

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Benjamin Benčina  
**Topološke grupe**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marko Kandić

Ljubljana, 2019

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Preliminarna poglavja	4
2.1. Operacije na množicah	4
2.2. Teorija grup	4
2.3. Topološki prostori	5
3. Kaj je topološka grupa	6
3.1. Primeri topoloških grup	9
4. Kvocienti topoloških grup	9
5. Izreki o izomorfizmih	11
5.1. Prvi izrek o izomorfizmih	11
5.2. Drugi izrek o izomorfizmih	11
5.3. Tretji izrek o izomorfizmih	11
6. Izreki tipa "2 od 3"	12
7. Separacijski aksiomi in metrizabilnost	12
7.1. Metrizabilnost	12
7.2. Separacijski aksiomi do $T_{3\frac{1}{2}}$	13
7.3. Separacijski aksiom $T_4$	13
Slovar strokovnih izrazov	13
Literatura	14

## Topološke grupe

POVZETEK

povzetek HERE

## Topological groups

ABSTRACT

ABSTRACT HERE

**Math. Subj. Class. (2010):** 43-00

**Ključne besede:** grupa topologija

**Keywords:** group topology

## 1. UVOD

### 2. PRELIMINARNA POGLAVJA

**2.1. Operacije na množicah.** Vse operacije na množicah, če ne bo drugače znamenovano, delujejo na elementih. Tako je na primer produkt množic  $U$  in  $V$  enak

$$U \cdot V = \{u \cdot v; u \in U, v \in V\},$$

inverz množice  $U$  pa je

$$U^{-1} = \{u^{-1}; u \in G\}.$$

Tukaj se v obeh primerih predpostavlja, da so množice vložene v neki grupi, kjer so operacije na elementih smiselno definirane. Grupno strukturo bomo bolj podrobno opisali v naslednjem podrazdelku.

Pomembnejša izjema temu pravilu so operacije na množicah v smislu relacij. Predpostavimo torej, da imamo množico  $X$  in nas zanimajo podmnožice kartezičnega produkta  $X \times X$ . Inverz take množice  $U$  je definiran kot

$$U^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in U\},$$

analogna operacija množenju pa je kompozitum množic

$$V \circ U = \{(x, z); \text{ obstaja tak element } y \in X, \text{ da je } (x, y) \in V \text{ in } (y, z) \in U\}.$$

Takšna notacija operacij bo vedno posebej označena.

### 2.2. Teorija grup.

**Definicija 2.1.** Neprazna množica  $G$  z binarno operacijo  $*$  je *grupa*, če:

- (1) je množica  $G$  zaprta za (ponavadi binarno) operacijo  $*$ ,
- (2) je operacija  $*$  asociativna v množici  $G$ ,
- (3) v  $G$  obstaja tak element  $e$  (imenujemo ga *enota*), da za vsak element  $x$  množice  $G$  velja

$$x * e = e * x = x,$$

- (4) za vsak element  $x$  množice  $G$  obstaja element  $y$  tudi iz množice  $G$ , da velja

$$x * y = y * x = e.$$

Oznaka za grupo je  $(G, *)$  ali samo  $G$ , če je operacija znana ali drugače očitna.

**Opomba 2.2.** Od tukaj naprej bo zapis operacije vedno multiplikativen, razen če bo drugače poudarjeno.

Iz zgornje definicije je razvidno, da nam grupna struktura na množici porodi dve strukturni preslikavi:

- *množenje*  $\mu: G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$ ,
- *invertiranje*  $\iota: G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ .

Definiramo lahko nekaj tipov preslikav med grupami.

**Definicija 2.3.** Naj bo  $f: G \rightarrow \tilde{G}$  preslikava med dvema grupama (ne nujno z isto operacijo).

- (1) Preslikava  $f$  je *homomorfizem*, če za vsaka dva elementa  $a, b \in G$  velja  $f(ab) = f(a)f(b)$ .
- (2) Preslikava  $f$  je *izomorfizem*, če je bijektivni homomorfizem.

**Definicija 2.4.** Naj bo  $G$  grupa..

- (1) Podmnožica  $H$  grupe  $G$  je *podgrupa*, če je tudi sama grupa za isto operacijo.

- (2) Množici  $aH = \{ah; h \in H\}$  pravimo *levi odsek* grupe  $G$  elementa  $a \in G$  po podgrupi  $H$ .
- (3) Množici  $Ha = \{ha; h \in H\}$  pravimo *desni odsek* grupe  $G$  elementa  $a \in G$  po podgrupi  $H$ .
- (4) Podgrupi  $H$  grupe  $G$  rečemo podgrupa *edinka*, če za vsak element  $a \in G$  velja

$$aHa^{-1} = H.$$

- (5) Množici  $G/H = \{aH; a \in G\}$  rečemo *kvocient* grupe  $G$  po podgrupi  $H$ .
- (6) *Naravna preslikava* na kvocient  $G/H$  je preslikava  $\varphi : G \rightarrow G/H, a \mapsto aH$ .

**Trditev 2.5.** Če je podgrupa  $N$  grupe  $G$  podgrupa edinka, je kvocient  $G/N$  grupa za operacijo  $*$ , kjer je  $aH * bH = (a * b)H$ , naravna preslikava  $\varphi$  pa je homomorfizem grup.

### 2.3. Topološki prostori.

**Definicija 2.6.** Topologija na neprazni množici  $X$  je družina podmnožic  $\tau \subseteq 2^X$  z lastnostmi:

- (1)  $X \in \tau, \emptyset \in \tau$ ,
- (2) za poljubni dve množici  $U, V \in \tau$  je tudi presek  $U \cap V \in \tau$ ,
- (3) za poljubno poddružino  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$  je tudi unija  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$ .

Množici  $X$ , opremljeni s topologijo  $\tau$ , rečemo *topološki prostor*, ki ga označimo z  $(X, \tau)$ , množice v družini  $\tau$  označimo za *odprte množice* v topološkem prostoru  $X$ . *Zaprte množice* definiramo kot komplemente odprtih množic glede na množico  $X$ .

**Definicija 2.7.** Naj bo  $(X, \tau)$  topološki prostor.

- (1) Množica  $U \subseteq X$  je *okolica* za točko  $x \in X$ , če obstaja taka odprta množica  $V \in \tau$ , da velja  $V \subseteq U$  in  $x \in V$ .
- (2) Množica  $U \subseteq X$  je *okolica* množice  $A \subseteq X$ , če obstaja taka odprta množica  $V \in \tau$ , da velja  $V \subseteq U$  in  $A \subseteq V$ .
- (3) Če je okolica  $U$  iz zgornjih dveh primerov tudi sama odprta množica, jo imenujemo *odprta okolica*.
- (4) Družina okolic  $\mathcal{U}_x$  točke  $x \in X$  se imenuje *baza okolic* za  $x$ , če za poljubno okolico  $V$  točke  $x$  velja, da obstaja tak  $U \in \mathcal{U}_x$ , da je  $U \subseteq V$ .

**Definicija 2.8.** Naj bo  $(X, \tau)$  topološki prostor in  $A \subseteq X$ .

- (1) Točka  $a \in A$  je *notranja točka* množice  $A$ , če je  $A$  okolica za točko  $a$ .
- (2) *Notranjost* množice  $A$  je množica vseh njenih notranjih točk. Notranjost množice označimo z  $\text{int}(A)$ . Očitno velja  $\text{int}(A) \subseteq A$  in tudi  $\text{int}(A) = A \iff A \in \tau$ .
- (3) *Zaprte* množice  $A$  je najmanjša zaprta množica v  $X$ , ki vsebuje  $A$ . Zaprtje množice označimo z  $\overline{A}$ . Očitno velja  $A \subseteq \overline{A}$  in tudi  $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \iff A$  je zaprta množica.

S pomočjo odprtih in zaprtih množic topološkega prostora  $X$  lahko sedaj definiramo zveznost in odprtost preslikave med dvema topološkima prostoroma ter pojem homeomorfizma.

**Definicija 2.9.** Naj bo  $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  preslikava med topološkima prostoroma.

- (1) Preslikava  $f$  je *zvezna*, kadar je praslika preslikave  $f$  vsake odprte množice v topološkem prostoru  $(Y, \tau_2)$  odprta tudi v topološkem prostoru  $(X, \tau_1)$ .
- (2) Preslikava  $f$  je *odprta*, kadar je slika preslikave  $f$  vsake odprte množice v topološkem prostoru  $(X, \tau_1)$  odprta tudi v topološkem prostoru  $(Y, \tau_2)$ .
- (3) Preslikava  $f$  je *homeomorfizem*, če je bijektivna, zvezna in ima zvezen inverz.

Definirajmo še dve posebni topologiji.

**Definicija 2.10.** Naj bo  $X$  topološki prostor s topologijo  $\tau$  in  $A \subseteq X$ . *Inducirana ali relativna topologija* na množici  $A$ , inducirana s  $\tau$ , je družina množic  $\{A \cap U; U \in \tau\}$ . Množici  $A$  rečemo *topološki podprostor* prostora  $X$ .

**Definicija 2.11.** Naj bosta  $X$  in  $Y$  topološka prostora s topologijama  $\tau_1$  in  $\tau_2$ . *Produktna topologija* na kartezičnem produktu  $X \times Y$  je družina množic  $\{U \times V; U \in \tau_1, V \in \tau_2\}$ .

**Definicija 2.12.** Naj bo  $X$  topološki prostor.

- (1) Družini  $\mathcal{A}$  množic rečemo *pokritje* topološkega prostora  $X$ , če je  $X \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ .
- (2) Družini  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  rečemo *podpokritje* topološkega prostora  $X$ , če je  $\mathcal{B}$  tudi sama pokritje za  $X$ .
- (3) Topološki prostor je *kompakten*, če vsako njegovo odprto pokritje, tj. pokritje z odprtimi množicami, vsebuje kakšno končno podpokritje.
- (4) Topološki prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka  $x \in X$  kakšno kompaktno okolico.

**Definicija 2.13.** Topološki prostor  $(X, \tau)$  zadošča separacijskemu aksiomu

- (1)  $T_0$ , če za poljubni različni točki  $a, b \in X$  obstaja okolica  $V$  za eno od točk  $a, b$ , ki ne vsebuje druge od točk  $a, b$ ;
- (2)  $T_1$ , če za poljubno točko  $a \in X$  in točko  $b \in X \setminus \{a\}$  obstaja okolica  $V$  točke  $a$ , ki ne vsebuje točke  $b$ ;
- (3)  $T_2$ , če za poljubni različni točki  $a, b \in X$  obstajata disjunktni okolici za točki  $a$  in  $b$ ;
- (4)  $T_3$ , če za poljubno zaprto množico  $A \subseteq X$  in točko  $b \in X \setminus A$  obstajata disjunktni okolici za množico  $A$  in točko  $b$ ;
- (5)  $T_4$ , če za poljubni disjunktni zaprti množici  $A, B \subseteq X$  obstajata disjunktni okolici za množici  $A$  in  $B$ .

**Opomba 2.14.** (1) Iz definicije je razvidno, da  $T_2 \implies T_1 \implies T_0$ .

- (2) Topološkemu prostoru, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_2$ , pravimo *Hausdorffov* topološki prostor.
- (3) Topološku prostoru, ki zadošča  $T_1$  in  $T_3$  pravimo *regularen* topološki prostor.
- (4) Topološku prostoru, ki zadošča  $T_1$  in  $T_4$ , pravimo *normalen* topološki prostor.

### 3. KAJ JE TOPOLOŠKA GRUPA

Končno lahko strukturi združimo in povežemo ter definiramo pojem topološke grupe.

**Definicija 3.1.** *Topološka grupa* je grupa  $G$  opremljena s takšno topologijo  $\tau$ , da sta za  $\tau$  strukturni operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Potrebujemo le še tip preslikave med topološkimi grupami, ki bo ohranjal tako algebraično kot topološko strukturo.

**Definicija 3.2.** Preslikava med dvema topološkima grupama je *topološki izomorfizem*, če je izomorfizem in homeomorfizem.

**Trditev 3.3.** Naj bo  $G$  topološka grupa in  $a \in G$ .

- (1) Leva translacija  $l_a: x \mapsto ax$  in desna translacija  $r_a: x \mapsto xa$  za  $a$  sta homeomorfizma iz  $G$  v  $G$
- (2) Invertiranje  $\iota: x \mapsto x^{-1}$  je homeomorfizem iz  $G$  v  $G$ .
- (3) Konjugiranje  $\gamma: x \mapsto axa^{-1}$  je homeomorfizem iz  $G$  v  $G$ .

*Dokaz.* Vemo že, da so leva translacija, desna translacija, invertiranje in konjugiranje avtomorfizmi grupe  $G$ , torej bijektivne preslikave. Dokazujemo še zveznost preslikave in njenega inverza.

Naj bo  $c_a: x \mapsto a$  konstantna preslikava. Vemo, da je konstantna preslikava zvezna.

Levo translacijo lahko zapišemo kot kompozitum zveznih preslikav

$$l_a(x) = \mu(c_a(x), x) = ax.$$

Kot kompozitum zveznih preslikav je leva translacija zvezna. Inverzna preslikava leve translacije za element  $a$  je leva translacija za element  $a^{-1}$ , ki je tudi zvezna. Leva translacija je zato homeomorfizem.

Desno translacijo lahko na analogen način zapišemo kot kompozitum zveznih preslikav

$$r_a(x) = \mu(x, c_a(x)) = xa.$$

Kot kompozitum zveznih preslikav je desna translacija zvezna in njena inverzna preslikava je desna translacija za element  $a^{-1}$ , torej tudi zvezna. Desna translacija je zato homeomorfizem.

Invertiranje je homeomorfizem, ker je zvezno po definiciji topološke grupe in samo sebi inverz.

Konjugiranje lahko zapišemo kot kompozitum zveznih preslikav

$$\gamma = r_{a^{-1}} \circ l_a.$$

Kot kompozitum zveznih preslikav je konjugiranje zvezno in njegov inverz je konjugiranje za element  $a^{-1}$ , torej tudi zvezen. Konjugiranje je zato homeomorfizem.  $\square$

**Trditev 3.4.** Naj bosta  $A$  in  $B$  podmnožici topološke grupe  $G$ . Če je ena od njiju odprta, sta odprti tudi množici  $AB$  in  $BA$ .

*Dokaz.* Brez škode za splošnost privzemimo, da je  $A$  odprta. Velja  $AB = \{Ab; b \in B\}$ . Ker je  $A$  odprta, so po trditvi 3.3 odprte tudi vse množice  $Ab$ , saj je desna translacija homeomorfizem. Množica  $AB$  je odprta kot unija odprtih množic.

Dokaz je popolnoma simetričen za množico  $BA$ .  $\square$

**Trditev 3.5.** Za topološko grupo  $G$  in bazo  $\mathcal{U}$  odprtih okolic enote  $e$  veljajo naslednje trditve:

- (1) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V^2 \subset U$ ;
- (2) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V^{-1} \subset U$ ;
- (3) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  in vsak element  $x \in U$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $xV \subset U$ ;
- (4) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  in vsak element  $x \in G$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $xVx^{-1} \subset U$ .

*Dokaz.* Naj bo  $U \in \mathcal{U}$  odprta okolica enote  $e$ . Ker je množenje zvezno, obstaja v produktni topologiji na  $G \times G$  odprta okolica  $W = V_1 \times V_2$  enote  $(e, e)$ , za katero velja  $V_1 V_2 \subset U$ . Po definiciji produktne topologije sta  $V_1$  in  $V_2$  odprti okolici enote  $e$  v  $G$ . Definiramo  $V' = V_1 \cap V_2$  okolico za  $e$ . Po definiciji baze okolic obstaja  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V \subseteq V'$ . Ker je  $V \subseteq V' \subseteq V_1$  in  $V \subseteq V' \subseteq V_2$ , velja

$$V^2 \subseteq V'^2 \subseteq V_1 V_2 \subset U.$$

To dokaže prvo trditev.

Vzemimo poljuben  $V \in \mathcal{U}$ ,  $V \subset U$  (obstaja po definiciji baze okolic). Ker je invertiranje zvezno, obstaja v  $G$  odprta okolica  $W$  enote  $e$ , za katero velja  $W \subset V$ . Po trditvi 3.3 je invertiranje homeomorfizem, zato je  $W = V^{-1}$ . Velja

$$V^{-1} \subset V \subset U.$$

To dokaže drugo trditev.

Vzemimo poljubno točko  $x \in U$ . Ker je  $U$  odprta množica, obstaja okolica  $W \subset U$  za točko  $x$ . Naj bo  $V' = x^{-1}W$ . Ker je po trditvi 3.3 leva translacija homeomorfizem, je  $V'$  odprta okolica enote  $e$ . Vzemimo  $V \in \mathcal{U}$ ,  $V \subset V'$  (obstaja po definiciji baze okolic). Velja

$$xV \subset xV' = xx^{-1}W = W \subset U.$$

To dokaže tretjo trditev.

Naj bo  $x \in U$  poljubna točka. Ker je po trditvi 3.3 konjugiranje homeomorfizem, obstaja odprta okolica enote  $e$  oblike  $xVx^{-1} \subseteq U$ . To dokaže še četrto trditev.  $\square$

**Trditev 3.6.** *Naj bo  $G$  grupa (ne topološka) in  $\mathcal{U}$  družina podmnožic množice  $G$ , za katero veljajo vse štiri lastnosti iz trditve 3.5. Naj bodo poljubni končni preseki množic iz  $\mathcal{U}$  neprazni. Tedaj je družina  $\{xU\}$ , kjer  $U \in \mathcal{U}$  in  $x \in G$  odprta podbaza za neko topologijo na  $G$ . S to topologijo je  $G$  topološka grupa. Družina  $\{Ux\}$  je podbaza za isto topologijo.*

*Če velja še, da za vsaki množici  $U, V \in \mathcal{U}$  obstaja množica  $W \in \mathcal{U}$ , da velja  $W \subset U \cap V$ , potem sta družini  $\{xU\}$  in  $\{Ux\}$  tudi bazi za to topologijo.*

**Definicija 3.7.** Množici, za katero velja  $U = U^{-1}$ , rečemo *simetrična množica*.

**Trditev 3.8.** *Vsaka topološka grupa ima bazo  $\mathcal{U}$  odprtih in simetričnih okolic enote.*

*Dokaz.* Naj bo  $\mathcal{V}$  neka baza odprtih okolic enote. Za vsako okolico  $V \in \mathcal{V}$  konstruiramo množico  $U = V \cup V^{-1}$ . Kot presek dveh odprtih množic je  $U$  odprta. Ker je  $e \in V$  in  $e \in V^{-1}$ , je  $U$  odprta okolica enote, ki je po konstrukciji simetrična. Ker po definiciji preseka velja še  $U \subseteq V$ , je družina  $\mathcal{U} = \{V \cap V^{-1}; V \in \mathcal{V}\}$  res baza odprtih in simetričnih okolic enote  $e$ .  $\square$

**Posledica 3.9.** *Za vsako okolico  $U$  enote  $e$  topološke grupe  $G$  obstaja taka okolica  $V$  enote  $e$ , da velja  $\bar{V} \subset U$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $U$  neka okolica enote in naj bo  $\mathcal{V}$  baza odprtih in simetričnih okolic enote (obstaja po trditvi 3.8). Naj bo  $V \in \mathcal{V}$  takšna okolica, da velja  $V^2 \subset U$ . Takšna okolica obstaja po trditvi 3.5. Vzemimo  $x \in \bar{V}$ . Velja  $(xV) \cap V \neq \emptyset$ . Res: ker je  $V$  okolica enote, je  $xV$  okolica elementa  $x$ . Če je  $x \in V$ , zgornji presek ni prazen, ker je  $V$  odprta množica, če pa je  $x$  iz roba množice  $V$ , vsaka njegova okolica seka množico  $V$ .

Obstajata torej  $v_1, v_2 \in V$ , da velja  $xv_1 = v_2$ . Sledi

$$x = v_2 v_1^{-1} \in V V^{-1} = V^2 \subset U.$$



Torej res velja  $\bar{V} \subset U$ . □

**Trditev 3.10.** *Za topološko grupo  $G$  velja, da zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$  natanko tedaj, kadar je Hausdorffova.*

**Izrek 3.11.** *Vsaka topološka grupa  $G$ , ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je regularen topološki prostor.*

### 3.1. Primeri topoloških grup.

## 4. KVOCIENTI TOPOLOŠKIH GRUP

**Trditev 4.1.** *Naj bo  $G$  topološka grupa in  $H$  njena podgrupa. Če  $H$  opremimo z relativno topologijo, potem je tudi  $H$  topološka grupa.*

*Dokaz.* Preslikavi  $\mu|_H$  in  $\iota|_H$  sta zvezni v relativni topologiji na  $H$  kot zožitvi zveznih preslikav na topološki podprostor  $H$ . Ker je  $H$  za zoženo množenje grupa (po definiciji podgrupe), je  $H$  topološka grupa. □

**Trditev 4.2.** *Za  $A$  in  $B$  podmnožici topološke grupe  $G$  veljajo naslednje trditve:*

- (1)  $\bar{A} \bar{B} \subset \overline{AB}$ ,
- (2)  $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$ ,
- (3)  $x\bar{A}y = \overline{xAy}$  za vsaka dva elementa  $x, y \in G$ .
- (4) Če  $G$  ustreza separacijskemu aksiomu  $T_0$  in za vsaka dva elementa  $a \in A$  in  $b \in B$  velja enakost  $ab = ba$ , potem velja enakost  $ab = ba$  tudi za vsaka dva elementa  $a \in \bar{A}$  in  $b \in \bar{B}$ .

*Dokaz.* Naj bosta  $A$  in  $B$  podmnožici topološke grupe  $G$ .

Za dokaz prve trditve vzemimo točki  $x \in \bar{A}$  in  $y \in \bar{B}$  ter neko okolico  $U$  enote  $e$ . Ker je množenje zvezno, obstaja enote  $V_1$  in  $V_2$ , da je  $(xV_1)(yV_2) \subset xyU$ . Definiramo okolico enote  $V = V_1 \cap V_2$ . Velja  $(xV)(yV) \subset xyU$ . Ker je  $xV$  okolica za  $x$  in  $yV$  okolica za  $y$  ter vsaka okolica točke iz zaprtja množice seka množico samo, obstajata  $a \in A$  in  $b \in B$ , da je  $a \in xV$  in  $b \in yV$ . Velja torej  $ab \in (AB) \cap (xyU)$  in, ker je  $xyU$  okolica za  $xy$ , tudi  $xy \in \overline{AB}$ . Inkluzija v prvi trditvi je s tem dokazana.

Enakost v drugi trditvi sledi iz tega, da je invertiranje homeomorfizem (trditev 3.3). Vzemimo množico  $A \subset G$ . Ker je invertiranje zvezno, je  $\iota(\bar{A}) \subseteq \overline{\iota(A)}$ . Ker je samo sebi inverz, velja tudi obratno  $\iota(\bar{A}) \subseteq \iota(A)$ . Torej  $\bar{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$ .

Enakost v tretji trditvi sledi iz tega, da sta leva in desna translacija homeomorfizma (trditev 3.3). Naj bosta  $x, y \in G$ . Tedaj je tudi  $f = r_y \circ l_x$  homeomorfizem. Ker je  $\bar{A}$  zaprta, je  $x\bar{A}y$  najmanjša zaprta množica, ki vsebuje množico  $xAy$ . Torej res velja  $x\bar{A}y = \overline{xAy}$ .

Za dokaz četrte trditve privzemimo še, da  $G$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$  in velja  $ab = ba$  za vsaka dva elementa  $a \in A$  in  $b \in B$ . Preslikava  $(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$  je zvezna, saj je kompozitum množenj in invertiranja. Ker je po izreku 3.11 množica  $\{e\}$  zaprta, je zaprta tudi množica  $H = \{(a, b) \in G \times G; aba^{-1}b^{-1} = e\}$ , saj je njena  $f$ -prasluka. Po predpostavki velja  $A \times B \subseteq H$  in po definiciji produktne topologije velja  $\bar{A} \times \bar{B} = \overline{A \times B} \subseteq \bar{H}$ . Sledi, da je  $\bar{A} \times \bar{B} \subseteq H$ , torej je  $ab = ba$  za vsaka dva elementa  $a \in \bar{A}$  in  $b \in \bar{B}$ . □

**Trditev 4.3.** *Naj bo  $H$  podgrupa topološke grupe  $G$ .  $H$  je odprta natanko tedaj, ko ima neprazno notranjost. Vsaka odprta podgrupa  $H$  topološke grupe  $G$  je tudi zaprta.*

*Dokaz.* Denimo, da obstaja element  $x$  v notranjosti  $H$ . Potem obstaja okolica  $U$  enote  $e$ , da je  $xU \subset H$ , saj je notranjost množice  $H$  odprta množica, ki je vsebovana v  $H$ . Vzemimo element  $y \in H$ . Velja

$$yU = yx^{-1}xU \subset yx^{-1}H = H,$$

saj  $H$  kot podgrupa vsebuje tudi  $x^{-1}$ . Vsak element v  $H$  ima torej odprto okolico, ki je vsebovana v  $H$ , kar pomeni, da je  $H$  odprta množica.

Obratno, če je  $H$  odprta, vsaka njena točka leži tudi v njeni notranjosti, torej ima neprazno notranjost.

Privzemimo, da je  $H$  odprta podgrupa grupe  $G$ . Ker je  $H$  zaprta za množenje, je  $H^c = \bigcup \{xH; x \notin H\}$ . Vsaka množica  $xH$  je odprta, ker je  $H$  odprta in je po trditvi 3.3 leva translacija homeomorfizem. Potem je tudi  $H^c$  odprta množica, torej je  $H$  zaprta množica.  $\square$

**Trditev 4.4.** *Naj bo  $U$  simetrična okolica enote  $e$  v topološki grupi  $G$ . Potem je  $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$  odprta in zaprta podgrupa topološke grupe  $G$ .*

*Dokaz.* Vzemimo  $x \in U^k$  in  $y \in U^l$ . Velja  $xy \in U^k U^l \subseteq U^{k+l}$ , torej je  $L$  zaprta za množenje. Ker je  $U$  simetrična, velja tudi  $x^{-1} \in (U^{-1})^k = U^k$ , torej je  $L$  zaprta za invertiranje. Sledi, da je  $L$  podgrupa topološke grupe  $G$ . V njeni notranjosti je zagotovo enota  $e$ , saj je  $U$  okolica za  $e$ . Po trditvi 4.3 je  $L$  odprta in zaprta podgrupa topološke grupe  $G$ .  $\square$

**Izrek 4.5.** *Naj bo  $G$  topološka grupa,  $H$  njena podgrupa in  $\varphi: G \rightarrow G/H$  naravna preslikava. Definiramo  $\theta(G/H) = \{U; \varphi^{-1}(U) \text{ odprta v } G\}$ . Veljajo naslednje trditve:*

- (1) *družina  $\theta(G/H)$  je topologija na kvocientu  $G/H$ ,*
- (2) *glede na topologijo  $\theta(G/H)$  je  $\varphi$  zvezna preslikava,*
- (3) *družina  $\theta(G/H)$  je najmočnejša topologija na kvocientu  $G/H$ , glede na katero je  $\varphi$  zvezna preslikava,*
- (4)  *$\varphi: G \rightarrow G/H$  je odprta preslikava.*

*Dokaz.* Naj bo  $\theta(G/H) = \{uH; u \in U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  družina odprtih množic v  $G/H$ , kjer so  $U_\lambda$  odprte množice v  $G$ . Potem je njihova unija  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{uH; u \in U_\lambda\} = \{uH; u \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\}$  prav tako odprta v  $G/H$ , saj je  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  odprta v  $G$ . Presek dveh takih množic  $\{uH; u \in U_\lambda\} \cap \{uH; u \in U_\mu\} = \{uH; u \in U_\lambda \cap U_\mu\}$  je tudi odprt, saj je presek  $U_\lambda \cap U_\mu$  odprt v  $G$ . Velja tudi  $\emptyset \in \theta(G/H)$ , če vzamemo  $U_\lambda = \emptyset$ , ki je odprta v  $G$ . Če vzamemo  $U_\lambda = G$ , dobimo tudi  $G/H \in \theta(G/H)$ . Preverili smo, da je  $\theta(G/H)$  res topologija na kvocientu  $G/H$ .

Preslikava  $\varphi$  je zvezna po definiciji topologije  $\theta(G/H)$  in topologija  $\theta(G/H)$  je res najmočnejša topologija na kvocientu  $G/H$ , glede na katero je  $\varphi$  zvezna, po konstrukciji  $\theta(G/H)$ .

Za dokaz četrte trditve vzemimo odprto množico  $U \in G$ . Po trditvi 3.4 je množica  $UH$  odprta v  $G$ , torej je  $\varphi(U) = \{uH; u \in U\}$  odprta v  $G/H$ .  $\square$

Topologiji  $\theta(G/H)$  pravimo *kvocientna topologija*, kvocientu  $G/H$  pa *kvocientni prostor*.

**Trditev 4.6.** *Naj bo  $G$  topološka grupa,  $H$  njena podgrupa in  $U, V$  tako okolici enote  $e$  v  $G$ , da velja  $V^{-1}V \subset U$ . Naj bo  $\varphi: G \rightarrow G/H$  naravna preslikava. Potem velja  $\overline{\varphi(V)} \subset \varphi(U)$ .*

**Izrek 4.7.** *Za topološko grupo  $G$  in njeno podgrupo  $H$  veljajo naslednje trditve:*

- (1) kvocientni prostor  $G/H$  je diskreten natanko tedaj, ko je  $H$  odprta v  $G$ ,
- (2) če je  $H$  zaprta v  $G$ , potem je kvocient  $G/H$  regularen topološki prostor,
- (3) če kvocientni prostor  $G/H$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , potem je  $H$  zaprta v  $G$  in velja, da je kvocient  $G/H$  regularen topološki prostor.

**Izrek 4.8.** Naj bo  $H$  podgrupa edinka topološke grupe  $G$ . Naj bo kvocient  $G/H$  opremljen s kvocientno topologijo  $\theta$ . Veljajo naslednje trditve:

- (1) kvocient  $G/H$  je topološka grupa s topologijo  $\theta$ ,
- (2) naravni homomorfizem je odprta in zvezena preslikava,
- (3) kvocient  $G/H$  je diskreten natanko tedaj, ko je podgrupa  $H$  odprta v  $G$ ,
- (4) kvocient  $G/H$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$  natanko tedaj, ko je podgrupa  $H$  zaprta v  $G$ .

## 5. IZREKI O IZOMORFIZMIH

**Trditev 5.1.** Naj bo  $G$  topološka grupa in  $H$  njena podgrupa. Naj bo za vsak element  $a \in G$  na kvocientu  $G/H$  definirana preslikava  $\psi_a$  s predpisom  $\psi_a(xH) = (ax)H$ . Za vsak element  $a \in G$  je  $\psi_a$  homeomorfizem na prostoru  $G/H$ .

**Trditev 5.2.** Naj bo  $H$  podgrupa (lokalno) kompaktne topološke grupe  $G$ . Potem je tudi kvocientni prostor  $G/H$  (lokalno) kompakten.

### 5.1. Prvi izrek o izomorfizmih.

**Izrek 5.3** (Prvi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). Naj bosta  $G$  in  $\tilde{G}$  topološki grupi. Naj bo  $f : G \rightarrow \tilde{G}$  odprt, zvezen in surjektiven homomorfizem. Potem je  $\ker f$  podgrupa edinka v grupi  $G$  in množice  $f^{-1}(\tilde{x})$ , kjer je  $\tilde{x} \in \tilde{G}$ , so disjunktni odseki  $\ker f$  v grupi  $G$ . Preslikava  $\Phi : \tilde{G} \rightarrow G/\ker f$  s predpisom  $\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x})$  je topološki izomorfizem.

### 5.2. Drugi izrek o izomorfizmih.

**Izrek 5.4** (Drugi izrek o izomorfizmih za topološke grupe). Naj bo  $G$  topološka grupa,  $A$  njena podgrupa in  $H$  podgrupa edinka grupe  $G$ . Naj bo  $\tau$  izomorfizem iz kvocienta  $(AH)/H$  v kvocient  $A/(A \cap H)$  s predpisom  $\tau(aH) = a(A \cap H)$ , kjer je  $a \in A$ .

- (1) Preslikava  $\tau$  slika odprte množice iz  $(AH)/H$  v odprte množice iz  $A/(A \cap H)$ .
- (2) Če je  $A$  še lokalno kompaktna in  $\sigma$ -kompaktna,  $H$  zaprta v  $G$  in  $AH$  lokalno kompaktna, potem je  $\tau$  homeomorfizem ter topološki grupi  $(AH)/H$  in  $A/(A \cap H)$  sta topološko izomorfni.

### 5.3. Tretji izrek o izomorfizmih.

**Izrek 5.5.** Naj bo  $f : G \rightarrow \tilde{G}$  odprt, zvezen homomorfizem topoloških grup in naj bo  $\tilde{H}$  podgrupa edinka v  $\tilde{G}$ . Potem so grupe  $(G/\ker f)/(f^{-1}(\tilde{H})/\ker f)$ ,  $G/f^{-1}(\tilde{H})$  in  $\tilde{G}/\tilde{H}$  topološko izomorfne.

Izrek lahko preoblikujemo v obliko, ki je bolj podobna algebraični različici in ne vsebuje pomožne topološke grupe  $\tilde{G}$ .

**Izrek 5.6** (Tretji izrek o izomorfizmih za topološke grupe). Naj bo  $G$  topološka grupa in  $N \subseteq H$  njeni podgrupi edinki. Potem sta kvocientni topološki grupi  $G/H$  in  $(G/N)/(H/N)$  topološko izomorfni.

## 6. IZREKI TIPA “2 OD 3”

### 7. SEPARACIJSKI AKSIOMI IN METRIZABILNOST

#### 7.1. Metrizabilnost.

**Definicija 7.1.** *Pseudometrika* na neprazni množici  $X$  je preslikava  $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , ki zadošča naslednjim pogojem:

- (1) za vsako točko  $x \in X$  velja  $\rho(x, x) = 0$ ;
- (2) za vsaki dve točki  $x, y \in X$  velja  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- (3) za vsake tri točke  $x, y, z \in X$  velja  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Če za preslikavo  $\rho$  velja še

- (4)  $\rho(x, y) = 0$  natanko tedaj, ko  $x = y$ ,

potem ji rečemo *metrika*.

**Definicija 7.2.** Naj bo  $X$  neprazna množica.

- (1) Neprazna poddružina  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  je *filter* množice  $X$ , če ima naslednje lastnosti:
  - (a) družina  $\mathcal{F}$  ne vsebuje prazne množice,
  - (b) za vsako množico  $F \in \mathcal{F}$  je vsaka množica  $E \in \mathcal{F}$ , za katero velja  $F \subseteq E$ , tudi v družini  $\mathcal{F}$ ,
  - (c) presek  $E \cap F$  množic  $E, F \in \mathcal{F}$  je tudi v družini  $\mathcal{F}$ .
- (2) Filter  $\mathcal{U}$  na množici  $X \times X$  definira *uniformno strukturo* na množici  $X$ , če ima naslednje lastnosti:
  - (a) vsaka množica  $U \in \mathcal{U}$  vsebuje diagonalo  $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$ ,
  - (b) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  je tudi množica  $U^{-1} \in \mathcal{U}$ ,
  - (c) za vsako množico  $U \in \mathcal{U}$  obstaja taka množica  $V \in \mathcal{U}$ , da velja  $V \circ V \subseteq U$ .

Množici z uniformno strukturo rečemo *uniformni prostor*.

**Opomba 7.3.** V zgornji definiciji so operacije na množicah mišljene v smislu relacij (glej podrazdelek 2.1).

**Definicija 7.4.** Naj bo  $X$  uniformni prostor z uniformno strukturo  $\mathcal{U}$ . Topologija, inducirana z  $\mathcal{U}$  je taka družina množic  $T \subseteq X$ , za katere za vsako točko  $x \in T$  obstaja  $U \in \mathcal{U}$ , da velja  $\{y \in X; (x, y) \in U\} \subseteq T$ .

**Definicija 7.5.** Naj bosta  $X$  in  $Y$  uniformna prostora z uniformnima strukturama  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{V}$ . Preslikava  $f: X \rightarrow Y$  je *enakomerno zvezna*, če za vsako množico  $V \in \mathcal{V}$  obstaja taka množica  $U \in \mathcal{U}$ , da za vsak par  $(x, y) \in U$  velja  $(f(x), f(y)) \in V$ .

**Trditev 7.6.** Vsaka enakomerno zvezna preslikava uniformnih prostorov je zvezna v topologiji, inducirani z uniformnima strukturama.

**Trditev 7.7.** Vsaka topološka grupa je uniformni prostor.

**Izrek 7.8.** Naj bo  $\{U_k\}_{k=1}^\infty$  tako zaporedje simetričnih okolici enote  $e$  v topološki grupi  $G$ , da za vsak  $k \in \mathbb{N}$  velja  $U_{k+1}^2 \subset U_k$ . Označimo  $H = \bigcap_{k=1}^\infty U_k$ . Potem obstaja taka levoinvariantna pseudometrika  $\sigma$  na  $G$  z naslednjimi lastnostmi:

- (1)  $\sigma$  je enakomerno zvezna na levi uniformni strukturi od  $G \times G$ ;
- (2)  $\sigma(x, y) = 0$  natanko tedaj, ko  $y^{-1}x \in H$ ;
- (3)  $\sigma(x, y) \leq 2^{-k+2}$ , če  $y^{-1}x \in U_k$ ;
- (4)  $2^{-k} \leq \sigma(x, y)$ , če  $y^{-1}x \notin U_k$ .

Če velja še  $xU_kx^{-1} = U_k$  za vsak  $x \in G$  in  $k \in \mathbb{N}$ , potem je  $\sigma$  tudi desnoinvariantna in velja

$$(5) \quad \sigma(x^{-1}, y^{-1}) = \sigma(x, y) \text{ za vsaka dva elementa } x, y \in G.$$

**Definicija 7.9.** Topološki prostor  $X$  je *metrizabilen*, če njegova topologija  $\tau$  izhaja iz kakšne metrike  $d$  na množici  $X$ .

**Opomba 7.10.** Baza topologije metrizabilnega topološkega prostora  $X$  je družina odprtih krogel  $\{K(x, \epsilon); x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}\}$ .

**Izrek 7.11.** Topološka grupa  $G$ , ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je metrizabilen topološki prostor natanko tedaj, ko obstaja števna baza odprtih okolice enote.

## 7.2. Separacijski aksiomi do $T_{3\frac{1}{2}}$ .

**Definicija 7.12.** Topološki prostor  $X$  zadošča separacijskemu aksiomu  $T_{3\frac{1}{2}}$ , če za poljubno zaprto množico  $A \subseteq X$  in točko  $b \in X \setminus A$  obstaja taka zvezna realna funkcija  $\psi$ , definirana na  $G$ , da je  $\psi(b) = 0$  in  $\psi(x) = 1$  za vsak  $x \in A$ .

**Opomba 7.13.** Topološki prostoru, ki zadošča  $T_1$  in  $T_{3\frac{1}{2}}$ , pravimo *povsem regularen* topološki prostor.

**Trditev 7.14.** (1) Vsak povsem regularen topološki prostor je regularen.  
(2) Vsak normalen topološki prostor je povsem regularen.

**Izrek 7.15.** Topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je povsem regularen topološki prostor.

## 7.3. Separacijski aksiom $T_4$ .

**Izrek 7.16.** Če je  $m$  katerokoli neštevno kardinalno število, potem je  $\mathbb{Z}^m$  povsem regularna topološka grupa, ki ni normalna.

**Definicija 7.17.** (1) Naj bosta  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{V}$  družini podmnožic topološkega prostora  $X$ . Družina  $\mathcal{V}$  je *pofinitiv* družine  $\mathcal{U}$ , če za vsako množico  $V \in \mathcal{V}$  obstaja takšna množica  $U \in \mathcal{U}$ , da je  $V \subset U$ .  
(2) Družina podmnožic  $\mathcal{U}$  topološkega prostora  $X$  je *lokalno končna*, če ima vsaka točka  $x \in X$  okolico, ki seka samo končno mnogo množic iz družine  $\mathcal{U}$ .  
(3) Topološki prostor  $X$  je *parakompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje kakšno pofinitiv, ki je lokalno končno odprto pokritje prostora  $X$ .

**Trditev 7.18.** Vsak parakompakten Hausdorffov topološki prostor je normalen.

**Izrek 7.19.** Vsaka lokalno kompaktna topološka grupa, ki zadošča separacijskemu aksiomu  $T_0$ , je normalen topološki prostor.

## LITERATURA

- [1] S. Bhowmik, *Introduction to Uniform Spaces*, 10.13140/RG.2.1.3743.8967, junij 2014, [ogled 1. 4. 2019], dostopno na [https://www.researchgate.net/publication/305196408\\_INTRODUCTION\\_TO\\_UNIFORM\\_SPACES](https://www.researchgate.net/publication/305196408_INTRODUCTION_TO_UNIFORM_SPACES).
- [2] E. Hewitt in K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [3] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 44 DMFA-založništvo, Ljubljana, 2008.