

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina
Topološke grupe

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2019

KAZALO

1. Uvod	4
2. Preliminarna poglavja	4
2.1. Teorija grup	4
2.2. Topološki prostori	4
3. Kaj je topološka grupa	5
3.1. Primeri topoloških grup	6
4. Kvocienti topoloških grup	6
5. Izreki o izomorfizmih	7
5.1. Prvi izrek o izomorfizmih	7
5.2. Drugi izrek o izomorfizmih	8
5.3. Tretji izrek o izomorfizmih	8
6. Izreki tipa “2 od 3”	8
7. Separacijski aksiomi in metrizabilnost	8
7.1. Metrizabilnost	9
7.2. Separacijski aksiomi do $T_{3\frac{1}{2}}$	9
7.3. Separacijski aksiom T_4	9
Slovar strokovnih izrazov	10
Literatura	10

Topološke grupe

POVZETEK

povzetek HERE

Topological groups

ABSTRACT

ABSTRACT HERE

Math. Subj. Class. (2010): 43-00

Ključne besede: grupa topologija

Keywords: group topology

1. UVOD

2. PRELIMINARNA POGLAVJA

2.1. Teorija grup.

Definicija 2.1. Neprazna množica G z binarno operacijo $*$ je *grupa*, če:

- (1) je množica G zaprta za (ponavadi binarno) operacijo $*$,
- (2) je operacija $*$ asociativna v množici G ,
- (3) v G obstaja tak element e (imenujemo ga *enota*), da za vsak element x množice G veljajo enakosti

$$x * e = e * x = x,$$

- (4) za vsak element x množice G obstaja element y tudi iz množice G , da veljajo enakosti

$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je $(G, *)$ ali samo G , če je operacija znana ali drugače očitna.

Iz zgornje definicije je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje* $\mu : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x * y$,
- *invertiranje* $\iota : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$.

Definiramo lahko nekaj tipov preslikav med grupami.

Definicija 2.2. Naj bo $f : (G, *) \rightarrow (\tilde{G}, \star)$ preslikava med dvema grupama.

- (1) Preslikava f je *homomorfizem*, če za vsaka dva elementa $a, b \in G$ velja $f(a * b) = f(a) \star f(b)$.
- (2) Preslikava f je *izomorfizem*, če je bijektivni homomorfizem.

2.2. Topološki prostori.

Definicija 2.3. *Topologija* na neprazni množici X je družina podmnožic $\tau \subseteq 2^X$ z lastnostmi:

- (1) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$,
- (2) za poljubni dve množici $U, V \in \tau$ je tudi presek $U \cap V \in \tau$,
- (3) za poljubno poddružino $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ je tudi unija $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Množici X , opremljeni s topologijo τ , rečemo *topološki prostor* (X, τ) in množice v družini τ označimo za *odprte* množice v topološkem prostoru X . *Zaprte* množice definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico X .

Definicija 2.4. Naj bo (X, τ) topološki prostor.

- (1) Podmnožica $B \subset \tau$ je *baza* za topologijo τ , če je vsaka množica iz topologije τ unija nekaterih množic iz B .
- (2) Podmnožica P je *podbaza* za topologijo τ , če je družina vseh presekov končno mnogo množic iz P neka baza za topologijo τ .

Definicija 2.5. Naj bo (X, τ) topološki prostor.

- (1) Množica $U \subseteq X$ je *okolica* za točko $x \in X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $x \in V$.
- (2) Množica $U \subseteq X$ je *okolica* množice $A \subseteq X$, če obstaja taka odprta množica $V \in \tau$, da velja $V \subseteq U$ in $A \subseteq V$.

- (3) Če je okolica U iz zgornjih dveh primerov tudi sama odprta množica, jo imenujemo *odprta okolica*.
- (4) Družina okolic $\mathcal{U}_x = \{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ za točko $x \in X$ se imenuje *baza okolic* za x , če za poljubno okolico V za točko x velja, da obstaja tak $\lambda \in \Lambda$, da je $U_\lambda \subseteq V$.

Definicija 2.6. Naj bo (X, τ) topološki prostor in $A \subseteq X$.

- (1) Točka $a \in A$ je *notranja točka* množice A , če je A okolica za točko a .
- (2) *Notranjost* množice A je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z $\text{int}(A)$. Očitno velja $\text{int}(A) \subseteq A$ in tudi $\text{int}(A) = A \iff A \in \tau$.
- (3) *Zaprte* množice A je najmanjša zaprta množica v X , ki vsebuje A . Zaprtje množice označimo z \overline{A} . Očitno velja $A \subseteq \overline{A}$ in tudi $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \iff A$ je zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora X lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikave med dvema topološkima prostoroma ter pojem homeomorfizma.

Definicija 2.7. Naj bo $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ preslikava med topološkima prostoroma.

- (1) Preslikava f je *zvezna*, kadar je praslika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (Y, τ_2) odprta tudi v topološkem prostoru (X, τ_1) .
- (2) Preslikava f je *odprta*, kadar je slika preslikave f vsake odprte množice v topološkem prostoru (X, τ_1) odprta tudi v topološkem prostoru (Y, τ_2) .
- (3) Preslikava f je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

Definicija 2.8. Naj bo X topološki prostor.

- (1) Družini \mathcal{A} množic rečemo *pokritje* topološkega prostora X , če je $X \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.
- (2) Družini $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ rečemo *podpokritje* topološkega prostora X , če je \mathcal{B} tudi sama pokritje za X .
- (3) Topološki prostor je *kompakten*, če vsako njegovo odprto pokritje, tj. pokritje z odprtimi množicami, vsebuje kakšno končno podpokritje.
- (4) Topološki prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka $x \in X$ kakšno kompaktno okolico.

Definicija 2.9. (1) Naj bosta \mathcal{U} in \mathcal{V} družini podmnožic topološkega prostora X . Družina \mathcal{V} je *pofinitev* družine \mathcal{U} , če za vsako množico $V \in \mathcal{V}$ obstaja takšna množica $U \in \mathcal{U}$, da je $V \subset U$.

(2) Družina podmnožic \mathcal{U} topološkega prostora X je *lokalno končna*, če ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki seka samo končno mnogo množic iz družine \mathcal{U} .

(3) Topološki prostor X je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitev, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora X .

3. KAJ JE TOPOLOŠKA GRUPA

Končno lahko strukturi združimo in povežemo ter definiramo pojem topološke grupe.

Definicija 3.1. *Topološka grupa* je grupa $(G, *)$ opremljena s tako topologijo τ na množici G , da sta za τ strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo le še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraino kot topološko strukturo.

Definicija 3.2. Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem in homeomorfizem.

Trditev 3.3. Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. Leva translacija $x \mapsto ax$ in desna translacija $x \mapsto xa$ za a sta homeomorfizma iz G v G . Prav tako je preslikava invertiranja homeomorfizem iz G v G .

Trditev 3.4. Za topološko grupo G in odprto bazo okolice \mathcal{U} enote e veljajo naslednje trditve:

- (1) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^2 \subset U$;
- (2) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $V^{-1} \subset U$;
- (3) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in U$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xV \subset U$;
- (4) za vsako množico $U \in \mathcal{U}$ in vsak element $x \in G$ obstaja taka množica $V \in \mathcal{U}$, da velja $xVx^{-1} \subset U$.

Naj bo G sedaj grupa (ne topološka) in \mathcal{U} družina podmnožic množice G , za katero veljajo zgornje štiri lastnosti. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz \mathcal{U} neprazni. Tedaj je družina $\{xU\}$, kjer $U \in \mathcal{U}$ in $x \in G$ odprta podbaza za neko topologijo na G . S to topologijo je G topološka grupa. Družina $\{Ux\}$ je podbaza za isto topologijo.

Če velja še, da za vsaki množici $U, V \in \mathcal{U}$ obstaja množica $W \in \mathcal{U}$, da velja $W \subset U \cap V$, potem sta družini $\{xU\}$ in $\{Ux\}$ tudi bazi za to topologijo.

Trditev 3.5. Vsaka topološka grupa G ima bazo odprtih okolice \mathcal{U} enote e , da za vsako okolico U velja $U = U^{-1}$.

Opomba 3.6. Lastnosti množic iz trditve 3.5 pravimo simetričnost.

Posledica 3.7. Za vsako okolico U enote e topološke grupe G obstaja taka okolica V enote e , da velja $V^{-1} \subset U$.

3.1. Primeri topoloških grup.

4. KVOCIENTI TOPOLOŠKIH GRUP

Trditev 4.1. Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Če H opremimo z relativno topologijo, potem je tudi H topološka grupa.

Trditev 4.2. Naj bosta A in B podmnožici topološke grupe G . Veljajo naslednje trditve:

- (1) $\overline{A} \overline{B} \subset \overline{AB}$,
- (2) $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$,
- (3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ za vsaka dva $x, y \in G$.

Če G ustreza še separacijskemu aksiomu T_0 , velja tudi:

- (4) če za vsaka dva elementa $a \in A$ in $b \in B$ velja enakost $ab = ba$, potem velja enakost $ab = ba$ tudi za vsaka dva elementa $a \in \overline{A}$ in $b \in \overline{B}$.

Trditev 4.3. Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. H je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa H topološke grupe G je tudi zaprta.

Trditev 4.4. Naj bo U simetrična okolica enote e v topološki grupi G . Potem je $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ odprta in zaprta podgrupa topološke grupe G .

Izrek 4.5. Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in $\varphi : G \rightarrow G/H$ naravna preslikava. Definiramo $\theta(G/H) = \{U; \varphi^{-1}(U) \text{ odprta v } G\}$. Veljajo naslednje trditve:

- (1) družina $\theta(G/H)$ je topologija na kvocientu G/H ,
- (2) glede na topologijo $\theta(G/H)$ je φ zvezna preslikava,
- (3) družina $\theta(G/H)$ je najmočnejša topologija na kvocientu G/H , glede na katero je φ zvezna preslikava,
- (4) $\varphi : G \rightarrow G/H$ je odprta preslikava.

Družini $\theta(G/H)$ pravimo kvocientna topologija, kvocientu G/H pa kvocientni prostor.

Trditev 4.6. Naj bo G topološka grupa, H njena podgrupa in U, V tako okolici enote e v G , da velja $V^{-1}V \subset U$. Naj bo $\varphi : G \rightarrow G/H$ naravna preslikava. Potem velja $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$.

Izrek 4.7. Za topološko grupo G in njeno podgrupo H veljajo naslednje trditve:

- (1) kvocientni prostor G/H je diskreten natanko tedaj, ko je H odprta v G ,
- (2) če je H zaprta v G , potem je kvocient G/H regularen topološki prostor,
- (3) če kvocientni prostor G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0 , potem je H zaprta v G in velja, da je kvocient G/H regularen topološki prostor.

Izrek 4.8. Naj bo H podgrupa edinka topološke grupe G . Naj bo kvocient G/H opremljen s kvocientno topologijo θ . Veljajo naslednje trditve:

- (1) kvocient G/H je topološka grupa s topologijo θ ,
- (2) naravni homomorfizem φ iz G v G/H je odprt in zvezen homomorfizem,
- (3) kvocient G/H je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa H odprta v G ,
- (4) kvocient G/H zadošča separacijskemu aksiomu T_0 (in je zato tudi regularen) natanko tedaj, ko je podgrupa H zaprta v G .

5. IZREKI O IZOMORFIZMIH

Trditev 5.1. Naj bo G topološka grupa in H njena podgrupa. Naj bo za vsak element $a \in G$ na kvocientu G/H definirana preslikava ψ_a s predpisom $\psi_a(xH) = (ax)H$. Za vsak element $a \in G$ je ψ_a homeomorfizem na prostoru G/H .

Opomba 5.2. Če za vsaki dve točki x, y topološkega prostora X velja, da na prostoru X obstaja homeomorfizem, ki preslika točko x v točko y , rečemo, da je X homogen topološki prostor. Zgornja trditev pravi, da je kvocientni prostor G/H homogen topološki prostor.

Trditev 5.3. Naj bo G (lokalno) kompaktna topološka grupa in naj bo H njena podgrupa. Potem je tudi kvocientni prostor G/H (lokalno) kompakten.

5.1. Prvi izrek o izomorfizmih.

Izrek 5.4 (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). Naj bosta G in \tilde{G} topološki grupi. Naj bo $f : G \rightarrow \tilde{G}$ odprt, zvezen homomorfizem. Potem je $H := \ker f$ podgrupa edinka v grupi G in množice $f^{-1}(\tilde{x})$, kjer je $\tilde{x} \in \tilde{G}$, so disjunktne odseki podgrupe H v grupi G . Preslikava $\Phi : \tilde{G} \rightarrow G/H$ s predpisom $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$ je topološki izomorfizem.

5.2. Drugi izrek o izomorfizmih.

Izrek 5.5. *Naj bo G topološka grupa, A njena podgrupa in H podgrupa edinka grupe G . Naj bo τ izomorfizem iz kvocienta $(AH)/H$ v kvocient $A/(A \cap H)$ s predpisom $\tau(aH) = a(A \cap H)$, kjer je $a \in A$. Potem τ slika odprte množice iz $(AH)/H$ v odprte množice iz $A/(A \cap H)$.*

Izrek 5.6 (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). *Naj bodo objekti G, A, H in τ isti kakor v izreku 5.5. Naj bo podgrupa A še lokalno kompaktna in σ -kompaktna, naj bo H zaprta v G in AH lokalno kompaktna. Tedaj je τ homeomorfizem ter topološki grupi $(AH)/H$ in $A/(A \cap H)$ sta topološko izomorfni.*

5.3. Tretji izrek o izomorfizmih.

Izrek 5.7. *Naj bo G topološka grupa z enoto e in naj bo \tilde{G} topološka grupa z enoto \tilde{e} . Naj bo f odprt, zvezen homomorfizem iz grupe G v grupo \tilde{G} . Naj bo \tilde{H} podgrupa edinka grupe \tilde{G} . Označimo $H = f^{-1}(\tilde{H})$ in $N = f^{-1}(\tilde{e})$ (N je jedro homomorfizma f). Potem so grupe $G/H, \tilde{G}/\tilde{H}$ in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfne.*

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraini različici in ne vsebuje pomožne topološke grupe \tilde{G} .

Izrek 5.8 (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe). *Naj bo G topološka grupa in H, N taki njeni podgrupi edinki, da velja $N \subset H$. Potem sta kvocientni topološki grupi G/H in $(G/N)/(H/N)$ topološko izomorfni.*

6. IZREKI TIPA “2 OD 3”

7. SEPARACIJSKI AKSIOMI IN METRIZABILNOST

Definicija 7.1. Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu

- (1) T_0 , če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstaja okolica V za eno od točk a, b , ki ne vsebuje druge od točk a, b ;
- (2) T_1 , če za poljubno točko $a \in X$ in različno točko $b \in X$ obstaja okolica V za točko a , ki ne vsebuje točke b ;
- (3) T_2 , če za poljubni različni točki $a, b \in X$ obstajata disjunktni okolici za točki a in b ;
- (4) T_3 , če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \setminus A$ obstajata disjunktni okolici za množico A in točko b ;
- (5) $T_{3\frac{1}{2}}$, če za poljubno zaprto množico $A \subseteq X$ in točko $b \in X \setminus A$ obstaja zvezna realna funkcija ψ definirana na G , da je $\psi(b) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in A$;
- (6) T_4 , če za poljubni disjunktni zaprti množici $A, B \subseteq X$ obstajata disjunktni okolici za množici A in B .

Opomba 7.2. (1) Iz definicije je razvidno, da $T_2 \implies T_1 \implies T_0$.

- (2) Topološkemu prostoru, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_2 , pravimo *Hausdorffov* topološki prostor.
- (3) Topološkemu prostoru, ki zadošča $T_1 + T_3$ pravimo *regularen* topološki prostor.
- (4) Topološkemu prostoru, ki zadošča $T_1 + T_{3\frac{1}{2}}$, pravimo *povsem regularen* topološki prostor.
- (5) Topološkemu prostoru, ki zadošča $T_1 + T_4$, pravimo *normalen* topološki prostor.

Trditev 7.3 (Karakterizacija separacijskega aksioma T_1). *Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu T_1 natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in X$ velja, da je množica $\{x\}$ zaprta v X glede na topologijo τ .*

Posledica 7.4. (1) Vsak regularen topološki prostor je Hausdorffov.
 (2) Vsak povsem regularen topološki prostor je regularen in zato Hausdorffov.
 (3) Vsak normalen topološki prostor je regularen in zato Hausdorffov.

Trditev 7.5 (Karakterizacija separacijskega aksioma T_3). Topološki prostor (X, τ) zadošča separacijskemu aksiomu T_3 natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in X$ in vsako okolico W za točko x obstaja taka odprta okolica V za točko x , za katero velja $\bar{V} \subseteq W$.

Izrek 7.6. Vsaka topološka grupa G , ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 je regularen topološki prostor.

7.1. Metrizabilnost.

Definicija 7.7. Pseudometrika na neprazni množici X je preslikava $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, ki zadošča naslednjim pogojem:

- (1) za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) \geq 0$ in $\rho(x, x) = 0$;
- (2) za vsaki dve točki $x, y \in X$ velja $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- (3) za vsake tri točke $x, y, z \in X$ velja $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Če za preslikavo d velja še

- (4) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

potem ji rečemo *metrika*.

Izrek 7.8. Naj bo $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ tako zaporedje simetričnih okolic enote e v topološki grupi G , da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $U_{k+1}^2 \subset U_k$. Označimo $H = \bigcap_{k=1}^\infty U_k$. Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika σ na G z naslednjimi lastnostmi:

- (1) σ je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od $G \times G$;
- (2) $\sigma(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko $y^{-1}x \in H$;
- (3) $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$, če $y^{-1}x \in U_k$;
- (4) $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$, če $y^{-1}x \notin U_k$.

Če velja še $xU_kx^{-1} = U_k$ za vsak $x \in G$ in $k \in \mathbb{N}$, potem je σ tudi desnoinvariantna in velja

- (5) $\sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y)$ za vsaka dva elementa $x, y \in G$.

Definicija 7.9. Topološki prostor X je *metrizabilen*, če njegova topologija τ izhaja iz kakšne metrike d na množici X , tj. baza topologije τ je družina odprtih krogel $\{K(x, \epsilon); x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}\}$.

Izrek 7.10. Topološka grupa G , ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 , je metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolic enote e .

7.2. Separacijski aksiomi do $T_{3\frac{1}{2}}$.

Izrek 7.11. Naj bo G topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 . Naj bo $a \in G$ točka in F zaprta podmnožica v G , ki ne vsebuje a . Potem obstaja taka zvezna realna funkcija ψ definirana na G , da je $\psi(a) = 0$ in $\psi(x) = 1$ za vsak $x \in F$.

Drugače: vsaka T_0 topološka grupa je povsem regularna.

7.3. Separacijski aksiom T_4 .

Izrek 7.12. Če je m katerokoli neštevno kardinalno število, potem je \mathbb{Z}^m nenormalna povsem regularna topološka grupa.

Trditev 7.13. *Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.*

Izrek 7.14. *Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu T_0 , je normalen topološki prostor.*

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

LITERATURA

- [1] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [2] J. Mrčun, *Topologija*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008