1}V\} \subset \{uH; u \in U\} = \varphi(U),$$

je $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$. □

Posledica 4.7. *Za vsako okolico U enote e topološke grupe G obstaja taka okolica V enote e, da velja $\overline{V} \subset U$.*

Dokaz. Naj bo U poljubna okolica enote e in naj bo $\mathcal{V}$ baza simetričnih okolic enote e, ki obstaja po trditvi 3.13. Po trditvi 3.10 obstaja takšna okolica $V \in \mathcal{V}$, da je $V^2 = V^{-1}V \subset U$. Naj bo podgrupa $H = \{e\}$ trivialna podgrupa. Po trditvi 4.6 je $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$. Ker je H trivialna podgrupa, je kvocientna množica G/H enaka G in naravna preslikava $\varphi\colon G \to G/H$ je identična preslikava na topološki grupi G. Zato velja $\overline{V} = \overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U) = U$. □

Izrek 4.8. *Za topološko grupo G in njeno podgrupo H veljajo naslednje trditve:*

(1) *kvocientni prostor G/H je diskreten natanko tedaj, ko je H odprta v G,*
(2) *če je H zaprta v G, potem je kvocient G/H regularen topološki prostor,*
(3) *če kvocientni prostor G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0, potem je H zaprta v G, kvocientni topološki prostor G/H pa je regularen.*

Dokaz. Za dokaz točke (1) privzemimo, da je H odprta v G. Ker je leva translacija po trditvi 3.7 homeomorfizem, je množica aH odprta množica za vsak element $a \in G$. Ker je $\varphi^{-1}(\{aH\}) = aH$, je množica $\{aH\}$ odprta v G/H za vsak element $aH \in G/H$, torej je G/H diskreten topološki prostor.

Obratno, če je G/H diskreten topološki prostor, potem so vse njegove enoelementne podmnožice odprte. V posebnem primeru je tudi $\{H\}$ odprta v G/H. Ker je naravna preslikava zvezna, je $H = \varphi^{-1}(\{H\})$ odprta množica v G.

Za dokaz točke (2) privzemimo, da je H zaprta v G. Ker je leva translacija po trditvi 3.7 homeomorfizem, je zaprta tudi množica aH za vsak element $a \in G$. Po definiciji zaprtosti je $G \setminus aH = \bigcup\{xH; xH \neq aH\}$ odprta v G. Ker je po izreku 4.5 naravna preslikava odprta, je zato komplement vsake točke $\{aH\}$ odprt v G/H. Po definiciji zaprtosti je vsaka točka $\{aH\}$ zaprta v G/H, kar je ekvivalentno separacijskemu aksiomu T_1. Naj bo množica U okolica enote e v G. Ker po trditvi 3.13 obstaja baza simetričnih okolic, potem po trditvi 3.10 obstaja takšna okolica enote V, da velja $V^2 = V^{-1}V \subset U$. Torej po trditvi 4.6 za vsako okolico $\varphi(U)$ točke H obstaja takšna okolica $\varphi(V)$ točke H, da je $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$. Ker je leva translacija homeomorfizem, to velja za vsako točko $\{aH\} \in G/H$, kar pa je ekvivalentno separacijskemu aksiomu T_3. Ker kvocientni prostor G/H zadošča separacijskima aksiomoma T_1 in T_3, je regularen.

Za dokaz točke (3) privzemimo, da G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Po izreku 3.14 je točka $\{H\}$ zaprta. Po definiciji kvocientne topologije je $\{H\}$ zaprta v G/H natanko tedaj, ko je $\varphi^{-1}(\{H\}) = H$ zaprta v G. Po točki (2) je G/H regularen topološki prostor. $\square$

Izrek 4.9. *Naj bo H podgrupa edinka topološke grupe G in naj bo G/H kvocientni topološki prostor. Veljajo naslednje trditve:*

(1) kvocientni topološki prostor G/H je topološka grupa s kvocientno topologijo θ,
(2) naravni homomorfizem je odprta in zvezna preslikava,
(3) kvocientni topološki prostor G/H je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa H odprta v G,
(4) kvocientni topološki prostor G/H je regularen natanko tedaj, ko je podgrupa H zaprta v G.

Dokaz. Za dokaz točke (1) bomo uporabili izrek 3.11. Preverili bomo, da za družino vseh okolic enote H v grupi G/H s kvocientno topologijo veljajo lastnosti (1)-(4) trditve 3.10 in zadostili pogojem izreka 3.11.

Naj bo $\{uH; u \in U\}$ poljubna okolica enote H v grupi G/H, kjer je U poljubna okolica enote e v topološki grupi G. Po lastnosti (1) trditve 3.10 obstaja taka okolica V enote e, da velja $V^2 \subset U$. Po definiciji kvocientne topologije je množica $\{vH; v \in V\}$ odprta v G/H in velja

$$\{vH; v \in V\}^2 = \{yH; y \in V^2\} \subset \{uH; u \in U\}$$

. Torej za grupo G/H s kvocientno topologijo drži lastnost (1) trditve 3.10.

Po lastnosti (2) trditve 3.10 obstaja taka okolica V enote e, da velja $V^{-1} \subset U$. Po definiciji kvocientne topologije je množica $\{vH; v \in V^{-1}\}$ odprta in velja

$$\{vH; v \in V\}^{-1} = \{yH; y \in V^{-1}\} \subset \{uH; u \in U\}.$$

Torej za grupo G/H s kvocientno topologijo drži lastnost (2) trditve 3.10.

Za dokaz lastnosti (3) vzemimo še poljuben element $u_0H \in \{uH; u \in U\}$. Po lastnosti (3) trditve 3.10 obstaja taka okolica V enote e, da velja $u_0V \subset U$. Potem je $\{vH; v \in V\}$ okolica enote H v G/H in velja

$$u_0H \cdot \{vH; v \in V\} = \{u_0vH; v \in V\} \subset uH; u \in U\}.$$

Torej za grupo G/H s kvocientno topologijo drži lastnost (3) trditve 3.10.

Po lastnosti (4) trditve 3.10 obstaja taka okolica V enote e, da velja $u_0 V u_0^{-1} \subset U$. Potem je $\{vH; v \in V\}$ okolica enote H v G/H in velja

$$u_0 H \cdot \{vH; v \in V\}(u_0 H)^{-1} = \{u_0 v u_0^{-1} H; v \in V\} \subset uH; u \in U\}.$$

Torej za grupo G/H s kvocientno topologijo drži lastnost (4) trditve 3.10.

Družina vseh okolic enote H v G/H torej zadošča lastnostim (1)-(4) trditve 3.10. Ker vse okolice vsebujejo enoto H, so vsi končni preseki teh okolic neprazni. Ker je presek odprtih množic po definiciji topologije odprt in po prejšnji lastnosti neprazen, obstaja za vsaki dve okolici $\{uH; u \in U\}$ in $\{vH; v \in V\}$ enote H neka okolica $W \subset U \cap V$ enote H. Po izreku 3.11 je grupa G/H res topološka grupa s kvocientno topologijo.

Točka (2) sledi direktno iz izreka 4.5. Točka (3) sledi direktno iz točke (1) izreka 4.8, točka (4) pa iz točk (2) in (3) izreka 4.8. $\square$

S pomočjo zgornjega izreka lahko pokažemo, da sta separacijski aksiom T_0 in regularnost za topološke grupe ekvivalentna pojma. Kasneje bomo pokazali, da iz separacijskega aksioma T_0 sledi še več, in sicer povsem regularnost.

Posledica 4.10. *Vsaka topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je regularen topološki prostor.*

Dokaz. Ker topološka grupa G zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je po trditvi podgrupa edinka $H = \{e\}$ zaprta v G. Po izreku 4.9 je $G/H = G$ regularen topološki prostor. $\square$

5. Izreki o izomorfizmih

V tem razdelku bomo pokazali, da za topološke grupe z dodatnimi topološkimi predpostavkami veljajo trije izreki o izomorfizmih za topološke grupe, ki so analogni trem algebraičnim izrekom o izomorfizmih za grupe. Najprej pa dokažimo nekaj pomožnih trditev.

Trditev 5.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Naj bo za vsak element $a \in G$ na kvocientnem topološkem prostoru G/H definirana preslikava ψ_a s predpisom $\psi_a(xH) = (ax)H$. Za vsak element $a \in G$ je ψ_a homeomorfizem na prostoru G/H.*

Dokaz. Preslikava ψ_a je očitno bijektivna za vsak $a \in G$, saj je preslikava $\psi_{a^{-1}}$ njen inverz. Pokazali bomo, da je za vsak $a \in G$ preslikava ψ_a odprta, iz česar bo sledilo, da je preslikava $\psi_{a^{-1}}$ zvezna. Vzemimo odprto podmnožico $\{uH; u \in U\}$ prostora G/H, kjer je $U \subseteq G$ odprta množica. Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je tudi množica aU odprta v G in velja, da je

$$\psi_a(\{uH; u \in U\}) = \{auH; u \in U\} = \{vH; v \in aU\}$$

odprta množica, zato je preslikava ψ_a odprta.

Ker je $\psi_{a^{-1}}$ odprta preslikava, je tudi ψ_a zvezna preslikava. Torej je ψ_a homeomorfizem. $\square$

Trditev 5.2. *Naj bo H podgrupa (lokalno) kompaktne topološke grupe G. Potem je kvocientni topološki prostor G/H (lokalno) kompakten.*

Dokaz. Po izreku 4.5 je naravna preslikava $\varphi\colon G \to G/H$ zvezna. Če je G kompaktna topološka grupa, je tudi $\varphi(G) = G/H$ kompakten topološki prostor.

Naj bo topološka grupa G lokalno kompaktna in naj bo množica K kompaktna okolica poljubnega elementa $a \in G$. Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je množica $a^{-1}K$ kompaktna okolica enote e. Ker je po izreku 4.5 naravna preslikava $\varphi\colon G \to G/H$ zvezna, je množica $\varphi(a^{-1}K)$ kompaktna okolica enote H v prostoru G/H. Po trditvi 5.1 je potem $\psi_a(\varphi(a^{-1}K))$ kompaktna okolica elementa aH. Zato je kvocientni prostor G/H lokalno kompakten. □

Definicija 5.3. *Števno kompakten* prostor je tak topološki prostor, pri katerem za vsako števno odprto pokritje obstaja končno podpokritje, v *lokalno števno kompaktnem* topološkem prostoru pa ima vsaka točka števno kompaktno okolico.

Trditev 5.4. *Lokalno števno kompakten, regularen topološki prostor X ni unija števno zaprtih množic s prazno notranjostjo.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s protislovjem. Naj bo topološki prostor X enak uniji zaprtih množic s prazno notranjostjo, torej $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kjer je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica A_n zaprta in velja $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo $D_n = X \setminus A_n$. Očitno je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica D_n odprta. Ker ima za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica A_n prazno notranjost, torej ne vsebuje nobene neprazne odprte množice, vsaka odprta množica v topološkem prostoru X seka množico D_n, iz česar sledi, da je množica D_n gosta v prostoru X. Pokazali bomo, da velja $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$, kar pomeni, da obstaja nek element prostora X, ki ni v nobeni množici A_n, torej topološki prostor X ne more biti unija množic A_n.

Vzemimo poljuben element $x_0 \in X$ in naj bo množica K njegova števno kompaktna okolica. Ker je prostor X regularen, obstaja takšna odprta okolica U_0 elementa x_0, da je $U_0 \subset \overline{U_0} \subset K$, kjer je tudi množica $\overline{U_0}$ števno kompaktna. Ker je množica D_1 gosta v regularnem topološkem prostoru X, ima z vsako neprazno odprto množico neprazen presek, torej obstaja takšna neprazna odprta množica U_1, da je $U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_0 \cap D_1$. Induktivno za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo množico U_n na naslednji način. Če smo že definirali množice U_i za $i = 1, \ldots, n-1$, naj bo množica U_n takšna neprazna odprta množica, da velja $U_n \subset \overline{U_n} \subset U_{n-1} \cap D_n$. Tako kot pri definiciji množice U_1 upoštevamo, da je množica D_n gosta za vsak $n \in \mathbb{N}$ in da je topološki prostor X regularen. Ker je množica $\overline{U_0}$ števno kompaktna in je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica $\overline{U_n}$ neprazna, je tudi presek $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_n}$ neprazen. Elementi tega preseka morajo po zgornji konstrukciji ležati v preseku $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$, torej res velja $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$. □

Definicija 5.5. Topološki prostor je σ-kompakten, če ge je možno zapisati kot števno unijo kompaktnih topoloških prostorov.

Trditev 5.6. *Naj bo G lokalno kompaktna, σ-kompaktna topološka grupa in naj bo $f\colon G \to \widetilde{G}$ zvezen in surjektiven homomorfizem v lokalno števno kompaktno topološko grupo $\widetilde{G}$, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Tedaj je f odprta preslikava.*

Dokaz. Pišimo $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kjer je A_n kompaktna množica za vsak $n \in \mathbb{N}$. Naj bo $\mathcal{U}$ družina vseh simetričnih okolic enote e topološke grupe G in naj bo $\widetilde{\mathcal{U}}$ družina vseh okolic enote $\tilde{e}$ topološke grupe $\widetilde{G}$. Dokazali bomo, da za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja okolica $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja $\widetilde{U} \subset f(U)$. Potem lahko vzamemo poljubno odprto podmnožico $B \subset G$. Za vsak $x \in B$ obstaja taka okolica $U \in \mathcal{U}$, da je xU okolica elementa x in velja $xU \subset B$. Ker obstaja $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja $\widetilde{U} \subset f(U)$, imamo

$$f(x) \in f(x)\widetilde{U} \subset f(x)f(U) = f(xU) \subset f(B),$$

torej je množica $f(B)$ okolica za vsako svojo točko in po definiciji odprta v topološki grupi $\widetilde{G}$. Ker je množica B poljubna, je f odprta preslikava.

Dokažimo torej, da za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja okolica $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, da velja $\widetilde{U} \subset f(U)$. Vzemimo poljubno okolico $U \in \mathcal{U}$. Po trditvi 3.10 obstaja takšna množica $V_1 \in \mathcal{U}$, da velja $V_1^2 \subset U$. Po posledici 4.7 obstaja takšna množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $\overline{V} \subset V_1$. Upoštevamo še trditev 3.15 in dobimo

$$U \supset V_1^2 \supset \overline{V}\,\overline{V} = \overline{V^{-1}}\,\overline{V} = \overline{V}^{-1}\overline{V}.$$

Ker je topološka grupa G lokalno kompaktna, lahko vzamemo tako množico V, da je množica $\overline{V}$ kompaktna. Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je družina množic $\{xV; x \in G\}$ odprto pokritje topološke grupe G, in zato tudi množice A_n za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je množica A_n za vsak $n \in \mathbb{N}$ kompaktna, jo pokrije le končno množic oblike xV, kjer je $x \in G$. Množic A_n je števno, torej topološko grupo G pokrije števno množic oblike xV, kjer je $x \in G$. Naj bo to števno pokritje družina $\{x_n V\}_{n=1}^{\infty}$. Potem velja $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n V = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \overline{V}$ in ker je preslikava f surjektivna, velja tudi $\widetilde{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n \overline{V}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n) f(\overline{V})$.

Pokažimo, da ima množica $f(\overline{V})$ neprazno notranjost. Ker je po trditvi 3.7 leva translacija homeomorfizem, je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica $x_n\overline{V}$ kompaktna v topološki grupi G. Ker je preslikava f zvezna, je množica $f(x_n)f(\overline{V})$ kompaktna v topološki grupi $\widetilde{G}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Topološka grupa $\widetilde{G}$ zadošča separacijskemu aksiomu T_0, zato je po trditvi 3.14 Hausdorffova, torej so vse kompaktne množice $f(x_n)f(\overline{V})$ zaprte v $\widetilde{G}$. Če predpostavimo, da ima množica $f(\overline{V})$ prazno notranjost, imajo tudi množice $f(x_n)f(\overline{V})$ prazno notranjost za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj je leva translacija po trditvi 3.7 homeomorfizem. Potem je topološka grupa $\widetilde{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n)f(\overline{V})$ unija števno zaprtih množic s prazno notranjostjo. Po drugi strani je topološka grupa $\widetilde{G}$ lokalno števno kompakten topološki prostor, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, in je zato po izreku 4.10 regularen. Po trditvi 5.4 je to nemogoče, zato ima množica $f(\overline{V})$ neprazno notranjost, torej vsebuje neko neprazno odprto množico $\widetilde{V} \subset \widetilde{G}$.

Izberimo poljubni točki $\tilde{x} \in \widetilde{V}$ in $x \in f^{-1}(\tilde{x}) \cap \overline{V}$. Po konstrukciji množice V potem velja $x^{-1}\overline{V} \subset U$. Ker je f zvezna preslikava, dobimo

$$f(U) \supset f(x^{-1}\overline{V}) = f(x)^{-1} f(\overline{V}) \supset \tilde{x}^{-1}\widetilde{V}.$$

Množica $\tilde{x}^{-1}\widetilde{V}$ je okolica enote $\tilde{e}$ in je zato vsebovana v družini $\widetilde{\mathcal{U}}$. S tem smo dokazali zgornjo izjavo in s tem izrek. □

5.1. **Prvi izrek o izomorfizmih.** Vzemimo grupi G in $\widetilde{G}$ ter surjektiven homomorfizem $f: G \to \widetilde{G}$. Prvi izrek o izomorfizmih za grupe pravi, da je $H = \ker f$ podgrupa edinka grupe G in da sta G/H in $\widetilde{G}$ izomorfni grupi. Naslenji izrek pravi, da ob dodatnih predpostavkah odprtosti in zveznosti homomorfizma f izrek velja tudi za topološke grupe.

Izrek 5.7 (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bosta G in $\widetilde{G}$ topološki grupi. Naj bo $f: G \to \widetilde{G}$ odprt, zvezen in surjektiven homomorfizem. Preslikava $\Phi: \widetilde{G} \to G/\ker f$, definirana s predpisom $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$, je topološki izomorfizem.*

Dokaz. Upoštevajoč prvi izrek o izomorfizmih moramo pokazati le, da je preslikava Φ homeomorfizem. Vzemimo odprto podmnožico $\widetilde{U} \subset \widetilde{G}$. Zaradi lažje berljivosti pišimo $H = \ker f$. Ker je preslikava f zvezna, je množica $\bigcup\{f^{-1}(\tilde{x}); \tilde{x} \in \widetilde{U}\} = f^{-1}(\widetilde{U})$ odprta v G. Ker je množica $\varphi^{-1}(\Phi(\widetilde{U})) = \widetilde{U}HH = \widetilde{U}H$ odprta v G, je množica $\Phi(\widetilde{U}) = \{f^{-1}(\tilde{x}); \tilde{x} \in \widetilde{U}\}$ odprta v G/H. Od tod sledi, da je preslikava Φ odprta, torej je Φ^{-1} zvezna preslikava.

Vzemimo $\{uH; u \in U\}$ odprto množico v G/H, kjer je množica $U \subset G$ odprta. Potem velja

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(\{uH; u \in U\}) &= \{\tilde{x} \in \widetilde{G}; f^{-1}(\tilde{x}) = uH \text{ za nek element } u \in U\}\\ &= \{f(u); u \in U\} = f(U).\end{aligned}$$

Ker je preslikava f po predpostavki odprta, je $f(U)$ odprta množica v $\widetilde{G}$. Torej je preslikava Φ^{-1} odprta, od koder sledi, da je Φ zvezna preslikava. Sledi, da je Φ homeomorfizem. □

5.2. **Drugi izrek o izomorfizmih.** Vzemimo grupo G, njeno podgrupo A in podgrupo edinko H. Drugi izrek o izomorfizmih za grupe pravi, da je produkt podgrup AH tudi podgrupa grupe G, da je presek podgrup $(A \cap H)$ podgrupa edinka podgrupe A in da sta kvocientni grupi $(AH)/H$ in $A/(A \cap H)$ izomorfni grupi z izomorfizmom $\tau\colon (AH)/H \to A/(A \cap H)$, definiranim s predpisom $aH \mapsto (aH) \cap A = a(H \cap A)$, kjer je $a \in A$. Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe zahteva največ dodatnih predpostavk.

Izrek 5.8 (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bo G topološka grupa, A njena podgrupa in H podgrupa edinka grupe G. Naj bo $\tau\colon (AH)/H \to A/(A \cap H)$ izomorfizem s predpisom $\tau(aH) = a(A \cap H)$, kjer je $a \in A$.*

(1) Preslikava τ je odprta preslikava.
(2) Če je A še lokalno kompaktna in σ-kompaktna, H zaprta v G in AH lokalno kompaktna, potem je τ homeomorfizem ter topološki grupi $(AH)/H$ in $A/(A \cap H)$ sta topološko izomorfni.

Dokaz. Najprej dokažimo (1). Po definiciji kvocientne topologije je odprta množica v prostoru $(AH)/H$ množica $\{xH;\ x \in X\}$, kjer je $X \subset A$ taka množica, da je $\varphi^{-1}(\{xH;\ x \in X\}) = XH$ odprta v podprostoru AH topološke grupe G.

Pokažimo, da je $X(A \cap H) = (XH) \cap A$. Najprej vzemimo $y \in X(A \cap H)$. Potem obstajajo elementi $x \in X$, $a \in A$ in $h \in H$, da velja $y = xa = xh$. Očitno sledi, da je $y \in XH$. Ker je A podgrupa in je $X \subseteq A$, je $XA \subseteq A$ in velja $y \in A$, iz česar sledi $y \in (XH) \cap A$, torej $X(A \cap H) \subseteq (XH) \cap A$. Za dokaz obratne inkluzije vzemimo $y \in (XH) \cap A$. Potem obstajajo elementi $x \in X$, $a \in A$ in $h \in H$, da velja $y = xh = a$. Radi bi videli, da je $h \in A$. Ker je $xh \in A$ in je A podgrupa, ki vsebuje množico X, je $h \in x^{-1}A = A$. Torej je $(XH) \cap A \subseteq X(A \cap H)$.

Ker velja $X(A \cap H) = (XH) \cap A$ in je po trditvi 3.8 množica XH odprta, je množica $X(A \cap H)$ odprta v podprostoru A topološke grupe G. Ker je $\tau(\{xH; x \in X\}) = \{x(A \cap H); x \in X\}$, je po definiciji kvocientne topologije množica $\{x(A \cap H); x \in X\}$ odprta v prostoru $A/(A \cap H)$.

Za dokaz (2) moramo upoštevajoč drugi izrek o izomorfizmih in točko (1) dokazati le, da je tudi preslikava τ^{-1} odprta. Oglejmo si naravno preslikavo $\varphi\colon G \to G/H$. Za njeno zožitev na podgrupo A velja, da preslika podgrupo A surjektivno v podgrupo $(AH)/H$ topološke grupe G/H. Ker je po predpostavki množica AH lokalno kompaktna in podgrupa edinka H zaprta v G, je po trditvi 5.2 množica $(AH)/H$ lokalno kompaktna in po izreku 4.8 zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Naravna preslikava $\varphi|_A$ je torej surjektiven in odprt homomorfizem iz lokalno kompaktne, σ-kompaktne grupe A v lokalno kompaktno grupo $(AH)/H$, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Po trditvi 5.6 je $\varphi|_A$ odprta preslikava.

Vzemimo odprto podmnožico $\{y(A \cap H); y \in Y\} \subset A/(A \cap H)$, kjer je $Y \subset A$, tj. množica $Y(A \cap H)$ je odprta v A (glej dokaz točke 1). Ker je $\varphi|_A$ odprta preslikava, je množica $\varphi(Y(A\cap H)) = \{yH; y\in Y\}$ odprta v $(AH)/H$. Po definiciji preslikave τ velja $\tau^{-1}(\{y(A\cap H); y\in Y\}) = \{yH; y\in Y\}$, iz česar sledi, da je preslikava τ^{-1} odprta. $\square$

5.3. **Tretji izrek o izomorfizmih.** Za tretji izrek o izomorfizmih za grupe potrebujemo grupo G in njeno podgrupo edinko N. Če je H taka podgrupa grupe G, da je $N\subseteq H$, potem je H/N podgrupa grupe G/N. Še več, vsaka podgrupa grupe G/N je oblike H/N za neko podgrupo H grupe G, kjer je $N\subseteq H$. Če je H podgrupa edinka grupe G, potem je H/N podgrupa edinka grupe G/N. Še več, vsaka podgrupa edinka grupe G/N je oblike H/N za neko podgrupo edinko H grupe G. Potem velja, da sta grupi $(G/N)/(H/N)$ in G/H izomorfni. Pri dokazu tretjega izreka o izomorfizmih za topološke grupe si bomo v naslednji trditvi najprej pomagali s pomožno topološko grupo $\widetilde{G}$.

Trditev 5.9. *Naj bo $f\colon G\to\widetilde{G}$ odprt, surjektiven in zvezen homomorfizem topoloških grup in naj bo $\widetilde{H}$ podgrupa edinka v $\widetilde{G}$. Označimo $N=\ker f$ in $H=f^{-1}(\widetilde{H})$. Potem so grupe $(G/N)/(H/N)$, G/H in $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ topološko izomorfne.*

Dokaz. Po izreku 4.9 je naravna preslikava $\tilde{\varphi}\colon\widetilde{G}\to\widetilde{G}/\widetilde{H}$ odprt in zvezen homomorfizem. Ker je preslikava f odprt in zvezen homomorfizem, je preslikava $\tilde{\varphi}\circ f\colon G\to\widetilde{G}/\widetilde{H}$ odprt in zvezen homomorfizem z jedrom H. Po izreku 5.7 sta topološki grupi G/H in $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ topološko izomorfni. Ker je po izreku 5.7 preslikava $f^{-1}\colon\widetilde{G}\to G/N$ topološki izomorfizem in ker je $f^{-1}(\widetilde{H}) = H/N$, je topološka grupa $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ topološko izomorfna $(G/N)/(H/N)$. $\square$

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraični različici in ne vsebuje pomožne topološke grupe $\widetilde{G}$.

Izrek 5.10 (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bo G topološka grupa in $N\subseteq H$ njeni podgrupi edinki. Potem sta kvocientni topološki grupi G/H in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfni.*

6. Metrizabilnost in povsem regularnost

6.1. Uniformni prostori.

Definicija 6.1. Naj bo X neprazna množica. Neprazna poddružina $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(X)$ je *filter* na množici X, če ima naslednje lastnosti:

(1) $\emptyset\notin\mathcal{F}$,
(2) za vsako množico $F\in\mathcal{F}$ je vsaka množica $E\subset X$, za katero velja $F\subseteq E$, tudi v družini $\mathcal{F}$,
(3) presek $E\cap F$ množic $E,F\in\mathcal{F}$ je tudi v družini $\mathcal{F}$.

Primer 6.2. Preprost primer filtra je družina vseh okolic poljubne točke x topološkega prostora X. $\diamondsuit$

Definicija 6.3. Filter $\mathcal{U}$ na neprazni množici $X\times X$ definira *uniformno strukturo* $\mathcal{U}$ na množici X, če ima naslednje lastnosti:

(1) vsaka množica $U\in\mathcal{U}$ vsebuje diagonalo $\Delta=\{(x,x); x\in X\}$,
(2) za vsako množico $U\in\mathcal{U}$ je tudi množica $U^{-1}\in\mathcal{U}$,
(3) za vsako množico $U\in\mathcal{U}$ obstaja taka množica $V\in\mathcal{U}$, da velja $V\circ V\subseteq U$.

Množici z uniformno stukturo rečemo *uniformni prostor* in označimo $(X,\mathcal{U})$.

Opomba 6.4. V zgornji definiciji so operacije na množicah mišljene v smislu relacij.

Trditev 6.5. *Naj bo X uniformni prostor z uniformno strukturo $\mathcal{U}$. Družina τ množic $T \subseteq X$, za katere za vsako točko $x \in T$ obstaja $U \in \mathcal{U}$, da velja $U_x = \{y \in X; (x,y) \in U\} \subseteq T$, je topologija na množici X.*

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko privzamemo $\emptyset \in \tau$, saj je pogoj iz trditve na prazno izpolnjen. Ker je za vsak $x \in X$ in vsak $U \in \mathcal{U}$ množica $U_x \subseteq X$ (lahko tudi prazna), je tudi $X \in \tau$.

Vzemimo poljubno unijo $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ množic iz τ in poljubno točko $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$. Potem obstaja tak indeks λ_0, da je $x \in T_\lambda$. Ker je $T_{\lambda_0} \in \tau$, obstaja taka množica $U_{\lambda_0} \in \mathcal{U}$, da velja $(U_{\lambda_0})_x \subseteq T_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$. Torej je tudi unija $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \in \tau$.

Vzemimo še presek $T_1 \cap T_2$ množic iz τ in poljubno točko $x \in T_1 \cap T_2$. Ker je $x \in T_1$ in $x \in T_2$, obstajata množici $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, da je $(U_1)_x \subseteq T_1$ in $(U_2)_x \subseteq T_2$. Ker je $\mathcal{U}$ filter, je $V = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ in velja $V_x = (U_1)_x \cap (U_2)_x \subseteq T_1 \cap T_2$, zato je tudi presek $T_1 \cap T_2 \in \tau$. Torej je τ res topologija na uniformnem prostoru X. ☐

Definicija 6.6. Topologiji, definirani v trditvi 6.5, pravimo topologija, inducirana z uniformno strukturo.

Opomba 6.7. V nadaljevanju bomo okolico nekega elementa x v topologiji, inducirani z uniformno strukturo $\mathcal{U}$, označevali kot U_x, kjer bo $U \in \mathcal{U}$.

Definicija 6.8. Naj bosta X in Y zaporedoma uniformna prostora z uniformnima strukturama $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$. Preslikava $f \colon X \to Y$ je *enakomerno zvezna*, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja taka množica $U \in \mathcal{U}$, da za vsak par $(x,y) \in U$ velja $(f(x), f(y)) \in V$.

Trditev 6.9. *Vsaka enakomerno zvezna preslikava uniformnih prostorov je zvezna v topologiji, inducirani z uniformnima strukturama.*

Dokaz. Naj bo $f \colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ enakomerno zvezna preslikava med uniformnima prostoroma. Vzemimo okolico $V_{f(x)}$ elementa $f(x)$ v topologiji na Y inducirani z $\mathcal{V}$. Ker je f enakomerno zvezna, obstaja tak $U \in \mathcal{U}$, da za vsak par $(x,y) \in U$ velja $(f(x), f(y)) \in V$. Po definiciji inducirane topologije za vsak $y \in U_x$ zato velja $f(y) \in V_{f(x)}$, kar pomeni, da je f zvezna preslikava glede na topologiji, ki ju inducirata uniformni strukturi. ☐

Definicija 6.10. Naj bo $\mathcal{U}$ baza odprtih okolic enote e topološke grupe G. Za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ definiramo

$$L_U = \{(x,y) \in G \times G; x^{-1}y \in U\}$$

in analogno

$$R_U = \{(x,y) \in G \times G; yx^{-1} \in U\}.$$

Družinama $\mathcal{L}(G) = \{L_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ in $\mathcal{R}(G) = \{R_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ zaporedoma pravimo *leva* in *desna uniformna struktura* na G.

Trditev 6.11. *Vsaka topološka grupa je uniformni prostor glede na levo ali desno uniformno strukturo.*

Dokaz. Naj bo filter $\mathcal{U}$ baza okolic enote e topološke grupe G, sestavljene iz simetričnih in odprtih okolic. Oglejmo si levo in desno uniformno strukturo na G, ki sta definirani z $\mathcal{U}$. Pokazali bomo, da ustrezata definiciji uniformne strukture na množici G.

Ker je enota e v vsaki okolici $U \in \mathcal{U}$, je diagonala $\Delta = \{(x,x); x \in X\}$ vsebovana v L_U in R_U za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$.

Ker velja

$$L_{U^{-1}} = \{(x,y) \in G \times G; x^{-1}y \in U^{-1}\} = \{(x,y) \in G \times G; y^{-1}x \in U\} = L_U^{-1}$$

in

$$R_{U^{-1}} = \{(x,y) \in G \times G; yx^{-1} \in U^{-1}\} = \{(x,y) \in G \times G; xy^{-1} \in U\} = R_U^{-1},$$

in ker za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ velja $U = U^{-1}$, je $L_U^{-1} \in \mathcal{L}(G)$ in $R_U^{-1} \in \mathcal{R}(G)$.

Ker po trditvi 3.10 za vsako okolico $U \in \mathcal{U}$ obstaja okolica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$, je $L_V \circ L_V \subset L_U$ in $R_V \circ R_V \subset R_U$.

Topološka grupa je z levo ali desno uniformno strukturo torej res uniformni prostor. □

6.2. **Metrizabilnost.** *Psevdometrika* na neprazni množici X je preslikava $\rho\colon X \times X \to [0,\infty)$, ki zadošča naslednjim pogojem:

(1) za vsako točko $x \in X$ velja $\rho(x,x) = 0$,
(2) za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,
(3) za vsake tri točke $x, y, z \in X$ velja $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Če za preslikavo ρ velja še

(4) $\rho(x,y) = 0$ natanko tedaj, ko $x = y$,

potem ji rečemo *metrika*. Topološki prostor X je *metrizabilen*, če njegova topologija τ izhaja iz kakšne metrike d na množici X. Baza topologije metrizabilnega topološkega prostora X je družina odprtih krogel $\{K(x,\epsilon); x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}\}$.

Definicija 6.12. Psevdometrika na grupi G je *levoinvariantna*, če za vsaki dve točki $x, y \in G$ in za vsak element $a \in G$ velja $\rho(ax, ay) = \rho(x,y)$.

V dokazu spodnjega izreka bomo potrebovali pojem *diadičnega* racionalnega števila, tj. racionalno število z imenovalcem v okrajšani obliki enakim 2^n, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Vsota in produkt dveh diadičnih števil je prav tako diadično število. Trdimo, da lahko s končno vsoto števil oblike 2^{-n_i}, kjer je $n_i \in \mathbb{N}$ in $n_i \neq n_j$ za $i \neq j$, dobimo vsako diadično število med 0 in 1. Vzemimo poljubno diadično število $d = \frac{b}{2^n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $b < 2^n$. Sedaj zapišimo število d v binarnem zapisu. Ker je imenovalec števila d potenca števila 2, je ta binarni zapis končen. Sedaj vidimo, da je $d = \Sigma_{i=1}^{n} k_i 2^{-i}$, kjer je k_i enak 1, če je v binarnem zapisu števila d na i-tem mestu števka 1, in 0 sicer.

Izrek 6.13. *Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje simetričnih okolic enote e v topološki grupi G, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$. Potem obstaja taka levoinvariantna psevdometrika σ na G z naslednjimi lastnostmi:*

(1) σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od $G \times G$;
(2) $\sigma(x,y) = 0$ natanko tedaj, ko $y^{-1}x \in H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$;
(3) $\sigma(x,y) \leq 2^{-k+2}$, če $y^{-1}x \in U_k$;
(4) $2^{-k} \leq \sigma(x,y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če velja še $xU_kx^{-1} = U_k$ za vsak $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, potem je σ tudi desnoinvariantna in dodatno velja

(5) $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x,y)$ za vsaka dva elementa $x, y \in G$.

Dokaz. Najprej preimenujmo družino okolic $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$. Najprej za vsak $k \in \mathbb{N}$ definiramo okolic $V_{2^{-k}} = U_k$. Za vsako diadično racionalno število $r \in (0,1)$ nato definiramo množico V_r na naslednji način. Če je

$$r = 2^{-l_1} + \cdots + 2^{-l_n}, 0 < l_1 < \cdots < l_n,$$

potem definiramo

$$V_r = V_{2^{-l_1}} \cdots V_{2^{-l_n}}.$$

Za vsa diadična racionalna števila $r \geq 1$ definiramo množico $V_r = G$.

Pokažimo najprej, da iz $r < s$ sledi $V_r \subset V_s$. Ker za $s \geq 1$ velja $v_r \subseteq G = V_s$, lahko privzamemo, da je $s < 1$. Naj bo število r definirano kot zgoraj in naj bo

$$s = 2^{-m_1} + \cdots + 2^{-m_p}, 0 < m_1 < \cdots < m_p.$$

Ker je $r < s$, obstaja enolično določeno število $k \in \mathbb{N}$, da je $l_j = m_j$ za vsak $j < k$ in $l_k > m_k$. Naj bo $W = V_{2^{-l_1}} \cdots V_{2^{-l_{k-1}}}$. Potem, upoštevajoč $V_{2^{-k-1}}^2 \subset V_{2^{-k}}$, velja

$$\begin{aligned}
V_r &= WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_{k+1}}}V_{2^{-l_{k+2}}} \cdots V_{2^{-l_n}} \\
&\subset WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_k-1}}V_{2^{-l_k-2}} \cdots V_{2^{-l_n+1}}V_{2^{-l_n}}V_{2^{-l_n}} \\
&\subset WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_k-1}}V_{2^{-l_k-2}} \cdots V_{2^{-l_n+1}}V_{2^{-l_n+1}} \subset \cdots \\
&\subset WV_{2^{-l_k}}V_{2^{-l_k}} \subset WV_{2^{-l_k+1}} \subset WV_{2^{-m_k}} \\
&= V_{2^{-l_1}}V_{2^{-l_2}} \cdots V_{2^{-l_{k-1}}}V_{2^{-m_k}} \\
&\subset V_{2^{-m_1}}V_{2^{-m_2}} \cdots V_{2^{-m_{k-1}}}V_{2^{-m_k}}V_{2^{-m_{k+1}}} \cdots V_{2^{-m_p}} = V_s
\end{aligned}$$

Pokažimo še, da za vsak zgoraj definirani r in vsak $l \in \mathbb{N}$ velja $V_rV_{2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}$. Ker za $r + 2^{-l+2} \geq 1$ velja $V_{r+2^{-l+2}} = G$, lahko privzamemo, da je $r + 2^{-l+2} < 1$. Če je $l > l_n$, je po konstrukciji množic $V_rV_{2^{-l}} = V_{r+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}$. Če je $l \leq l_n$, naj bo $k \in \mathbb{N}$ tako število, da je $l_{k-1} < l \leq l_k$, kjer označimo $l_0 = 0$. Definiramo $r_1 = 2^{-l+1} - 2^{-l_k} - 2^{-l_{k+1}} - \cdots - 2^{-l_n}$ in $r_2 = r + r_1$. Ker je $r < r_2 < r + 2^{-l+1}$, velja

$$V_rV_{2^l} \subset V_{r_2}V_{2^{-l}} = V_{r_2+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+1}+2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}.$$

Na topološki grupi G bomo sedaj konstruirali psevdometriko. Za vsak $x \in G$ naj bo

$$\varphi(x) = \inf\{r; x \in V_r\}.$$

Očitno je $\varphi(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $x \in H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{2^{-k}}$.

Na prostoru $G \times G$ definiramo preslikavo

$$\sigma(x,y) = \sup_{z \in G}\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)|\}.$$

Trdimo, da je preslikava σ iskana psevdometrika. Očitno je $\sigma(x,x) = 0$ in zaradi simetričnosti absolutne vrednosti je $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ za vsaka elementa $x, y \in G$. Trikotniška neenakost velja, saj za poljubne $x, y, w \in G$ velja

$$\begin{aligned}
\sigma(x,w) &= \sup_{z \in G}\{|\varphi(zx) - \varphi(zw)|\} = \sup_{z \in G}\{|\varphi(zx) - \varphi(zy) + \varphi(zy) - \varphi(zw)|\} \\
&\leq \sup_{z \in G}\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)| + |\varphi(zy) - \varphi(zw)|\} \\
&\leq \sup_{z \in G}\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)|\} + \sup_{z \in G}\{|\varphi(zy) - \varphi(zw)|\} \\
&= \sigma(x,y) + \sigma(y,w).
\end{aligned}$$

Ker velja še

$$\begin{aligned}\sigma(ax, ay) &= \sup\{|\varphi(zax) - \varphi(zay)|; z \in G\} \\ &= \sup\{|\varphi(zax) - \varphi(zay)|; za \in G\} = \sigma(x, y),\end{aligned}$$

je preslikava $\sigma\colon G \times G \to [0, \infty)$ res levoinvariantna psevdometrika na topološki grupi G.

Dokažimo lastnost (3). Naj bo $l \in \mathbb{N}$, $u \in V_{2^{-l}}$ in $z \in G$. Če je $z \in V_r$, potem je po zgoraj dokazanem $zu \in V_r V_{2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}$. Po definiciji preslikave φ torej sledi $\varphi(zu) \leq \varphi(z) + 2^{-l+2}$. Podobno, če je $zu \in V_r$, potem je $z \in V_r V_{2^{-l}}^{-1} = V_r V_{2^{-l}} \subset V_{r+2^{-l+2}}$, saj je okolica $V_{2^{-l}} = U_l$ simetrična. Po definiciji preslikave φ torej sledi $\varphi(z) \leq \varphi(zu) + 2^{-l+2}$. Od tod sledi $|\varphi(z) - \varphi(zu)| \leq 2^{-l+2}$ za vsak $u \in V_{2^{-l}}$ in $z \in G$, kar po definiciji preslikave σ pomeni $\sigma(u, e) \leq 2^{-l+2}$ za vsak $u \in V_{2^{-l}}$. Ker je preslikava σ levoinvariantna, sledi, da je $\sigma(x, y) \leq 2^{-l+2}$, če je $y^{-1}x \in V_{2^{-l}} = U_l$.

Sedaj dokažimo lastnost (1). Vzemimo $(x, y), (x_1, y_1) \in G \times G$. Če sta $x_1^{-1}x, y_1^{-1}y \in U_l$, uporabimo levoinvariantnost psevdometrike σ, trikotniško neenakost ter lastnost (3), da dobimo

$$\begin{aligned}&|\sigma(x, y) - \sigma(x_1, y_1)| = |\sigma(x_1^{-1}x, x_1^{-1}y) - \sigma(x_1^{-1}y, e) + \sigma(e, y^{-1}x_1) - \sigma(y^{-1}x_1, y^{-1}y_1)| \\ &\leq |\sigma(x_1^{-1}x, x_1^{-1}y) - \sigma(x_1^{-1}y, e)| + |\sigma(e, y^{-1}x_1) - \sigma(y^{-1}x_1, y^{-1}y_1)| \\ &\leq |\sigma(x_1^{-1}x, e)| + |\sigma(e, y^{-1}y_1)| \leq 2^{-l+2} + 2^{-l+2} = 2^{-l+3}\end{aligned}$$

Pokazali smo, da če sta $x_1^{-1}x, y_1^{-1}y \in U_l$, velja $|\sigma(x, y) - \sigma(x_1, y_1)| \leq 2^{-l+3}$, tore je po definiciji leve uniformne strukture na topološki grupi G psevdometrika σ enakomerno zvezna preslikava.

Dokažimo lastnost (4). Naj velja $y^{-1}x \notin U_l = V_{2^{-l}}$. Po definiciji preslikave φ velja $\varphi(y^{-1}x) \geq 2^{-l}$. Upoštevamo levoinvariantnost psevdometrike σ in dobimo

$$\sigma(x, y) = \sigma(y^{-1}x, e) \geq |\varphi(ey^{-1}x) - \varphi(ee)| = \varphi(y^{-1}x) \geq 2^{-l}.$$

Lastnost (2) sledi iz lastnosti (3) in (4). Če je $\sigma(x, y) = \sigma(y^{-1}x, e) = 0$, mora veljati $y^{-1}x \in U_k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$, sicer bi po lastnosti (4) obstajal $k_0 \in \mathbb{N}$, da bi veljalo $\sigma(x, y) \geq 2^{-k_0} > 0$. Torej je $y^{-1}x \in H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Če pa je $y^{-1}x \in H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$, po lastnosti (3) velja $\sigma(x, y) \leq 2^{-k}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Od tod očitno sledi $\sigma(x, y) = 0$.

Dokažimo še dodatek. Privzemimo, da velja $xU_kx^{-1} = U_k$ za vsak $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$. Potem za vsako diadično racionalno število $r > 0$ velja

$$\begin{aligned}xV_rx^{-1} &= xV_{2^{-l_1}}V_{2^{-l_2}} \cdots V_{2^{-l_n}}x^{-1} = xV_{2^{-l_1}}x^{-1}xV_{2^{-l_2}}x^{-1} \cdots xV_{2^{-l_n}}x^{-1} \\ &= xU_{l_1}x^{-1}xU_{l_2}x^{-1} \cdots xU_{l_n}x^{-1} = U_{l_1}U_{l_2} \cdots U_{l_n} \\ &= V_{2^{-l_1}}V_{2^{-l_2}} \cdots V_{2^{-l_n}} = V_r.\end{aligned}$$

Zato za vsaka $x, y \in G$ velja $\varphi(xyx^{-1}) = \inf\{r; xyx^{-1} \in V_r\} = \inf\{r; y \in x^{-1}V_rx\} = \inf\{r; y \in V_r\} = \varphi(y)$. Za vsake elemente $x, y, a \in G$ od tod sledi

$$\begin{aligned}\sigma(xa, ya) &= \sup_{z \in G}\{|\varphi(zxa) - \varphi(zya)|\} = \sup_{z \in G}\{|\varphi(azx) - \varphi(azy)|\} \\ &= \sup_{z \in G}\{|\varphi(zx) - \varphi(zy)|\} = \sigma(x, y),\end{aligned}$$

torej je psevdometrika σ tudi desnoinvariantna. Lastnost (5) sledi iz levo in desnoinvariantnosti psevdometrike σ. Velja

$$\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(e, y^{-1}x) = \sigma(y, x)) = \sigma(x, y). \qquad \square$$

V dokazu izreka o metrizabilnosti topološke grupe, ki zadošča T_0, si bomo pomagali z novo karakterizacijo separacijskega aksioma T_2.

Trditev 6.14. *Topološki prostor X je Hausdorffov natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ velja*

$$\bigcap\{\overline{U}; U \text{ okolica za } x\} = \{x\}.$$

Dokaz. Vzemimo točko $x \in X$ in poljubno točko $y \neq x$ Hausdorffovega prostora X. Potem obstajata taki disjunktni okolici U in V zaporedoma za točki x in y, da velja $y \in V \subseteq X \setminus \overline{U}$. Ker $y \notin \overline{U}$, velja $y \notin \bigcap\{\overline{U}; U \text{ okolica za } x\}$. Ker je bil y poljuben, je $\bigcap\{\overline{U}; U \text{ okolica za } x\} = \{x\}$.

Vzemimo poljubni različni točki $x, y \in X$. Ker je $\bigcap\{\overline{U}; U \text{ okolica za } x\} = \{x\}$, obstaja neka odprta okolica U_0 točke x, da $y \notin \overline{U_0}$. Potem sta množici U_0 in $X \setminus \overline{U_0}$ disjunktni odprti okolici zaporedoma za točki x in y. Ker sta x in y poljubno izbrani različni točki, je X Hausdorffov topološki prostor. □

Izrek 6.15. *Topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote.*

Dokaz. Če je G metrizabilen topološki prostor, lahko za števno bazo odprtih okolic enote e izberemo kar družino odprtih krogel $\{K(e, 2^{-n})\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Za dokaz obratne trditve predpostavimo, da je $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ števna baza odprtih okolic enote. Induktivno bomo konstruirali novo bazo okolic enote na naslednji način. Najprej definiramo okolico $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$. Recimo, da smo že skonstruirali okolice $U_1, \ldots, U_{k-1}$. Po trditvah 3.10 in 3.13 lahko izberemo tako okolico U_k, da zanjo velja $U_k \subset U_1 \cap \cdots \cap U_{k-1} \cap V_k$, $U_k = U_k^{-1}$ in $U_k^2 \subset U_{k-1}$ za vsak $k \geq 2$.

Ker G zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je po trditvi 3.14 G Hausdorffova. Upoštevamo, da je družina $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ baza okolic, in trditev 6.14 ter dobimo

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \bigcap\{\overline{U}; U \text{ okolica enote } e\} = \{e\}.$$

Ker množica H očitno vsebuje vsaj enoto e, je neprazna in $H = \{e\}$. Ker baza $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ zadošča predpostavkam izreka 6.13, na topološki grupi G obstaja psevdometrika σ z lastnostmi (1)-(4).

Po lastnosti (2) psevdometrike σ je $\sigma(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko $y^{-1}x \in H$. Ker je $H = \{e\}$, velja $\sigma(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = y$. Preslikava σ je torej metrika na G. Preveriti moramo le še, da topologija τ na G in topologija τ_σ, inducirana z metriko σ, sovpadata.

Po lastnostih (3) in (4) metrike σ za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\{x \in G; \sigma(x, e) \leq 2^{-k}\} \subset U_k \subset \{x \in G; \sigma(x, e) \leq 2^{-k+2}\}.$$

Torej za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja

$$K(e, 2^{-k}) \subset U_k \subset K(e, 2^{-k+2}).$$

Vsaka okolica enote e v topologiji τ torej vsebuje okolico enote e v topologiji τ_σ in vsaka okolica enote e v topologiji τ_σ vsebuje okolico enote e v topologiji τ. Po trditvi 3.11 sta topologiji τ in τ_σ ekvivalentni, iz česar sledi, da je G metrizabilen topološki prostor. □

6.3. **Separacijski aksiom $T_{3\frac{1}{2}}$.**

Definicija 6.16. Topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in poljubno točko $b \in X \backslash A$ obstaja taka zvezna funkcija $\psi\colon G \to [0,1]$, da je $\psi(b) = 1$ in $\psi(x) = 0$ za vsak $x \in A$.

Definicija 6.17. Topološku prostoru, ki zadošča T_1 in $T_{3\frac{1}{2}}$, pravimo *povsem regularen* topološki prostor.

Trditev 6.18. *Naj bo X topološki prostor.*

(1) Če je X povsem regularen topološki prostor, je regularen.
(2) Če je X normalen topološki prostor, je povsem regularen.

Dokaz. Za dokaz (1) za dano zaprto množico $A \subset X$ izberemo poljubno točko $b \in X \setminus A$. Potem obstaja taka zvezna funkcija $\psi\colon X \to [0,1]$, da je $\psi(b) = 1$ in $\psi(A) \equiv 0$. Ker sta množici $[0, \frac{1}{2})$ in $(\frac{1}{2}, 1]$ odprti glede na inducirano evklidsko topologijo na intervalu $[0,1]$ in je funkcija ψ zvezna, sta množici $\psi^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ in $\psi^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ disjunktni odprti okolici za množico A in točko b. S tem smo dokazali, da topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu T_3.

Za dokaz (2) naj bo X normalen topološki prostor. Vzemimo zaprto množico $A \subset X$ in poljubno točko $b \in X \setminus A$. Ker je prostor X normalen, je množica $\{b\}$ zaprta, zato po Urysohnovi karakterizaciji separacijskega aksioma T_4 (glej [4]) obstaja zvezna funkcija $\psi\colon X \to [0,1]$, da je $\psi(b) = 1$ in $\psi(A) \equiv 0$. □

Izrek 6.19. *Topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je povsem regularen topološki prostor.*

Dokaz. Za dano zaprto množico F vzemimo poljuben element $a \in G \setminus F$. Naj bo $\mathcal{U}$ baza simetričnih okolic enote e in naj bo U taka odprta okolica elementa a, da je $U \cap F = \emptyset$. Potem je $a^{-1}U$ okolica enote e in, ker je leva translacija po trditvi 3.7 homeomorfizem, velja $a^{-1}U \cap a^{-1}F = \emptyset$. Vzemimo tak $U_1 \in \mathcal{U}$, da je $U_1 \subseteq a^{-1}U$. Ker je leva translacija homeomorfizem, je množica aU_1 odprta okolica elementa a in $aU_1 \cap F = \emptyset$. Po trditvi 3.10 lahko potem induktivno izberemo take okolice $U_2, U_3, ... \in \mathcal{U}$, da velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$. S tem smo zadostili predpostavkam izreka 6.13, zato obstaja na G psevdometrika σ z lastnostmi (1)-(4). Definiramo funkcijo $\psi\colon G \to [0, \infty)$ s predpisom

$$\psi(x) = 1 - \min\{1, 2\sigma(x,a)\}.$$

Ker je psevdometrika σ po lastnosti (1) v izreku 6.13 enakomerno zvezna glede na levo uniformno strukturo na G, je po trditvi 6.9 zvezna, iz česar sledi, da je ψ zvezna funkcija.

Ker je po definiciji prevdometrike $\sigma(a,a) = 0$, je $\psi(a) = 1$. Vzemimo element $x \in F$. Ker po konstrukciji množice U_1 velja $a^{-1}x \notin U_1$, po lastnosti (4) v izreku 6.13, $\sigma(x,a) \geq 2^{-1} = \frac{1}{2}$, sledi $\psi(x) = 0$ za vsak element $x \in F$.

Topološka grupa G zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$. Ker zadošča tudi separacijskemu aksiomu T_0, je po trditvi 3.14 Hausdorffova in zato povsem regularna. □

7. Separacijski aksiom T_4

7.1. **Proste topološke grupe.** Za dokaz izreka o obstoju povsem regularne topološke grupe, ki ni normalna, potrebujemo pojem *proste grupe*. Vzemimo neprazno množico X. *Beseda* je bodisi prazna (pišemo e) bodisi končni formalni produkt

$x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$ elementov iz X, kjer je $\delta_k \in \{-1, 1\}$ za $k = 1, \ldots, n$ in $n \in \mathbb{N}$. Beseda je *reducirana*, če je prazna ali pa je $\delta_k = \delta_{k+1}$, kadar je $x_k = x_{k+1}$. Naj bo F množica vseh reduciranih besed nad množico X. Na množici F definiramo operacijo na naslednji način: produkt besed x in y je beseda, ki jo dobimo, če besedi x in y najprej staknemo, nato pa rekurzivno okrajšamo vse pare x_k, y_1, za katere velja $x_n = y_1$ in $\delta_n^x \neq \delta_1^y$, dokler ne dobimo okrajšane besede. Trdimo, da je množica F s tako definirano operacijo grupa. Res, če za enoto e vzamemo prazno besedo, inverz pa definiramo kot $(x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n})^{-1} = x_n^{-\delta_n} \cdots x_1^{-\delta_1}$, dobimo grupno strukturo, kot smo pokazali pri predmetu Algebra 3.

Izrek 7.1. *Za vsak povsem regularen topološki prostor X obstaja taka topološka grupa F_X, da velja:*

(1) topološka grupa F_X je prosta grupa nad prostorom X,
(2) topološki prostor X je zaprt podprostor v F_X,
(3) za vsako zvezno preslikavo $\varphi\colon X \to G$, kjer je G poljubna topološka grupa, obstaja zvezen homomorfizem $\Phi\colon F_X \to G$, da je $\Phi(x) = \varphi(x)$ za vsak $x \in X$.

Dokaz. Popoln dokaz izreka je izredno dolg in obsežen, zato ga tukaj izpustimo. Dokaz se nahaja v [3, (8.8)], navedli pa bomo le idejo dokaza.

Naj $\aleph_1$ označuje kontinuum, torej $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$. Vzemimo povsem regularen topološki prostor X. Naj bo $\mathcal{G}$ družina vseh paroma neizomorfnih topoloških grup, za katere velja:

(i) za vsako topološko grupo $G \in \mathcal{G}$ je $|G| \leq \max\{|X|, \aleph_1\}$,
(ii) za vsako topološko grupo H, za katero je $|H| \leq \max\{|X|, \aleph_1\}$, obstaja taka topološka grupa $G \in \mathcal{G}$, da sta G in H topološko izomorfni.

Definiramo množico $\{(G_\iota, \varphi_\iota)\}_{\iota \in I}$ vseh parov (G_ι, φ_ι), kjer je $G_\iota \in \mathcal{G}$ in je $\varphi_\iota\colon X \to G_\iota$ zvezna preslikava. Po definiciji družine $\mathcal{G}$ za vsako topološko grupo H in zvezno preslikavo $\varphi\colon X \to H$, kjer velja $|H| \leq \max\{|X|, \aleph_1\}$, obstaja tak indeks ι_0, da sta topološki grupi G_{ι_0} in H topološko izomorfni s topološkim izomorfizmom τ in velja $\tau \circ \varphi_{\iota_0} = \varphi$. V tem primeru identificiramo par (H, φ) s parom $(G_{\iota_0}, \varphi_{\iota_0})$.

Definiramo kartezični produkt $G_0 = \Pi_{\iota \in I} G_\iota$ in označimo enoto grupe G_0 z e. Za vsak $x \in X$ po komponentah definiramo $\nu(x) \in G_0$ tako: $\nu(x)_\iota = \varphi_\iota(x)$. Pokažemo, da je preslikava $\nu\colon X \to \nu(X)$ homeomorfizem. Od tukaj naprej lahko torej identificiramo prostor X s podmnožico $\nu(X) \subset G_0$ in pojmujemo $X \subset G_0$. Naj bo potem podgrupa $F_X \leq G$ tista podgrupa, ki je generirana z množico X.

Naj $\mathfrak{S}_n$ označuje grupo vseh permutacij množice z n elementi in naj $\mathfrak{U}(n)$ označuje grupo vseh unitarnih matrik velikost $n \times n$. Izberemo si poljubno število $l \in \mathbb{N}$. Potem naj bo za vsako permutacijo $P \in \mathfrak{S}_l$ matrika $U_P \in \mathfrak{U}(l)$ permutacijska matrika, torej je $u_{jk} = 1$, če je $j = P(k)$ in $u_{jk} = 0$ sicer. Preslikava, definirana s predpisom $P \mapsto U_P$, je izomorfizem iz $\mathfrak{S}_l$ v $\mathfrak{U}(l)$.

Da preverimo točko (2), vzamemo poljubno reducirano besedo $x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$ dolžine n, sestavljeno iz elementov prostora X. Obstaja preslikava $A\colon \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathfrak{U}(l)$, kjer je $l = n + 1$ ali $l = n + 2$, da velja $A(x_1)^{\delta_1} \cdots A(x_n)^{\delta_n} \neq I_l$, kjer I_l označuje identično matriko velikosti $l \times l$. Ker je topološka grupa $\mathfrak{U}(l)$ povezana s potmi in ker je topološki prostor X povsem regularen, obstaja taka zvezna preslikava $\varphi\colon X \to \mathfrak{U}$, da velja $\varphi(x_k) = A(x_k)$ za vsak $k = 1, \ldots, n$. Za nek indeks $\iota_0 \in I$ mora biti par $(\mathfrak{U}(l), \varphi)$ enak ali identificiran s parom $(G_{\iota_0}, \varphi_{\iota_0})$, iz česar sledi

$$(x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n})_{\iota_0} = A(x_1)^{\delta_1} \cdots A(x_n)^{\delta_n} \neq I_l,$$

torej velja $x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} \neq e$. Z drugimi besedami, F_X je prosta grupa, generirana z elementi iz prostora X.

Da dokažemo točko (1) vzemimo poljuben element množice $F_X \setminus X$. Zapišemo ga lahko kot besedo $x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$, kjer je $n > 1$ ali pa je $n = 1$ in je $\delta_1 = -1$. Z uporabo izomorfizma iz dveh odstavkov nazaj z upoštevanjem, da je $l = n + 1$ ali $l = n + 2$, dobimo take matrike $A(x_1), \ldots, A(x_n) \in \mathfrak{U}(l)$, da je matrika $B = A(x_1)^{\delta_1} \cdots A(x_n)^{\delta_n}$ različna od vsake matrike $A(x_k)$ za $k = 1, \ldots, n$. Ker je topološka grupa $\mathfrak{U}(l)$ lokalno evklidska, lahko dobimo okolico $\mathcal{B}$ matrike B, da je množica $\overline{\mathcal{B}} \cap (\mathfrak{U}(l) \setminus \mathcal{B})$ homeomorfna sferi $\mathcal{S}_{l^2-1}$ in da so $A(x_1), \ldots, A(x_n) \in \overline{\mathcal{B}}$. Ker je $\mathfrak{U} \cap \mathcal{B}^{\mathsf{c}}$ povezana s potmi, lahko najdemo takšno zvezno preslikavo $\psi \colon X \to \mathfrak{U} \cap \mathcal{B}^{\mathsf{c}}$, da je $\psi(x_k) = A(x_k)$ za vsak $k = 1, \ldots, n$. Potem je par $(\mathfrak{U}(l), \psi)$ enak ali identificiran s parom $(G_{\iota_0}, \varphi_{\iota_0})$. Okolica elementa $x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$ v F_X je sestavljena iz vseh $(y_\iota) \in F_X$, za katere $y_{\iota_0} \in \mathcal{B}$ ne fiksira nobene točke iz prostora X. Od tod sledi, da je $F_X \setminus X$ odprta množica, torej je X zaprt podprostor v F_X.

Da dokažemo točko (3) le vzamemo zvezno preslikavo $\varphi \colon X \to H$, kjer je H poljubno izbrana topološka grupa, za katero velja $\varphi(X) \subseteq J$, kjer je J podgrupa topološke grupe H in $|J| \leq \max\{|X|, \aleph_1\}$. Potem je par (J, φ) enak ali identificiran z nekim parom $(G_{\iota_0}, \varphi_{\iota_0})$. Preslikava φ je le projekcija na ι_0-to komponento v $F_X \subset \Pi_{\iota \in I} G_\iota$ in jo lahko razširimo do zveznega homomorfizma iz F_X v $J \subseteq H$. □

Izrek 7.2. *Naj bo X povsem regularen topološki prostor, F_X prosta topološka grupa nad X in naj bo $\widetilde{F}$ taka topološka grupa, da zanjo velja:*

(1) topološki prostor X je topološki podprostor v $\widetilde{F}$,

(2) topološka grupa $\widetilde{F}$ je najmanjša zaprta podgrupa v $\widetilde{F}$, ki vsebuje X,

(3) za vsako zvezno preslikavo $\varphi \colon X \to G$, kjer je G poljubna topološka grupa, obstaja zvezen homomorfizem $\Phi \colon \widetilde{F} \to G$, da je $\Phi(x) = \varphi(x)$ za vsak $x \in X$.

Tedaj obstaja topološki izomorfizem $\tau \colon F_X \to \widetilde{F}$, da je $\tau(x) = x$ za vsak $x \in X$.

Dokaz. Iz točke (3) izreka 7.1 in lastnosti (3) sledi, da obstajata zvezen homomorfizem $\Phi \colon F_X \to \widetilde{F}$ in zvezen homomorfizem $\widetilde{\Phi} \colon \widetilde{F} \to F_X$, da velja $\Phi(x) = \widetilde{\Phi}(x) = x$ za vsak $x \in X$. Kompozitum $\widetilde{\Phi} \circ \Phi \colon F_X \to F_X$ je zvezen homomorfizem, ki je identična preslikava na prostoru X. Ker je F_X po točki (2) izreka 7.1 prosta grupa nad X, je kompozitum $\widetilde{\Phi} \circ \Phi \colon F_X \to F_X$ identična preslikava na F_X. Kompozitum $\Phi \circ \widetilde{\Phi}$ je identična preslikava na podgrupi topološke grupe $\widetilde{F}$, ki je generirana z X. Ker je ta podgrupa po lastnosti (2) gosta v topološki grupi $\widetilde{F}$ in ker je $\Phi \circ \widetilde{\Phi}$ zvezna preslikava, je kompozitum $\Phi \circ \widetilde{\Phi}$ identična preslikava na $\widetilde{F}$. Od tod sledi, da je $\widetilde{\Phi} = \Phi^{-1}$, torej lahko vzamemo $\tau = \Phi$. □

Izrek 7.3. *Obstaja povsem regularna topološka grupa, ki ni normalna.*

Dokaz. Naj bo X poljuben povsem regularen topološki prostor, ki ni normalen. Po izreku 7.1 je X zaprt v prosti topološki grupi F_X. Ker je vsak zaprt topološki podprostor normalnega prostora normalen, F_X ne more biti normalen topološki prostor. □

Oglejmo si še konkreten primer topološke grupe, ki je povsem regularna, vendar ni normalna.

Izrek 7.4. *Če je m neštevno kardinalno število, potem je $\mathbb{Z}^m$ povsem regularna topološka grupa, ki ni normalna.*

Dokaz. Ker topološka grupa $\mathbb{Z}$ glede na inducirano evklidsko topologijo zadošča separacijskemu aksiomu T_0 in je separacijski aksiom T_0 multiplikativna lastnost, je tudi $\mathbb{Z}^m$ topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, zato je po izreku 6.19 topološka grupa $\mathbb{Z}^m$ povsem regularna. Za dokaz nenormalnosti pišimo $\mathbb{Z}^m$ raje kot kartezični produkt $\Pi_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{Z}_\lambda$, kjer je $|\Lambda| = m$ in $\mathbb{Z}_\lambda \cong \mathbb{Z}$ za vsak $\lambda \in \Lambda$. Definirajmo množici

$$A = \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m;\ \text{za vsak } n \in \mathbb{Z} \text{ in } n \neq 0 \text{ obstaja največ en } \lambda \in \Lambda, \text{ da je } x_\lambda = n\}$$

in

$$B = \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m;\ \text{za vsak } n \in \mathbb{Z} \text{ in } n \neq 1 \text{ obstaja največ en } \lambda \in \Lambda, \text{ da je } x_\lambda = n\}.$$

Če $(x_\lambda) \notin A$, potem obstajata različna indeksa $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$, da velja $x_{\lambda_0} = x_{\lambda_1} = n$ za nek $n \in \mathbb{Z}$ in $n \neq 0$. Ker so vse projekcijske preslikave $\mathrm{pr}_\lambda \colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}_\lambda$ zvezne, je $\{(y_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; y_{\lambda_0} = y_{\lambda_1} = n\}$ odprta množica, ki vsebuje (x_λ), in je disjunktna množici A. Vsaka točka iz $\mathbb{Z}^m \setminus A$ ima torej odprto okolico, ki je disjunktna množici A, iz česar sledi, da je $\mathbb{Z}^m \setminus A$ odprta množica, zato je množica A zaprta. Z enakim premislekom utemeljimo, da je tudi množica B zaprta. Množici A in B sta očitno disjunktni. Res, vsak element $(x_\lambda) \in A$ ima po konstrukciji množice A na neštevno mnogo indeksih vrednost 0 in zato $(x_\lambda) \notin B$. Premislek lahko ponovimo še v obratni smeri.

Vzemimo poljubni dve odprti okolici U in V zaporedoma za množici A in B. Pokazali bomo, da velja $U \cap V \neq \emptyset$, iz česar bo takoj sledilo, da topološka grupa Z^m ni normalen topološki prostor.

Naj ima $(x_\lambda^{(1)}) \in \mathbb{Z}^m$ vrednost 0 za vsak indeks $\lambda \in \Lambda$. Očitno je $(x_\lambda^{(1)}) \in A \subset U$, zato obstaja tako število $m_1 \in \mathbb{N}$ in taki paroma različni indeksi $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1} \in \Lambda$, da velja

$$(x_\lambda^{(1)}) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_{\lambda_k} = 0 \text{ za } k = 1, \ldots, m_1\} \subset U.$$

Naj ima $(x_\lambda^{(2)}) \in \mathbb{Z}^m$ vrednost k na indeksih λ_k, kjer je $1 \leq k \leq m_1$, in vrednost 0 drugod. Ker je $(x_\lambda^{(2)}) \in A \subset U$, obstaja tako število $m_2 \in \mathbb{N}$, kjer $m_2 > m_1$, in taki paroma različni indeksi $\lambda_{m_1+1}, \ldots, \lambda_{m_2} \in \Lambda$, različni od vseh indeksov $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}$, da velja

$$\begin{aligned}(x_\lambda^{(2)}) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_{\lambda_k} = k \text{ za } k = 1, \ldots, m_1 \text{ in}\\ x_{\lambda_k} = 0 \text{ za } k = m_1 + 1, \ldots, m_2\} \subset U.\end{aligned}$$

Tako nadaljujemo in induktivno definiramo zaporedje $\{(x_\lambda^{(n)})\}_{n=1}^\infty$ elementov topološke grupe $\mathbb{Z}^m$, zaporedje indeksov$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ in strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ na naslednji način. Če smo že definirali $(x_\lambda^{(n-1)})$ in paroma različne indekse $\lambda_{m_{n-2}+1}, \ldots, \lambda_{m_{n-1}}$, naj ima $(x_\lambda^{(n)})$ vrednost k na indeksih λ_k, kjer je $1 \leq k \leq m_{n-1}$, in vrednost 0 sicer. Ker je $(x_\lambda^{(n)}) \in A \subset U$, obstaja tako število $m_n \in \mathbb{N}$, kjer $m_n > m_{n-1}$, in taki paroma različni indeksi $\lambda_{m_{n-1}+1}, \ldots, \lambda_{m_n}$, različni od vseh prej tako definiranih indeksov, da velja

$$\begin{aligned}(x_\lambda^{(n)}) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_{\lambda_k} = k \text{ za } k = 1, \ldots, m_{n-1} \text{ in}\\ x_{\lambda_k} = 0 \text{ za } k = m_{n-1} + 1, \ldots, m_n\} \subset U.\end{aligned}$$

Definirajmo še $(y_\lambda) \in \mathbb{Z}^m$. Naj bo $(y_\lambda) = k$, če je $\lambda = \lambda_k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ in naj bo $y_\lambda = 1$ drugod. Očitno je $(y_\lambda) \in B$, zato za neko končno podmnožico $K \subset \Lambda$ velja

$$\{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_\lambda = y_\lambda \text{ za vse } \lambda \in K\} \subset V.$$

Ker je množica K končna, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da $\lambda_k \notin K$ za vse $k > m_{n_0}$.

Definirajmo še $(z_\lambda) \in \mathbb{Z}^m$ na naslednji način:

$$\begin{aligned}
&z_\lambda = k, \text{ če je } \lambda = \lambda_k \text{ in } k \le m_{n_0}, k \in \mathbb{N};\\
&z_\lambda = 0, \text{ če je } \lambda = \lambda_k \text{ in } m_{n_0} + 1 \le k \le m_{n_0+1}, k \in \mathbb{N};\\
&z_\lambda = 1 \text{ sicer.}
\end{aligned}$$

Potem je $(z_\lambda) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_\lambda = y_\lambda \text{ za vse } \lambda \in K\} \subset V$ in hkrati

$$\begin{aligned}
(z_\lambda) \in \{(x_\lambda) \in \mathbb{Z}^m; x_{\lambda_k} = k \text{ za } k = 1, \ldots, m_{n_0} \text{ in}\\
x_{\lambda_k} = 0 \text{ za } k = m_{n_0} + 1, \ldots, m_{n_0+1}\} \subset U.
\end{aligned}$$

Od tod sledi, da $U \cap V \neq \emptyset$. □

7.2. **Parakompaktni topološki prostori.** V nadaljevanju bomo dokazali, da je ključni pogoj, ki regularni topološki grupi manjka do normalnosti, lokalna kompaktnost.

Definicija 7.5.
(1) Naj bosta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ družini podmnožic topološkega prostora X. Družina $\mathcal{V}$ je *pofinitev* družine $\mathcal{U}$, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja takšna množica $U \in \mathcal{U}$, da je $V \subset U$.
(2) Družina podmnožic $\mathcal{U}$ topološkega prostora X je *lokalno končna*, če ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki seka samo končno mnogo množic iz družine $\mathcal{U}$.
(3) Družina podmnožic je *σ-lokalno končna*, če je števna unija lokalno končnih družin podmnožic.
(4) Topološki prostor X je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora X.

Opomba 7.6. Iz splošne topologije vemo, da za lokalno končno družino $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ velja

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{C_\lambda}.$$

Trditev 7.7. *Za lokalno končno družino $\{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ podmnožic topološkega prostora X veljajo naslednje trditve:*

(1) Lokalno končna je tudi družina $\{\overline{U_\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$.
(2) Za vsako podmnožico indeksov $I \subseteq \Lambda$ je unija $\bigcup_{\lambda\in I}\{\overline{U_\lambda}\}$ zaprta v X.

Dokaz. Za dokaz točke (1) izberimo $x \in X$ in poiščimo takšno odprto okolico V_x točke x, da velja $U_\lambda \cap V_x = \emptyset$ za vse, razen za končno indeksov $\lambda \in \Lambda$. Ker je množica $X \setminus V_x$ zaprta, velja

$$U_\lambda \cap V_x = \emptyset \implies U_\lambda \subseteq X \setminus V_x \implies \overline{U_\lambda} \subseteq X \setminus V_x \implies \overline{U_\lambda} \cap V_x = \emptyset$$

za vse, razen za končno indeksov $\lambda \in \Lambda$, od iz česar sledi, da je tudi $\{\overline{U_\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$ lokalno končna družina.

Za dokaz trditve (2) vzemimo podmnožico indeksov $I \subseteq \Lambda$ in definiramo množico $B = \bigcup_{\lambda\in I} \overline{U_\lambda}$. Ker je vsaka poddružina lokalno končne družine očitno lokalno končna, po točki (1) obstaja za poljuben $x \in X \setminus B$ okolica V_x, da ima z največ končno množicami $\overline{U_\lambda}$, $\lambda \in I$, neprazen presek. Naj bodo te množice $\overline{U_{\lambda_1}}, \ldots, \overline{U_{\lambda_n}}$. Potem je množica $V_x \cap (\bigcap_{k=1}^{n}(X \setminus \overline{U_{\lambda_k}}))$ okolica točke x ki ne seka množice B. Ker je $x \in X \setminus B$ poljubno izbran, je množica $X \setminus B$ odprta, zato je B zaprta v X. □

Trditev 7.8. *Naj bo* $\{E_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$ *družina podmnožic topološkega prostora* X *in naj bo* $\{B_\beta; \beta \in \mathcal{B}\}$ *tako lokalno končno pokritje prostora* X *iz zaprtih množic, da za vsak* $\beta \in \mathcal{B}$ *množica* B_β *seka kvečjemu končno mnogo množic* E_α*. Tedaj za vsak* $\alpha \in \mathcal{A}$ *obstaja takšna odprta množica* U_α*, da je* $E_\alpha \subseteq U_\alpha$*, družina množic* $\{U_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$ *pa je lokalno končna.*

Dokaz. Za vsak $\alpha \in \mathcal{A}$ definiramo množico

$$U_\alpha = X \setminus \bigcup\{B_\beta; B_\beta \cap E_\alpha = \emptyset\}.$$

Po trditvi 7.7 je za vsak $\alpha \in \mathcal{A}$ množica U_α odprta. Preverimo, da je družina množic $\{U_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$ lokalno končna. Vsak $x \in X$ ima okolico V_x, ki leži v končni uniji $\bigcup_{i=1}^n B_{\beta_i}$. Ker $B_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$ natanko tedaj, kadar $B_\beta \cap E_\alpha \neq \emptyset$, in ker po predpostavki vsak B_{β_i} seka kvečjemu končno množic E_α, unija $\bigcup_{i=1}^n B_{\beta_i}$ seka kvečjemu končno množic U_α, zato tudi V_x seka kvečjemu končno množic E_α. Po konstrukciji je $E_\alpha \subseteq U_\alpha$. □

Definicija 7.5 parakompaktnega topološkega prostora X je splošna, v naslednji trditvi pa si bomo ogledali še nekaj alternativnih definicij, če je topološki prostor X regularen.

Trditev 7.9. *Za regularen topološki prostor* X *so naslednje trditve ekvivalentne:*

(1) Topološki prostor X *je parakompakten.*
(2) Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U}$ *topološkega prostora* X *obstaja* σ*-lokalno končna pofinitev pokritja* $\mathcal{U}$ *iz odprtih množic, ki je tudi sama pokritje prostora* X*.*
(3) Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U}$ *topološkega prostora* X *obstaja lokalno končna pofinitev pokritja* $\mathcal{U}$*, ki je tudi sama pokritje prostora* X*.*
(4) Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U}$ *obstaja lokalno končna pofinitev pokritja* $\mathcal{U}$ *iz zaprtih množic, ki je tudi sama pokritje prostora* X*.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Ker je vsaka lokalno končna družina podmnožic tudi σ-lokalno končna, ta implikacija očitno drži.

(2) $\Rightarrow$ (3): Vzemimo poljubno odprto pokritje $\mathcal{U}$ topološkega prostora X. Po točki (2) obstaja pofinitev iz odprtih množic $\mathcal{V} = \{V_{n,\lambda}; (n, \lambda) \in \mathbb{N} \times \Lambda\}$, kjer je za vsak $n_0 \in \mathbb{N}$ družina $\{V_{n_0,\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$ lokalno končna, ki ni nujno pokritje. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $W_n = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_{n,\lambda}$. Potem je družina $\{W_n; n \in \mathbb{N}\}$ odprto pokritje prostora X. Sedaj definiramo množico $A_1 = W_1$, nato pa za vsak $i > 1$, $i \in \mathbb{N}$, definiramo množico $A_i = W_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} W_j)$. Ker je $A_i \subseteq W_i$ za vsak $i \in \mathbb{N}$, je družina $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ pofinitev pokritja $\{W_n; n \in \mathbb{N}\}$,prav tako pa je pokritje prostora X. Res, za vsak $x \in X$ je $x \in A_{n(x)}$, kjer je $n(x) \in \mathbb{N}$ najmanjše naravno število, da je $x \in W_{n(x)}$. Ker okolica $W_{n(x)}$ točke x po konstrukciji množic $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ne seka nobene množice A_i za $i > n(x)$, je družina $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ lokalno končna.

Trdimo, da je družina množic $\{A_n \cap V_{n,\lambda}\}$ iskano pokritje. Ker je podpokritje $\mathcal{V}$ pofinitev pokritja $\mathcal{U}$, je tudi $\{A_n \cap V_{n,\lambda}\}$ pofinitev pokritja $\mathcal{U}$. Vzemimo poljuben $x \in X$. Ker ima po zgoraj dokazanem točka x okolico, ki seka kvečjemu končno mnogo množic A_n, in ker je za vsak $n_0 \in \mathbb{N}$ družina $\{V_{n_0,\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$ lokalno končna, je tudi $\{A_n \cap V_{n,\lambda}\}$ lokalno končna družina množic.

(3) $\Rightarrow$ (4): Vzemimo poljubno odprto pokritje $\mathcal{U}$ topološkega prostora X. Za vsak $x \in X$ izberemo množico $U_x \in \mathcal{U}$, da je $x \in U_x$. Ker je X regularen topološki prostor, obstaja taka odprta množica V_x, da velja $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. Ker je družina množic $\mathcal{V} = \{V_x; x \in X\}$ odprto pokritje prostora X, po točki (3) obstaja lokalno končna pofinitev $\{A_x; x \in X\}$ pokritja $\mathcal{V}$, ki je tudi sama pokritje prostora X. Po

trditvi 7.7 je tudi družina $\{\overline{A_x}; x \in X\}$ lokalno končna. Ker za vsak $x \in X$ velja $\overline{A_x} \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$, je družina množic $\{\overline{A_x}; x \in X\}$ iskana pofinitev iz zaprtih množic.

(4) $\Rightarrow$ (1): Vzemimo poljubno odprto pokritje $\mathcal{U}$ topološkega prostora X. Po točki (4) obstaja lokalno končna pofinitev $\mathcal{E}$ pokritja $\mathcal{U}$ iz zaprtih množic, ki je tudi sama pokritje za prostor X. Potem ima vsak $x \in X$ okolico V_x, ki seka kvečjemu končno množic iz $\mathcal{E}$. Po točki (4) obstaja lokalno končna pofinitev $\mathcal{B} = \{B\}$ pokritja $\{V_x; x \in X\}$ iz zaprtih množic. Ker vsaka množica iz $\mathcal{B}$ seka kvečjemu končno množic iz $\mathcal{E}$, po trditvi 7.8 za vsako množico $E \in \mathcal{E}$ obstaja odprta množica G_E, ki vsebuje množico E, da je družina $\{G_E\}$ lokalno končna. Ker je $\mathcal{E}$ pofinitev pokritja $\mathcal{U}$, naj bo za vsako množico $E \in \mathcal{E}$ množica $U_E \in \mathcal{U}$ neka množica, ki vsebuje E. Ker so vse množice G_E in U_E odprte in ker je družina množic $\mathcal{E}$ pokritje prostora X, je družina $\{G_E \cap U_E; E \in \mathcal{E}\}$ lokalno končna pofinitev pokritja $\mathcal{U}$ iz odprtih množic, ki je tudi sama pokritje prostora X. □

Definicija 7.10. Topološki prostor ima Lindelöfovo lastnost, če vsako njegovo odprto pokritje vsebuje števno podpokritje.

Očitno ima vsak kompakten prostor Lindelöfovo lastnost, saj vsako odprto pokritje vsebuje končno podpokritje, ki je očitno števno. Velja pa tudi naslednje.

Trditev 7.11. *Vsak σ-kompakten prostor ima Lindelöfovo lastnost.*

Dokaz. Res, ker je σ-kompakten prostor unija števno mnogo kompaktnih prostorov, vsako odprto pokritje vsakega od njih pa vsebuje končno podpokritje, vsako odprto pokritje σ-kompaktnega prostora vsebuje podpokritje, ki je sestavljeno iz števno mnogo končnih pokritji. Ker je števna unija končnih množic števna množica, je to podpokritje števno. □

Trditev 7.12. *Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.*

Dokaz. Vzemimo zaprti, neprazni in disjunktni podmnožici A in B parakompaktnega Hausdorffovega prostora X.

Vzemimo najprej poljubno točko $b \in B$. Ker je prostor X Hausdorffov, sta vsaki dve točki ločeni z disjunktnima okolicama. Za vsako točko $a \in A$ torej obstaja taka odprta množica $Q_a \subset X$, da je $a \in Q_a$ in $b \in X \setminus \overline{Q_a}$. Ker je A zaprta, je $X \setminus A$ odprta, iz česar sledi, da je $\mathcal{W} = (X \setminus A) \cup \{Q_a\}_{a \in A}$ odprto pokritje prostora X. Ker je X parakompakten topološki prostor, obstaja lokalno končno odprto pokritje $\mathcal{W}'$ prostora X, ki je pofinitev pokritja $\mathcal{W}$.

Oglejmo si družino množic

$$\mathcal{Q} = \{W \in \mathcal{W}'; W \cap A \neq \emptyset\}.$$

Ker je pofinitev $\mathcal{W}'$ lokalno končna, je tudi družina množic $\mathcal{Q}$ lokalno končna. Za vsako množico $W \in \mathcal{Q}$ po definiciji pofinitve obstaja takšna točka $a \in A$, da je $W \subset Q_a$. Potem velja $b \in X \setminus \overline{Q_a} \subset X \setminus \overline{W}$. Ker je $\mathcal{W}'$ odprto pokritje prostora X, je $S = \bigcup \mathcal{Q}$ odprta okolica množice A, in ker je $\mathcal{Q}$ lokalno končna družina, po opombi 7.6 velja

$$b \in X \setminus \bigcup_{W \in \mathcal{Q}} \overline{W} = X \setminus \overline{S}.$$

Množica $T_b = X \setminus \overline{S}$ je odprta okolica točke b, ki je disjunktna z množico S.

Po zgoraj dokazanem za vsako točko $b \in B$ obstaja odprta okolica T_b točke b, da je $A \cap \overline{T_b} = \emptyset$, zato je $\mathcal{U} = (X \setminus B) \cup \{T_b\}_{b \in B}$ odprto pokritje prostora X. Ker je X

parakompakten topološki prostor, obstaja lokalno končno odprto pokritje $\mathcal{U}'$, ki je pofinitev pokritja $\mathcal{U}$. Naj bo

$$\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U}'; U \cap B \neq \emptyset\}.$$

Ker je družina $\mathcal{U}'$ pofinitev pokritja $\mathcal{U}$, za vsako množico $U \in \mathcal{V}$ obstaja takšna točka $b \in B$, da je $U \subset T_b$, iz česar sledi $A \cap \overline{U} \subset A \cap \overline{T_b} = \emptyset$. Ker je množica $V = \bigcup \mathcal{V}$ odprta okolica množice B in ker je $\mathcal{V}$ lokalno končna družina, po opombi 7.6 velja

$$A \cap \overline{V} = A \cap \bigcup_{U \in \mathcal{V}} \overline{U} = \emptyset.$$

Množica $X \setminus \overline{V}$ je torej odprta okolica množice A, ki je disjunktna z odprto okolico V množice B. Hausdorffov topološki prostor X s tem zadošča separacijskemu aksiomu T_4 in je zato normalen. □

Izrek 7.13. *Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je parakompakten topološki prostor.*

Dokaz. Ker je G lokalno kompaktna, obstaja kompaktna okolica K enote e. Po posledici 4.7 obstaja takšna simetrična okolica U enote e, da je $\overline{U} \subset K$. Ker so zaprte podmnožice kompaktnih prostorov kompaktne, je tudi $\overline{U}$ kompaktna okolica enote e.

Naj bo $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. Množica L je po trditvi 4.3 odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G. Preverimo, da je $\overline{U} \subseteq U^2$. Vzemimo $x \in \overline{U}$. Množica xU je odprta okolica za x in velja $xU \cap U \neq \emptyset$, iz česar sledi, da obstajata elementa $u_1, u_2 \in U$, da je $xu_1 = u_2$. Od tod dobimo

$$x = u_2 u_1^{-1} \in UU^{-1} = U^2.$$

Sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\overline{U^n} \subseteq U^{2n}$, zato je $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}^n$. Po trditvi 3.9 je za vsak $n \in \mathbb{N}$ množica $\overline{U}^n$ kompaktna, zato je podgrupa L enaka števni uniji kompaktnih množic, torej σ-kompaktna in ima posledično Lindelöfovo lastnost. Ker je leva translacija po trditvi 3.7 homeomorfizem, ima za vsak $x \in G$ tudi levi odsek xL Lindelöfovo lastnost.

Vzemimo poljubno odprto pokritje $\mathcal{V}$ topološke grupe G in točko $x \in G$. Ker je $\mathcal{V}$ pokritje tudi za levi odsek $xL \subseteq G$, obstaja števna poddružina $\{V_{xL}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ pokritja $\mathcal{V}$, da je $xL \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{xL}^{(n)}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo družino množic $\mathcal{W}_n = \{V_{xL}^{(n)} \cap (xL); xL \in G/L\}$. Trdimo, da je družina množic $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$ pofinitev pokritja $\mathcal{V}$. Res, za vsako množico $(V_{xL}^{(n)} \cap (xL)) \in \mathcal{W}$, kjer je $x \in G$ in $n \in \mathbb{N}$, velja

$$V_{xL}^{(n)} \cap (xL) \subseteq V_{xL}^{(n)} \in \mathcal{V}.$$

Ker je vsak $x \in G$ vsebovan v natanko enem odseku $xL \subseteq G$, je družina množic $\mathcal{W}_n$ lokalno končna, torej je $\mathcal{W}$ σ-lokalno končna pofinitev pokritja $\mathcal{V}$, ki je tudi sama pokritje topološke grupe G. Ker je G po posledici 4.10 regularna topološka grupa, je po trditvi 7.9 topološka grupa G parakompaktna. □

Posledica 7.14. *Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je normalen topološki prostor.*

Dokaz. Naj bo G lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0. Po trditvi 3.14 je G Hausdorffova, po izreku 7.13 pa je G parakompaktna. Ker je po trditvi 7.12 vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor normalen, je G normalna topološka grupa. □

Slovar strokovnih izrazov

completely regular povsem regularen
coset odsek
dyadic number diadično število
free group prosta grupa
left invariant levoinvarianten
locally finite lokalno končen
metrizable metrizabilen
natural mapping naravna preslikava
normal subgroup podgrupa edinka
paracompact parakompakten
pseudo-metric psevdometrika
refinement pofinitev
symmetric neighbourhood simetrična okolica
uniform structure uniformna struktura
uniformly continuous enakomerno zvezen

Literatura

[1] S. Bhowmik, *Introduction to Uniform Spaces*, 10.13140/RG.2.1.3743.8967, junij 2014, [ogled 1. 4. 2019], dostopno na `https://www.researchgate.net/publication/305196408_INTRODUCTION_TO_UNIFORM_SPACES`.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon series in advanced mathematics, Allyn and Bacon, 1966

[3] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstact Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[4] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44** DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.