Komutativna algebra - 3. domača naloga

Benjamin Benčina, 27192018

31. marec 2020

Nal. 1:

(a) Naj bosta R, S komutativna kolobarja in M, N R-modula. S homomorfizmom $\phi\colon R \to S$ razširimo skalarje. Pokazali bomo
$$M_S \otimes_S N_S \cong (M \otimes_R N)_S.$$

Najprej si oglejmo, kako razširitev skalarjev sploh deluje. Kolobar S opremimo s strukturo R-modula s pomočjo homomorfizma ϕ na naslednji način:

$$r \cdot s := \phi(r)s.$$

Nato definiramo S-modul M_S s pomočjo tenzorskega produkta $M_S = S \otimes_R M$ z operacijo na enostavnih tenzorjih $s \cdot (s' \otimes m) := (ss') \otimes m$. Enako definiramo S-modul N_S. Opazimo, da velja

$$s \otimes m = s \cdot (1 \otimes m).$$

S-modul $(M \otimes_R N)_S$ je torej definiran kot $(M \otimes_R N)_S := S \otimes_R M \otimes_R N$ z operacijo na enostavnih tenzorjih $s \cdot (s' \otimes m \otimes n) := (ss') \otimes m \otimes n$. Z zgornjo opazko v mislih zato definiramo homomorfizem modulov
$$\varphi\colon M_S \otimes_S N_S \to (M \otimes_R N)_S$$
s predpisom na enostavnih tenzorjih

$$(s_1 \otimes m) \otimes (s_2 \otimes n) \mapsto s_1 s_2 \otimes m \otimes n.$$

Po opazki je predpis dobro definiran, saj

$$(s_1 \otimes m) \otimes (s_2 \otimes n) = (s_1 \otimes m) \otimes s_2 \cdot (1 \otimes n) = s_2 \cdot (s_1 \otimes m) \otimes (1 \otimes n) = (s_1 s_2 \otimes m) \otimes (1 \otimes n).$$

Inverz je sedaj očiten
$$s \otimes m \otimes n \mapsto (s \otimes m) \otimes (1 \otimes n)$$
in dobro definiran po zgornji opazki.

(b) Ali lahko kaj podobnega povemo o omejitvi skalarjev?

Naj bosta M, N tokrat S-modula in $\phi\colon R \to S$ omejitev skalarjev. R-modul $M^R = M$ je definiran z operacijo $r \cdot m := \phi(r) \cdot m$, enako naredimo za N^R. Ali velja

$$M^R \otimes^R N^R \cong (M \otimes_S N)^R?$$

R-modul $(M \otimes_S N)^R = M \otimes_S N$ je definiran z operacijo $r \cdot (m \otimes n) := \phi(r)(m \otimes n)$. Sumimo, da se bo težava pojavila pri dobri definiranosti izomorfizma. Res, naj bo preslikava

$$\varphi\colon M^R \otimes^R N^R \to (M \otimes_S N)^R$$

kandidat za izomorfizem modulov podan s predpisom na enostavnih tenzorjih

$$m \otimes n \mapsto m' \otimes n'.$$

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da se enostavni tenzorji slikajo v enostavne, sicer upoštevamo zahtevo linearnosti. Preverimo, ali je to res homomorfizem modulov:

$$\varphi(r\cdot(m\otimes n))=\varphi(\phi(r)m\otimes n)=\phi(r)m'\otimes n',$$

tukaj pa se pojavi težava. Za preslikavo ϕ namreč nimamo vsaj lokalnega inverza in zato ne moremo izpostaviti skalarja r. Vidimo, da mora biti homomorfizem ϕ injektiven. Res, če je homomorfizem ϕ injektiven, je preslikava φ, definirana s $m\otimes n\to m\otimes n$, izomorfizem modulov.

Nal. 2: Naj bo $I\lhd R$ nilpotenten ideal komutativnega kolobarja R in naj bo n_0 njegova stopnja nilpotentnosti, torej najmanjše naravno število, da je $I^{n_0}=(0)$. Naj bosta M in N poljubna R-modula.

(a) Pokazali bomo, da iz $IM=M$ sledi $M=0$. To enostavno sledi, če privzeto formulo uporabimo n_0-krat:

$$0=I^{n_0}M=I^{n_0-1}(IM)=I^{n_0-1}M=\cdots=IM=M.$$

(b) Pokažimo, da je homomorfizem $\phi\colon N\to M$ surjektiven natanko tedaj, ko je inducirani kvocientni homomorfizem $\overline{\phi}\colon N/IN\to M/IM$ surjektiven.

Implikacija iz leve v desno sledi neposredno iz definicije induciranega homomorfizma (izreki o izomorfizmih).

Obratno, naj bo $\overline{\phi}\colon N/IN\to M/IM$ surjektiven homomorfizem, tj. za vsak $\overline{b}\in M/IM$ obstaja $a\in N$, da je

$$\overline{b}=\overline{\phi}(\overline{a}),$$

kjer je $\overline{a}=a+IN$ in $\overline{b}=b+IM$ za neki $b\in M$. Po definiciji inducirane preslikave je

$$\overline{\phi}(\overline{a})=\overline{\phi(a)}=\phi(a)+IM.$$

Iz obeh enačb sledi $b+IM=\phi(a)+IM$, oziroma ekvivalentno $b-\phi(a)\in IM$. Od tod sledi, da je $b\in\phi(N)+IM$ za vsak $b\in M$, saj je kvocientna projekcija surjektivna.

Sedaj bi radi videli, da lahko I v formuli nadomestimo s katerokoli njegovo potenco, torej da $b\in\phi(N)+I^nM$ za vsako naravno število n. Trditev bomo dokazali z indukcijo. Osnovni primer, kjer $n=1$ je ravno prejšnji argument, zato dokažimo indukcijski korak. Naj bo $b\in\phi(N)+I^nM$. Potem je

$$b=\phi(a)+\Sigma_i\alpha_ic_i,$$

kjer $\alpha_i\in I^n$, $c_i\in M$, vsota pa je končna. Ker je $c_i\in M$, po primeru $n=1$ sledi

$$c_i=\phi(a_i)+\Sigma_{j_i}\beta_{j_i}d_{j_i},$$

kjer $a_i\in N$, $\beta_{j_i}\in I$, $d_{j_i}\in M$, vsota pa je končna. Torej

$$\begin{aligned}b&=\phi(a)+\Sigma_i\alpha_ic_i=\phi(a)+\Sigma_i\alpha_i\Sigma_{j_i}\beta_{j_i}d_{j_i}=\phi(a)+\Sigma_i\alpha_i\phi(a_i)+\Sigma_i\Sigma_{j_i}\alpha_i\beta_{j_i}d_{j_i}\\&=\phi(a)+\Sigma_i\phi(\alpha_ia_i)+\Sigma_i\Sigma_{j_i}(\alpha_i\beta_{j_i})d_{j_i}=\phi\left(a+\Sigma_i\alpha_ia_i\right)+\Sigma_i\Sigma_{j_i}(\alpha_i\beta_{j_i})d_{j_i}.\end{aligned}$$

Ker $\alpha_i\in I^n$ in $\beta_{j_i}\in I$, je $\alpha_i\beta_{j_i}\in I^{n+1}$ in posledično $b\in\phi(N)+I^{n+1}M$.

Ker je I nilpotenten, vstavimo $n=n_0$ in dobimo $b\in\phi(N)$ za vsak $b\in M$, torej je ϕ surjektivna preslikava.

(c) Za konec pokažimo še, da množica $\{m_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ generira M kot R-modul natanko tedaj, ko množica $\{\overline{m_\lambda};\ \lambda\in\Lambda\}$ generira M/IM kot R/I-modul.

Implikacija iz leve v desno sledi direktno iz lastnosti kvocientne preslikave. Vsak element $a\in M$ lahko zapišemo kot končno vsoto $a=\Sigma_\lambda\alpha_\lambda m_\lambda$. Upoštevamo dejstvo, da je kvocientna preslikava surjektivna in vsak element $\overline{a}\in M/IM$ zapišemo kot končno vsoto

$$\overline{a}=a+IM=\Sigma_\lambda\alpha_\lambda m_\lambda+IM=\Sigma_\lambda(\alpha_\lambda m_\lambda+IM)=\Sigma_\lambda(\alpha_\lambda+I)(m_\lambda+IM)=\Sigma_\lambda\overline{\alpha_\lambda}\overline{m_\lambda}.$$

Dokaz obratne implikacije bo zelo podoben dokazu točke (b). Naj množica $\{\overline{m_\lambda};\ \lambda \in \Lambda\}$ generira M/IM kot R/I-modul, torej se da vsak $\overline{a} \in M/IM$ zapisati kot končno vsoto $\overline{a} = \Sigma_\lambda \overline{\alpha_\lambda m_\lambda}$. Upoštevamo definicijo kvocientnega prostora in dobimo

$$a + IM = \Sigma_\lambda \alpha_\lambda m_\lambda + IM \implies a - \Sigma_\lambda \alpha_\lambda m_\lambda \implies a \in \mathrm{Lin}(\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}) + IM,$$

kjer smo z $\mathrm{Lin}(\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\})$ označili prost modul, generiran z množico $\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$. Ker je kvocientna preslikava surjektivna, to velja za vsak $a \in M$.

Z indukcijo dokažimo, da $a \in \mathrm{Lin}(\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}) + I^n M$ za vsak $a \in M$ in $n \in \mathbb{N}$. Primer $n = 1$ je zgoraj, zato nam preostane le še dokaz indukcijskega koraka. Naj bo torej $a \in \mathrm{Lin}(\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}) + I^n M$. Potem se da a zapisati kot

$$a = \Sigma_\lambda \alpha_\lambda m_\lambda + \Sigma_i \beta_i c_i,$$

kjer $\beta_i \in I^n$ in $c_i \in M$. Potem se po primeru $n = 1$ vsak c_i da zapisati kot končno vsoto

$$c_i = \Sigma_{\lambda_i} c_{\lambda_i} m_{\lambda_i} + \Sigma_{j_i} \gamma_{j_i} d_{j_i}.$$

To vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo (z združivijo delov z m_λ)

$$a = \Sigma_\lambda \delta_\lambda m_\lambda + \Sigma_i \Sigma_{j_i} \beta_i \gamma_{j_i} d_{j_i}.$$

Ker je $\beta_i \in I^n$ in $\gamma_{j_i} \in I$, je njun produkt v I^{n+1}. Trditev smo z indukcijo dokazali.

Ker je I nilpotenten ideal, vstavimo $n = n_0$ in dobimo $a \in \mathrm{Lin}(\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\})$. Z drugimi besedami, množica $\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ generira modul M.