Funkcionalna analiza: 1. domača naloga

Skrajni rok za oddajo rešitev je 24. 4. 2020. Rešitve oddajte po elektronski pošti na naslov marko.kandic@fmf.uni-lj.si. Dovoljena je uporaba dostopne literature v knjižnici ali na spletu. Sodelovanje s kolegi je prepovedano. **Vse odgovore dobro utemeljite!**

1. Naj bo $e = (1, 1, \ldots)$ vektor samih enic.

   (a) Dokaži, da velja $c = c_0 \oplus \mathbb{F}e$.

   (b) Vektorski prostor $c = c_0 \oplus \mathbb{F}e$ opremimo z normo
   $$\|x \oplus \lambda e\| := \max\{\|x\|_\infty, |\lambda|\}.$$
   Dokaži, da je $(c, \|\cdot\|)$ Banachov prostor, ki je topološko izomorfen $(c, \|\cdot\|_\infty)$.

2. Za vse $f \in C[0,1]$ in $x \in [0,1]$ definiramo
   $$(Tf)(x) = f(0) + \int_0^x f(t)\, dt.$$

   (a) Dokaži, da je T omejen linearen operator in izračunaj njegovo normo.

   (b) Naj bo $Y = \{g \in C^1[0,1] : \; g'(0) = g(0)\}$. Dokaži, da je $\operatorname{im} T = Y$.

   (c) Ali je Y Banachov prostor glede na normo $\|\cdot\|_\infty$?

   (d) Dokaži, da je Y neskončnorazsežen.

   (e) Določi lastne vrednosti operatorja T.

3. Naj bo X normiran prostor in Y zaprt podprostor s končno kodimenzijo.

   (a) Dokaži, da obstaja tak zaprt podprostor Z v X, da je $X = Y \oplus Z$.

   (b) Dokaži, da sta normirana prostora X/Y in Z topološko izomorfna.

4. Naj bo Y zaprt podprostor normiranega prostora X in naj bo $\pi\colon X \to Y$ kvocientna projekcija.

   (a) Dokaži, da je preslikava $\Phi\colon (X/Y)^* \to Y^\perp$, podana s predpisom $\Phi\colon f \mapsto f \circ \pi$, izometrični izomorfizem.

   (b) Utemelji, da sta prostora Y^{**} in $Y^{\perp\perp}$ Banachova, in dokaži, da sta izometrično izomorfna.

5. Naj bo X Banachov prostor in $\Phi\colon X \to X^*$ taka linearna preslikava, da za vsak $x \in X$ velja $\Phi(x)(x) = 0$.

   (a) Dokaži, da za vse $x, y \in X$ velja $\Phi(x)(y) = -\Phi(y)(x)$.

   (b) Dokaži, da je Φ omejena.

6. Naj zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Banachovega prostora X konvergira proti x, zaporedje omejenih linearnih funkcionalov $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na X pa naj šibko* konvergira proti funkcionalu f. Dokaži, da zaporedje $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti $f(x)$.