Funkcionalna analiza: 2. domača naloga

Skrajni rok za oddajo rešitev je do **12. 6. 2020.** Rešitve oddajte po elektronski pošti na naslov marko.kandic@fmf.uni-lj.si. Dovoljena je uporaba dostopne literature v knjižnici ali na spletu. Sodelovanje s kolegi je prepovedano. **Vse odgovore dobro utemeljite!**

1. Naj bo $T\colon X \to Y$ izometrični izomorfizem normiranih prostorov.

   (a) Dokaži, da T preslika ekstremne točke (če obstajajo) zaprte enotske krogle B_X prostora X v ekstremne točke zaprte enotske krogle B_Y prostora Y.

   (b) Dokaži, da je preslikava $T\colon c \to c_0$, definirana s predpisom

   $$T\colon (x_1, x_2, \ldots) \mapsto \big(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} x_n - x_1, \lim_{n\to\infty} x_n - x_2, \ldots\big),$$

   dobro definirani topološki izomorfizem Banachovih prostorov.

   (c) Ali sta Banachova prostora c in c_0 izometrično izomorfna?

2. Naj bo K kompaktna podmnožica normiranega prostora X in naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje omejenih funkcionalov na X.

   (a) Dokaži, da obstaja tako podzaporedje $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ki konvergira enakomerno na K.

   (b) Naj bo K kompaktna podmnožica v Banachovem prostoru $(C^1[0,1], \|\cdot\|_1)$. Dokaži, da za vsako zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $[0,1]$ obstaja tako podzaporedje $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $k_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $k, l \geq k_0$ velja

   $$|f'(x_{n_k}) - f'(x_{n_l})| < \epsilon$$

   za vse $f \in K$.

3. Naj bo T tak omejen operator na kompleksnem Banachovem prostoru X, da je $\sigma(T) = E \cup F$ za neki neprazni disjunktni zaprti podmnožici spektra $\sigma(T)$.

   (a) Utemelji, da je funkcija $f := \chi_E \in \mathrm{Hol}(T)$.

   (b) Dokaži, da je $f(T)$ idempotenten operator, ki komutira z operatorjem T.

   (c) Dokaži, da obstajata taka zaprta podprostora Y in Z prostora X, da je $X = Y \oplus Z$, ki sta invariantna za operator T.

4. Prostor n-krat zvezno odvedljivih funkcij $C^n[a,b]$ opremimo z normo

   $$\|f\| := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \|f^{(k)}\|_\infty$$

   tako, da je $(C^n[a,b], \|\cdot\|)$ komutativna Banachova algebra z enoto.

   (a) Dokaži, da je norma $\|\cdot\|$ res submultiplikativna na $C^n[a,b]$.

   (b) Dokaži, da je

   $$\mathcal{J}_x = \{f \in C^n[a,b] :\ f(x) = 0\}$$

   maksimalni ideal v $C^n[a,b]$.

   (c) S posnemanjem dokaza o karakterizaciji maksimalnih idealov Banachove algebre $C[a,b]$ dokaži, da je $\mathcal{J}$ maksimalni ideal v $C^n[a,b]$ natanko takrat, ko je oblike $\mathcal{J}_x$ za nek $x \in [a,b]$.

   (d) Dokaži, da je $(C^n[a,b], \|\cdot\|)$ polenostavna Banachova algebra, Gelfandova reprezentacija algebre $(C^n[a,b], \|\cdot\|)$ pa ni ne izometrična ne surjektivna.