Algebraična topologija 1, 2019-20
Izpitna domača naloga

16. 2. 2020 **Rok oddaje je 23. 8. 2020**

Navodila

Naloge so točkovane takole:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
39	36	27	25	20	20	20	20	30

Lestvica za ocene je linearna: 50 točk je ocena 6 in 90 točk je ocena 10. Pri tem x točk za oceno pomeni vsaj $x/2$ točk iz nalog 1–3 in vsaj $x/2$ točk iz nalog 4–9. Naloge 3.a, 3.b, 3.c so obvezne.

Naloge rešujte samostojno. Pri reševanju si lahko pomagate z dostopno literaturo. Morebitnih daljših razprav iz literature ne prepisujte, ampak namesto tega navedite vir. Seveda se razume, da citirane dele literature obvladate in ste jih na poziv sposobni razložiti. V vsakem primeru „instant" rešitev ne iščite predolgo, ampak se nalog lotite sami. Če obtičite in potrebujete pomoč, se seveda lahko oglasite.

Kljub skrbnemu sestavljanju se skoraj vedno najdejo pomanjkljivosti ali celo napake. Če katero najdete, sporočite. Veliko zabave in uspeha!

J. Smrekar in A. Vavpetič

Naloge

$\boxed{1}$ Naj bo V vektorski prostor in naj bosta A in B podmnožici v V. Linearni (ali tudi geometrični) spoj množic A in B je unija daljic med vsako točko iz A in vsako točko iz B, s simboli:

$$A * B = \{(1-t)a + tb \,|\, a \in A,\, b \in B,\, t \in [0,1]\}\,.$$

Naj bo $[a,b] = \{(1-t)a + tb \,|\, t \in [0,1]\}$. Pravimo, da sta disjunktni množici A in B spojljivi, če za $(a,b),(a',b') \in A \times B$ iz $(a,b) \neq (a',b')$ sledi, da se daljici $[a,b]$ in $[a',b']$ sekata kvečjemu v krajiščih.

Za števno družino množic $A_i \subset V$, $i \in \mathbb{N}$, definiramo spoj $*_{i=1}^{\infty} A_i$ kot množico vseh konveksnih kombinacij $\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i$, kjer so $a_i \in A_i$ in za $t_i \in [0,1]$ velja, da je $t_i > 0$ za končno množico indeksov i in da velja $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$. Pravimo, da je družina $\{A_i\}$ spojljiva, če enakost $\sum_i t_i a_i = \sum_i s_i b_i$ velja natanko tedaj, ko
(1) $t_i = s_i$ za vse i,
(2) $a_i = b_i$ vselej, ko je $t_i = s_i > 0$.

Naj bo G grupa in naj bo $\mathcal{L}in(G)$ realen vektorski prostor z (abstraktno) bazo G. Dalje naj bo $V = \oplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}in(G)$ direktna vsota števno mnogo kopij prostora $\mathcal{L}in(G)$. Če z G_i označimo kopijo množice G v i-tem prostoru $\mathcal{L}in(G)$, je seveda $V \equiv \mathcal{L}in\left(\coprod_{i=1}^{\infty} G_i\right)$. Opremimo vsak končno razsežen realen vektorski prostor z običajno topologijo, V pa opremimo s šibko topologijo glede na družino končno razsežnih podprostorov.

Naj bo prostor

$$EG = \mathop{*}_{i=1}^{\infty} G_i$$

opremljen s topologijo podprostora v V. Njegove elemente označimo $\sum_{i=1}^{\infty} t_i g_i$, kjer $g_i \in G_i$.

a. Pokaži, da je množica $\coprod_{i=1}^{\infty} G_i$ (s topologijo podprostora v V) diskretna.

b. Pokaži, da je družina $\{G_i\}$ spojljiva.

c. Identificiraj prostor $E\mathbb{Z}_2$, kjer je $\mathbb{Z}_2$ grupa z dvema elementoma.

d. Dokaži, da je prostor EG zaprt v V.

e. Naj bodo $1 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_n < \infty$ različni indeksi in naj bo $g_{i_k} \in G_{i_k}$ poljubna $(n+1)$-terica. Definirajmo n-celico

$$e(i_0, i_1, \ldots, i_n; g_{i_0}, \ldots, g_{i_n}) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} t_{i_k} g_{i_k} \,\middle|\, \forall k : t_{i_k} > 0,\, \sum_{k=0}^{n} t_{i_k} = 1 \right\} \subset EG$$

z zaprtjem $[g_{i_0}, g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}]^{i_0,\ldots,i_n}$. Dokaži, da ima EG šibko topologijo glede na družino množic $[g_{i_0}, g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}]^{i_0,\ldots,i_n}$.

f. Pokaži, da je s predpisom $\tau_j(\sum_{i=1}^{\infty} t_i g_i) = t_j$ definirana zvezna preslikava $EG \to [0,1]$.

g. Naj bo $S_j = \tau_j^{-1}\big((0,1]\big)$. Na S_j je dobro definirana preslikava $p_j\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i g_i\right) = g_j$. Pokaži, da je $p_j \colon S_j \to G_j \equiv G$ (kjer ima G diskretno topologijo) zvezna.

h. Dokaži, da ima EG strukturo CW kompleksa, v kateri so odprte celice natanko vse $e(i_0, i_1, \ldots, i_n; g_{i_0}, \ldots, g_{i_n})$.

i. Naj bo $G \times EG \to EG$ preslikava, definirana s predpisom $\left(g, \sum_{i=1}^{\infty} t_i g_i\right) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} t_i (g g_i)$. Prepričaj se, da je to levo delovanje diskretne grupe G na prostor EG.

j. Prepričaj se, da je delovanje G na EG (prosto in) listnato.

k. Prepričaj se, da je delovanje G na EG *celularno*:
  (1) Za vsako odprto celico e in vsak $g \in G$ je $g \cdot e$ (slika množice e pri delovanju z elementom g) spet odprta celica.
  (2) Če za neki $g \in G$ velja $ge = e$, je nujno $g = 1$.

l. Dokaži, da je prostor EG kontraktibilen: pišimo $\sum_i t_i g_i$ kot zaporedje $(t_1 g_1, t_2 g_2, t_3 g_3, \ldots)$. Najprej dokaži obstoj homotopije med preslikavo

$$L \colon (t_1 g_1, t_2 g_2, t_3 g_3, \ldots) \to (0, t_1 g_1, 0, t_2 g_2, 0, t_3 g_3, 0, \ldots)$$

in identično preslikavo. To napraviš v neskončno mnogo korakih; prvi korak je homotopija med L in

$$(t_1 g_1, t_2 g_2, t_3 g_3, \ldots) \to (t_1 g_1, 0, t_2 g_2, 0, t_3 g_3, 0, t_4 g_4, 0, \ldots),$$

drugi korak homotopija med slednjo in

$$(t_1 g_1, t_2 g_2, t_3 g_3, \ldots) \to (t_1 g_1, t_2 g_2, 0, t_3 g_3, 0, t_4 g_4, 0, \ldots).$$

Potem dokaži, da je L homotopna „očitni" konstantni preslikavi.

m. Naj bo grupa G števna. Dokaži, da je tedaj prostor orbit $BG = EG/G$ Hausdorffov in posledično CW kompleks. Pri tem boš potreboval dejstvo, da je kartezični produkt števnih CW kompleksov spet CW kompleks.

$\boxed{2}$ **a.** Naj bo $p\colon E \to B$ krovna projekcija (z nekim tipičnim vlaknom) in naj bo $\emptyset \neq D \subset B$. Zožitev $p|_{p^{-1}(D)}\colon p^{-1}(D) \to D$ je krovna projekcija z istim tipičnim vlaknom.

b. Naj bo prostor B povezan in lokalno s potmi povezan in naj bo $p\colon E \to B$ krovna projekcija (z nekim tipičnim vlaknom). Naj bo C komponenta za povezanost s potmi v E. Dokaži, da je zožitev $p|_C$ krovna projekcija $C \to B$.

c. Naj bo $G \times E \to E$ prosto in listnato delovanje in naj bo $p\colon E \to B$ pripadajoča kvocientna projekcija v prostor orbit $B = E/G$. Naj bo $p(e) = b_0$ in naj bo $\varepsilon_e\colon \pi_1(B, b_0) \to G$ funkcija, definirana z zahtevo $\varepsilon_e([\gamma]) \cdot e = \tilde{\gamma}_e(1)$, kjer je $\gamma\colon [0,1] \to B$ zanka, ki predstavlja $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$ in je $\tilde{\gamma}_e$ tisti dvig poti γ, za katerega velja $\tilde{\gamma}_e(0) = e$.
Dokaži, da je ε_e morfizem grup in da je njegovo jedro enako sliki induciranega morfizma $p_\#\colon \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b_0)$. Dalje dokaži, da če je B povezan s potmi, je E povezan s potmi natanko tedaj, ko je ε_e surjekcija. Če je prostor E enostavno povezan, je ε_e izomorfizem.

d. Naj bosta $p\colon E \to B$ in $f\colon X \to B$ zvezni preslikavi in naj bo

$$X_f\sqcap_p E = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$$

podprostor kartezičnega produkta $X \times E$. (Kadar sta preslikavi f in p jasni iz konteksta, pišemo tudi preprosto $X \sqcap E$.) Dokaži, da je kvadrat

$$\begin{tikzcd} X \sqcap E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

(v katerem sta $\bar{f}$ in $\bar{p}$ zožitvi projekcij) kartezičen („pull-back“) v $\underline{\mathrm{Top}}$.

Če so (X, x_0), (E, e_0) in (B, b_0) prostori z baznimi točkami in velja $f(x_0) = b_0 = p(e_0)$, ima $X \sqcap E$ očitno bazno točko, glede na katero je zgornji diagram kartezičen v $\underline{\mathrm{Top}}^*$.

e. (i) Če je $p\colon E \to B$ krovna projekcija s splošnim vlaknom F, je tudi inducirana preslikava $\bar{p}\colon X \sqcap E \to X$ krovna projekcija s splošnim vlaknom F.

(ii) Če je $G \times E \to E$ (prosto in) listnato delovanje, za katero je $E/G \approx B$ (to pomeni, da projekcija $p\colon E \to B$ inducira homeomorfizem $E/G \to B$), obstaja očitno delovanje G na $X \sqcap E$, glede na katero je $\bar{f}$ ekvivariantna preslikava, ki je (prosto in) listnato in velja $(X \sqcap E)/G \approx X$.

(i-ii) V takih situacijah prostor $X \sqcap E$ standardno (čeprav površno) označimo f^*E. Krovni projekciji $f^*E \to X$ pravimo *povlek* krovne projekcije p vzdolž preslikave f.

f. Naj bo $X^{(n)}$ n-skelet CW kompleksa X in naj bo $f\colon X^{(n)} \to Y$ zvezna preslikava. Privzemimo, da je za vsako število $k \geqslant n$ vsaka zvezna preslikava $S^k \to Y$ homotopna neki konstantni preslikavi. Dokaži, da tedaj obstaja zvezna razširitev preslikave f na ves CW kompleks X.

g. Naj bo X CW kompleks. Dokaži (z eksplicitno strukturo), da je tudi kartezični produkt $X \times [0,1]$ CW kompleks.

h-l. Naj diskretna grupa G deluje prosto in listnato na lokalno s potmi povezan kontraktibilen prostor EG in naj bo $p_G\colon EG \to BG$ pripadajoča krovna projekcija v prostor orbit $BG = EG/G$. Privzemimo še bazni točki $p_G(e_0) = b_0$.

h. Naj bo X povezan in lokalno s potmi povezan in naj bo $x_0 \in X$. Dokaži, da za $f\colon (X, x_0) \to (BG, b_0)$ obstaja (enoličen) dvig $\tilde{f}\colon (X, x_0) \to (EG, e_0)$ natanko tedaj, ko je preslikava f homotopna konstantni preslikavi.

i. Naj bo X povezan CW kompleks. Dokaži, da prireditev $[f] \mapsto \phi \circ f_\#$, kjer je ϕ neki izomorfizem $\pi_1(BG, b_0) \to G$, podaja bijekcijo med množico $[X, BG]_*$ in množico morfizmov grup $\mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), G)$.
Za konstrukcijo zvezne preslikave $X \to BG$ s predpisanim induciranim morfizmom na fundamentalni grupi se boš moral seznaniti s prezentacijo fundamentalne grupe $\pi_1(X, x_0)$ za CW komplekse. Če boš delal brez pomoči literature, se lahko za to konkretno konstrukcijo omejiš na primer končnega CW kompleksa X.

j. Naj bo X povezan CW kompleks z 0-celico x_0 in naj bosta f in g zvezni preslikavi $(X, x_0) \to (BG, b_0)$. Dokaži: Če sta f^*EG in g^*EG izomorfna leva G-prostora (to pomeni, da obstaja ekvivarianten homeomorfizem $\eta\colon f^*EG \to g^*EG$), sta preslikavi f in g prosto homotopni.

k. Naj bo povezan CW kompleks X prostor orbit prostega listnatega delovanja $G \times Y \to Y$. Potem obstaja taka zvezna preslikava $f\colon (X, x_0) \to (BG, b_0)$, da sta Y in f^*EG izomorfna leva G-prostora.

l. Naj bo X povezan CW kompleks in naj bosta f in g zvezni preslikavi $(X, x_0) \to (BG, b_0)$. Če sta f in g prosto homotopni, sta f^*EG in g^*EG izomorfna leva G-prostora.

j-l. Morda bo (vsaj v prvi fazi) lažje obravnavati **povezane** leve G-prostore s prostorom orbit X.

$\boxed{3}$ **a.** V komutativni lestvi R-modulov z eksaktnima vrsticama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] & B_n \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\gamma_n", "\cong"'] & A_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "i'_n"] & B'_n \arrow[r, "j'_n"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

naj bodo γ_n izomorfizmi. Dokaži, da je tedaj zaporedje

$$\cdots \to A_n \xrightarrow{(\alpha_n, -i_n)} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{\langle i'_n, \beta_n \rangle} B'_n \xrightarrow{\partial_n \gamma_n^{-1} j'_n} A_{n-1} \to \ldots$$

eksaktno. (Tu $\langle i'_n, \beta_n \rangle$ elementu (a', b) priredi $i'_n(a') + \beta_n(b)$.)

b-i. Naj bo h_* homološka teorija. *Triada* $(X; A, B)$ je sestavljena iz topološkega prostora X in takih podprostorov A in B, za katera je $A \cup B = X$. Pod pogoji, ki jih zagotavlja aksiom o izrezu, inkluzija $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ inducira izomorfizem $h_*(B, A \cap B) \cong h_*(X, A)$. To se lahko zgodi tudi splošneje; v takem primeru pravimo, da je triada $(X; A, B)$ *izrezna* glede na teorijo h_*.

b. Naj bo $(A \cup B; A, B)$ izrezna triada. Naj bo morfizem $\Delta_n\colon h_n(X) \to h_{n-1}(A \cap B)$ definiran kot kompozitum

$$h_n(X) \to h_n(X, A) \xrightarrow{\cong} h_n(B, A \cap B) \to h_{n-1}(A \cap B),$$

v katerem je prva puščica inducirana z inkluzijo, druga z inverzom izreznega izomorfizma, tretja pa je vezni morfizem eksaktnega zaporedja za par. Dokaži obstoj dolgega eksaktnega zaporedja

$$\cdots \to h_n(A\cap B) \to h_n(A)\oplus h_n(B) \to h_n(A\cup B) \xrightarrow{\Delta_n} h_{n-1}(A\cap B) \to \dots$$

c. Naj bo $A\cup B$ (pravi) podprostor v X in naj bo $(A\cup B; A, B)$ izrezna triada. Naj bo morfizem $\Delta_n\colon h_n(X, A\cup B) \to h_{n-1}(X, A\cap B)$ definiran kot kompozitum

$$h_n(X, A\cup B) \to h_{n-1}(A\cup B, A) \xrightarrow{\cong} h_{n-1}(B, A\cap B) \to h_{n-1}(X, A\cap B),$$

kjer je prva puščica vezni morfizem eksaktnega zaporedja trojice, zadnja pa je inducirana z inkluzijo.
Dokaži obstoj dolgega eksaktnega zaporedja

$$\cdots \to h_n(X, A\cap B) \to h_n(X,A)\oplus h_n(X,B) \to h_n(X, A\cup B) \xrightarrow{\Delta_n} h_{n-1}(X, A\cap B) \to \dots$$

d. Dokaži, da je triada $(X; A, B)$ izrezna glede na h_* natanko tedaj, ko je izrezna triada $(X; B, A)$ in primerjaj pripadajoča morfizma $\Delta_n\colon h_n(A\cup B) \to h_{n-1}(A\cap B)$.

e. Triada $\big(X\times(-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,\infty)\cup A\times\mathbb{R}; X\times(-\infty,-\varepsilon]\cup A\times\mathbb{R}, X\times[\varepsilon,\infty)\cup A\times\mathbb{R}\big)$ je izrezna (glede na vsako h_*).

f. Triada $\big(X\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\cup A\times\mathbb{R}; X\times(-\infty,0)\cup A\times\mathbb{R}, X\times(0,\infty)\cup A\times\mathbb{R}\big)$ je izrezna, če je A odprta v X in obstaja taka zvezna funkcija $\varphi\colon \bar{A} \to [0,1]$, za katero $\varphi(A)\subset(0,1]$ in $\varphi(\text{Meja}\,A) = \{0\}$.

g. Naj bo $J_+ = [\varepsilon,\infty)$ in $J_- = (-\infty,\varepsilon]$ (ali $J_+ = (0,\infty)$ in $J_- = (-\infty,0)$ pri predpostavki iz **f**). Dokaži, da je

$$\Delta_n\colon h_n\big(X\times\mathbb{R}, X\times(J_+\cup J_-)\cup A\times\mathbb{R}\big) \to h_{n-1}(X\times\mathbb{R}, A\times\mathbb{R})$$

izomorfizem.

h. Dokaži, da projekcija $(X\times\mathbb{R}, A\times\mathbb{R}) \to (X,A)$ inducira izomorfizem in da posledično obstaja izomorfizem

$$\sigma\colon h_{n-1}(X,A) \to h_n\big(X\times\mathbb{R}, X\times(J_+\cup J_-)\cup A\times\mathbb{R}\big),$$

ki je funktorialen v (X,A).

i. Identificiraj morfizem $h_n\big(X\times\mathbb{R}, X\times(J_+\cup J_-)\cup A\times\mathbb{R}\big) \to h_n\big(X\times\mathbb{R}, X\times(J_+\cup J_-)\cup A\times\mathbb{R}\big)$, ki ga inducira preslikava $(x,t)\mapsto(x,-t)$ na $X\times\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ Naj bosta p in q tuji si naravni števili. Naj bo $f\colon \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{S}^2_-$ podana s predpisom $f(x,y,z) = (R(x,y), -z)$, kjer je $R\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ rotacija za kot $2\pi\frac{q}{p}$. Naj bo $\sim$ najmanjša ekvivalenčna relacija na $\mathbb{B}^3$, da je $(x,y,z)\sim f(x,y,z)$ za vse $(x,y,z)\in\mathbb{S}^2_+$. Naj bo $L^3(p,q) = \mathbb{B}^3/_\sim$.

a. Pokaži, da je $L^3(p,q)$ mnogoterost.
b. Pokaži, da $L^3(p,q)$ dopušča CW strukturo.
c. Izračunaj fundamentalno grupo $\pi_1(L^3(p,q))$.
d. Izračunaj homološke grupe $H_*(L^3(p,q))$.
e. Za katere p, q je mnogoterost $L^3(p,q)$ orientabilna?

$\boxed{5}$ Naj bo X pravilni dvanajsterec. Za vsako robno ploskev $D\subset\partial X$ naj bo D' njena nasprotna ploskev in $f_D\colon D\to D'$ homeomorfizem, ki je kompozitum rotacije za kot 36^0 okrog zunanje normale na D in translacije. (Preslikava $f_{D'}$ je tako inverz preslikave f_D.) Naj bo $\sim$ najmanjša ekvivalenčna relacija na X, da je $x\sim f_D(x)$ za vse ploskve $D\subset\partial X$ in vse $x\in D$. Naj bo $S = X/_\sim$.

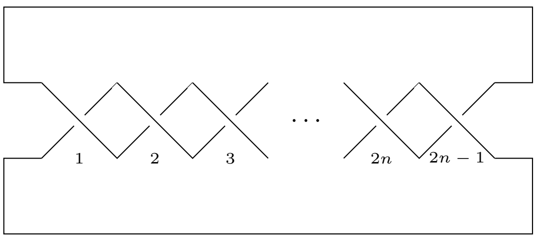
a. Pokaži, da je S mnogoterost.
b. Pokaži, da S dopušča CW strukturo.
c. Izračunaj fundamentalno grupo $\pi_1(S)$ in pokaži, da je netrivialna.
d. Izračunaj homološke grupe $H_*(S)$.

$\boxed{6}$ Naj bo $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

a. Ali obstaja edinka $H \triangleleft G$ lihega indeksa, ki je prosta grupa?
b. Poišči vse podgrupe $H < G$ indeksa 3.
c. Poišči vse podgrupe $H < G$ indeksa 4, ki so proste grupe. Katere so edinke?
d. Poišči edinko v grupi G, ki je prosta grupa in ni končno generirana.

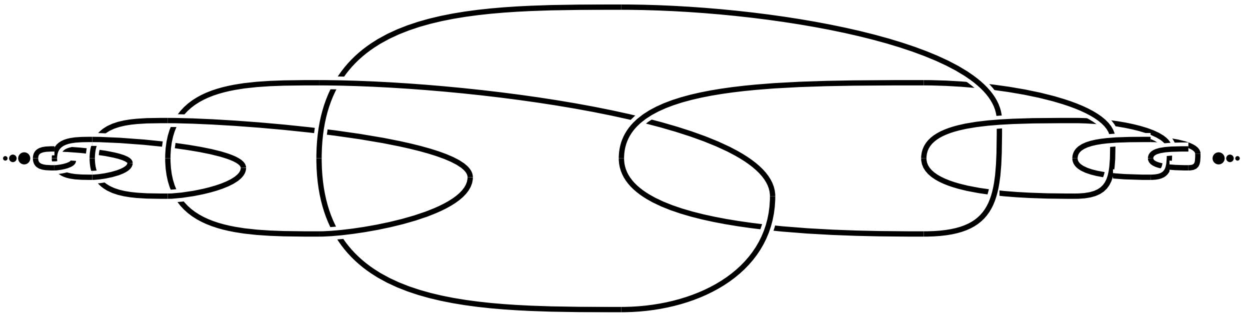
$\boxed{7}$ Naj bo $0\le k\le n$ in naj bo $i\colon \mathbb{I}^k \to \mathbb{S}^n$ vložitev. Pokaži, da za reducirano homologijo velja $\widetilde{H}_*(\mathbb{S}^n\setminus i(\mathbb{I}^k)) = 0$.
(Namig: Nalogo dokaži z indukcijo na k. Poleg tega hiperkocko $\mathbb{I}^k$ zapiši kot unijo dveh kvadrov K_1 in K_2 za katera velja $K_1\cap K_2 = \mathbb{I}^{k-1}\times\{\frac12\}$. Tedaj je $\mathbb{S}^n\setminus i(\mathbb{I}^k) = (\mathbb{S}^n\setminus i(K_1))\cap(\mathbb{S}^n\setminus i(K_2))$.)
(Opomba: Obstaja vložitev i, da je fundamentalna grupa $\pi_1(\mathbb{S}^n\setminus i(\mathbb{I}^k))$ netrivialna; primer je Fox-Artinov lok, vložen v sfero $\mathbb{S}^3$.)

$\boxed{8}$ Izračunaj fundamentalno grupo (komplementa) vozla K_n, ki je prikazan na sliki.



Pokaži, da vozla K_n in K_m nista ekvivalentna za $n\neq m$.

$\boxed{9}$ Izračunaj fundamentalno grupo komplementa Fox-Artinovega loka L (glej sliko). Pokaži, da je $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ netrivialna.



Nasvet: Prostor $\mathbb{R}^3 \setminus L$ zapiši kot unijo $\cup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus L_n)$, kjer je L_n unija loka L in dveh kock (glej sliko).