Komutativna algebra - 4. domača naloga

Benjamin Benčina, 27192018

7. april 2020

Nal. 1: Naj bo S multiplikativna množica v komutativnem kolobarju R.

(a) Pokažimo, da za vsak ideal $I \lhd R$ velja enakost $\sqrt{(S^{-1}I)} = S^{-1}\sqrt{I}$. Inkluzija iz leve v desno je očitna. Element je $\frac{a}{s} \in \sqrt{(S^{-1}I)}$ natanko tedaj, ko obstaja tako naravno število n, da je $\left(\frac{a}{s}\right)^n \in S^{-1}I$. Ker pa je S multiplikativna množica in je $s^n \in S$, je to natanko tedaj, ko je $a^n \in I$, oziroma $a \in \sqrt{I}$. Imamo torej $\frac{a}{s} \in S^{-1}\sqrt{I}$. Obratno, naj bo $\frac{a}{s} \in S^{-1}\sqrt{I}$. To se zgodi natanko tedaj, ko obstaja neko naravno število n, da je $a^n \in I$. Vendar pa je S multiplikativna množica in od tod sledi, da je $\left(\frac{a}{s}\right)^n \in S^{-1}I$. Po definiciji je $\frac{a}{s} \in \sqrt{(S^{-1}I)}$.

(b) Z indukcijo na število generatorjev bomo pokazali, da za poljuben končno generiran R-modul M velja $\operatorname{Ann}(S^{-1}M) = S^{-1}\operatorname{Ann} M$. Naj bo $M = (m_1)$ modul, generiran z enim elementom. Potem M izomorfen $R/\operatorname{Ann} M$ kot R-modul. Po posledici 5.14b iz predavanj lokalizacija spoštuje kvociente, torej iz prejšnje enačbe sledi

$$S^{-1}M \cong S^{-1}\left(R/\operatorname{Ann} M\right) \cong (S^{-1}R)/(S^{-1}\operatorname{Ann} M).$$

Potem pa je po definiciji anihilatorja $\operatorname{Ann}(S^{-1}M) = S^{-1}\operatorname{Ann} M$. Pred indukcijskim korakom moramo dokazati še nekaj stranskih trditev:

- $\operatorname{Ann}(M+N) = \operatorname{Ann} M \cap \operatorname{Ann} N$: Vsak element $r \in R$, ki uniči elemente vsote modulov $M+N$ uniči tudi elemente vsakega modula posebej, vsak element $r \in R$, ki uniči vsak elemente vsakega modula posebej, pa seveda uniči tudi elemente vsote.
- lokalizacija spoštuje vsote modulov: Posledica 5.14c iz predavanj.
- lokalizacija spoštuje preseke modulov, tj. $S^{-1}(M \cap N) = S^{-1}1M \cap S^{-1}N$: Inkluzija iz leve v desno je očitna iz lasnosti preseka. Za inkluzijo iz desne v levo naj velja $\frac{y}{s} = \frac{z}{t}$ za neke elemente $y \in M$, $z \in N$ in $s, t \in S$. Potem obstaja element $u \in S$, da velja $u(ty - sz) = 0$, torej $w = uty = usz \in M \cap N$. Od tod sledi, da je $\frac{y}{s} = \frac{w}{stu} \in S^{-1}(M \cap N)$. Torej desna inkluzija res velja.

Končno nadaljujemo z indukcijskim korakom. Naj trditev velja za vse končno generirane module, ki imajo število generatorjev manjše ali enako n in naj bo $M = (m_1, m_2, \ldots, m_{n+1})$ modul, generiran z $n+1$ elementi. Potem je $M = M_0 + N$, kjer je $M_0 = (m_1, \ldots, m_n)$ in $N = (m_{n+1})$. Z upoštevanjem zgornjih ugotovitev računamo

$$\begin{aligned} S^{-1}\operatorname{Ann} M &= S^{-1}\operatorname{Ann}(M_0 + N) = S^{-1}(\operatorname{Ann} M_0 \cap \operatorname{Ann} N) \\ &= S^{-1}\operatorname{Ann} M_0 \cap S^{-1}\operatorname{Ann} N = \operatorname{Ann}(S^{-1}M_0) \cap \operatorname{Ann}(S^{-1}N) \\ &= \operatorname{Ann}(S^{-1}M_0 + S^{-1}N) = \operatorname{Ann}(S^{-1}(M_0 + N)) \\ &= \operatorname{Ann}(S^{-1}M) \end{aligned}$$

Nal. 2: Pokažimo, da je $l(X \otimes Y) \leq l(X)l(Y)$. Ločimo nekaj posebnih primerov:

- Eden ali oba od modulov X, Y imata dolžino 0. Brez škode za splošnost $l(X) = 0$. Potem po definiciji $X = 0$ in $0 \otimes Y = 0$. Enačba velja, saj $0 \leq 0$.

- Če nobeden od modulov X, Y nima dolžine 0 in katerikoli od njiju ima dolžino ∞, potem enačba avtomatično velja, saj je v posplošenem smislu karkoli manjše ali enako ∞, tudi ∞.

- Če ima $X \otimes Y$ dolžino 0, enačba avtomatično velja.

- To je prvi netrivialni primer. Recimo, da $l(X), l(Y) < \infty$. Trditev bomo dokazali z indukcijo na dolžino modulov. Najprej naredimo indukcijski korak, da vidimo, kaj bo začetni primer, saj imamo dva modula.

  Oglejmo si poljubno eksaktno zaporedje
  $$0 \to X' \to X \to X'' \to 0.$$
  Za X' in X'' si lahko izberemo na primer jedro in sliko poljubnega neničelnega in neinjektivnega homomorfizma kolobarjev φ z domeno X. Po posledici 4.35 iz predavanj vemo, da je tenzoriranje desno-eksaktno, torej
  $$X' \otimes Y \to X \otimes Y \to x'' \otimes Y \to 0.$$
  Po aditivnosti dolžine l je $l(X) = l(X') + l(X'')$, konkretno je $l(X'), l(X'') < l(X)$. Po indukciji (na dolžino X) je $l(X' \otimes Y) \leq l(X')l(Y)$ in $l(X'' \otimes Y) \leq l(X'')l(Y)$. Na levi strani zaporedja ni 0, torej $X' \otimes Y \to X \otimes Y$ v splošnem ni injektivna, torej
  $$l(X \otimes Y) \leq l(X' \otimes Y) + l(X'' \otimes Y) \leq l(X')l(Y) + l(X'')l(Y) = (l(X') + l(X''))l(Y) = l(X)l(Y).$$
  Opazimo, da enak indukcijski korak deluje tudi, če začnemo z modulom Y. Naš osnovni primer je torej $l(X) = l(Y) = 1$. Naj bo $l(X) = l(Y) = 1$, z drugimi besedami sta X in Y preprosta modula. Najprej trdimo, da je vsak preprost R-modul izomorfen R/M, kjer je M maksimalen ideal. Res, izberimo poljuben neničelen element $m \in M$ in si oglejmo homomorfizem modulov $\phi\colon R \to M$ s predpisom $r \to mr$. Upoštevamo izrek o izomorfizmih za module. Ker je $\operatorname{im}\phi$ podmodul v M in je M preprost, je $im\phi = M$ (očitno ϕ ni ničelen homomorfizem). Po izreku o izomorfizmu je $R/\ker\phi \cong \operatorname{im}\phi = M$. Po korespondenčnem izreku za podmodule ni nobenega podmodula (tukaj ideala) med $\ker\phi$ in R, torej je $\ker\phi$ maksimalen ideal.

  Od tod sledi, da je $X \cong R/M$ in $Y \cong R/N$ za maksimalna ideala M in N. Sedaj trdimo, da je $R/M \otimes_R /N \cong R/(M+N)$. Dokazali bomo s konstrukcijo izomorfizma. Naj bo na osnovnih tenzorjih definirana preslikava modulov $\varphi\colon R/M \otimes_R R/N \to R/(M+N)$ s predpisom
  $$(r+M) \otimes (q+N) \mapsto rq + M + N.$$
  Predpis je tako definiran, ker lahko q iz desnega oklepaja prestavimo v levega. Težava je le dobra definiranost preslikave. Zato naj bo $r + M = r' + M$ in $q + N = q' + N$. Zanima nas, ali $rq + M + N = r'q' + M + N$. Računamo
  $$rq - r'q' + M + N = rq - r'q + r'q - r'q' + M + N = (r - r')q + r'(q - q') + M + N = 0 + M + N.$$
  To preslikavo razširimo do homomorfizma modulov. Njej inverz je očitno $rq + M + N \mapsto (rq + M) \otimes (1 + N)$.

  Imamo torej $X \otimes Y \cong R/M \otimes R/N \cong R/(M+N)$. Upoštevamo, da sta M in N maksimalna ideala, ki sta seveda vsebovana v $M + N$, torej $M + N \in \{M, N, R\}$, od tod pa sledi $X \otimes Y \in \{X, Y, 0\}$. Želena neenačba sledi.

- Edini preostali primer je $l(X \otimes Y) = \infty$ in $0 < l(X), l(Y) < \infty$, ki pa je v protislovju s prejšnjo točko, saj smo posredno dokazali implikacijo $l(X), l(Y) < \infty \implies l(X \otimes Y) \leq l(X)l(Y) < \infty$.