Komutativna algebra - 7. domača naloga

Benjamin Benčina, 27192018

28. april 2020

Nal. 1: Naj bo R cel Noetherski kolobar.

(a) Pokažimo, da je R kolobar z enolično faktorizacijo (UFD) natanko tedaj, ko so vsi minimalni praideali nad glavnimi ideali spet glavni ideali.

Privzemimo najprej, da je R UFD in vzemimo poljuben glavni ideal (a). Ker je R Noetherski kolobar, so po posledici 7.20 s predavanj minimalni praideali nad (a) točno izolirani praideali ideala (a), torej minimalni elementi množice $\mathrm{Ass}((a))$. Ker je R Noetherski, ima vsak ideal minimalno primarno dekompozicijo, zato naj bo $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ minimalna primarna dekompozicija za ideal (a). Po izreku 7.19 velja $\mathrm{Ass}((a)) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, kjer je $P_i = \sqrt{Q_i}$. Ker je R UFD, naj bo $a = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ do vrstnega reda in asociacije enoličen zapis elementa a kot produkt praelementov. Ker je $a \in \bigcap_{i=1}^m Q_i \subseteq \bigcap_{i=1}^m P_i$, vsak od idealov P_i vsebuje vsaj eno potenco nekega praelementa p_j. Ker smo dobili ideale P_i iz minimalne dekompozicije in ker je radikal preseka enak preseku radikalov, je $n = m$ in (po preindeksiranju) zaradi minimalnosti praidealov velja $P_i = (p_i)$.

Obratno, naj bo vsak minimalni praideal nad glavnim idealom tudi glavni. Uporabili bomo dejstvo (izrek Kaplanskega), da je cel kolobar UFD natanko tedaj, ko vsak praideal vsebuje praelement. Naj bo Q nek praideal. Vzemimo poljuben neničelen element $a \in Q$ in si oglejmo glavni ideal (a). Na isti način kot zgoraj dobimo (končno) množico minimalnih praidealov nad (a). Ker je Q praideal, ki vsebuje (a), mora obstajati nek minimalni praideal P_i nad (a), da velja $(a) \subseteq P_i \subseteq Q$. Po predpostavki je $P_i = (p)$, kjer pa je p praelement v R, ker je R domena. Očitno torej Q vsebuje neničelen praelement.

(b) Dokažimo še, da če je R UFD, potem je vsak minimalni praideal glavni. To seveda sledi direktno iz prejšnje točke, saj je ideal (0) glavni na trivialen način (ta točka je na nek način poseben primer prejšnje).

Nal. 2: Naj bo P praideal komutativnega kolobarja R in naj bo $\varphi\colon R \to R_P$ standarden lokalizacijski homomorfizem, definiran s predpisom $r \mapsto \frac{r}{1}$. Označimo $S_P(0) = \ker \varphi$.

(a) Dokažimo, da je $S_P(0)$ vsebovan v vsakem P-primarnem idealu.

Najprej pokažimo vsebovanost $S_P(0) \subseteq P$. Naj bo $a \in S_P(0)$, torej $\frac{a}{1} = 0$. Potem obstaja element $u \in R \setminus P$, da je $ua = 0$. Ker očitno $u \notin P$, velja $a \in P$, saj je P praideal.

Sedaj vzemimo poljuben P-primaren ideal Q, torej $P = \sqrt{Q}$. Posebej velja $Q \subseteq P$. Po lemi 7.21 s predavanj velja $(Q^e)^c = Q$ in $(S_P(0)^e)^c = S_P(0)$. Potem pa velja

$$S_P(0) = (0)^c \subseteq (Q^e)^c = Q.$$

(b) Dokažimo še, da je ideal $S_P(0)$ P-primaren natanko tedaj, ko je P minimalni praideal.

Recimo, da je $S_P(0)$ P-primaren, torej naj bo $\sqrt{S_P(0)} = P$ in vzemimo poljuben $x \in P^e \lhd R_P$. Potem je $x = \frac{p}{s}$ za neka elementa $p \in P$ in $s \in R \setminus P$. Po predpostavki obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $p^n \in S_P(0) = \ker \varphi$, torej $x^n = \frac{p^n}{s^n} = 0$. Sledi, da je P^e vsebovan v nilradikalu kolobarja R_P, ki pa je presek vseh praidealov v kolobarju R_P, torej je R_P minimalni praideal. Hkrati pa so praideali v R_P v bijekciji s praideali v R, ki so vsebovani v P, torej je P^e tudi maksimalen ideal v R_P. Od tod sledi, da je P^e edini praideal v R_P, torej je P minimalni ideal v R.

Obratno privzemimo, da je P minimalni praideal v R. Potem ima R_P natanko en praideal P^e. Od tod sledi, da je nilradikal kolobarja R_P kar enak idealu P^e. Torej za vsak $p \in P$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $\left(\frac{p}{1}\right)^n = 0$. Od tod sledi, da je $p^n \in S_P(0)$, torej $P \subseteq \sqrt{S_P(0)}$. Obratna inkluzija sledi direktno iz $S_P(0) \subseteq P$ (dokaz v prejšnji točki).

Zakaj je $S_P(0)$ primaren? Naj bo $ab \in S_P(0) \subseteq P$. Ker je P praideal, je vsaj eden od njiju gotovo v P, naj bo to na primer b. Če tudi $a \in P$, je dokaz končan, zato privzemimo $a \notin P$. Ker $ab \in S_P(0)$, obstaja $u \in R \setminus P$, da $uab = 0$, vendar je $a \in R \setminus P$, zato $vb = 0$ za $v = ua \in R \setminus P$. Torej $b \in S_P(0)$, kar pokrije še drugo možnost. S tem je dokaz končan.

Opomba: Zakaj je nilradikal komutativnega kolobarja enak preseku njegovih praidealov? Naj bo r element nilradikala kolobarja R in naj bo $P \in \operatorname{Spec} R$. Potem $r^n = 0$ za neko število $n \in \mathbb{N}$. Potem je $r \cdot r^{n-1} = 0 \in P$ in sledi $r \in P$ ali $r^{n-1} \in P$, saj je P praideal. Po indukciji na $m \leq n-1$ s ponavljanjem tega postopka za drugi primer dobimo $r^m \in P$ za vsak $m = 1, \ldots, n-1$, v posebnem primeru $r \in P$. Ker je bil praideal izbran poljubno, je $r \in P$ za vsak $P \in \operatorname{Spec} R$, torej je nilradikal kolobarja R vsebovan v preseku vseh praidealov. Obratno privzemimo, da x ni element nilradikala kolobarja R. Oglejmo si množico

$$A = \{J \lhd R;\ \forall m \in \mathbb{N}\colon x^m \notin J\}$$

Ta množica ni prazna, saj $(0) \in A$. Delno jo uredimo z običajno inkluzijo. Vsaka veriga $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$ ima naravno zgornjo mejo $J = \bigcup_{j \geq 0} J_j \in A$. Po Zornovi lemi obstaja maksimalen element $M \in A$. Dokažimo, da je M praideal. Naj velja $ab \in M$, vendar $a, b \notin M$. Potem je M strogo vsebovan v $M + (a)$ in $M + (b)$, nobeden od teh dveh idealov pa ni v množici A, saj je M njen maksimalni element. Torej obstajata $r, s \in \mathbb{N}$, da je $x^r \in M + (a)$ in $x^s \in M + (b)$. Vendar pa je potem $x^{r+s} = x^r x^s \in M + (ab) = M \in A$, kar je protislovje. Od tod sledi, da če x ni v nilradikalu kolobarja R, potem x ni vsebovan v nobenem praidealu. Ekvivalentno je presek vseh praidealov vsebovan v nilradikalu kolobarja R.