

# TOPOLOŠKE GRUPE

Benjamin Benčina

Fakulteta za matematiko in fiziko

6. april 2019

**DEFINICIJA:** *Topološka grupa* je grupa  $(G, *)$  s topologijo  $\tau$ , glede na katero sta strukturni operaciji zvezni.

Strukturni operaciji:

- Množenje:  $\mu : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$ .
- Invertiranje:  $\iota : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ .

# NEKAJ LASTNOSTI

IZREK: Naj bo  $G$  topološka grupa in  $a \in G$  njen poljuben element. Leva translacija  $x \mapsto ax$ , desna translacija  $x \mapsto xa$  in invertiranje  $x \mapsto x^{-1}$  so homeomorfizmi na  $G$ .

OPOMBA: Vemo že, da so to avtomorfizmi grupe  $G$ .

# NEKAJ LASTNOSTI

**IZREK:** Naj bo  $G$  topološka grupa in  $\mathcal{U}$  odprta baza okolic enote  $e$ . Veljajo naslednje trditve:

- za vsako okolico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka okolica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V^2 \subset U$ ,
- za vsako okolico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka okolica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V^{-1} \subset U$ ,
- za vsako okolico  $U \in \mathcal{U}$  in element  $x \in U$  obstaja taka okolica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $xV \subset U$ ,
- za vsako okolico  $U \in \mathcal{U}$  in element  $x \in U$  obstaja taka okolica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $xVx^{-1} \subset U$ .

# NEKAJ LASTNOSTI

TRDITEV: Vsaka topološka grupa ima odprto bazo okolic enote  $e$ , sestavljeno iz simetričnih množic  $U = U^{-1}$ .

POSLEDICA: Za vsako okolico  $U$  enote  $e$  topološke grupe  $G$ , obstaja taka okolica  $V$  enote  $e$ , da velja  $\overline{V} \subset U$ .

# REGULARNOST

- Vemo:  $T_2 \implies T_1 \implies T_0$ .
- Za topološke grupe:  $T_0 \iff T_2$ .
- Še več:

**IZREK:** Vsaka topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je regularen topološki prostor.

# METRIKA IN PSEUDOMETRIKA

DEFINICIJA: *Metrika* na množici  $X$  je funkcija  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , ki zadošča pogojem:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

# METRIKA IN PSEUDOMETRIKA

**DEFINICIJA:** *Metrika* na množici  $X$  je funkcija  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , ki zadošča pogojem:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

**DEFINICIJA:** *Pseudometrika* na množici  $X$  je funkcija  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , ki zadošča pogojem:

- $d(x, x) = 0$ ,
- $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .



# IZREK O PSEUDOMETRIKI

**IZREK:** Naj bo  $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$  družina simetričnih okolic enote  $e$  topološke grupe  $G$  z lastnostjo  $U_{k+1}^2 \subset U_k$  za vsak  $k \in \mathbb{N}$ . Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika  $\sigma$ , da velja:

- $\sigma$  je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi na  $G \times G$ ,
- $\sigma(x, y) = 0 \iff y^{-1}x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ ,
- $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$ , če je  $y^{-1}x \in U_k$ ,
- $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$ , če  $y^{-1}x \notin U_k$ .

Če poleg tega velja še, da  $xU_kx^{-1} = U_k$  za vse  $x \in G$  in  $k \in \mathbb{N}$ , je  $\sigma$  tudi desnoinvariantna in velja:

- $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$  za vsaka  $x, y \in G$ .

# METRIZABILNOST

Pseudometriki do metrike manjka:  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .

IZREK: Naj bo  $G$  topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ . Tedaj je  $G$  metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna odprta baza okolic enote  $e$ .

# POVSEM REGULARNOST

**DEFINICIJA:** Topološki prostor  $X$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_{3\frac{1}{2}}$ , če za vsako zaprto množico  $F \subset X$  in točko  $a \in X - F$  obstaja zvezna funkcija  $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , da je  $\psi(a) = 0$  in  $\psi|_F = 1$ .  
Topološki prostor je *povsem regularen*, če zadošča  $T_1 + T_{3\frac{1}{2}}$ .

**IZREK:** Vsaka topološka grupa  $G$ , ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je povsem regularen topološki prostor.

# NORMALNOST

➤ Ali velja tudi  $T_0 \implies T_4$ ?

# NORMALNOST

➤ Ali velja tudi  $T_0 \implies T_4$ ? Ne.

# NORMALNOST

- Ali velja tudi  $T_0 \implies T_4$ ? Ne.
- Kaj manjka?

# NORMALNOST

- Ali velja tudi  $T_0 \implies T_4$ ? Ne.
- Kaj manjka?

IZREK: Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa  $G$ , ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je normalna.