Funkcionalna analiza - 1. domača naloga

Benjamin Benčina, 27192018

23. april 2020

Nal. 1: Naj bo $e = (1, 1, 1, \dots)$ vektor samih enic.

(a) Dokažimo, da velja $c = c_0 \oplus \mathbb{F}e$. Vzemimo poljubno konvergentno zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ in naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Potem je zaporedje $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ jasno konvergentno z limito 0 in je zato v prostoru c_0. Obratno, iz poljubnega elementa $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, ae)$, kjer je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ in $a \in \mathbb{F}$ s seštevanjem po komponentah dobimo zaporedje $(a_n + a)_{n\in\mathbb{N}}$, ki je jasno konvergentno z limito a. Na naraven način zato identificiramo

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \leftrightarrow ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}, ae),$$

kjer je $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(b) Zgornji prostor opremimo z normo $||x \oplus \lambda e|| := \max\{||x||_\infty, |\lambda|\}$. Dokažimo, da je s to normo zgornji prostor Banachov in topološko izomorfen $(c, ||.||_\infty)$.

- $||.||$ je norma: Seveda je ta preslikava vedno pozitivna, saj sta oba elementa maksimuma pozitivna. Za definitnost preverimo

  $$||((0)_{n\in\mathbb{N}}, 0e)|| = \max\{0, 0\} = 0$$
  $$\max\{||x||_\infty, |\lambda|\} = 0 \implies ||x||_\infty = 0 \wedge |\lambda| = 0 \implies x = (0)_{n\in\mathbb{N}} \wedge \lambda = 0$$

  Preslikava je homogena (z absolutnimi vrednostmi), saj sta obe preslikavi znotraj maksimuma normi, maksimum pa je homogen za pozitivna realna števila. Trikotniška neenakost prav tako sledi iz tega, da sta obe preslikavi znotraj maksimuma normi in zanju velja trikotniška neenakost.

- polnost: Naj bo $(x_n, \lambda_n e)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v $c_0 \oplus \mathbb{F}e$, tj. za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsaka dva indeksa $m, n > n_0$ velja $||(x_n, \lambda_n e) - (x_m, \lambda_m e)|| = ||(x_n - x_m, (\lambda_n - \lambda_m)e)|| < \epsilon$.

  Po definiciji zgornje norme je $||x_n - x_m||_\infty < ||(x_n - x_m, (\lambda_n - \lambda_m)e)|| < \epsilon$, torej je zaporednje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo v Banachovem prostoru $(c_0, ||.||_\infty)$. Zato je konvergentno, torej obstaja limita $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ v prostoru c_0.

  Po definiciji zgornje norme je $||\lambda_n - \lambda_m||_\infty < ||(x_n - x_m, (\lambda_n - \lambda_m)e)|| < \epsilon$, torej je zaporednje $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo v Banachovem prostoru $(\mathbb{F}, |.|)$. Zato je konvergentno, torej obstaja limita $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$ v prostoru $\mathbb{F}$.

  V pogoju za Cauchyjevo zaporedje $(x_n, \lambda_n e)_{n\in\mathbb{N}}$ (zgoraj) sedaj lahko pošljemo $m \to \infty$ in dobimo pogoj, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n > n_0$ velja $||(x_n, \lambda_n e) - (x, \lambda e)|| < \epsilon$. Z drugimi besedami, zaporedje $(x_n, \lambda_n e)_{n\in\mathbb{N}}$ v tej normi konvergira.

- topološka izomorfnost: Zgornja identifikacija je že linearna bijekcija (saj je operator limite linearen, preslikava pa je definirana preko seštevanja/odštevanja), torej (algebraični) izomorfizem. Dokazati moramo le še, da sta normi $||.||_\infty$ in $||.||$ (zadnja na novem prostoru) ekvivalentni ali pa najti elegantnejšo pot. Podrobneje si oglejmo novo definirano normo.

  $$||(x, \lambda e)|| = \max\{||x||_\infty, |\lambda|\} = \max\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}, |\lambda|\}$$

Vzemimo poljubno konvergentno zaporedje $x \in c$ z limito λ in računam

$$\begin{aligned}
||x|| &:= ||((x_n-\lambda)_{n\in\mathbb{N}},\lambda)|| := \max\{||(x_n-\lambda)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty, |\lambda|\} \\
&\leq \max\{||x||_\infty + |\lambda|, |\lambda|\} = \max\{||x||_\infty + |\lambda|\} \\
&= ||x||_\infty + |\lambda| \leq 2||x||_\infty,
\end{aligned}$$

saj je λ limita zaporedja x, torej $||x||_\infty \geq |\lambda|$. Od tod sledi, da je identifikacija zvezna kot preslikava Banachovih prostorov $(c = c_0 \oplus \mathbb{F}e, ||.||) \to (c, ||.||_\infty)$, videli pa smo že, da je linearna bijekcija. Po posledici izreka o odprti preslikavi je zato topološki izomorfizem.

<u>Nal. 2:</u> Za vse $f \in C[0,1]$ in $x \in [0,1]$ definiramo

$$(Tf)(x) = f(0) + \int_0^x f(t)dt.$$

(a) Dokažimo, da je T omejen linearen operator in izračunajmo njegovo normo. Da je T linearen operator, je očitno, saj sta tako integral kot seštevanje linearni operaciji. Za omejenost računamo

$$\begin{aligned}
||Tf||_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |Tf(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(0) + \int_0^x f(t)dt| \leq \sup_{x\in[0,1]} \{|f(0)| + \int_0^x |f(t)|dt\} \\
&= |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |f(t)|dt \leq |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x \max_{t\in[0,x]} |f(t)|dt \\
&= |f(0)| + \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 2||f||_\infty
\end{aligned}$$

Torej je operator T omejen. Ali je njegova norma kar enaka 2? Najdimo primerno zvezno funkcijo. Če vzamemo $f \equiv 1$, potem je $(Tf)(x) = 1 + x$ in $||Tf||_\infty = \max_{x\in[0,1]}\{1+x\} = 2$.

(b) Naj bo $Y = \{g \in C^1[0,1];\ g'(0) = g(0)\}$. Pokažimo $\operatorname{im} T = Y$. Dokazali bomo obe vsebovanosti. Vzemimo $g \in Y$. Potem je $g' \in C[0,1]$ in

$$(Tg')(x) = g'(0) + \int_0^x g'(t)dt = g(0) + \int_0^x g'(t)dt = g(x)$$

po osnovnem izreku analize. Torej $g \in \operatorname{im} T$. Obratno, vzemimo $g \in \operatorname{im} T$. Potem obstaja $f \in C[0,1]$, da je $g(x) = f(0) + \int_0^x f(t)dt$. Naj bo F neka primitivna funkcija funkcije f. Potem

$$g(x) = f(0) - F(0) + F(0) + \int_0^x f(t)dt = f(0) - F(0) + F(x).$$

Po osnovnem izreku analize je $g \in C^1[0,1]$ in $g'(0) = f(0) = g(0)$.

(c) Ali je prostor $(Y, ||.||_\infty)$ Banachov? Normiran seveda je, saj $C^1 \subset C$, poln pa ni. Zaporedje $(x^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ je Cauchyjevo, konvergentno pa ni niti v $C[0,1]$ (prav tako z $||.||_\infty$).

(d) Dokažimo, da je prostor Y neskončno razsežen. Recimo, da je $\{g_i\}_{i=1}^n$ neka končna baza za prostor Y. Potem vsako funkcijo $g \in Y$ lahko zapišemo kot končno vsoto $g = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i g_i$. Po točki (b) obstajajo funkcije $\{f_i\}_{i=1}^n$ (vsaka v prasliki T, po indeksih), da je $g = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i f_i(0) + \int_0^x \Sigma_{i=1}^n \lambda_i f_i(t)dt$. Vendar pa $C[0,1]$ ni končno razsežen, zato obstaja funkcija f, ki je ne moremo zapisati kot končno linearno kombinacijo funkcij $\{f_i\}_{i=1}^n$. Potem pa tudi funkcije Tf ne moremo zapisati kot linearno kombinacijo funkcij $\{g_i\}_{i=1}^n$, kar je protislovje. Prostor Y je torej neskončno razsežen.

(e) Določimo lastne vrednosti operatorja T. Recimo, da imamo $Tf = af$. To se zgodi nadanko tedaj, ko $af(x) = f(0) + \int_0^x f(t)dt$. Po premisleku iz točke (b) je $f \in C^1[0,1]$ in velja $af' = f$. Imamo natanko dve možnosti, bodisi $f \equiv 0$, kar nas ne zanima, bodisi $f(x) = e^{ax}$. Potem pa imamo

$$ae^{ax} = 1 + \int_0^x e^{at}dt = 1 + \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}.$$

Enačbo pomnožimo z a (tukaj $a \neq 0$)

$$\begin{aligned}
a^2 e^{ax} &= a + e^{ax} - 1 \\
(a^2 - 1)e^{ax} &= a - 1 \quad / \text{ naj } a \neq 1 \\
(a + 1)e^{ax} &= 1 \qquad\quad / \text{ naj } a \neq -1 \\
e^{ax} &= \frac{1}{a + 1}
\end{aligned}$$

to pa je protislovje, saj $e^{\cdot}$ ni konstantna funkcija. Vidimo, da $a = 1$ reši enačbo. Če $a = -1$, potem $e^{-x} = 2 - e^{-x}$, kar seveda ni enako, saj $e^{\cdot}$ ni konstantna funkcija. Torej so lastne vrednosti samo $a = 1$.

Nal. 3: Naj bo X normiran prostor in Y zaprt podprostor končne kodimenzije.

(a) Dokažimo, da obstaja tak zaprt podprostor $Z \leq X$, da je $X = Y \oplus Z$. Privzemimo še, da $Y \neq X$ (oz. kodimenzije 0), saj je sicer $Z = \{0\}$. Naj bo Y torej pravi zaprt podprostor kodimenzije n. Po Rieszevi lemi o pravokotnici obstaja $z_1 \in X \setminus Y$. Po trditvi iz predavanj je $Y \oplus \mathrm{Lin}\{z_1\}$ zaprt podprostor v X. Ker je Y v $Y \oplus \mathrm{Lin}\{z_1\}$ pravi podprostor, ima $Y \oplus \mathrm{Lin}\{z_1\}$ manjšo kodimenzijo, konkretno $n-1$. Sedaj lahko postopek ponavljamo in dobimo vektorje $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Po konstrukciji je $X = Y \oplus \mathrm{Lin}\{z_1\} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Lin}\{z_n\} = Y \oplus \mathrm{Lin}\{z_1, \ldots, z_n\}$. Postopek se seveda ustavi s kodimenzijo 0, saj jo v vsakem koraku po zgornjem argumentu gotovo zmanjšamo. Označimo $Z = \mathrm{Lin}\{z_1, \ldots, z_n\}$.

(b) Dokažimo še, da sta normirana prostora X/Y in Z topološko izomorfna. Ker imata vektorska prostora Z in X/Y oba dimenzijo n in ker so vektorji $z_1, \ldots, z_n$ linearno neodvisni ter generirajo prostor Z, vektorji $z_1 + Y, \ldots, z_n + Y$ generirajo vektorski prostor X/Y. Zato vzemimo izomorfizem vektorskih prostorov $\varphi\colon Z \to X/Y$, definiran na generatorjih s predpisom $z_i \mapsto z_i + Y$ (opazimo, da ta preslikava sovpada s kvocientno preslikavo $X \to X/Y$). Dokazujemo le še ekvivalenco norm.

Spomnimo se definicije kvocientne norme, tj. $||x + Y|| := \inf_{y \in Y} ||x - y||$, na Z pa imamo normo, ki jo dobi kot podprostor v X. Jasno je $||z + Y|| := \inf_{y \in Y} ||z - y|| \leq ||z - 0|| = ||z||$, kar dokaže eno neenakost. Druga neenakost je težja, zato raje uporabimo posledico iz predavanj. Če sta A in B normirana prostora, kjer je A končno razsežen, potem je vsak linearen operator $T\colon A \to B$ zvezen. V našem primeru sta oba normirana prostora Z in X/Y končno razsežna. Posebej sta zvezni obe preslikavi φ in φ^{-1}, ki pa sta algebraična izomorfizma. Sledi, da je φ homeomorfizem in posledično topološki izomorfizem.

Opomba: Točki (a) in (b) lahko dokažemo tudi hkrati z uporabo injekcije $X/Y \to X$, definirane na generatorjih $x_i + Y \mapsto x_i$ (vzamemo nekega predstavnika) za $i = 1, \ldots, n$. Dobljeni vektorji so linearno neodvisni (sicer pridemo v protislovje z neodvisnotjo v kvocientu). Na njih napet podprostor $\mathrm{Lin}\{x_i\}_{i=1}^n$ je dimenzije n in velja $\mathrm{Lin}\{x_i\}_{i=1}^n \cap Y = \{0\}$.

Nal. 4: Naj bo Y zaprt podprostor normiranega prostora X in naj bo $\pi\colon X \to X/Y$ kvocientna projekcija.

(a) Dokažimo, da je preslikava $\Phi\colon (X/Y)^* \to Y^\perp$, podana s predpisom $f \mapsto f \circ \pi$, izometrični izomorfizem. Spomnimo se, da je anihilator podprostora $Y^\perp = \{f \in X^*;\ Y \subseteq \ker f\}$. Dodatno privzemimo, da $Y \neq X$, sicer je $X/Y = \{0\}$ in $Y^\perp = \{f \equiv 0\}$.

Preslikava Φ je linearna, ker je kompozitum dveh linearnih preslikav. Za injektivnost poglejmo $\ker \Phi = \{f \in (X/Y)^*;\ f \circ \pi \equiv 0\}$. Ker je π surjektivna, je $f \circ \pi \equiv 0 \iff f \equiv 0$. Torej je Φ injektivna. Za surjektivnost bomo uporabili izrek o izomorfizmih. Naj bo $g \in Y^\perp$. Potem je $\ker g \supseteq Y$. Oglejmo si diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{F} \\
\mathbb{R} \arrow[ur, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Po prvem izreku o izomorfizmih namreč obstaja natanko ena preslikava f, da velja $g = f \circ \pi$. Od tod sledi, da je Φ surjektivna in posledično izomorfizem.

Da je $||f|| = ||f \circ \pi||$ je očitno, ker je π surjektivna in $f(x+Y) = f(\pi(x))$.

(b) Najprej utemeljivo, da sta Y^{**} in $Y^{\perp\perp}$ Banachova prostora, nato pa pokažimo, da sta izometrično izomorfna.

- Dual vsakega normirane prostora X je Banachov prostor, konkretno tudi $Y^{**} = (Y^*)^*$, saj je $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{F})$, kjer je $\mathbb{F}$ jasno Banachov prostor (to smo dokazali že na predavanjih).
- Vemo, da je anihilator prostora $X^\perp$ zaprt v Banachovem prostoru X^* in zato Banachov. Potem je tudi $Y^{\perp\perp}$ zaprt v X^{**} in zato Banachov.
- Spomnimo se trditve iz predavanj in vaj, ki pravi, da sta prostora $X^*/Y^\perp$ in Y^* izometrično izomorfna. Po eni strani je potem prostor $(X^*/Y^\perp)^*$ izometrično izomorfen Y^{**}, po drugi strani pa iz točke (a), uporabljeni na paru $Y^\perp \leq X^*$, sledi, da je izometrično izomorfen prostoru $Y^{\perp\perp}$.
- **Alternativna rešitev:** Oglejmo si, kaj se sploh nahaja v drugem anihilatorju podprostora Y.

$$\begin{aligned} Y^{\perp\perp} &= \{F_x \in X^{**};\ Y^\perp \subseteq \ker F_x\} = \{f \in X^{**};\ \forall f \in Y^\perp \colon F_x(f) = 0\} \\ &= \{F_x \in X^{**};\ \forall f \in Y^\perp \colon f(x) = 0\} = \{F_x \in X^{**};\ x \in Y\} \\ &= Y^{**} \end{aligned}$$

  Zakaj velja predzadnji enačaj? V točki (a) smo posredno dokazali, da obstaja funkcional F, za katerega velja $\ker F = Y$. Konkretno, če vzamemo $f \colon (X/Y) \to \mathbb{F}$ projekcijo na $\mathbb{F}$ (kjer polje naravno gledamo kot neki 1-dimenzionalen podprostor), je $\Phi(f)$ tak funkcional, ki pa je seveda v $Y^\perp$.

Nal. 5: Naj bo X Banachov prostor in $\Phi \colon X \to X^*$ taka linearna preslikava, da za vsak $x \in X$ velja $\Phi(x)(x) = 0$.

(a) Dokažimo najprej, da za vse $x, y \in X$ velja $\Phi(x)(y) = -\Phi(y)(x)$. Zaporedoma upoštevamo predpostavko in linearnost preslikav $\Phi(x)$, $\Phi(y)$ in Φ ter računamo

$$\Phi(x)(y) + \Phi(y)(x) = \Phi(x)(x+y) + \Phi(y)(x+y) = \Phi(x+y)(x+y) = 0.$$

(b) Dokažimo, da je Φ omejena preslikava. Ker imamo preslikavo med dvema Banachovima prostoroma, poskusimo z izrekom o zaprtem grafu. Radi bi videli, da za poljubno konvergentno zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z limito 0 in $(\Phi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ z limito f velja $f = 0$. Računamo

$$||\Phi(x_n)|| = \sup_{||y||\leq 1} ||\Phi(x_n)(y)|| = \sup_{||y||\leq 1} ||\Phi(y)(x_n)|| \longrightarrow_n \sup_{||y||\leq 1} ||\Phi(y)(0)|| = 0,$$

kjer upoštevamo zveznost (omejenost) funkcionalov $\Phi(y)$.

Nal. 6: Naj zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v Banachovem prostoru X konvergira proti x, zaporedje omejenih linearnih funkcionalov $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v X^* pa naj w^*-konvergira proti funkcionalu f (X^* je prav tako Banachov prostor). Dokažimo, da zaporedje $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti $f(x)$.

Spomnimo se, da $f_n \to f$ šibko* natanko tedaj, ko za vsako podbazno okolico $U = U(f; x, \epsilon)$ točke $f \in X^*$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vsak $n > n_0$ velja $f_n \in U$, tj. $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. To je torej natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ velja $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$[1]. Spomnimo se še, da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje, $f, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pa so linearni in zvezni (posledično omejeni) funkcionali. Računamo

$$\begin{aligned} ||f_n(x_n) - f(x)|| = ||f_n(x_n) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|| \leq ||f_n(x_n - x)|| + ||f_n(x) - f(x)|| \leq \\ \leq ||f_n|| \cdot ||x_n - x|| + ||f_n(x) - f(x)|| \longrightarrow_n a \cdot 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

[1]Povzeto pa zapiskih prof. Drnovška.