

TOPOLOŠKE GRUPE

Avtor: Benjamin Benčina

Mentor: Marko Kandić

Fakulteta za matematiko in fiziko

1. september 2019

- definicija topološke grupe
- primeri
- s čim sem se ukvarjal
- metrizabilnost in višji separacijski aksiomi

DEFINICIJA TOPOLOŠKE GRUPE

DEFINICIJA: *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ s topologijo τ , glede na katero sta strukturni preslikavi zvezni.

Strukturni preslikavi:

- Množenje: $\mu : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$.
- Invertiranje: $\iota : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$.

PRIMERI

PRIMER: Grupa \mathbb{R}^n je topološka grupa za vsak $n \in \mathbb{N}$.

PRIMER: Naj bo G poljubna neskončna grupa in naj bo τ topologija končnih komplementov na G . Topološki prostor (G, τ) ni topološka grupa za nobeno operacijo.

- osnovne lastnost
- kvocientni prostori topoloških grup
- trije izreki o topoloških izomorfizmih
- metrizabilnost
- višji separacijski aksiomi

TRDITEV: Za topološko grupo G in bazo \mathcal{U} odprtih okolic enote e veljajo naslednje trditve:

- (1) za vsako $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka $V \in \mathcal{U}$, da je $V^2 \subset U$,
- (2) za vsako $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka $V \in \mathcal{U}$, da je $V^{-1} \subset U$,
- (3) za vsako $U \in \mathcal{U}$ in vsak $x \in U$ obstaja taka $V \in \mathcal{U}$, da je $xV \subset U$,
- (4) za vsako $U \in \mathcal{U}$ in vsak $x \in U$ obstaja taka $V \in \mathcal{U}$, da je $xVx^{-1} \subset U$.

IZREK: Naj bo G grupa in \mathcal{U} družina podmnožic grupe G , za katero veljajo lastnosti (1)-(4). Naj bodo poljubni končni preseki množic iz \mathcal{U} neprazni. Tedaj je družina $\{xU; x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ odprta podbaza za neko topologijo na G . S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux; x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ je podbaza za isto topologijo. Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $W \in \mathcal{U}$, da je $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU; x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ in $\{Ux; x \in G, U \in \mathcal{U}\}$ tudi bazi za to topologijo.

KVOCIENTNI PROSTORI TOPOLOŠKIH GRUP

- kvocientna topologija
- lastnosti kvocientnega prostora topoloških grup
- kvocientna topološka grupa

IZREKI O TOPOLOŠKIH IZOMORFIZMIH

- topološki izomorfizem
- trije izreki o izomorfizmih
- dodatne topološke predpostavke na preslikave in podgrupe

IZREK O PSEVDOMETRIKI

IZREK: Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ družina simetričnih okolic enote e topološke grupe G z lastnostjo $U_{k+1}^2 \subset U_k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Potem obstaja taka levoinvariantna psevdometrika σ , da velja:

- σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi na $G \times G$,
- $\sigma(x, y) = 0 \iff y^{-1}x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$,
- $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če je $y^{-1}x \in U_k$,
- $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če poleg tega velja še, da $xU_kx^{-1} = U_k$ za vse $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, je σ tudi desnoinvariantna in velja:

- $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka $x, y \in G$.

METRIZABILNOST

IZREK: Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 . Tedaj je G metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote.

POVSEM REGULARNOST

DEFINICIJA: Topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$, če za vsako zaprto množico $F \subset X$ in točko $a \in X \setminus F$ obstaja zvezna funkcija $\psi : X \rightarrow [0, 1]$, da je $\psi(a) = 1$ in $\psi|_F = 0$.

Topološki prostor je *povsem regularen*, če zadošča separacijskima aksiomoma T_1 in $T_{3\frac{1}{2}}$.

IZREK: Vsaka topološka grupa G , ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 , je povsem regularen topološki prostor.

PARAKOMPAKTNOST

DEFINICIJA:

Naj bo X topološki prostor. Družina podmnožic \mathcal{V} je pofinitev družine podmnožic \mathcal{U} , če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja takšna množica $U \in \mathcal{U}$, da je $V \subset U$.

Topološki prostor X je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora X .

IZREK: Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.

NORMALNOST

IZREK: Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa G , ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 , je parakompakten topološki prostor.

POSLEDICA: Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 , je normalna.

Hvala za vašo pozornost!