Teorija mere: domača naloga

7. januar 2020

Rešitve ali lepo napišite na papir in oddajte na vajah 14.1. oz. izpitu **22.1.** ali pa preko spletne učilnice (slikajte ali pa stipkajte) do **22.1.** Naloge rešujte samostojno.
Pozor: na izpit se morate prijaviti v VISu.

Odgovore dobro utemeljite!
Veliko uspeha!
Z m označimo Lebesguovo mero, z ζ pa mero štetja. S $\mathcal{P}A$ označimo potenčno množico množice A.

1. Naj bo, za $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [0, \infty)$ in μ_n mera na σ-algebri $\mathcal{A}$. Dokaži, da je $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu_n$ tudi mera na $\mathcal{A}$.

2. Naj bo μ translacijsko invariantna mera (tj. $\mu(\{x + a \mid a \in A\}) = \mu(A)$ za vse $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$) na $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ z $\mu([0, 1)) < \infty$.

   (a) Pokaži, da je za nek $k \in [0, \infty)$
   $$\mu([a, b)) = km([a, b))$$
   za vsa realna števila $a < b$, za katera je $a - b \in \mathbb{Q}$.

   (b) Pokaži, da je $\mu(A) = km(A)$ za vsako omejeno Borelovo množico A.

   (c) Dokaži, da je μ večkratnik Lebesguove mere.

3. Naj bo $m \times \zeta$ ena izmed[1] produktnih mer na $\mathcal{B}_{[0,1]^2}$, tj. taka mera na $\mathcal{B}_{[0,1]^2}$, da velja $(m \times \zeta)(A \times B) = m(A)\zeta(B)$ za vse $A, B \in \mathcal{B}_{[0,1]}$. Z Δ označimo diagonalo $\{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$.

   (a) Pokaži, da je indikatorska funkcija $1_\Delta : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ Borelovo merljiva.

   (b) Izračunaj integrale $\int\int 1_\Delta(x, y)\, dm(x)\, d\zeta(y)$, $\int\int 1_\Delta(x, y)\, d\zeta(y)\, dm(x)$ in $\int 1_\Delta\, d(m \times \zeta)$.

   (c) Katere predpostavke Fubini-Tonellijevega izreka niso izpolnjene?

4. Naj bo $2\mathbb{Z}$ množica sodih celih števil ter λ in μ kompleksna in pozitivna mera na σ-algebri $\mathcal{P}\mathbb{Z}$, podani z
   $$\lambda(A) = \sum_{n\in A} \frac{e^{in^2}}{3^{|n|}}$$
   $$\mu(A) = \sum_{n\in A\cap 2\mathbb{Z}} \frac{1}{(n + 1)^2}$$
   Izrazi totalno variacijo $|\lambda|$, meri λ_a, λ_s iz Lebesguovega razcepa λ glede na μ ter gostoto $\frac{d\lambda_a}{d\mu}$. Izračunaj tudi normo $|\lambda|(\mathbb{Z})$.

5. Naj bo
   $$f : [0, 1]^3 \longrightarrow [0, \infty]$$
   $$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|y-z|}} & \text{če } y \neq z \\ \infty & \text{sicer} \end{cases}$$
   Pokaži, da je $f \in L^1(m_3)$, kjer je m_3 trirazsežna Lebesguova mera.

[1] Ker ζ ni σ-končna na $\mathcal{B}_{[0,1]}$, produktna mera ni nujno enolična.

6. Na prostoru $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m)$ definiramo zaporedje funkcij $f_1 = 1_{[0,1]}$, $f_2 = \sqrt{2}1_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_3 = \sqrt{2}1_{[\frac{1}{2},1]}$ in za $n \in \mathbb{N}$ ter $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$

$$f_{2^n+k} = 2^{\frac{n}{2}} 1_{\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]}.$$

Glede na katere načine (po točkah, skoraj povsod, enakomerno, skoraj enakomerno, po meri) je zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno?