Komutativna algebra - 1. domača naloga

Benjamin Benčina, 27192018

21. marec 2020

<u>Nal. 1:</u> Element $e \in R$ je idempotent, če je $e^2 = e$, ideal I pa je idempotenten, če je $I^2 = I$.

(a) Dokažimo, da je glavni ideal idempotenten natanko tedaj, ko je generiran z idempotentom.

Za implikacijo v desno preprosto uporabimo dejstvo, da je produkt idealov generiran s produkti generatorjev. Če je $I = (e)$, kjer je $e^2 = e$, imamo

$$I^2 = I \cdot I = (e \cdot e) = (e^2) = (e) = I.$$

Za implikacijo v levo privzemimo $I^2 = I$ in označimo $I = (a)$. Iz idempotentnosti ideala I sledi enačba $(a^2) = (a)$, iz katere dobimo $a = ra^2$ za neki $r \in R$. Sedaj moramo dokazati naslednje:

- $(a) = (ra)$: Iz $ra \in (a)$ sledi $(ra) \subseteq (a)$. Za nasprotno inkluzijo uporabimo zgoraj dobljeno enačbo.
$$a = ra^2 \implies a = a(ra) \implies a \in (ra) \implies (a) \subseteq (ra).$$
- ra je idempotent: Zopet uporabimo zgoraj dobljeno enačbo.
$$(ra)^2 = r(ra^2) = ra$$

Iz zgornjega sledi, da je $I = (ra)$ generiran z idempotentom.

(b) Dokažimo še, da je ideal, generiran s končno idempotenti, glavni in idempotente. Po točki (a) moramo pokazati, da je tak ideal glavni ter da je generiran z idempotentom. Dokazujemo z indukcijo na število generatorjev n:

- $n = 1$: Sledi direktno iz točke (a).
- $n = 2$: Naj bo $I = (e, f)$ generiran z dvema nilpotentoma. Pokažimo najprej, da je element $e + f - ef$ tudi nilpotent. Res,
$$\begin{aligned}(e+f-ef)^2 &= e^2 + ef - e^2f + fe + f^2 - ef^2 - e^2f - ef^2 + e^2f^2 \\ &= e + ef - ef + ef + f - ef - ef - ef + ef \\ &= e + f - ef.\end{aligned}$$
Domnevamo, da je $I = (e, f) = (e + f - ef)$. Dovolj je izraziti le generatorja:
$$\begin{aligned}e &:= e(e+f-ef) = e^2 + ef - ef = e, \\ f &:= f(e+f-ef) = fe + f^2 - ef = f.\end{aligned}$$
- $n \to n+1$: Naj bo $I = (e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$. Uporabimo indukcijsko predpostavko, da zreduciramo prvih n generatorjev v generator e_0, torej $I = (e_0, e_{n+1})$. Po primeru $n = 2$ željeno sledi.

Nal. 2: Naj bo ideal $\sqrt{I}$ končno generiran. Pokažimo, da obstaja število n_0, za katerefa je $\sqrt{I}^{n_0} \subset I$.

Konkretno označimo $\sqrt{I} = (x_1, \dots, x_N)$, kjer naj velja $x_i^{n_i} \in I$ za neka naravna števila n_i in $i = 1, \dots, N$. Poljuben element $a \in \sqrt{I}$ lahko zapišemo kot

$$a = \Sigma_{i=1}^N a_i x_i.$$

Po multinomski formuli sedaj sledi $a^{n_1+\cdots+n_N} \in I$. Res, označimo $n_0 = n_1 + \cdots n_N$ in si oglejmo

$$a^{n_0} = \Sigma_{k_1+\cdots k_N=n_0} m_{1,\dots,N} \Pi_{i=1}^N x^{k_i},$$

kjer je $m_{1,\dots,N}$ primeren multinomski koeficient. Opazimo, da v primeru $k_i < n_i$ za neki $i \in \{1, \dots, N\}$ mora obstajati $j \in \{1, \dots, N\}$, da je $k_j >= n_j$, saj je vsota potenc $\{k_i\}_{i=1}^N$ konstantna. Od tod sledi, da so vsi členi zgornje vsote vsebovani v I in posledično tudi a^{n_0} vsota. Zato vzamemo $n_0 = n_1 + \cdots n_N$, saj je $\sqrt{I}^{n_0}$ generiran s produkti elementov iz $\sqrt{I}$.

Zakaj je potrebno, da je $\sqrt{I}$ končno generiran?

Vzemimo kolobar $\mathbb{R}$ in si nad njim oglejmo kolobar polinomov s števno spremenljivkami (in seveda še vedno le s končno členi) $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots]$. Naj bo $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ poljubno strogo naraščujoče zaporedje naravnih števil. Oglejmo si ideal $I = (\{x_i^{n_i};\ i \in \mathbb{N}\})$. Za vsako naravno število n_0 obstaja tak indeks $i \in \mathbb{N}$, da je $n_i > n_0$, iz česar sledi, da $\sqrt{I}^{n_0}$ ni podmnožica I, saj $x_i \in \sqrt{I}$ in $x_i^{n_0} \notin I$.

Nal. 3:

- Množica $X_1 = \{(t^3, t^4, t^5);\ t \in K\} \subset \mathbb{A}_K^3$ je očitno definirana s polinomskima enačbama $y^3 - x^4 = 0$ in $z^3 - x^5 = 0$ iz $K[x, y, z]$, zato je $X_1 = V(y^3 - x^4, z^3 - x^5)$.

- Množica $X_2 = \{(\cos x, \sin x), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ je enaka $\mathbb{S}^1$ in zato $X_2 = V(x^2 + y^2 - 1)$.

- Množica $X_3 = \{(\cos x, x), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ ni algebraična množica. Res, privzemimo, da je X_3 algebraična množica, in vzemimo poljuben polinom $f \in I(X_3)$, torej z ničlami v X_3. Upoštevajmo 2π-periodičnost:
$$f(\cos(x + 2\pi k), x + 2\pi k) = f(\cos x, x + 2\pi k) = 0$$
za vsako celo število k. Za vsak $x \in [0, 2\pi)$ (ali celo $\mathbb{R}$) ima torej polinom $f(\cos x, t) \in \mathbb{R}[t]$ neskončno mnogo ničel in je zato po osnovnem izreku algebre ničelni polinom. Od tod sledi $f \equiv 0$. Ker je $f \in I(X_3)$ poljubno izbrana funkcija, nas to vodi v protislovje, saj $X_3 \neq \mathbb{R}^2$.

- Množica $X_4 = \{(e^x, x), x \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ ni algebraična množica po enakem argumentu kot v prejšnji točki. Upoštevamo le $2\pi i$-periodičnost kompleksne eksponentne funkcije, preostanek argumenta je identičen. Protislovje tukaj dobimo zaradi dejstva, da $X_4 \neq \mathbb{C}^2$, saj eksponentna funkcija izpusti kompleksno število 0.