Komutativna algebra - 6. domača naloga

Benjamin Benčina, 27192018

20. april 2020

Nal. 1: Naj bo M R-modul in $\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} \subset M$ neka podmnožica. Pokažimo, da ta množica generira modul M natanko tedaj, ko njena slika $\{\frac{m_\lambda}{1};\ \lambda \in \Lambda\}$ generira $R_{\mathbf{m}}$-modul $M_{\mathbf{m}}$ za vsak $\mathbf{m} \in \operatorname{mSpec} R$.

Najprej privzemimo $m = \Sigma_{i=1}^n r_i m_i$ in računajmo

$$\frac{m}{s} = \frac{\Sigma_{i=1}^n r_i m_i}{s} = \frac{s^{n-1}}{s^{n-1}} \frac{\Sigma_{i=1}^n r_i m_i}{s} = \frac{\Sigma_{i=1}^n s^{n-1} r_i m_i}{s^n} = \Sigma_{i=1}^n \frac{r_i m_i}{s} = \Sigma_{i=1}^n \frac{r_i}{s} \frac{m_i}{1}.$$

Ta stranski račun nam je že pokaza implikacijo iz leve v desno. Sedaj pokažimo ekvivalenco. Modul, generiran z množico A, bo označen z $\operatorname{Lin} A$.

Ker je $\operatorname{Lin}\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} \leq M$, bo enakost veljala natanko tedaj, ko bo kvocient $M/\operatorname{Lin}\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} = 0$. Po trditvi 5.16 iz predavanj, je to res natanko tedaj, ko za vsak $\mathbf{m} \in \operatorname{mSpec} R$ velja $(M/\operatorname{Lin}\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\})_{\mathbf{m}} = 0$. Seveda pa je lokalizacija kvocienta kar kvocient lokalizacij, zato bo to veljalo natanko tedaj, ko bo $M_{\mathbf{m}} = (\operatorname{Lin}\{m_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\})_{\mathbf{m}}$. Množica na desni, je po prejšnjem stranskem računu enaka $\operatorname{Lin}\{\frac{m_\lambda}{1};\ \lambda \in \Lambda\}$ (stranski račun pokaže vsebovanost v desno, druga vsebovanost je trivialna). S tem je trditev dokazana.

Nal. 2: Naj bo M Noetherski R-modul. Pokažimo, ekvivalence.

Privzemimo (a). Ker je M Noetherski s končno dolžino, je po trditvi 6.7 Artiniski. Modul $R/\operatorname{Ann} M$ je njegov podmodul, zato je po ekzaktnosti tudi Artiniski. S tem smo dokazali točko (d). Od tukaj nadaljujemo. Ker je $R/\operatorname{Ann} M$ Artiniski, po trditvi 6.11a iz predavanj obstajajo $P_1, \ldots, P_n \in \operatorname{mSpec}(R/\operatorname{Ann} M)$, da je produkt $P_1 \cdots P_n = (0)$. Ko naredimo kontrakcijo s kvocientno preslikavo $q\colon R \to R/\operatorname{Ann} M$, dobimo končen produkt maksimalnih idealov $q^{-1}(P_1) \cdot q^{-1}(P_n) \subseteq \operatorname{Ann} M$. S tem smo dokazali točko (b). Sedaj smo spomnimo, da smo pri dokazu trditve 6.11b zares potrebovali le trditev 6.11a Torej iz (b) sledi, da $\operatorname{Spec}(R/\operatorname{Ann} M) = \operatorname{mSpec}(R/\operatorname{Ann} M)$. Kontrakcija s kvocientno preslikavo q dokaže še točko (c). (Trenutno shema je (a) $\implies$ (d) $\implies$ (b) $\implies$ (c)). Ker je $R/\operatorname{Ann} M$ Noetherski kot podmodul v M, po 6.12 (Hopkinsov izrek) iz (c) sledi (d). (Trenutno shema je (a) $\implies$ (d) $\iff$ (b) $\iff$ (c))

Dokazati moramo le še, da iz katerekoli izmed drugih točk sledi (a). Najlažje bo, če privzamemo (d). Ker je M Noetherski, je po trditvi 6.3c tudi končno generiran R-modul, jasno pa ga lahko ekvivalentno vidimo kot končno generiran $R/\operatorname{Ann} M$ (saj smo le faktorizirali elemente, ki uničijo M). Potem pa je M nek kvocient modula $(R/\operatorname{Ann} M)^n$ za nek $n \in \mathbb{N}$, ki pa je Artinski, saj je Artinski tudi modul $(R/\operatorname{Ann} M)^n$ kot končna vsota po predpostavki Artinskih modulov (trditev 6.6a). Modul M je torej Artinski in po predpostavki Noetherski, zato ima po trditvi 6.7 končno dolžino. To zaključi dokaz ekvivalenc.