UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina

Topološke grupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2019

Kazalo

Topološke grupe

Povzetek

povzetek HERE

Topological groups

Abstract

ABSTRACT HERE

Math. Subj. Class. (2010): 43-00
Ključne besede: grupa topologija
Keywords: group topology

1. Uvod

2. Preliminarna poglavja

2.1. **Operacije na množicah.** Vse operacije na množicah, če ne bo drugače zaznamovano, delujejo na elementih. Tako je na primer produkt množic U in V enak

$$U \cdot V = \{u \cdot v; u \in U, v \in V\},$$

inverz množice U pa je

$$U^{-1} = \{u^{-1}; u \in G\}.$$

Tukaj se v obeh primerih predpostavlja, da so množice vložene v neki grupi, kjer so operacije na elementih smiselno definirane. Grupno strukturo bomo bolj podrobno opisali v naslednjem podrazdelku.

Pomembnejša izjema temu pravilu so operacije na množicah v smislu relacij. Predpostavimo torej, da imamo množico X in nas zanimajo podmnožice kartezičnega produkta $X \times X$. Inverz take množice U je definiran kot

$$U^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in U\},$$

analogna operacija množenju pa je kompozitum množic

$$V \circ U = \{(x, z);\ \text{obstaja tak element } y \in X,\ \text{da je } (x, y) \in V \text{ in } (y, z) \in U\}.$$

Takšna notacija operacij bo vedno posebej označena.

2.2. **Teorija grup.**

Definicija 2.1. Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

(1) je množica G zaprta za (ponavadi binarno) operacijo $*$,
(2) je operacija $*$ asociativna v množici G,
(3) v G obstaja tak element e (imenujemo ga *enota*), da za vsak element x množice G velja
$$x * e = e * x = x,$$
(4) za vsak element x množice G obstaja element y tudi iz množice G, da velja
$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je $(G, *)$ ali samo G, če je operacija znana ali drugače očitna.

Opomba 2.2. Od tukaj naprej bo zapis operacije vedno multiplikativen, razen če bo drugače povdarjeno.

Iz zgornje definicije je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje* $\mu\colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$,
- *invertiranje* $\iota\colon G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$.

Definiramo lahko nekaj tipov preslikav med grupami.

Definicija 2.3. Naj bo $f : G \to \widetilde{G}$ preslikava med dvema grupama (ne nujno z isto operacijo).

(1) Preslikava f je *homomorfizem*, če za vsaka dva elementa $a, b \in G$ velja $f(ab) = f(a)f(b)$.
(2) Preslikava f je *izomorfizem*, če je bijektivni homomorfizem.

Definicija 2.4. Naj bo G grupa..

(1) Podmnožica H grupe G je *podgrupa*, če je tudi sama grupa za isto operacijo.

(2) Množici $aH = \{ah; h \in H\}$ pravimo *levi odsek* grupe G elementa $a \in G$ po podgrupi H.
(3) Množici $Ha = \{ha; h \in H\}$ pravimo *desni odsek* grupe G elementa $a \in G$ po podgrupi H.
(4) Podgrupi H grupe G rečemo podgrupa *edinka*, če za vsak element $a \in G$ velja
$$aHa^{-1} = H.$$
(5) Množici $G/H = \{aH; a \in G\}$ rečemo *kvocient* grupe G po podgrupi H.
(6) *Naravna preslikava* na kvocient G/H je preslikava $\varphi : G \to G/H$, $a \mapsto aH$.

Trditev 2.5. *Če je podgrupa N grupe G podgrupa edinka, je kvocient G/N grupa za operacijo $*$, kjer je $aH * bH = (a * b)H$, naravna preslikava φ pa je homomorfizem grup.*

2.3. **Topološki prostori.**

Definicija 2.6. *Topologija* na neprazni množici X je družina podmnožic $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:

(1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$,
(2) za poljubni dve množici $U, V \in \tau$ je tudi presek $U \cap V \in \tau$,
(3) za poljubno poddružino $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ je tudi unija $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Množici X, opremljeni s topologijo τ, rečemo *topološki* prostor, ki ga označimo z (X, τ), množice v družini τ označimo za *odprte* množice v topološkem prostoru X. *Zaprte* množice definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico X.

Definicija 2.7. Naj bo (X, τ) topološki prostor.

(1) Množica $U \subseteq X$ je *okolica za točko* $x \in X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $x \in V$.
(2) Množica $U \subseteq X$ je *okolica* množice $A \subseteq X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $A \subseteq V$.
(3) Če je okolica U iz zgornjih dveh primerov tudi sama odprta množica, jo imenujemo *odprta okolica.*
(4) Družina okolic $\mathcal{U}_x$ točke $x \in X$ se imenuje *baza okolic* za x, če za poljubno okolico V točke x velja, da obstaja tak $U \in \mathcal{U}_x$, da je $U \subseteq V$.

Definicija 2.8. Naj bo (X, τ) topološki prostor in $A \subseteq X$.

(1) Točka $a \in A$ je *notranja točka* množice A, če je A okolica za točko a.
(2) *Notranjost* množice A je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z $int(A)$. Očitno velja $int(A) \subseteq A$ in tudi $int(A) = A \iff A \in \tau$.
(3) *Zaprtje* množice A je najmanjša zaprta množica v X, ki vsebuje A. Zaprtje množice označimo z $\overline{A}$. Očitno velja $A \subseteq \overline{A}$ in tudi $\overline{A} = A \iff A$ je zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora X lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikave med dvema topološkima prostoroma ter pojem homeomorfizma.

Definicija 2.9. Naj bo $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ preslikava med topološkima prostoroma.

(1) Preslikava f je *zvezna*, kadar je praslika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (Y, τ_2) odprta tudi v topološkem prostoru (X, τ_1).
(2) Preslikava f je *odprta*, kadar je slika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (X, τ_1) odprta tudi v topološkem prostoru (Y, τ_2).
(3) Preslikava f je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

Definirajmo še dve posebni topologiji.

Definicija 2.10. Naj bo X topološki prostor s topologijo τ in $A \subseteq X$. *Inducirana* ali *relativna topologija* na množici A, inducirana s τ, je družina množic $\{A \cap U; U \in \tau\}$. Množici A rečemo *topološki podprostor* prostora X.

Definicija 2.11. Naj bosta X in Y topološka prostora s topologijama τ_1 in τ_2. *Produktna topologija* na kartezičnemu produktu $X \times Y$ je družina množic $\{U \times V; U \in \tau_1, V \in \tau_2\}$.

Definicija 2.12. Naj bo X topološki prostor.
(1) Družini $\mathcal{A}$ množic rečemo *pokritje* topološkega prostora X, če je $X \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.
(2) Družini $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ rečemo *podpokritje* topološkega prostora X, če je $\mathcal{B}$ tudi sama pokritje za X.
(3) Topološki prostor je *kompakten*, če vsako njegovo odprto pokritje, tj. pokritje z odprtimi množicami, vsebuje kakšno končno podpokritje.
(4) Topološki prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka $x \in X$ kakšno kompaktno okolico.

Definicija 2.13. Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu
(1) T_0, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstaja okolica V za eno od točk a, b, ki ne vsebuje druge od točk a, b;
(2) T_1, če za poljubno točko $a \in X$ in točko $b \in X \setminus \{a\}$ obstaja okolica V točke a, ki ne vsebuje točke b;
(3) T_2, če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstajata disjunktni okolici za točki a in b;
(4) T_3, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \setminus A$ obstajata disjunktni okolici za množico A in točko b;
(5) T_4, če za poljubni disjunktni zaprti množici $A, B \subseteq X$ obstajata disjunktni okolici za množici A in B.

Opomba 2.14. (1) Iz definicije je razvidno, da $T_2 \implies T_1 \implies T_0$.
(2) Topološkemu prostoru, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_2, pravimo *Hausdorffov* topološki prostor.
(3) Topološku prostoru, ki zadošča T_1 in T_3 pravimo *regularen* topološki prostor.
(4) Topološku prostoru, ki zadošča T_1 in T_4, pravimo *normalen* topološki prostor.

3. Kaj je topološka grupa

Končno lahko strukturi združimo in povežemo ter definiramo pojem topološke grupe.

Definicija 3.1. *Topološka grupa* je grupa G opremljena s takšno topologijo τ, da sta za τ strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo le še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraično kot topološko strukturo.

Definicija 3.2. Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem in homeomorfizem.

Trditev 3.3. *Naj bo G topološka grupa in $a \in G$.*

(1) Leva translacija $l_a\colon x \mapsto ax$ in desna translacija $r_a\colon x \mapsto xa$ za a sta homeomorfizma iz G v G
(2) Invertiranje $\iota\colon x \mapsto x^{-1}$ je homeomorfizem iz G v G.
(3) Konjugiranje $\gamma\colon x \mapsto axa^{-1}$ je homeomorfizem iz G v G.

Dokaz. Vemo že, da so leva translacija, desna translacija, invertiranje in konjugiranje avtomorfizmi grupe G, torej bijektivne preslikave. Dokazujemo še zveznost preslikave in njenega inverza.

Naj bo $\mathrm{c}_a\colon x \mapsto a$ konstantna preslikava. Vemo, da je konstantna preslikava zvezna.

Levo translacijo lahko zapišemo kot kompozitum zveznih preslikav

$$l_a(x) = \mu(\mathrm{c}_a(x), x) = ax.$$

Kot kompozitum zveznih preslikav je leva translacija zvezna. Inverzna preslikava leve translacije za element a je leva translacija za element a^{-1}, ki je tudi zvezna. Leva translacija je zato homeomorfizem.

Desno translacijo lahko na analogen način zapišemo kot kompozitum zveznih preslikav

$$r_a(x) = \mu(x, \mathrm{c}_a(x)) = xa.$$

Kot kompozitum zveznih preslikav je desna translacija zvezna in njena inverzna preslikava je desna translacija za element a^{-1}, torej tudi zvezna. Desna translacija je zato homeomorfizem.

Invertiranje je homeomorfizem, ker je zvezno po definiciji topološke grupe in samo sebi inverz.

Konjugiranje lahko zapišemo kot kompozitum zveznih preslikav

$$\gamma = r_{a^{-1}} \circ l_a.$$

Kot kompozitum zveznih preslikav je konjugiranje zvezno in njegov inverz je konjugiranje za element a^{-1}, torej tudi zvezen. Konjugiranje je zato homeomorfizem. □

Trditev 3.4. *Za topološko grupo G in bazo $\mathcal{U}$ odprtih okolic enote e veljajo naslednje trditve:*

(1) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$;
(2) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$;
(3) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in U$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$;
(4) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in G$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xVx^{-1} \subset U$.

Dokaz. Naj bo $U \in \mathcal{U}$ odprta okolica enote e. Ker je množenje zvezno, obstaja v produktni topologiji na $G \times G$ odprta okolica $W = V_1 \times V_2$ enote (e, e), za katero velja $V_1V_2 \subset U$. Po definiciji produktne topologije sta V_1 in V_2 odprti okolici enote e v G. Definiramo $V' = V_1 \cap V_2$ okolico za e. Po definiciji baze okolic $\mathcal{U}$ obstaja $V \in \mathcal{U}$, da velja $V \subseteq V'$. Ker $V \subseteq V' \subseteq V_1$ in $V \subseteq V' \subseteq V_2$, velja

$$V^2 \subseteq V'^2 \subseteq V_1V_2 \subset U.$$

To dokaže prvo trditev.

Vzemimo poljuben $V \in \mathcal{U}$, $V \subset U$ (obstaja po definiciji baze okolic). Ker je invertiranje zvezno, obstaja v G odprta okolica W enote e, za katero velja $W \subset V$. Po trditvi 3.3 je invertiranje homeomorfizem, zato je $W = V^{-1}$. Velja

$$V^{-1} \subset V \subset U.$$

To dokaže drugo trditev.

Vzemimo poljubno točko $x \in U$. Ker je U odprta množica, obstaja okolica $W \subset U$ za točko x. Naj bo $V' = x^{-1}W$. Ker je po trditvi 3.3 leva translacija homeomorfizem, je V' odprta okolica enote e. Vzemimo $V \in \mathcal{U}$, $V \subset V'$ (obstaja po definiciji baze okolic). Velja

$$xV \subset xV' = xx^{-1}W = W \subset U.$$

To dokaće tretjo trditev. $\square$

Trditev 3.5. *Naj bo G grupa (ne topološka) in $\mathcal{U}$ družina podmnožic množice G, za katero veljajo vse štiri lastnosti iz trditve 3.4. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz $\mathcal{U}$ neprazni. Tedaj je družina $\{xU\}$, kjer $U \in \mathcal{U}$ in $x \in G$ odprta podbaza za neko topologijo na G. S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux\}$ je podbaza za isto topologijo.*

Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ tudi bazi za to topologijo.

Opomba 3.6. Množici, za katero velja $U = U^{-1}$, rečemo *simetrična* množica.

Trditev 3.7. *Vsaka topološka grupa ima bazo $\mathcal{U}$ odprtih in simetričnih okolic enote.*

Posledica 3.8. *Za vsako okolico U enote e topološke grupe G obstaja taka okolica V enote e, da velja $V^{-1} \subset U$.*

3.1. **Primeri topoloških grup.**

4. Kvocienti topoloških grup

Trditev 4.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Če H opremimo z relativno topologijo, potem je tudi H topološka grupa.*

Trditev 4.2. *Za A in B podmnožici topološke grupe G veljajo naslednje trditve:*

(1) $\overline{A}\ \overline{B} \subset \overline{AB}$,
(2) $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$,
(3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ *za vsaka dva elementa* $x, y \in G$.
(4) Če G ustreza separacijskemu aksiomu T_0 in za vsaka dva elementa $a \in A$ in $b \in B$ velja enakost $ab = ba$, potem velja enakost $ab = ba$ tudi za vsaka dva elementa $a \in \overline{A}$ in $b \in \overline{B}$.

Trditev 4.3. *Naj bo H podgrupa topološke grupe G. H je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa H topološke grupa G je tudi zaprta.*

Trditev 4.4. *Naj bo U simetrična okolica enote e v topološki grupi G. Potem je $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G.*

Izrek 4.5. *Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in $\varphi\colon G \to G/H$ naravna preslikava. Definiramo $\theta(G/H) = \{U; \varphi^{-1}(U)$ odprta v $G\}$. Veljajo naslednje trditve:*

(1) družina $\theta(G/H)$ je topologija na kvocientu G/H,

(2) glede na topologijo $\theta(G/H)$ je φ zvezna preslikava,
(3) družina $\theta(G/H)$ je najmočnejša topologija na kvocientu G/H, glede na katero je φ zvezna preslikava,
(4) $\varphi : G \to G/H$ je odprta preslikava.

Topologiji $\theta(G/H)$ pravimo *kvocientna topologija*, kvocientu G/H pa *kvocientni prostor*.

Trditev 4.6. *Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in U, V tako okolici enote e v G, da velja $V^{-1}V \subset U$. Naj bo $\varphi : G \to G/H$ naravna preslikava. Potem velja $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$.*

Izrek 4.7. *Za topološko grupo G in njeno podgrupo H veljajo naslednje trditve:*
(1) kvocientni prostor G/H je diskreten natanko tedaj, ko je H odprta v G,
(2) če je H zaprta v G, potem je kvocient G/H regularen topološki prostor,
(3) če kvocientni prostor G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0, potem je H zaprta v G in velja, da je kvocient G/H regularen topološki prostor.

Izrek 4.8. *Naj bo H podgrupa edinka topološke grupe G. Naj bo kvocient G/H opremljen s kvocientno topologijo θ. Veljajo naslednje trditve:*
(1) kvocient G/H je topološka grupa s topologijo θ,
(2) naravni homomorfizem je odprta in zvezena preslikava,
(3) kvocient G/H je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa H odprta v G,
(4) kvocient G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0 natanko tedaj, ko je podgrupa H zaprta v G.

5. Izreki o izomorfizmih

Trditev 5.1. *Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Naj bo za vsak element $a \in G$ na kvocientu G/H definirana preslikava ψ_a s predpisom $\psi_a(xH) = (ax)H$. Za vsak element $a \in G$ je ψ_a homeomorfizem na prostoru G/H.*

Trditev 5.2. *Naj bo H podgrupa (lokalno) kompaktne topološke grupe G. Potem je tudi kvocientni prostor G/H (lokalno) kompakten.*

5.1. Prvi izrek o izomorfizmih.

Izrek 5.3 (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bosta G in $\widetilde{G}$ topološki grupi. Naj bo $f : G \to \widetilde{G}$ odprt, zvezen in surjektiven homomorfizem. Potem je $\ker f$ podgrupa edinka v grupi G in množice $f^{-1}(\tilde{x})$, kjer je $\tilde{x} \in \widetilde{G}$, so disjunktni odseki $\ker f$ v grupi G. Preslikava $\Phi : \widetilde{G} \to G/\ker f$ s predpisom $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$ je topološki izomorfizem.*

5.2. Drugi izrek o izomorfizmih.

Izrek 5.4 (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bo G topološka grupa, A njena podgrupa in H podgrupa edinka grupe G. Naj bo τ izomorfizem iz kvocienta $(AH)/H$ v kvocient $A/(A \cap H)$ s predpisom $\tau(aH) = a(A \cap H)$, kjer je $a \in A$.*
(1) Preslikava τ slika odprte množice iz $(AH)/H$ v odprte množice iz $A/(A \cap H)$.
(2) Če je A še lokalno kompaktna in σ-kompaktna, H zaprta v G in AH lokalno kompaktna, potem je τ homeomorfizem ter topološki grupi $(AH)/H$ in $A/(A \cap H)$ sta topološko izomorfni.

5.3. **Tretji izrek o izomorfizmih.**

Izrek 5.5. *Naj bo $f\colon G \to \widetilde{G}$ odprt, zvezen homomorfizem topoloških grup in naj bo $\widetilde{H}$ podgrupa edinka v $\widetilde{G}$. Potem so grupe $(G/kerf)/(f^{-1}(\widetilde{H})/kerf)$, $G/f^{-1}(\widetilde{H})$ in $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ topološko izomorfne.*

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraični različici in ne vsebuje pomožne topološke grupe $\widetilde{G}$.

Izrek 5.6 (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe)**.** *Naj bo G topološka grupa in $N \subseteq H$ njeni podgrupi edinki. Potem sta kvocientni topološki grupi G/H in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfni.*

6. Izreki tipa "2 od 3"

7. Separacijski aksiomi in metrizabilnost

Izrek 7.1. *Vsaka topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je regularen topološki prostor.*

7.1. **Metrizabilnost.**

Definicija 7.2. *Pseudometrika* na neprazni množici X je preslikava $\rho\colon X \times X \to [0, \infty)$, ki zadošča naslednjim pogojem:

(1) za vsako točko $x \in X$ velja $\rho(x, x) = 0$;
(2) za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
(3) za vsake tri točke $x, y, z \in X$ velja $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Če za preslikavo ρ velja še

(4) $\rho(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko $x = y$,

potem ji rečemo *metrika.*

Definicija 7.3. Naj bo X neprazna množica.

(1) Neprazna poddružina $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ je *filter* množice X, če ima naslednje lastnosti:
  (a) družina $\mathcal{F}$ ne vsebuje prazne množice,
  (b) za vsako množico $F \in \mathcal{F}$ je vsaka množica $E \in X$, za katero velja $F \subseteq E$, tudi v družini $\mathcal{F}$,
  (c) presek $E \cap F$ množic $E, F \in \mathcal{F}$ je tudi v družini $\mathcal{F}$.
(2) Filter $\mathcal{U}$ na množici $X \times X$ definira *uniformno strukturo* na množici X, če ima naslednje lastnosti:
  (a) vsaka množica $U \in \mathcal{U}$ vsebuje diagonalo $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$,
  (b) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ je tudi množica $U^{-1} \in \mathcal{U}$,
  (c) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V \circ V \subseteq U$.

  Množici z uniformno stukturo rečemo *uniformni prostor.*

Opomba 7.4. V zgornji definiciji so operacije na množicah mišljene v smislu relacij (glej podrazdelek 2.1).

Definicija 7.5. Naj bo X uniformni prostor z uniformno strukturo $\mathcal{U}$. Topologija, inducirana z $\mathcal{U}$ je taka družina množic $T \subseteq X$, za katere za vsako točko $x \in T$ obstaja $U \in \mathcal{U}$, da velja $\{y \in X; (x, y) \in U\} \subseteq T$.

Definicija 7.6. Naj bosta X in Y uniformna prostora z uniformnima strukturama $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$. Preslikava $f : X \to Y$ je *enakomerno zvezna*, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja taka množica $U \in \mathcal{U}$, da za vsak par $(x, y) \in U$ velja $(f(x), f(y)) \in V$.

Trditev 7.7. *Vsaka enakomerno zvezna preslikava uniformnih prostorov je zvezna v topologiji, inducirani z uniformnima strukturama.*

Trditev 7.8. *Vsaka topološka grupa je uniformni prostor.*

Izrek 7.9. *Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje simetričnih okolic enote e v topološki grupi G, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$. Označimo $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika σ na G z naslednjimi lastnostmi:*

(1) σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od $G \times G$;
(2) $\sigma(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko $y^{-1}x \in H$;
(3) $\sigma(x, y) \le 2^{-k+2}$, če $y^{-1}x \in U_k$;
(4) $2^{-k} \le \sigma(x, y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če velja še $xU_kx^{-1} = U_k$ za vsak $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, potem je σ tudi desnoinvariantna in velja

(5) $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka dva elementa $x, y \in G$.

Definicija 7.10. Topološki prostor X je *metrizabilen*, če njegova topologija τ izhaja iz kakšne metrike d na množici X.

Opomba 7.11. Baza topologije metrizabilnega topološkega prostora X je družina odprtih krogel $\{K(x, \epsilon); x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}\}$.

Izrek 7.12. *Topološka grupa G, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote.*

7.2. Separacijski aksiomi do $\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$.

Definicija 7.13. Topološki prostor X zadošča separacijskemu aksiomu $T_{3\frac{1}{2}}$, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \backslash A$ obstaja taka zvezna realna funkcija ψ, definirana na G, da je $\psi(b) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in A$.

Opomba 7.14. Topološku prostoru, ki zadošča T_1 in $T_{3\frac{1}{2}}$, pravimo *povsem regularen* topološki prostor.

Trditev 7.15. *(1) Vsak povsem regularen topološki prostor je regularen.*
(2) Vsak normalen topološki prostor je povsem regularen.

Izrek 7.16. *Topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je povsem regularen topoliški prostor.*

7.3. Separacijski aksiom $\mathbf{T}_4$.

Izrek 7.17. *Če je m katerokoli neštevno kardinalno število, potem je $\mathbb{Z}^m$ povsem regularna topološka grupa, ki ni normalna.*

Definicija 7.18. (1) Naj bosta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ družini podmnožic topološkega prostora X. Družina $\mathcal{V}$ je *pofinitev* družine $\mathcal{U}$, če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja takšna množica $U \in \mathcal{U}$, da je $V \subset U$.
(2) Družina podmnožic $\mathcal{U}$ topološkega prostora X je *lokalno končna*, če ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki seka samo končno mnogo množic iz družine $\mathcal{U}$.

(3) Topološki prostor X je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora X.

Trditev 7.19. *Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.*

Izrek 7.20. *Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0, je normalen topološki prostor.*

Slovar strokovnih izrazov

Literatura

[1] S. Bhowmik, *Introduction to Uniform Spaces*, 10.13140/RG.2.1.3743.8967, junij 2014, [ogled 1. 4. 2019], dostopno na `https://www.researchgate.net/publication/305196408_INTRODUCTION_TO_UNIFORM_SPACES`.

[2] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstact Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[3] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44** DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.