TEORIJA MERE - DOMAČA NALOGA

BENJAMIN BENČINA
27192018

1) $n\in\mathbb{N}$, $a_n\in[0,\infty)$, μ_n mera na σ-alg. $\mathcal{A}$. $\mu=\sum_n a_n\mu_n$ mera na $\mathcal{A}$:

• $\mu(\emptyset)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mu_n(\emptyset) \underset{\mu_n \text{ mera}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot 0 = 0$ ✓

• $\mu(\bigcup_n A_n)=\sum_m a_m\mu_m(\bigcup_n A_n) \underset{\mu_m \text{ mera}}{=} \sum_m a_m \sum_m \mu_m(A_n) = \sum_m\sum_n a_m\mu_m(A_n) \overset{\text{TONELLI ZA VRSTE}}{=}$

$= \sum_n\sum_m a_m\mu_m(A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ ✓

2) Naj bo μ translacijsko invariantna mera na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ z $\mu([0,1))=M<\infty$.

a) $a,b\in\mathbb{R}$; $b-a\in\mathbb{Q}_+ \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: n(b-a)\in\mathbb{N}$.

Po eni strani: $\mu(n[a,b)) \overset{\text{TRANS. INV.}}{=} \mu(n[0,b-a)) = \mu([0,n(b-a))) \overset{\text{ADITIVNOST}}{=} n\cdot(b-a)\cdot M = n\cdot m([a,b))\cdot M$

Po drugi pa: $\mu(n[a,b)) = n\cdot\mu([a,b))$.

Pokrajšamo n in dobimo $M=k$: $\mu([a,b))=k\cdot m([a,b))$.

b) Dokažimo najprej za poljubne intervale $[a,b)$; $b-a\in\mathbb{R}_+$.
Ker je $\mathbb{Q}_+$ gosta v $\mathbb{R}_+$, obstaja zaporedje racionalnih števil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = b-a$. Upoštevamo notranjo zveznost mere:

$\mu([a,b)) \underset{\text{TRANS. INV.}}{=} \mu([0,b-a)) = \mu(\bigcup_n [0,a_n)) \underset{\text{NOTRANJA ZVEZNOST}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu([0,a_n)) \overset{(a)}{=}$

$= \lim_{n\to\infty} k\cdot a_n = k\cdot \lim_{n\to\infty} a_n = k\cdot(b-a) = k\cdot m([a,b))$ ✓

Vzemimo sedaj poljubno omejeno Borelovo množico B. Po omejenosti je vsebovana v nekem intervalu $[-n,n)=:X_n$. Uporabili bomo idejo iz naloge 27) iz vaj. Naj bo torej $\mathcal{D}=\{A\in\mathcal{B}_\mathbb{R}|_{X_n};\ \mu(A)=k\cdot m(A)\}$ in $\Pi=\{[a,b)\ ;\ [a,b)\subseteq X_n\}$. Zaradi zaprtosti za preseke je Π očitno π-sistem. Če pokažemo, da je $\mathcal{D}$ λ-sistem, ki vsebuje Π in $\sigma(\Pi)=\mathcal{B}_\mathbb{R}|_{X_n}$, bo po $\lambda(\Pi)=\sigma(\Pi)$ sledilo $B\in\mathcal{D}$.

Na začetku te točke smo v bistvu pokazali $\Pi\subset\mathcal{D}$. Iz predavanj še vemo, da Π generira $\mathcal{B}_\mathbb{R}|_{X_n}$, torej $\mathcal{B}_\mathbb{R}|_{X_n}=\sigma(\Pi)$.

Ali je $\mathcal{D}$ λ-sistem? Po (a) je $X_n\in\mathcal{D}$.

Obr