Komutativna algebra - 2. domača naloga

Benjamin Benčina, 27192018

24. marec 2020

Nal. 1:

(a) Pri reševanju naloge bomo uporabili razvojno okolje Macaulay 2 - glej priloženo datoteko *nal1a.m2* (če se je ne da naložiti direktno, kopirajte vrstice eno za drugo). Programu najprej povemo, da bomo delali s kolobarjem racionalnih polinomov v dveh spremenljivkah. Nato definiramo ideal $I = (xy^2 + 2y^2, x^4 - 2x^2 + 1)$ in vnesemo testna polinoma $p = x^4 + 1$ in $q = x^2 - y - 1$. Če želimo, lahko še posebej izračunamo Gröbnerjevo bazo ideala I in si ogledamo njene generatorje. Vemo, da je polinom v idealu I natanko tedaj, ko je njegov ostanek pri deljenju z Gröbnerjevo bazo enak ničelnemu polinomu. Pri obeh polinomih dobimo neničelen ostanek, torej $p, q \notin I$. Enako ponovimo z $J = \sqrt{I}$. V tem primeru ima p neničelen ostanek, ostanek pri q pa je enak 0, torej $p \notin J$ in $q \in J$.

(b) Iščemo vse točke algebraične množice $V := V_{\mathbb{C}}(x^2 + y^2 - z, x^2 + y + z^2, -x + y^2 + z^2)$.

Najprej si množico oglejmo v okolju Macaulay 2 - glej datoteko *nal1b.m2*. Najprej programu povemo, da bomo delali z racionalnimi polinomi v treh spremenljivkah z leksikografsko (Lex) monomsko ureditvijo in vnesemo algebraično množico v obliki ideala $I = (x^2 + y^2 - z, x^2 + y + z^2, -x + y^2 + z^2)$. Ukaz `dim I` vrne vrednost 0, kar pomeni, da je V diskretna množica točk (ne pa npr. krivulja ali ploskev). Ukaz `degree I` nam pove, da je točk najverjetneje 8. Izračunamo Gröbnerjevo bazo ideala I in si ogledamo njene generatorje. Sedaj postane jasno, zakaj smo na začetku vztrajali pri Lex ureditvi monomov. Prvi bazni polinom je polinom le v spremenljivki z, vsak naslednji pa ima največ eno spremenljivko več od prejšnjega. Postopek reševanja je sedaj idejno podoben Gaussovi eliminaciji - najprej bomo rešili prvo enačbo, dobili kandidate za z-koordinato rešitev in nato vstavljali v naslednje enačbe.

Postopek bomo na tem mestu še poenostavili. Iz definicijskih enačb množice V lahko sumimo na neke vrste simetrijo spremenljivk x in z. To zlahka preverimo tako, da v okolju Macaulay 2 v definiciji kolobarja zamenjamo vrstni red spremenljivk x in z. V Gröbnerjevi bazi je na prvem mestu isti polinom, le da je tokrat v spremenljivki x. Spremenljivki x in z svoje vrednosti torej jemljeta iz iste množice rešitev, spremenljivko y pa zlahka izrazimo iz druge definicijske enačbe množice V.

Edini problem je v dejstvu, da je prvi bazni polinom 6. stopnje, konkretno je to polinom

$$p(z) = 8z^6 + 12z^5 + 10z^4 + z^3 - z^2 - 2z.$$

Poskusimo ga zmanjšati. Prva očitna rešitev je $z = 0$ (ta sovpada z očitno rešitvijo sistema $(0, 0, 0)$). S faktorizacijo dobimo polinom 5. stopnje. Na tej točki se spomnimo, da kompleksne rešitve vedno nastopajo v konjugiranih parih. Torej mora nujno obstajati še ena realna rešitev. S pomočjo slike, ki jo naredi Octave (ali Matlab) skripta *slika.m*, uganemo rešitev $z = \frac{1}{2}$. Če to rešitev vstavimo v preostanek baznih polinomov, dobimo še drugo realno rešitev $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, kar lahko razberemo tudi samo s slike. S pomočjo Hornerjevega algoritma faktoriziramo polinom in dobimo polinom 4. stopnje

$$p(z) = 8z^4 + 16z^3 + 18z^2 + 10z + 4.$$

Za polinomske enačbe 4. stopnje končno obstaja splošna rešitev, zato rešimo $p(z) = 0$ v programskem okolju Mathematica ali pa s spletnimi orodji, na primer `https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=dcc8007e03af36a0bd3635b09e4cd5a2`. Dobimo 4 kompleksne rešitve

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1}{4}i(\sqrt{7} - 3i), \\ z_2 &= -\frac{1}{4}i(\sqrt{7} - i), \\ z_3 &= \frac{1}{4}i(\sqrt{7} + 3i), \\ z_4 &= \frac{1}{4}i(\sqrt{7} + i). \end{aligned}$$

Vemo, da ima spremenljivka x isto množico rešitev, spremenljivko y pa lahko izračunamo iz druge definicijske enačbe množice V, zato preverimo vseh 16 možnosti. S skripto *resitve.m* jih lahko preverimo numerično in pričakovano dobimo še preostalih 6 rešitev:

- $(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i)$
- $(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i)$
- $(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i)$
- $(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i, -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i)$
- $(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i)$
- $(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i)$

Da smo res gotovi, dobljene točke vstavimo v definicijske enačbe, ali pa rezultate preverimo še simbolno z Mathematico.

Nal. 2:

(a) Naj bo I poljuben pravi ideal kolobarja R. Želimo pokazati, da obstaja minimalni praideal P nad I, tj. tak praideal P, ki vsebuje I, da ne obstaja noben praideal Q, za katerega velja $I \subset Q \subsetneq P$. V dokazu bomo "navzdol"uporabili Zornovo lemo.

Označimo z Λ družino vseh praidealov kolobarja R, ki vsebujejo I. Ker je vsak pravi ideal vsebovan v nekem maksimalnem idealu, vsak maksimalen ideal pa je praideal, družina Λ ni prazna. Družino Λ sedaj delno uredimo z obratno vsebovanostjo, torej $P \leq Q \iff P \supseteq Q$, kjer sta $P, Q \in \Lambda$. Vzemimo poljubno linearno urejeno poddružino $C \subseteq \Lambda$ in si oglejmo

$$Q = \bigcap_{P \in C} P.$$

Očitno $I \subseteq Q$. Trdimo, da je Q praideal. Podtrditev dokažimo s protislovjem.

Recimo, da Q ni praideal kolobarja R. Potem obstajata elementa $x, y \in R$, da je $xy \in Q$, vendar $x \notin Q$ in $y \notin Q$. Po definiciji preseka obstajata praideala $P, P' \in C$, da $x \notin P$ in $y \notin P'$. Brez škode za splošnost privzamemo $P \subseteq P'$, saj je poddružina C linearno urejena. Od tod sledi $x, y \notin P'$, vendar pa je P' praideal, zato $xy \notin P'$ in posledično $xy \notin Q$, kar vodi v protislovje.

Ker je Q pradideal, ki vsebuje I, je $Q \in \Lambda$. Očitno je Q zgornja meja poddružine C glede na obratno urejenost, saj po definiciji preseka za vsak $P \in C$ velja $Q \subseteq P$. Ker je bila poddružina C poljubno izbrana, to velja za vsako linearno urejeno poddružino v Λ. Po Zornovi lemi Λ vsebuje maksimalen element, ki je po definiciji obratne vsebovanosti minimalni praideal nad I.

(b) Pri iskanju minimalnih praidealov nad $I = (x^2y, xy^2) \lhd \mathbb{Q}[x, y]$ si bomo spet pomagali z okoljem Macaulay 2 - glej priloženo datoteko *nal2b.m2*. Najprej okolju povemo, da bomo delali s kolobarjem racionalnih polinomov v dveh spremenljivkah in definiramo ideal I. Nato nam ukaz `minimalPrimes I` vrne seznam dveh minimalnih praidealov nad I: (x) in (y).

Opomba: V tem primeru lahko minimalne praideale najdemo hitro tudi brez računalnika. Ker smo v kolobarju polinomov z racionalnimi koeficienti, so edini pravi ideali, ki vsebujejo ideal I, naslednji: $(x), (y), (x, y), (xy)$ (jasno je, da $(x, xy) = (x)$, $(ax) = (x)$ ipd.). Po inkluziji preverimo od najmanjših do največjih. Ideal (xy) ne more biti praideal, saj $xy \in (xy)$, vendar $x, y \notin (xy)$. Ideal (x) je praideal, saj če $fg \in (x)$, polinom fg nujno v vseh členih vsebuje spremenljivko x, torej jo mora vsebovati tudi najmanj eden od polinomov f in g. Podoben premislek velja za (y). Jasno je $(x), (y) \subset (x, y)$, zato nas ideal (x, y) ne zanima. Dobili smo isti rezultat kot zgoraj.